UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Métodos de sumación

Autor/es

Diego De La Torre Gutiérrez

Director/es

JUAN LUIS VARONA MALUMBRES

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2022-23

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Métodos de sumación

Realizado por:

Diego de la Torre Gutiérrez

Tutelado por:

Juan Luis Varona Malumbres

Logroño, julio de 2023

Métodos de sumación

Autor: Diego de la Torre Gutiérrez

Tutor: Juan Luis Varona Malumbres

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad de La Rioja

Curso académico: 2022/2023

Índice general

Resumen

Este trabajo de fin de grado estudia diversos métodos de sumación utilizados para sumar series infinitas, especialmente aquellas que no se pueden sumar con la definición habitual. Se centra principalmente en los métodos de sumación matriciales, por encontrarse entre ellos varios de los métodos más famosos y utilizados, como los métodos de Hölder y de Cesàro.

En primer lugar introducimos el concepto de método de sumación en general, junto con varios ejemplos y una presentación de sus propiedades más importantes, que estudiaremos luego en los casos particulares.

A continuación nos centramos en los métodos matriciales, comenzado por dar su definición, y mostrando que varios de los ejemplos que habían aparecido de forma natural en el apartado anterior son en realidad métodos matriciales. Partiendo de su definición, damos teoremas generales para estudiar las propiedades de este tipo de métodos, especialmente su regularidad y la comparación de dominios, además de introducir nuevos conceptos como la característica de un método. Después definimos varios tipos de métodos matriciales y utilizamos los teoremas anteriores para estudiar sus propiedades y las relaciones que hay entre ellos.

Para finalizar el apartado de métodos matriciales, demostramos un teorema que pone de manifiesto una importante limitación de los métodos matriciales; es imposible definir un método matricial regular que sea capaz de sumar todas las sucesiones acotadas.

Por último, mostramos otro tipo de métodos distintos de los matriciales, los métodos definidos por series de potencias. Estos métodos no los estudiamos en profundidad, solamente damos su definición y propiedades básicas, buscando simplemente recordar que, a pesar de su importancia, los métodos matriciales son solo un tipo particular de método de sumación.

Palabras clave: Método de sumación, Serie infinita, Sucesión, Métodos de sumación matriciales, Medias de Hölder, Medias de Cesàro, Medias de Nørlung, Métodos de Euler, Teorema de Schur, Métodos definidos por series de potencias, Método de Abel, Métodos de Borel.

Summary

This text examines various summability methods used to sum infinite series, especially those that cannot be summed using the usual definition. It primarily focuses on matrix summability methods, as several of the most famous and commonly used methods, such as Hölder's method and Cesàro's method, fall under this category.

Firstly, we introduce the concept of summability methods in general, along with several examples and an overview of their most important properties, which we will later study in specific cases.

Next, we step into matrix methods, starting with their definition and prooving that several examples that appeared in the previous section are indeed matrix methods. Based on their definition, we present general theorems to study the properties of this type of methods, particularly their regularity and comparison between domains, while also introducing new concepts such as the characteristic of a method. Furthermore, we define various types of matrix methods and use the aforementioned theorems to study their properties and the relationships between them.

To conclude the section on matrix methods, we prove a theorem that highlights an important limitation of matrix methods: it is impossible to define a regular matrix summability method able to sum all bounded sequences.

Finally, we present another type of method distinct from matrix methods, methods defined by power series. We do not delve deeply into the study of these methods; instead, we provide their definition and basic properties, merely aiming to emphasize that, despite their significance, matrix summability methods are just a particular type of summation method.

Keywords: Methods of summability, Infinite series, Sequence, Matrix summability methods, Hölder means, Cesàro means, Nørlung means, Euler methods, Schur's theorem, Power series methods, Abel method, Borel's methods.

Capítulo 1

Introducción

Las sumas de infinitos términos han sido un tema que ha interesado a matemáticos a lo largo de toda la historia de las matemáticas. El propio Arquímedes encontró una forma de darle valor a la serie

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots ,$$

valor que llegó a utilizar para calcular el área encerrada entre una parábola y una de sus cuerdas. Para calcular el valor de esta suma, Arquímedes partió el cuadrado unidad en cuartos de forma reiterada de la siguiente forma (por supuesto, sin utilizar esta notación):

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4^2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &\vdots \\ &= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) + \frac{1}{4^n}. \end{aligned}$$

Arquímedes llegó a la conclusión de que s tenía necesariamente que cumplir $1 = 3s/4$, y por lo tanto $s = 4/3$.

Este cálculo fue realizado mucho antes de que se definiera con rigor la suma de una serie, ni siquiera el concepto de convergencia. No fue hasta la época de Cauchy cuando se empezó a establecer una teoría general de convergencia. A lo largo de este texto vamos a trabajar con series infinitas, así que lo mejor es comenzar dando su definición.

Definición 1.1. Sea $a = (a_n)$ una sucesión. La serie generada por a, y denotada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots ,$$

es el límite de la sucesión de sumas parciales de a, $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$. Si la sucesión (s_n) converge a un valor S, diremos que la serie es convergente y que su suma es S. Si la sucesión de sumas parciales no converge, diremos que la serie es divergente.

Antes de la creación de la teoría de convergencia, los matemáticos trabajaban con una idea intuitiva de la suma de una serie, en vez de con una definición formal. Los resultados que usaban series infinitas se obtenían sin ninguna preocupación por la convergencia, ya que muchas veces podían ser probados de formas alternativas.

Sin embargo, aparecían problemas al tratar de asignar valores a series divergentes. Por ejemplo, si tratamos la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ como una serie convergente de suma s, obtenemos

$$\begin{aligned} s &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Pero podemos obtener también

$$\begin{aligned} s &= 1 - (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 - 0 - 0 - 0 = 1, \end{aligned}$$

lo que nos llevaría a $0 = 1$, lo cual es evidentemente una contradicción. No solo eso, sino que además podemos obtener

$$\begin{aligned} s &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) \\ &= 1 - s, \end{aligned}$$

llegando a la conclusión de que $s = 1/2$. Es evidente, por lo tanto, que tenemos que estudiar con mayor cuidado las series divergentes.

El problema a la hora de encontrar el valor de una serie divergente viene precisamente de la definición. Usando la definición habitual, estas series no tienen ningún valor, ya que la definición solo da valor a las series cuya sucesión de sumas parciales converge. Si queremos encontrar un valor para una de estas series, tenemos que dar una definición de serie infinita que se le pueda aplicar. Este problema viene de la concepción de que los símbolos matemáticos tienen un valor real. Antes de haber dado una definición, una operación no tiene ningún significado.

A lo largo de este texto nos dedicaremos a estudiar definiciones para la suma de una serie que nos permitan sumar series originalmente divergentes. Pero buscaremos también que sean capaces no solo de sumar todas las series que originalmente eran convergentes, sino además sumarlas a su valor original. A estas nuevas definiciones será a lo que llamemos métodos de sumación, y a partir de su definición podremos estudiar sus propiedades y cómo tratar con series divergentes.

En este trabajo veremos múltiples métodos de sumación, junto con sus propiedades básicas. Sin embargo, habrá muchos métodos y propiedades que para no alargarnos demasiado no se podrán llegar a incluir. Para profundizar en mayor medida en el campo de los métodos de sumación es interesante consultar los libros utilizados como fuente en este texto y que aparecen en la bibliografía.

El libro [2], en especial, tiene gran cantidad de ejemplos e historia sobre los métodos y las series que se pretenden sumar. Por otra parte el libro [1] explora en profundidad los métodos matriciales, y en su segunda mitad estudia además los métodos de sumación desde el punto de vista del análisis funcional, mientras que en este trabajo solo se estudian desde el punto de vista del análisis clásico.

Si lo que se busca es estudiar específicamente los métodos de Borel, el libro [5] contiene gran cantidad de información sobre el tema, incluyendo no solo un estudio sobre estos métodos, sino además mostrando sus aplicaciones en otros campos de las matemáticas.

También conviene destacar el libro [3], que estudia, con gran detalle, muchos conceptos y métodos relacionados con la suma de series, y contiene numerosos ejemplos.

Como curiosidad, merece la pena comentar que uno de los matemáticos que ha trabajado en métodos de sumación es el riojano Julio Rey Pastar (véase [4]), aunque aquí no explicaremos ninguno de sus métodos.

Capítulo 2

Conceptos básicos

2.1. Definición y ejemplos de métodos de sumación

Un método de sumación es, simplemente, una forma de asignar un valor a cada serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, al que llamaremos suma de la serie. Una posible manera de hacerlo es definir directamente una función que, para cada sucesión, dé un valor para la suma de la serie. Pero la forma habitual de trabajar es distinta. Nos basamos en la definición estándar de suma de una serie. En ella, llamábamos suma de una serie al límite de la sucesión de sumas parciales.

Buscamos extender esta idea. En vez de calcular el límite de la sucesión de sumas parciales, calcularemos el límite de otra sucesión. Pero esta nueva sucesión no se define directamente, sino que se obtiene a partir de la sucesión de sumas parciales. Lo que haremos será convertir la sucesión de sumas parciales en otra sucesión mediante una función. A esta función la llamaremos **transformación**. Cada transformación definirá entonces un método de sumación. Llamaremos ahora suma de la serie al límite de la sucesión obtenida tras aplicar la transformación a la sucesión de sumas parciales.

Habitualmente, la transformación y el cálculo del límite se agrupan (por composición) en una sola función. Esta nueva función recibe una sucesión (la sucesión de sumas parciales) y devuelve un valor (el límite de la sucesión en la que se ha convertido mediante la transformación). El comportamiento de esta función es similar al comportamiento del límite de una sucesión. Por lo tanto, a esta función se le llama **función límite extendido**. Si estamos trabajando con un método M, a esta función se la denota como M-lím. De esta forma, podemos definir la suma de una serie como el límite extendido de la sucesión de sumas parciales, lo que se parece más a la definición original de suma de una serie.

Vamos a ver ahora ahora un ejemplo sencillo de esta idea, pero primero introducimos algo de notación que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo.

En lo que sigue usaremos ω para denotar el conjunto de todas las sucesiones, c al conjunto de las sucesiones convergentes, c_0 al de sucesiones convergentes a 0 y m al espacio de las sucesiones acotadas. Las sucesiones podrán ser de números reales o complejos; normalmente lo determinará el contexto, y no lo aclararemos si no es necesario. Usaremos $\mathbb{K}$ para denotar $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Siguiendo con la notación, usaremos $\mathbb{N}$ para referirnos a los números naturales sin el 0, y $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Las sucesiones que tomemos estarán normalmente indexadas en $\mathbb{N}^0$, pero no lo indicaremos expresamente a menos que pueda dar lugar a confusión.

Ejemplo 2.1 (Transformación nula)**.** Tomamos como transformación la función

$$\begin{aligned} \emptyset : \omega &\longrightarrow c \\ x &\longmapsto (0, 0, \dots), \end{aligned}$$

es decir, la transformación que a toda sucesión $x = (x_n)$ le asocia la sucesión constante de valor 0. Hemos convertido nuestra sucesión de sumas parciales original en una nueva sucesión. Componiendo esta transformación con la función límite de sucesiones habitual obtenemos la función límite extendido

$$\begin{aligned} \emptyset\text{-}\lim := \lim_{n\to\infty} \circ \emptyset : \omega &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_n) &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

Esta función límite que hemos definido asocia a todas las sucesiones el valor 0. Por lo tanto, para calcular la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, calculamos el límite extendido de la sucesión de sumas parciales, esto es, $\emptyset\text{-}\lim \sum_{i=0}^{n} a_i = 0$. Es decir, el método de sumación obtenido asocia a todas las series el valor 0. Este ejemplo puede parecer trivial, pero la idea de un método nulo aparece de forma natural al considerar la posibilidad de sumar y restar métodos de sumación.

El ejemplo anterior es extremadamente sencillo. Tanto es así que no pone de manifiesto una de las ideas fundamentales de los métodos de sumación, el dominio de un método. Llamaremos **dominio** de un método de sumación al conjunto de sucesiones que tras pasar por la transformación se convierten en sucesión convergentes. Es decir, el dominio de un método será la preimagen de c por la transformación. Desde el punto de vista de las series, diremos que una serie pertenece al dominio de un método si lo hace su sucesión de sumas parciales.

Si una sucesión pertenece al dominio de un método M, diremos que la sucesión es **M-convergente**, y lo denotaremos como $M\text{-}\lim x_n = x$, siendo x el valor que da el método M a la sucesión (x_n). Si la sucesión de sumas parciales de una sucesión es M-convergente, diremos que la serie es **M-sumable**. Lo denotaremos como $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S\ (M)$, siendo S el M-límite de la sucesión de sumas parciales.

Usando la transformación nula, todas las sucesiones se transforman en la sucesión $(0, 0, \dots)$, la cual es convergente, y por lo tanto el dominio de este método concreto es el conjunto de todas las sucesiones.

No hay que confundir el dominio de un método con el dominio de definición de la transformación. Este segundo es el conjunto de todas las sucesiones a las que se les puede aplicar la transformación. Evidentemente el dominio está contenido en el dominio de definición, pero no tiene por que ser necesariamente iguales. El dominio contiene las sucesiones a las que se les puede aplicar el límite, el dominio de definición a las que se le puede aplicar la transformación. Al dominio de definición de la transformación lo llamaremos **dominio de aplicación** del método.

Veamos ahora otro ejemplo usando una transformación diferente.

Ejemplo 2.2. Usamos ahora la transformación

$$\begin{aligned} Z_{1/2} : \omega &\longrightarrow \omega \\ (x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \quad \text{(tomando } x_{-1}=0\text{)}. \end{aligned}$$

A pesar de que el dominio de aplicación es ω, no todas las sucesiones se transforman necesariamente en una sucesión convergente. El dominio del método será

$$c_{Z_{1/2}} := \{x \in \omega \mid Z_{1/2}(x) \in c\} = Z_{1/2}^{-1}(c).$$

La nueva función límite se puede definir solamente sobre el dominio, no sobre todas las sucesiones. Definimos entonces la función

$$\begin{aligned} Z_{1/2}\text{-}\lim := \lim \circ Z_{1/2} : c_{Z_{1/2}} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_n) &\longmapsto \lim \left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right), \end{aligned}$$

que define el método de sumación $Z_{1/2}$. Notemos que, en un pequeño abuso de notación, al método de sumación se le llama igual que a la transformación que lo define. Esto suele ser así en la mayoría de métodos de sumación.

Es obvio además que

$$c \subset c_{Z_{1/2}} \quad \text{y} \quad Z_{1/2}\text{-}\lim x = \lim x,\ \forall x \in c.$$

Es decir, todas las sucesiones convergentes se convierten en sucesiones convergentes tras aplicarles la transformación. Y no solo eso, sino que además convergen al mismo valor al que convergían originalmente. A esta propiedad la llamaremos **regularidad** y es una de las propiedades más importantes que se estudia en los métodos de sumación, ya que los métodos regulares son extensiones del método de sumación estándar.

Notemos además que

$$(1,0,1,0,\dots) \in c_{Z_{1/2}} \quad \text{con} \quad Z_{1/2}\text{-}\lim\,(1,0,1,0,\dots) = \frac{1}{2},$$

ya que al aplicarle la transformación se convierte en la sucesión $(1/2, 1/2, \dots)$, sucesión que es evidentemente convergente con límite $1/2$.

Desde el punto de vista de las sucesiones, diremos que la sucesión $(1,0,1,0,\dots)$ es $Z_{1/2}$-convergente. Por otra parte, diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ es $Z_{1/2}$-sumable, ya que su sucesión de sumas parciales es precisamente $(1,0,1,0,\dots)$. La sucesión $(1,0,1,0,\dots)$ no converge con la definición habitual de límite; sin embargo, usando el método $Z_{1/2}$ sí que converge, dándole el valor $\frac{1}{2}$. Aquí podemos empezar a ver la utilidad de estos métodos de sumación regulares, capaces de dar el valor «correcto» a las sucesiones convergentes, además de dar un nuevo valor a las sucesiones previamente divergentes.

Otro método de sumación de gran interés se obtiene usando la media aritmética.

Ejemplo 2.3 (C_1)**.** Mediante la transformación

$$\begin{aligned} C_1 : \omega &\longrightarrow \omega \\ (x_n) &\longmapsto \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_n \end{aligned}$$

definimos el límite extendido

$$C_1\text{-}\lim := \lim \circ C_1 : c_{C_1} \longrightarrow \mathbb{K}$$

en el dominio

$$c_{C_1} := \{x \in \omega \mid C_1(x) \in c\}.$$

A este método de sumación se le conoce como método de Cesàro de orden 1 (o simplemente método de Cesàro), y será de gran importancia más adelante, pues tanto los métodos de Cesàro como los métodos de Hölder que veremos en el capítulo 3 aparecen como extensión suya.

Podemos observar que, al igual que en $Z_{1/2}$, se cumple que

$$(1,0,1,0,\dots) \in c_{C_1} \quad \text{con} \quad C_1\text{-}\lim\,(1,0,1,0,\dots) = \frac{1}{2}.$$

Podemos tomar también $(1,0,-1,1,0,-1,\dots)$. Esta sucesión no convergía con el método $Z_{1/2}$, pero que sí que lo hace para el método C_1, con C_1- lím igual a 0, ya que al pasar por la transformación se convierte en $(1,1/2,0,1/4,1/5,0,\dots)$, sucesión que converge a 0.

Es decir, la sucesión $(1,0,-1,1,0,-1,\dots)$ pertenece al dominio del método C_1 pero no al dominio del método $Z_{1/2}$. Esta diferencia entre dominios de distintos métodos es una de las características que se suele estudiar en los métodos de sumación, la comparación de dominios.

Por ahora sabemos que el dominio de C_1 no es el mismo que el de $Z_{1/2}$; sin embargo aún no hemos comprobado si C_1 es regular. Esto se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *El método C_1 es regular, es decir,*

$$c \subset c_{C_1} \quad y \quad C_1\text{-}\lim x = \lim x,\ \forall x \in c.$$

Demostración. Sea $(a_n) \in c$, con $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \geq N$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N} (a_k - a),$$

existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N} (a_k - a) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geq M$. Tenemos ahora que para todo $n \geq \max(N, M)$ se cumple

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) - a \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (a_k - a) \right| \\
&= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N} (a_k - a) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^{n} (a_k - a) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N} (a_k - a) \right| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - a| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(n-N)}{2(n+1)} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C_1\text{-}\lim = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k = a. \qquad \square$$

Hasta ahora hemos visto métodos de sumación definidos mediante una transformación que convierte sucesiones en sucesiones. Sin embargo, lo importante es convertir la sucesión de sumas parciales en un objeto al que se pueda calcular un límite, no necesariamente en una sucesión. Por lo tanto, otra opción es transformar la sucesión de sumas parciales en una función continua. Esto es lo que hacemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. Sean $D_1 := \{z \in \mathbb{K} \mid |z| < 1\}$ y los espacios

$$C := \Big\{ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{K} \;\Big|\; \lim_{\substack{t\to 1^- \\ t\in D_1\cap\mathbb{R}}} f(t) \text{ existe} \Big\},$$

$$C_A := \Big\{ (x_k) \in \omega \;\Big|\; g(t) := \sum_k x_k t^k \text{ converge para todo } |t| < 1, \\ \text{y } f(t) := (1-t)g(t) \text{ converge} \Big\}.$$

Sea la transformación

$$\begin{aligned} A : C_A &\longrightarrow C \\ (x_n) &\longmapsto f(t) := (1-t)g(t). \end{aligned}$$

Usando esta transformación definimos el límite

$$A\text{-}\lim = \lim_{\substack{t\to 1^- \\ t\in\mathbb{R}}} (1-t) \sum_k x_k t^k.$$

Este método es el denominado método de Abel, y pertenece a un conjunto de métodos llamados métodos definidos por series de potencias. La idea detrás de este método de sumación es la siguiente. Buscamos definir la suma de la serie asociada a la sucesión (x_n) a partir de la serie de potencias auxiliar

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k.$$

Si esta serie converge para $0 \le t < 1$ y $\lim_{t\to 1^-, t\in\mathbb{R}} f(t) = S$, entonces diremos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ es A-sumable. Para poder tratar este método de sumación como los métodos anteriores, que definían la suma de la serie como límite de la sucesión de sumas parciales, usamos el hecho de que $s_k - s_{k-1} = x_k$. Así,

$$\begin{aligned} \sum_k x_k t^k &= \sum_k (s_k - s_{k-1}) t^k = \sum_k s_k t^k - \sum_k s_{k-1} t^k \\ &= \sum_k s_k t^k - \sum_k s_k t^{k+1} = \sum_k s_k t^k - t \sum_k s_k t^k \\ &= (1-t) \sum_k s_k t^k. \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos la definición de A-límite que tenemos que aplicar a la sucesión de las sumas parciales para obtener el método que hemos definido en este ejemplo.

Estudiaremos los métodos definidos por series de potencias en mayor profundidad el el capítulo 4.

A lo largo de los ejemplos anteriores hemos visto varias propiedades que nos interesará estudiar en los métodos de sumación. En la siguiente sección vamos a definirlas de forma más rigurosa.

2.2. Propiedades métodos de sumación

2.2.1. Comparación del dominio de los métodos

Como ya hemos visto, el dominio sobre el que están definidos los distintos métodos de sumación no es siempre el mismo. En ciertos casos nos interesará estudiar cómo están relacionados los dominios de dos métodos concretos.

Definición 2.6. Sean los métodos de sumación V y W, y sean sus dominios N_V y N_W respectivamente. Sea $L \subset \omega$. Si $L \cap N_V \subset N_W$, diremos que V es **más débil que W respecto a L**. Si $L \cap N_W \subset N_V$ diremos que V es **más fuerte que W respecto a L**. Diremos que V y W son **equivalentes respecto a L** si $L \cap N_V = L \cap N_W$. En el caso particular en que $L = \omega$, se omite la terminación «respecto a L», diciendo únicamente **más débil**, **más fuerte** y **equivalente**.

2.2.2. Inclusión de dominios

Otra propiedad de los dominios de los métodos de sumación que nos interesará estudiar es encontrar qué subconjuntos de ω están contenidos en el dominio del método.

Definición 2.7. Sea el método V con dominio N_V. Si se cumple que $c_0 \subset N_V$, diremos que V es **conservativo para sucesiones nulas**. Si $c \subset N_V$ diremos que es **conservativo** y si $m \subset N_V$ diremos que es **coactivo**.

Conviene recalcar que, como $c_0 \subset c \subset m$, cada una de las nociones anteriores es condición más fuerte que la anterior.

2.2.3. Consistencia

Hasta ahora hemos hablado de comparar métodos por su dominio, es decir, comparar qué sucesiones son convergentes para cada uno. Sin embargo, aún falta por nombrar algo quizás más importante, el valor que le asignan a una sucesión. Hemos visto en el ejemplo 2.1 una sucesión cuyo dominio es el conjunto de todas las sucesiones. De forma trivial podemos cambiar la transformación por

$$\begin{aligned} V : \omega &\longrightarrow c \\ x &\longmapsto (1, 1, \dots), \end{aligned}$$

obteniendo así otro método que también está definido en todas las sucesiones, pero que sin embargo asocia a cada sucesión el límite $(1, 1, \dots)$. Por tanto estos dos métodos son equivalentes, pero evidentemente tienen una diferencia importante.

Definición 2.8. Diremos que dos métodos de sumación V y W son **consistentes respecto a** L si se cumple que para todo $x \in L \cap N_V \cap N_W$ se tiene que $V\text{-}\lim x = W\text{-}\lim x$. Si $L = \omega$ diremos solamente que V y W son **consistentes**.

2.2.4. Regularidad

Nos falta por ver una propiedad fundamental para los métodos de sumación. Si queremos dar una definición de límite que extienda la definición habitual, es razonable pedir que en los casos en los que la definición estándar funciona «bien» nuestro método también se pueda aplicar y además converja al mismo valor. En términos de las definiciones que acabamos de ver, queremos que nuestro método sea más fuerte que el método estándar y que sea consistente con él.

Definición 2.9. Sea V un método de sumación. Diremos que V es **regular para sucesiones nulas** si $c_0 \subset N_V$ y $V\text{-}\lim x = 0$ para toda sucesión $x \in c_0$. Diremos que V es **regular** si $c \subset N_V$ y $V\text{-}\lim x = \lim x$ para toda sucesión $x \in c$.

Capítulo 3

Métodos matriciales o transformaciones lineales

3.1. Definición

En este capítulo vamos a tratar uno de los tipos de método de sumación más comunes. Los métodos de este tipo son los conocidos como métodos de sumación matriciales o transformaciones lineales. Este segundo nombre se debe, evidentemente, a la linealidad de las transformaciones que los definen.

Definición 3.1. Sea la matriz infinita

$$A := \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,3} & \cdots & a_{0,k} & \cdots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,0} & a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, y denotamos

$$\omega_A := \Big\{ s = (s_k) \in c \;\Big|\; \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} s_n \Big) \text{ existe, esto es, todas las series } \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} s_n \text{ convergen} \Big\}.$$

A ω_A le llamaremos **dominio de aplicación de** A.

Llamaremos método matricial o transformación lineal al método de sumación inducido por la transformación

$$\begin{aligned} A : \omega_A &\longrightarrow \omega \\ s &\longmapsto t := As, \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} s_n. \tag{3.1}$$

Denotaremos, además,

$$c_A := \{x \in \omega \mid Ax \in c\}.$$

A c_A lo llamaremos **dominio** de A. Con un pequeño abuso de notación estamos llamando A tanto al método de sumación como a la matriz, indistintamente.

Veamos ejemplos de métodos de sumación matriciales.

Ejemplo 3.2. Sea la matriz identidad infinita

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Usando esta matriz obtenemos el método de sumación estándar.

Ejemplo 3.3. Usando la matriz nula se obtiene el mismo método que al usar la transformación nula en el ejemplo 2.1.

Ejemplo 3.4. Usando la denominada «matriz Zweier»

$$Z_{\frac{1}{2}} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

obtenemos el método de sumación $Z_{1/2}$ que definimos en el ejemplo 2.2.

Ejemplo 3.5. Con la matriz

$$C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

obtenemos el método de Cesàro de orden 1 que vimos en el ejemplo 2.3.

Como hemos visto, muchos de los métodos sencillos que han ido apareciendo de forma natural resultan ser métodos matriciales. En el resto de este capítulo vamos a ver teoremas generales para los métodos matriciales, y más adelante los usaremos para estudiar métodos matriciales concretos.

3.2. Teoremas sobre métodos matriciales

Antes de comenzar a introducir teoremas, veamos ahora varios conceptos y notaciones que necesitaremos más adelante.

Definición 3.6. Denotaremos como c_s al conjunto de todas las sucesiones sumables,

$$c_s := \Big\{ x = (x_k) \in \omega \mid \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k \Big) \in c \Big\}.$$

Definición 3.7. Llamaremos l al conjunto de todas las sucesiones absolutamente absolutamente sumables, es decir

$$l := \Big\{ x = (x_k) \in \omega \;\Big|\; \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty \Big\}$$

Definición 3.8. Denotaremos como e la sucesión constante 1, y como e^k la sucesión que tiene un 1 en la posición k y ceros en el resto de términos.

Definición 3.9. Llamaremos χ al conjunto de las sucesiones de ceros y unos

$$\chi = \{ x = (x_k) \in \omega \mid \forall k \in \mathbb{N}^0 : x_k \in \{0,1\} \},$$

y

$$m_0 := \{ x = (x_k) \in \omega \;\big|\; \{x_k \mid k \in \mathbb{N}^0\} \text{ es un conjunto finito.} \}.$$

Llamaremos a una sucesión $x = (x_k) \in \chi$ **fina** si existe una sucesión de índices (k_ν) tal que $x_k = 1$ si y solo si $k = k_\nu$ para algún $\nu \in \mathbb{N}^0$, y se cumple además que $k_{\nu+1} - k_\nu \to \infty$ cuando $\nu \to \infty$. Es decir, una sucesión de ω será fina cuando sus términos de valor 1 se vayan separando al aumentar k. Llamaremos τ al conjunto de todas las sucesiones finas.

Los primeros teoremas que vamos a ver en esta sección están relacionados con la caracterización de los métodos matriciales conservativos y regulares. Veremos que es posible saber si un método es regular a partir únicamente de los coeficientes de su matriz, lo cual nos será de gran utilidad para estudiar métodos matriciales particulares. El primer teorema que presentamos es el teorema que caracteriza los métodos conservativos.

Teorema 3.10. *Sea la matriz infinita $A = (a_{m,n})$. Su método matricial asociado será conservativo si y solo si se dan las siguientes condiciones:*

i) Para cada m se cumple

$$\gamma_m := \sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| \leq H, \tag{3.2}$$

siendo H un número real independiente de m.

ii) Para cada n existe el límite

$$a_{m,n} \to \delta_n \tag{3.3}$$

cuando $m \to \infty$.

iii) Se cumple

$$a_m := \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \to \delta \tag{3.4}$$

cuando $m \to \infty$.

En estas circunstancias se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$ *es absolutamente convergente y*

$$t_m \to t = \delta s + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (s_n - s) = s\Big(\delta - \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n\Big) + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n s_n, \tag{3.5}$$

cuando $m \to \infty$ *y* $s_n \to s$.

En este teorema, los límites δ *y* δ_n *son, por supuesto, finitos.*

Demostración. Probamos primero que las condiciones del teorema son suficientes.

Como $s_n \to s$, la sucesión s_n es acotada, y de (3.2) se sigue que todas las series (3.1) son absolutamente convergentes. Además, las series (3.4) son absolutamente convergentes. Por (3.3) tenemos que

$$\sum_{n=0}^{N} |\delta_n| = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |a_{m,n}| \leq H$$

para todo N, lo cual implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n| \leq H. \tag{3.6}$$

Por tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n s_n$ y el resto de las series en (3.5) son absolutamente convergentes.

Veamos primero lo que ocurre cuando $s = 0$. En este caso podemos elegir $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|s_n| < \frac{\varepsilon}{4H}. \tag{3.7}$$

Ahora,

$$t_m - \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{m,n} - \delta_n) s_n = \sum_{n=0}^{N} (a_{m,n} - \delta_n) s_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_{m,n} - \delta_n) s_n.$$

Denotando

$$U = \sum_{n=0}^{N} (a_{m,n} - \delta_n) s_n, \quad V = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_{m,n} - \delta_n) s_n,$$

por (3.2), (3.6) y (3.7) se tiene que

$$|V| \leq \frac{\varepsilon}{4H} \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_{m,n}| + |\delta_n|) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, $U \to 0$ cuando N es fijo y $m \to \infty$, por (3.3). De esta forma, podemos tomar un $M(\varepsilon, N)$ tal que $|U| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $m \geq M$. Por consiguiente,

$$\Big| t_m - \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} s_n \Big| < \varepsilon$$

para todo $m \geq M$, y
$$t_m \to \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n s_n.$$
Hemos probado que, en el caso $s = 0$, las condiciones (3.2) y (3.3) son suficientes, incluso sin la condición (3.4).

En el caso general tomamos
$$s'_n = s_n - s, \qquad t'_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} s'_n.$$
Así, $s'_n \to 0$ y, por lo tanto,
$$t'_m \to \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n s'_n.$$
Usando ahora (3.4),
$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}(s'_n+s) = t'_m+sa_m \to \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n s'_n+\delta s = s\left(\delta-\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n\right)+\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n s_n = t.$$
Por lo tanto, las condiciones del teorema son suficientes en todos los casos.

Veamos ahora que son necesarias. Suponemos que A es conservativo. Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea la sucesión (s_n) tal que $s_k = 1$ y $s_i = 0$ para todo $i \neq k$. En este caso, $s_n \to \infty$. Entonces $t_m = a_{m,k}$ y, por tanto, $a_{m,k}$ tiende a un límite δ_k cuando $m \to \infty$. Así que (3.3) es una condición necesaria. Sea ahora la sucesión $s_n = 1$ para todo n, de tal forma que $s_n \to 1$. Entonces
$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = a_m,$$
luego a_m tiende a un límite δ. Así, la condición (3.4) es necesaria.

Falta probar que (3.2) es necesaria. Veamos primero que γ_m es finito para todo m. Suponemos que $\gamma_m = \infty$. En este caso podemos elegir una sucesión (ε_n) tal que
$$\varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_n \to 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |c_{m,n}| = \infty.$$
Si tomamos entonces la sucesión $s_n = \varepsilon_n \operatorname{sgn}(a_{m,n})$, tenemos que $s_n \to 0$ y
$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |a_{m,n}| = \infty,$$
lo que contradice la hipótesis.

Por tanto, γ_m es finito para todo m; ahora tenemos que probar que la sucesión (γ_m) es acotada. Si no lo fuera, para un G dado, podríamos encontrar un m tal que $\gamma_m > G$. Denotamos
$$\gamma_{m,n} = \sum_{i=0}^{\infty} |a_{m,i}|$$

y

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} |\delta_i|.$$

Ya sabemos que $\gamma_{m,n} \to \gamma_m$ cuando $n \to \infty$, y que $a_{m,i} \to \delta_i$ (tal que $\gamma_{m,n} \to d_n$) cuando $m \to \infty$.

Partiendo de un n_1 arbitrario construimos dos sucesiones crecientes $n_1, n_2, \ldots$ y $m_1, m_2, m_3, \ldots$ de forma recursiva. Suponiendo que $n_1, n_2, \ldots, n_r$ y $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}$ ya han sido determinados, elegimos n_{r+1} y m_r de la forma siguiente.

Como para todo G existe un m tal que $\gamma_m > G$, podemos elegir $m_r > m_{r-1}$ tal que

$$\gamma_{m_r} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{m_r,n}| > 2rd_{n_r} + r^2 + 2r + 2. \tag{3.8}$$

Como

$$\sum_{n=0}^{n_r} |a_{m,n}| \to \sum_{n=0}^{n_r} |\delta_n| = d_{n_r}$$

cuando $m \to \infty$, podemos suponer también que

$$\gamma_{m_r,n_r} = \sum_{n=0}^{n_r} |a_{m_r,n}| < d_{n_r} + 1. \tag{3.9}$$

Como $\gamma_{m_r,n} \to \gamma_{m_r}$ cuando $n \to \infty$, podemos elegir $n_{r+1} > n_r$ tal que

$$\gamma_{m_r} - \gamma_{m_r,n_{r+1}} = \sum_{n=n_{r+1}+1}^{\infty} |a_{m_r,n}| < 1. \tag{3.10}$$

De (3.8),(3.9) y (3.10) se sigue que

$$\sum_{n=n_r+1}^{n_{r+1}} |a_{m_r,n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{m_r,n}| - \sum_{n=0}^{n_r} |a_{m_r,n}| - \sum_{n=n_{r+1}+1}^{\infty} |a_{m_r,n}| > rd_{n_r} + r^2 + 2r. \tag{3.11}$$

Tomamos ahora la sucesión (s_n) definida mediante

$$s_n = 0 \quad (n \leq n_1), \qquad s_n = \frac{\operatorname{sgn}(a_{m_r,n})}{r} \quad (n_r < n \leq n_{r+1})$$

para $r = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces $|s_n| \leq 1$, $s_n \to 0$ y

$$\begin{aligned} |t_{m_r}| &= \left| \sum_{n=0}^{n_r} a_{m_r,n} s_n + \sum_{n=n_r+1}^{n_{r+1}} a_{m_r,n} s_n + \sum_{n=n_{r+1}}^{\infty} a_{m_r,n} s_n \right| \\ &\geq \left| \sum_{n=0}^{n_r} a_{m_r,n} s_n \right| - \left| \sum_{n=n_r+1}^{n_{r+1}} a_{m_r,n} s_n \right| - \left| \sum_{n=n_{r+1}}^{\infty} a_{m_r,n} s_n \right|. \end{aligned}$$

Usando la definición de (s_n) en el primer sumatorio, la desigualdad triangular en los dos últimos y, aplicando después (3.11),

$$\begin{aligned}
|t_{m_r}| &\geq \left|\sum_{n=0}^{n_r} a_{m_r,n}s_n\right| - \left|\sum_{n=n_r+1}^{n_{r+1}} a_{m_r,n}s_n\right| - \left|\sum_{n=n_{r+1}}^{\infty} a_{m_r,n}s_n\right| \\
&\geq \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{n_r} |a_{m_r,n}| - \sum_{n=n_r+1}^{n_{r+1}} |a_{m_r,n}| - \sum_{n=n_{r+1}}^{\infty} |a_{m_r,n}| \\
&> \frac{1}{r}(rd_{n_r} + r^2 + 2r) - (d_{n_r} + 1) - 1 = r.
\end{aligned}$$

Por tanto, $t \to \infty$ cuando $m \to \infty$ a través de la sucesión (m_r), lo que implica que A no es conservativo. Esta contradicción completa la prueba de que (3.2) es condición necesaria, y con ella la prueba del teorema. $\square$

A continuación presentamos un teorema muy relacionado con en anterior. En este teorema caracterizamos los métodos conservativos para sucesiones nulas. Pese a su indudable interés, aquí no lo demostraremos para no alargarnos demasiado. Su demostración, que no es excesivamente complicada, y usa ideas similares a las de las demostraciones teorema anterior, puede verse en [1, capítulo 2].

Teorema 3.11. *Sea $A = (a_{n,k})$ una matriz infinita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es conservativo para sucesiones nulas.*
2. *$c_0 \subset \omega_A$ y $A(c_0) \subset c$.*
3. *A cumple las condiciones (3.2) y (3.3).*

Si se cumple cualquiera de las anteriores afirmaciones, se cumple que

$$(\delta_k) \in l \quad y \quad A\text{-}\lim x = \sum_k a_k x_k \quad (x = (x_k) \in c_0)$$

A partir del teorema 3.10, sacamos como consecuencia el teorema que nos permite caracterizar las sucesiones regulares.

Teorema 3.12. *Sea el método matricial dado por la matriz infinita $A = (a_{n,k})$. El método A sera regular si y solo si cumplen la condiciones del teorema 3.10 junto con las condiciones adicionales*

$$\delta_n = 0 \quad \textit{para todo } n \tag{3.12}$$

y

$$\delta = 1. \tag{3.13}$$

Demostración. Veamos primero que las condiciones del teorema son suficientes. En efecto, como las condiciones contienen a las del teorema 3.10, podemos usarlo para deducir que el método es conservativo y, además,

$$t_m \to t = \delta s + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (s_n - s).$$

Como $\delta_n = 0$ para todo n y $\delta = 1$, se tiene que

$$t_m \to t = s.$$

La prueba de que las condiciones son necesarias es igual que en el teorema 3.10. De hecho, la prueba de que la condición (3.2) es necesaria es incluso más sencilla, porque $\delta_n = 0$, y por lo tanto $d_n = 0$. □

Definición 3.13. Sea A un método de sumación. Llamaremos **característica** de A al valor

$$\chi(A) := \delta - \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = \lim_n \sum_k a_{n,k} - \sum_k \lim_n a_{n,k} = A\text{-}\lim e - \sum_k A\text{-}\lim e^k,$$

donde e^k es la sucesión que aparece en la definición 3.8.

Por el teorema 3.12, es evidente que un método regular tiene, necesariamente, característica 1.

Definición 3.14. Diremos que un método matricial conservativo A es **corregular** si su característica es distinta de 0. Si es 0 diremos que es **conulo**.

Como la característica de los métodos regulares es 1, siempre son corregulares.

Finalmente, veamos una forma de comparar dominios de métodos matriciales a partir de sus matrices.

Teorema 3.15. *Sean A,B y C tres matrices infinitas con $B = CA$, tales que $(CA)x$ y $C(Ax)$ existen y $(CA)x = C(Ax)$ se cumple para todo $x \in c_A$. Se cumplen entonces los enunciados siguientes:*

1. *Si C es conservativo, entonces B es más fuerte que A.*
2. *Si C es regular, entonces B es más fuerte que A y ambos (A y B) son métodos consistentes.*

Demostración. Si C es conservativo tenemos que, por las condiciones del teorema, $c_A \subset \omega_B$ y $Bx = C(Ax) \in c$ para todo $x \in c_A$. Por tanto, $c_A \subset c_B$. Si tenemos además que C es regular, entonces $B\text{-}\lim x = C\text{-}\lim Ax = A\text{-}\lim x$ para todo $x \in c_A$. □

3.3. Medias de Hölder

En el ejemplo 2.3 vimos el método de sumación C_1. Vimos también en el mismo ejemplo que este método no solo es regular, sino que también es capaz de asignar valor a sucesiones que no son convergentes en el sentido habitual, como por ejemplo las sucesiones $(1, 0, 1, 0, \dots)$ y $(1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots)$. Sin embargo, no es capaz de dar un límite a todas las sucesiones. Por ejemplo, la sucesión $(1, -1, 2, -2, 3 \dots)$ no converge con el método C_1, ya que se transforma en la sucesión $(1, 0, 2/3, 0, 3/4, \dots)$, es decir, la sucesión que para n par vale 0 y para n impar vale $(n + 2)/(2n + 2)$, que es una sucesión no convergente. Pero esta segunda sucesión sí que es C_1-convergente, de límite 1/4. Por lo tanto, aplicando dos veces el método de Cesàro de orden 1 obtenemos un límite. Esta idea de aplicar de forma reiterada el método C_1 es la forma que usan las medias de Hölder para extender el método C_1.

Definición 3.16. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^0$, a la matriz

$$H^\alpha := (C_1)^\alpha \text{ , esto es, } H^0 := I \text{ y } H^\alpha := C_1 H^{\alpha-1} \text{ para } \alpha \geq 1$$

la llamaremos matriz de Hölder de orden α. Al método de sumación matricial asociado lo llamaremos método de Hölder de orden α. Los llamaremos también matriz y método H^α, respectivamente.

Por definición se tiene que el método H^0 es el límite habitual de sucesiones y el método H^1 es el método C_1. Como estos métodos han sido definidos haciendo medias parciales de forma recursiva, se cumple lo siguiente.

Lema 3.17. *Sea $x \in \omega$. Sean $(H_n^\alpha)_n := H^\alpha x$ y $(H_n^{\alpha+1})_n := H^{\alpha+1} x$. Entonces*

$$H_n^{\alpha+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} H_\nu^\alpha.$$

Teorema 3.18. *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^0$, el método $H^{\alpha+1}$ es más fuerte que el método H^α y consistente con él. En particular, H^α es regular.*

Demostración. Como $H^\alpha := C_1 H^{\alpha-1}$ y C_1 es regular, se sigue directamente del teorema 3.15 que el método $H^{\alpha+1}$ es más fuerte que H^α. Al ser $H^1 = C_1$, se tiene que todo H^α es regular. $\square$

El teorema anterior prueba que los métodos de Hölder son más fuertes que el límite habitual. Sin embargo también tienen sus limitaciones. En el siguiente teorema vamos a ver que para cada $\alpha \in \mathbb{N}^0$, el método H^α solo puede sumar sucesiones que sean $o(n^\alpha)$. Es decir, los métodos de Hölder solo darán valor a sucesiones que tengan como mucho un crecimiento polinomial.

Teorema 3.19. *Sea $\alpha \in \mathbb{N}^0$ y sea $x \in c_{H^\alpha}$. Entonces $x = o(n^\alpha)$.*

Demostración. Sea $A := H^\alpha\text{-lím}\, x$. Denotamos $(H_n^\alpha)_n := H^\alpha x$. Se tiene entonces que

$$H_n^\alpha = A + o(1),$$

y, por lo tanto, usando el lema 3.17 tenemos

$$\begin{aligned}
H_n^{\alpha-1} &= (n+1)H_n^\alpha - nH_{n-1}^\alpha = o(n), \\
H_n^{\alpha-2} &= (n+1)H_n^{\alpha-1} - nH_{n-1}^{\alpha-1} = o(n^2), \\
&\vdots \\
x_n = H_n^0 &= (n+1)H_n^1 - nH_{n-1}^1 = o(n^\alpha).
\end{aligned}$$ $\square$

3.4. Medias de Cesàro

Las medias de Cesàro de orden α son, como su nombre indica, otra extensión del método de Cesàro de orden 1. En el caso de las medias de Hölder, se iba aplicando reiteramadente el método C_1 a la sucesión. Como el método C_1 consiste en calcular las medias parciales de la sucesión, lo que hacen los métodos de Hölder es un proceso consistente de sumas y divisiones en cada uno de los pasos. Los métodos de Cesàro toman una aproximación diferente. Lo que hacen es tomar α sumas y hacer al final una sola división. Sea $x = (x_n)$ una sucesión. Definimos iterativamente

$$S_n^0(x) := x_n$$

y

$$S_n^\alpha := \sum_{i=0}^{n} S_i^{\alpha-1}(x) \quad (\text{siendo } \alpha \in \mathbb{N}). \tag{3.14}$$

Sea la matriz infinita

$$\Sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

que tiene ceros por encima de la diagonal y unos desde la diagonal hacia debajo. Si ponemos $\Sigma^0 := I$, entonces $(S_n^0(x))_n = \Sigma^0 x$ y

$$(S_n^\alpha(x))_n = \Sigma(S_n^{\alpha-1})_n =: \Sigma^\alpha x.$$

Buscamos ahora determinar los valores de los coeficientes de la matriz $\Sigma^\alpha x$. Al valor en la posición n, k lo llamaremos $s_{n,k}^{(\alpha)}$. Sea $\Sigma_{-1}^\alpha(x) := 0$. Entonces tenemos que

$$(1-z)\sum_n S_n^\alpha(x) z^n = \sum_n (S_n^\alpha(x) - S_{n-1}^\alpha(x)) z^n = \sum_n S_n^{\alpha-1}(x) z^n.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_n S_n^\alpha(x) z^n &= (1-z)^{-\alpha} \sum_n S_n^0(x) z^n \\ &= (1-z)^{-\alpha} \sum_n x_n z^n \\ &= \sum_\nu \binom{\nu+\alpha-1}{\nu} z^\nu \sum_n x_n z^n \qquad [\text{serie binomial}] \\ &= \sum_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} x_k z^n \qquad [\text{producto de Cauchy}]. \end{aligned}$$

Comparando coeficientes obtenemos

$$S_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} x_k.$$

Definimos entonces

$$s_{n,k}^{(\alpha)} := \binom{n-k+\alpha-1}{n-k}$$

con $n, k \in \mathbb{N}^0$ y $k \leq n$. Así tenemos ya la matriz que hace todas las sumas. Nos falta ahora hacer la división final. Como queremos que el método resultante sea regular, tiene que cumplir la condición del teorema 3.12. En concreto, queremos que la suma de los elementos de cada fila tienda a 1. Veamos cuánto vale la suma de los elementos de una fila. Para poder llevar a cabo el cálculo usaremos la siguiente propiedad.

Lema 3.20. *Sean $n \in \mathbb{N}^0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se cumple entonces que*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+\alpha-1}{k} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Demostración. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos probar esto por inducción en n. Suponemos que se cumple para n. Entonces, en $n+1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+\alpha-1}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k+\alpha-1}{k} + \binom{n+\alpha}{n+1} \\ &= \binom{n+\alpha}{n} + \binom{n+\alpha}{n+1} \\ &= \binom{n+1+\alpha}{n+1}, \end{aligned}$$

y eso concluye la demostración. □

Veamos ahora el valor de la suma de cada fila de la matriz:

$$\sum_{k=0}^{n} s_{nk}^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+\alpha-1}{k} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Para asegurarnos de que la suma de elementos de una fila tiende a 1, dividimos cada elemento de la matriz por la suma de los elementos de su fila. De esta forma no solo aseguramos que esta suma tiende a 1, sino que aseguramos que es 1 para todas las filas. Definimos entonces la matriz $C_\alpha := (c_{n,k}^{(\alpha)})$ con

$$c_{n,k}^{(\alpha)} := \begin{cases} \frac{\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}}{\binom{n+\alpha}{n}} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Nótese que esta definición se puede extender a valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ siempre que $-\alpha \notin \mathbb{N}$. Llamaremos entonces a esta matriz C_α matriz de Cesàro de orden α y su método de sumación matricial asociado le llamaremos método de Cesàro de orden α. Ambos los denotaremos como C_α. Veamos algunos ejemplos para valores de α concretos.

Ejemplo 3.21. Se tiene que $C_0 = I$, y por lo tanto el método de Cesàro de orden 0 es precisamente la forma estándar de sumar sucesiones. Por otra parte, el método de Cesàro de orden 1 es el mismo que vimos en el ejemplo 2.3. Estos dos métodos coinciden con los métodos de Hölder de orden 0 y 1 respectivamente.

Ejemplo 3.22. La matriz del método de Cesàro de orden 2 es la siguiente:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3/6 & 2/6 & 1/6 & 0 & 0 & \dots \\ 4/10 & 3/10 & 2/10 & 1/10 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Como hemos exigido al definirlo, los elementos de cada fila suman 1.

Veamos ahora algunas propiedades básicas de los métodos de Cesàro.

Teorema 3.23. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $-\alpha \notin \mathbb{N}$. El método de Cesàro de orden α es regular si y solo si $\alpha \geq 0$.*

Demostración. Para ver que el método es regular, tenemos que ver que cumple las condiciones del teorema 3.12. La condición (3.13) se cumple por definición. Veamos que se cumple la condición (3.12). Los coeficientes de cada fila están definidos como

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}}{\binom{n+\alpha}{n}} &= \frac{\frac{(n-k+\alpha-1)(n-k+\alpha-2)\ldots\alpha}{(n-k)!}}{\frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)}{n!}} \\ &= \frac{n}{n+\alpha-1}\frac{n-1}{n+\alpha-1-2}\cdots\frac{n-k+1}{n+\alpha-k}\frac{\alpha}{n+\alpha}.\end{aligned}$$

Como el último término tiende a 0, y todos los demás tienden a 1 cuando $n \to \infty$, tenemos que los elementos de una fila tienden a 0 cuando $n \to \infty$, y así se cumple la condición (3.12). Falta ver que se cumple la condición (3.2). Como $\alpha \geq 0$, se tiene que $c_{n,k}^{(\alpha)} \geq 0$. Por lo tanto la condición (3.13) implica la condición (3.2). Al cumplir estas tres condiciones, hemos comprobado que si $\alpha \geq 0$, el método es regular. Ahora hay que probar que si $\alpha < 0$ el método no es regular. Vamos a probar, de hecho, que para $\alpha < 0$ no se cumple la condición (3.2). Esto implica que el método no solo no es regular, sino que tampoco será conservativo. Empezamos probándolo para $-1 < \alpha < 0$. Necesitamos usar que se cumple

$$\binom{n+\alpha}{n} n^{-\alpha} \to \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (n \to \infty, \alpha > -1),$$

donde Γ denota la función gamma. Se tiene además que $\sup_n n^{-\alpha} = \infty$ y $c_{n,n}^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}^{-1}$. Usando todo esto obtenemos que

$$\|C_\alpha\| = \sup_n \sum_k |c_{n,k}^{(\alpha)}| \geq \sup_n |c_{n,n}^{(\alpha)}| = \infty.$$

Por lo tanto C_α no cumple la condición (3.2). Ahora tenemos que probarlo en general, para todo $\alpha < 0$ con $-\alpha \notin \mathbb{N}$. Es suficiente con probar que $\sup_n |c_{n,n}^{(-\nu+\delta)}| = \infty$ por inducción en ν para un $-1 < \delta < 0$ fijado. Acabamos de probar que este hecho se cumple para $\nu = 0$. Si es cierto para ν, entonces también es cierto para $\nu + 1$, ya que

$$c_{n,n}^{(-\nu-1+\delta)} = \frac{1}{\binom{n-\nu+\delta}{n}\frac{\delta-\nu}{n-\nu+\delta}} = c_{n,n}^{(-\nu+\delta)}\left(\frac{\delta-\nu}{n-\nu+\delta}\right)^{-1}$$

y

$$\lim_n \frac{\delta-\nu}{n-\nu+\delta} = 0.$$

De esta forma hemos completado la inducción. □

Para probar la monotonicidad de los métodos de Cesàro necesitaremos usar la siguiente propiedad de los números combinatorios.

Lema 3.24. *Sean $n \in \mathbb{N}^0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se cumple entonces que*

$$\sum_{\nu=k}^{n} \binom{n-\nu+\gamma-1}{n-\nu}\binom{\nu-k+\delta-1}{\nu-k} = \binom{n-k+\gamma+\delta-1}{n-k}.$$

Demostración. Consideramos, para $|t| < 1$, las series de potencias absolutamente convergentes

$$\sum_n \binom{n+\gamma-1}{n} t^n = \frac{1}{(1-t)^\gamma}$$

y

$$\sum_n \binom{n+\delta-1}{n} t^n = \frac{1}{(1-t)^\delta}.$$

Entonces el producto de Cauchy de ambas es absolutamente convergente y obtenemos

$$\frac{1}{(1-t)^{\gamma+\delta}} = \sum_n \left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+\gamma-1}{n-\nu}\binom{\nu+\delta-1}{\nu} \right) t^n.$$

Por otra parte tenemos que

$$\frac{1}{(1-t)^{\gamma+\delta}} = \sum_n \binom{n+\gamma+\delta-1}{n} t^n.$$

Comparando coeficientes obtenemos

$$\binom{n+\gamma+\delta-1}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+\gamma-1}{n-\nu}\binom{\nu+\delta-1}{\nu}$$

Cambiando n por $n-k$ llegamos a

$$\begin{aligned}\binom{n-k+\gamma+\delta-1}{n-k} &= \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n-k-\nu+\gamma-1}{n-k-\nu}\binom{\nu+\delta-1}{\nu} \\ &= \sum_{\nu=k}^{n} \binom{n-\nu+\gamma-1}{n-\nu}\binom{\nu-k+\delta-1}{\nu-k},\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Teorema 3.25. *Para todo $\alpha.\beta \in \mathbb{R}$ tales que $-1 < \alpha \leq \beta$ el método C_β es más fuerte que el método C_α. Además C_α y C_β son consistentes.*

Antes de demostrarlo, merece la pena comentar que, como C_0 es el método estándar de sumación, este teorema es una prueba de la regularidad del método C_α cuando $\alpha \geq 0$.

Demostración. Sean $\alpha.\beta \in \mathbb{R}$ tales que $-1 < \alpha \leq \beta$. Sean $x = (x_k) \in \omega$, $y = (y_\nu) := C_\alpha x$ y $z = (z_r) := C_\beta x$. Vamos a determinar la matriz B tal que $C_\beta = BC_\alpha$. Por definición del método de Cesàro tenemos que

$$y_\nu = \frac{1}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu-k+\alpha-1}{\nu-k} x_k.$$

Usando esto obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu}\binom{\nu+\alpha}{\nu}y_\nu\\
&=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu-k+\alpha-1}{\nu-k}x_k\\
&=\sum_{k=0}^{n}x_k\sum_{\nu=k}^{n}\binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu}\binom{\nu-k+\alpha-1}{\nu-k}.
\end{aligned}$$

Denotamos ahora

$$a_{n,k}:=\sum_{\nu=k}^{n}\binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu}\binom{\nu-k+\alpha-1}{\nu-k},$$

con lo que

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x_k=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu}\binom{\nu+\alpha}{\nu}y_\nu.$$

Buscamos determinar los valores de $a_{n,k}$. Es obvio que $A_{nn}=1$. Usando el lema 3.24 con $\lambda=-\alpha$ y $\delta=\alpha$ obtenemos

$$a_{n,k}=\binom{n-k-\alpha+\alpha-1}{n-k}=0\quad(k<n).$$

De esta forma, tenemos la igualdad

$$x_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu}\binom{\nu+\alpha}{\nu}y_\nu. \tag{3.15}$$

Sea $r\in\mathbb{N}^0$. Buscamos ahora determinar z_r en función de y_ν (con $0\le\nu\le r$) usando la igualdad (3.15):

$$\begin{aligned}
z_r&=\frac{1}{\binom{r+\beta}{r}}\sum_{n=0}^{r}\binom{r-n+\beta-1}{r-n}x_n\\
&=\frac{1}{\binom{r+\beta}{r}}\sum_{n=0}^{r}\binom{r-n+\beta-1}{r-n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu}\binom{\nu+\alpha}{\nu}y_\nu\\
&=\frac{1}{\binom{r+\beta}{r}}\sum_{\nu=0}^{r}\left(\sum_{n=\nu}^{r}\binom{r-n+\beta-1}{r-n}\binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu}\binom{\nu+\alpha}{\nu}y_\nu\right)\\
&=\frac{1}{\binom{r+\beta}{r}}\sum_{\nu=0}^{r}\binom{\nu+\alpha}{\nu}\binom{r-\nu+\beta-\alpha-1}{r-\nu}y_\nu.
\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos vuelto a usar el lema 3.24. La matriz $B=(b_{r,\nu})$ definida por

$$b_{r,\nu}:=\begin{cases}\dfrac{\binom{\nu+\alpha}{\nu}\binom{r-\nu+\beta-\alpha-1}{r-\nu}}{\binom{r+\beta}{r}} & \text{si } \nu\le r,\\ 0 & \text{si } \nu>r\end{cases}\qquad(\nu,r\in\mathbb{N}^0).$$

cumple que $C_\beta = BC_\alpha$, como acabamos de comprobar. Si podemos probar la regularidad del método inducido por la matriz B, podremos usar el teorema 3.15 para asegurar que C_β es más fuerte que C_α y además ambos son consistentes entre sí. Veamos que B es regular usando el teorema 3.12. Obviamente $b_{r,\nu} \geq 0$ $(r,\nu \in \mathbb{N}^0)$, porque $\beta - \alpha \geq 0$ y $\alpha, \beta > -1$. Entonces, para todo $r \in \mathbb{N}^0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_\nu |b_{r,\nu}| &= \sum_{\nu=0}^{r} b_{r,\nu} \\
&= \frac{1}{\binom{r+\beta}{r}} \sum_{\nu=0}^{r} \binom{\nu+\alpha}{\nu}\binom{r-\nu+\beta-\alpha-1}{r-\nu} \\
&= \frac{1}{\binom{r+\beta}{r}} \binom{r-0+\beta-\alpha+(\alpha+1)-1}{r-0} = 1.
\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad hemos usado el lema 3.24 con $n = r$,$k = 0$,$\gamma = \beta - \alpha$ y $\delta = \alpha + 1$. Por lo tanto el método B verifica las condiciones (3.2) y (3.13). Falta por probar que cumple la condición (3.12). Empezamos por $\nu = 0$. Denotando $\gamma = \beta - \alpha - 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
b_{r0} &= \frac{\binom{r+\gamma}{r}}{\binom{r+\beta}{r}} \\
&= \frac{(r+\gamma)(r+\gamma-1)\cdots(\gamma+1)}{(r+\beta)(r+\beta-1)\cdots(\beta+1)} \\
&= \Big(1 - \frac{\beta-\gamma}{r+\beta}\Big)\Big(1 - \frac{\beta-\gamma}{r+\beta-1}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{\beta-\gamma}{\beta+1}\Big).
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad $1 + t \leq e^t$ $(t \in \mathbb{R})$, se deduce que

$$\begin{aligned}
0 \leq b_{r0} &\leq e^{-\frac{\beta-\gamma}{r+\beta}} e^{-\frac{\beta-\gamma}{r+\beta-1}} \cdots e^{-\frac{\beta-\gamma}{\beta+1}} \\
&= \exp\left(-(\beta-\gamma) \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k+\beta} \right) \\
&\to 0 \quad (r \to \infty),
\end{aligned}$$

donde hemos usado $\beta - \gamma = \alpha + 1 > 0$ y $\sum_\nu \frac{1}{\nu+1} \to \infty$. Por lo tanto $(b_{r,0})_r \in c_0$. En el caso $\nu > 0$ y $r \geq \nu$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{b_{r,\nu}}{b_{r,\nu-1}} &= \frac{\binom{r-\nu+\gamma}{r-\nu}}{\binom{r-\nu+1+\gamma}{r-\nu+1}} \frac{\binom{\nu+\alpha}{\nu}}{\binom{\nu-1+\alpha}{\nu-1}} \\
&= \frac{r-\nu+1}{r-\nu+1+\gamma} \frac{\nu+\alpha}{\nu} \to \frac{\nu+\alpha}{\nu} \quad (r \to \infty),
\end{aligned}$$

lo que implica, incluyendo la existencia de los límites, que

$$0 = \lim_r b_{r,0} = \cdots = \lim_r b_{r,\nu-1} = \lim_r b_{r,\nu}.$$

Esta es la condición (3.12), con lo que se cumplen todas las condiciones del teorema 3.12, y el teorema queda probado. □

3.5. Relación entre medias de Cesàro y de Hölder

En las secciones anteriores hemos visto dos formas distintas de extender el método C_1 visto en el ejemplo 2.3. Ambas familias de métodos usan ideas distintos para extenderlo. Ya hemos estudiado las propiedades básicas de ambas familias de métodos, y ya podemos observar las ventajas y desventajas que presentan uno frente al otro.

Como la demostración de los teoremas 3.18 y 3.25 pone de manifiesto, la definición de los métodos H^α hace que la demostración de sus propiedades pueda ser obtenida de forma relativamente sencilla a partir de las propiedades de C_1. Además, los métodos de Hölder tiene la útil propiedad de que el producto de matrices de Hölder es otra matriz de Hölder, mientras que esto no ocurre con las matrices de Cesàro.

Por otra parte los métodos C_α necesitan demostraciones más complicadas. Sin embargo, una consecuencia de la definición de los métodos H^α es que no existe una fórmula para calcular los coeficientes de sus matrices. Los métodos C_α están definidos en función de sus coeficientes, por lo que se puede calcular la matriz de cualquier método solo aplicando la fórmula.

Otra ventaja de los métodos C_α que podemos observar es que están definidos sobre α real, mientras que los H^α están definidos sobre los naturales. Existe sin embargo una forma de extender los métodos de Hölder a los reales que hace desaparecer esta desventaja.

En esta sección veremos que, de hecho, es posible utilizar las ventajas de las dos familias de métodos, ya que los métodos de Cesàro y de Hölder son equivalentes y consistentes entre sí. Por lo tanto, cuando queramos hacer cuentas concretas podremos trabajar con los métodos de Cesàro, y si queremos probar algún teorema puede ser ventajosos pasar al método de Hölder equivalente.

En esta sección nos dedicaremos a probar esta equivalencia entre ambas familias de métodos.

Teorema 3.26 (Knopp). *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ los métodos C_α y $C_{\alpha-1}C_1$ son equivalentes y consistentes.*

Demostración. Para $\alpha = 1$ el teorema es obviamente cierto, ya que $C_0 = I$. Por tanto asumimos $\alpha > 1$. Sea $y = (y_\nu) \in \omega$. Para todo $\beta, n \in \mathbb{N}^0$ definimos $S_n^\beta(y)$ como en (3.14). Usando la fórmula de sumación de Abel obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+\beta)y_\nu &= -\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{\nu} y_k + (n+\beta+1)\sum_{k=0}^{n} y_k \\ &= -\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^1(y) + (n+\beta+1)S_\nu^1(y) \\ &= -S_n^2(y) + (n+\beta+1)S_\nu^1(y).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Definimos además

$$(t_n^{(\beta)}(x)) := C_\beta x \quad (x \in \omega \text{ y } \beta \in \mathbb{N}^0).$$

Como $S_\nu^1(x) = (n+1)t_n^{(1)}(x)$, la identidad (3.16) con $\beta = 1$ y $y = C_1 x$ implica que

$$S_n^2(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) t_\nu^{(1)}(x) = -S_n^2(C_1 x) + (n+2) S_n^1(C_1 x).$$

Aplicando ahora (3.16) para $\beta = 2$ y sumando tenemos

$$\begin{aligned} S_n^3(x) &= \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^2(x) = -\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^2(C_1 x) + \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+2) S_\nu^1(C_1 x) \\ &= -S_n^3(C_1 x) - S_n^3(C_1 x) + (n+3) S_n^2(C_1 x) \\ &= -2S_n^3(C_1 x) + (n+3) S_n^2(C_1 x). \end{aligned}$$

Continuando el proceso de forma iterada obtenemos

$$S_n^\alpha(x) = (-\alpha+1) S_n^\alpha(C_1 x) + (n+\alpha) S_n^{\alpha-1}(C_1 x). \tag{3.17}$$

Dividimos ahora la ecuación (3.17) por $\binom{n+\alpha}{n}$, con lo cual

$$C_\alpha x = (-\alpha+1) C_\alpha(C_1 x) + \alpha C_{\alpha-1}(C_1 x). \tag{3.18}$$

Sea

$$c_{C_{\alpha-1}C_1} = \{x \in \omega \mid C_1 x \in c_{\alpha-1} \subset c_\alpha\}$$

y tomemos $x \in c_{C_{\alpha-1}C_1}$. Entonces, por (3.18) se tiene que $x \in c_{C_\alpha}$ y

$$\begin{aligned} C_\alpha\text{- lím}\, x &= (-\alpha+1) \cdot C_\alpha\text{- lím}\, C_1 x + \alpha \cdot C_{\alpha-1}\text{- lím}\, C_1 x \\ &= (-\alpha+1) \cdot C_{\alpha-1}\text{- lím}\, C_1 x + \alpha \cdot C_{\alpha-1}\text{- lím}\, C_1 x \quad \text{(usando (3.25))} \\ &= C_{\alpha-1}\text{- lím}\, C_1 x = (C_{\alpha-1} C_1)\text{- lím}\, x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $c_{C_{\alpha-1}C_1} \subset c_{C_\alpha}$ se cumple con consistencia.Veamos ahora el contenido inverso. Usando (3.17) y la definición de $S_n^\alpha(x)$ obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} S_n^\alpha(x) &= (-\alpha+1) S_n^\alpha(C_1 x) + (n+\alpha)\big(S_n^\alpha(C_1 x) - S_{n-1}^\alpha(C_1 x)\big) \\ &= (n+1) S_n^\alpha(C_1 x) - (n+\alpha) S_{n-1}^\alpha(C_1 x). \end{aligned}$$

Dividiendo ahora por $\binom{n+\alpha}{n}$ obtenemos

$$t_n^\alpha(x) = (n+1) t_n^\alpha(C_1 x) - n t_{n-1}^\alpha(C_1 x);$$

entonces,

$$\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu^\alpha = (n+1) t_n^\alpha(C_1 x).$$

Esto es,

$$C_1(C_\alpha x) = C_\alpha(C_1 x) = (C_\alpha C_1) x,$$

y por lo tanto $c_{C_\alpha} \subset c_{C_\alpha C_1}$, que es lo que queríamos probar. □

Como corolario de este teorema obtenemos el teorema que nos da la equivalencia de los métodos Cesàro y de Hölder.

Teorema 3.27 (Knopp y Schnee)**.** *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^0$ los métodos C_α y H^α son equivalentes y consistentes.*

Demostración. Vamos a probar este teorema por inducción. En los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ es evidente, ya que $C_0 = H^0 = I$ y $C_1 = H^1$. Suponemos que se cumple para α. Veamos que ocurre en $\alpha + 1$. Usando el teorema 3.26, solo necesitamos probar que $H^{\alpha+1}$ es equivalente a $C_\alpha C_1$. Por la inducción tenemos la identidad

$$\{x \in \omega \mid C_1 x \in c_{H^\alpha}\} = \{x \in \omega \mid C_1 x \in c_{C_\alpha}\}.$$

Como $H^{\alpha+1} = H^\alpha C_1$, se sigue la identidad deseada $c_{H^{\alpha+1}} = c_{C_{\alpha+1}}$. Además, para todo $x \in c_{H^{\alpha+1}}$ se cumple

$$H^{\alpha+1}\text{-}\lim x = H^\alpha\text{-}\lim C_1 x = C_\alpha\text{-}\lim C_1 x = (C_\alpha C_1)\text{-}\lim x,$$

y por lo tanto se sigue la consistencia de $H^{\alpha+1}$ y $C_\alpha C_1$. $\square$

3.6. Medias de Nørlund

En las secciones anteriores hemos visto dos formas de extender el método C_1. En esta sección vamos a ver una generalización de los métodos de Cesàro en general, no solo el de orden uno. Para justificar la definición de los métodos de Nørlund, veamos el comportamiento de los métodos de Cesáro. El método C_1 convierte cada sucesión en la sucesión de sus medias aritméticas parciales. Por otra parte, un método de Cesáro de orden α convierte la sucesión $x = (x_k)$ en la sucesión

$$s_n = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} x_k.$$

Esta sucesión puede verse como una clase de «media», ya que se cumple

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} = \binom{n+\alpha}{n},$$

como vimos al definir las medias de Cesáro. A partir de esta idea de «media» extendida, definimos los métodos de Nørlund.

Definición 3.28. Sea $(p_\nu) \in \omega$ una sucesión tal que $P_n := \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \neq 0$ para todo valor $n \in \mathbb{N}^0$. Tomamos entonces la matriz $N_p := (p_{n,k})$ definida a partir de los coeficientes

$$p_{n,k} := \begin{cases} \frac{p_{n-k}}{P_n} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbb{N}^0).$$

Llamaremos a esta matriz **matriz de Nørlund** para la sucesión p y llamaremos **método de Nørlund** a su método matricial asociado. Veamos unos ejemplos para ilustrar esta definición.

Ejemplo 3.29. Sea la sucesión (p_k) tal que $p_0 = 1$ y $p_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La matriz de Nørlund para esta sucesión es la matriz identidad, es decir, $N_p = I$. Por lo tanto su método de sumación asociado será el límite de sucesiones estándar.

Ejemplo 3.30. Tomamos la sucesión $p = e$, la sucesión constante 1. De esta forma obtenemos la matriz $N_p = N_e = C_1$.

Ejemplo 3.31. Por su definición, los métodos de Nørlund contienen a los métodos de Cesáro. En el ejemplo anterior hemos visto cómo obtener el método C_1 en forma de método de Nørlund. Veamos ahora qué sucesión hay que tomar para definir un método de Cesáro en general. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $-\alpha \notin \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $(p_n) := \binom{n+\alpha-1}{n}$. Entonces el método de Nørlund para esta sucesión es el método C_α.

Ejemplo 3.32. Sea $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Entonces a la matriz

$$Z_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-\alpha & \alpha & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

y a su método matricial asociado los llamaremos Z_α. En el ejemplo 2.2 vimos el método $Z_{1/2}$. Estos métodos son equivalentes a los métodos de Nørlund asociados a las sucesiones $p^\alpha := (p_k^\alpha)$ dadas por $p_0^\alpha := \alpha$, $p_1^\alpha := 1-\alpha$ y $p_n^\alpha := 0$ para el resto de valores de n. Estos métodos vienen dados por las matrices

$$N_{p^\alpha} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-\alpha & \alpha & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix},$$

que son evidentemente equivalentes a las Z_α.

En el resto de la sección mostraremos los resultados más importantes para los métodos de Nørlund, pero no incluiremos las demostraciones por no alargarnos demasiado. El primer resultado importante tiene que ver con la caracterización de la regularidad en esta clase de métodos. Para probarlo se utiliza el teorema 3.12.

Teorema 3.33. *Sean la sucesión $p = (p_k)$ con $P_n := \sum_{\nu=0}^n p_\nu \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^0$ y N_p su método de Nørlund asociado. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *El método N_p es conservativo si y solo si*

$$\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \in c \quad y \quad \sup_n \frac{1}{|P_n|} \sum_{\nu=0}^n |p_\nu| < \infty.$$

- *Si N_p es conservativo, entonces N_p será regular si y solo si $(\frac{p_n}{P_n}) \in c_0$.*

Si N_p es conservativo y $\rho := \text{lím}_n\, p_n/P_n$, entonces $|1-\rho| \leq 1$,

$$\chi(N_p) = 1 - \sum_k \rho(1-\rho)^k = \begin{cases} 1 & si\ \rho = 0, \\ 0 & si\ \rho \neq 0, \end{cases}$$

y

$$N_p\text{-lím} = \chi(N_p) \,\text{lím}\, x + \sum_k \rho(1-\rho)^k x_k.$$

Un tipo de métodos de Nørlund muy importante son los métodos positivos. Diremos que un método de Nørlund es positivo si $p_0 > 0$ y $p_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como corolario inmediato del teorema anterior obtenemos un resultado para métodos de Nørlund positivos.

Corolario 3.34. *Sea N_p un método de Nørlund positivo, entonces N_p será conservativo si y solo si $(\frac{p_n}{P_n}) \in c$, y será regular si y solo si $(\frac{p_n}{P_n}) \in c_0$.*

Como podemos ver con este corolario, es más sencillo trabajar con métodos positivos. Otra razón para el uso de estos métodos frente a métodos de Nørlund en general, es que son consistentes entre sí. Esto es lo que vemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.35. *Sean N_p y N_q dos métodos de Nørlund regulares y positivos. Entonces ambos métodos son consistentes.*

El teorema anterior nos asegura que dos métodos de Nørlund positivos y regulares cualesquiera, asignan el mismo valor a las sucesiones que son convergentes para ambos. Sin embargo no nos dice nada sobre como se relacionan sus dominios. Para poder comparar dominios de de métodos de Nørlund positivos, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.36. *Sean las sucesiones $p = (p_n), q = (q_n) \in \omega$, con $p_0 > 0$, $q_0 > 0$ y $p_n, q_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si estas sucesiones cumplen que $(\frac{p_n}{P_n}) \in c_0$ y $(\frac{q_n}{Q_n}) \in c_0$, entonces existen sucesiones $r = (r_n)$ y $s = (s_n)$ tales que*

$$r * p = q \quad y \quad r * P = Q$$

y

$$s * q = p \quad y \quad s * Q = P.$$

La operación $*$ que aparece en el lema anterior es la convolución de sucesiones. Ahora podemos introducir el teorema de comparación de dominios.

Teorema 3.37. *Sean N_p y N_q dos métodos de Nørlund regulares y positivos asociados a las sucesiones $p = (p_n), q = (q_n) \in \omega$, y sea $r = (r_n)$ el obtenido en el lema 3.36. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *N_q es más fuerte que N_p.*
- *$(\frac{r_n}{Q_n}) \in c_0$ y para todo $n \in \mathbb{N}^0$ existe $M > 0$ tal que*

$$\sum_{k=0}^{n} |r_k| P_{n-k} \leq M Q_n.$$

Usando este teorema, obtenemos como corolario una relación entre los métodos de Nørlund y el método C_1 al que generalizan.

Corolario 3.38. *Sea N_p un método de Nørlund positivo y regular, tal que p sea una sucesión creciente. Entonces N_p es más fuerte que C_1.*

Para terminar la sección vamos a ver un último teorema que nos permite estudiar la equivalencia de métodos de Nørlud.

Teorema 3.39. *Sean N_p y N_q dos métodos de Nørlund regulares y positivos asociados a las sucesiones $p = (p_n), q = (q_n) \in \omega$, y sean $r = (r_n)$ y $s = (s_n)$ los obtenidos en el lema 3.36. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *N_q y N_p son equivalentes.*
- *$r, s \in l$.*

3.7. Métodos de Euler

El último tipo de métodos matriciales que vamos a ver son los métodos de Euler. A diferencia de todos los métodos presentados anteriormente, los métodos de Euler no guardan ninguna relación con el método C_1, sino que extienden el método de Euler. Este método aparece de la siguiente forma.

Supongamos que la serie de potencias $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para valores pequeños de x. Tomamos

$$y = \frac{x}{x+1},$$

de tal forma que $y = 1/2$ se corresponde con $x = 1$. Entonces, para valores pequeños de x e y tenemos que

$$\begin{aligned} xf(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 \frac{y}{1-y} + a_1 \frac{y^2}{(1-y)^2} + a_2 \frac{y^3}{(1-y)^3} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m}{m} y^{k+m+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{n-k} y^{n+1}. \end{aligned}$$

Invirtiendo el orden de sumación obtenemos

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

para valores pequeños de y. Denotamos

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^{n+1}$ converge a s cuando $y \to 1/2$, diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es E-sumable y que su suma es s. El método de sumación obtenido es el conocido como método de Euler.

Como generalización de este método se construyen el resto de métodos de Euler de orden α de la siguiente manera:

Definición 3.40. Sea $\alpha > 0$ y sea la matriz $E^{\alpha} = (c_{n,k})$, dada por

$$c_{n.k} := \begin{cases} \frac{1}{(\alpha+1)^{n+1}} \binom{n+1}{k+1} \alpha^{n-k} & (k \leq n), \\ 0 & (k > n). \end{cases}$$

Al método de sumación dado por dicha matriz se le llama **método de Euler** de orden α, y se denota E^{α}. El método E^1 coincide con el método de Euler E que hemos visto antes.

Veamos ahora algunas propiedades básicas de estos métodos. Sus demostraciones pueden encontrarse en [2, capítulo 8]

Teorema 3.41. *Sea $\alpha > 0$. El método E^α es regular.*

Teorema 3.42. *Sean $r > s > 0$ dos números reales. Entonces el método E^r es más fuerte que y consistente con el método E^s.*

Teorema 3.43. *Sean $r > s > 0$ dos números reales. Aplicarle a una sucesión primero el método E^r y luego el método E^s es lo mismo que aplicarle a la sucesión original el método E^{r+s+rs}.*

3.8. Límitación de los métodos matriciales

Hasta ahora hemos estudiado distintos tipos de métodos matriciales, y hemos visto como se relacionaban sus dominios. En particular, hemos visto que los métodos de Hölder y Cesáro van aumentando su dominio al aumentar su orden. Sin embargo, en el teorema 3.19 vimos que sin importar el orden de un método de Hölder, este solo podrá dar valor a sucesiones de orden polinómico. Esta propiedad también se extiende a los métodos de Cesáro, por la equivalencia entre ambas clases de métodos. Sin embargo, no hemos visto ningún resultado que nos diga que no podemos encontrar un método matricial regular capaz de dar valor a todas las sucesiones, o por lo menos a todas las sucesiones acotadas. En esta sección vamos a presentar un teorema que nos asegura que esto es imposible. No existe ningún método matricial regular que sume todas las sucesiones acotadas. Para llegar a este teorema necesitaremos presentar nuevos conceptos y teoremas, empezando por el concepto de espacio dual.

Definición 3.44. Sea $X \subset \omega$ con $X \neq \emptyset$. Definimos

$$X^\beta := \{t = (t_k) \in \omega \mid \forall x = (x_k) \in X : tx := (t_k x_k)_k \in c_s\}.$$

A X^β le llamaremos **espacio β-dual** de X. Para $y \in \omega$, escribiremos y^β en vez de $\{y\}^\beta$.

A continuación presentamos algunas de sus propiedades básicas.

Teorema 3.45. *Sean $\emptyset \neq X \subset \omega$ y $A = (a_{n,k})$ una matriz infinita. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $X \subset Y \subset \omega \implies Y^\beta \subset X^\beta$.
2. $X \subset (X^\beta)^\beta =: X^{\beta\beta}$.
3. $X \subset \omega_A \iff$ *la serie* $\sum_k a_{n,k}x_k$ *converge para todo* $n \in \mathbb{N}^0$ *y para todo* $x = (x_k) \in X \iff (a_{n,k}) \in X^\beta$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^0$.

Demostración. Todas estas propiedades son consecuencia inmediata de la definición de X^β. □

Usando estas propiedades y la definición, podemos encontrar el espacio dual de varios de los conjuntos de sucesiones con los que trabajamos habitualmente.

Teorema 3.46. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $c_0^\beta = c^\beta = m^\beta = l.$

2. $l^\beta = m.$

3. $\tau^\beta = \chi^\beta = m_0^\beta = l.$

Demostración. Empezamos probando el apartado 1. Obviamente $m^\beta \subset c^\beta \subset c_0^\beta$ por darse $c_0 \subset c \subset m$. Este apartado quedará probado si demostramos que $l \subset m^\beta$ y $c_0^\beta \subset l$.

Sea $x = (x_k) \in m$ y sea $t = (t_k) \in l$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}^0$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} |t_k x_k| \leq \|x\|_\infty \|t\|_1 < \infty,$$

lo que prueba que $tx \in l \subset c_s$. De aquí se deduce que $t \in m^\beta$ y, por lo tanto $l \subset m^\beta$.

Por otra parte, para una sucesión $t = (t_k) \in \omega \setminus l$ dada, buscamos probar la existencia de una sucesión $x \in c_0$ con $tx \notin c_s$, lo que implicaría que $t \notin c_0^\beta$. De esta forma demostraríamos que $c_0^\beta \subset l$.

Como $t \notin l$, podemos elegir una sucesión de índices (n_ν) en $\mathbb{N}^0$ que cumpla

$$n_0 = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} |t_k| > \nu \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{N}.$$

Si tomamos ahora la sucesión $x = (x_k)$ definida por

$$x_k = \frac{1}{\nu} \operatorname{sgn} t_k \quad (n_{\nu-1} \leq k < n_\nu),$$

obtenemos

$$\sum_{k=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} t_k x_k = \frac{1}{\nu} \sum_{k=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} |t_k| > 1.$$

Por lo tanto $tx \notin l$ y entonces $t \notin c_0^\beta$. De esta forma queda probado el apartado 1.

Para probar $l^\beta = m$ notamos que, por el teorema 3.46 y el apartado anterior, $m \subset (m^\beta)^\beta = l^\beta$. Supongamos que existe una sucesión $t = (t_k) \in l^\beta \setminus m$. Como $t \notin m$, t es no acotada, y por lo tanto existe una subsucesión (t_{n_k}) de t tal que

$$|t_{n_k}| \geq (k+1)^2 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}^0.$$

La sucesión º (x_k) definida por

$$x_k := \begin{cases} \frac{1}{(k+1)^2} \operatorname{sgn} t_{n_k} & \text{si} \quad n = n_k \quad (n, k \in \mathbb{N}^0), \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

pertenece obviamente a l. Pero

$$\sum_k t_k x_k = \sum_k \frac{|t_{n_k}|}{(k+1)^2} \geq \sum_k 1 = \infty.$$

Por lo tanto $t \notin l^\beta$, lo que contradice nuestra hipótesis.

Vamos a probar ahora el apartado 3. Usando el apartado 1 y el hecho de que $\tau \subset \chi \subset m_0 \subset m$ obtenemos que $l = m^\beta \subset m_0^\beta \subset \chi^\beta \subset \tau^\beta$. Sea ahora una sucesión $y = (y_k) \notin l$, es decir, $\sum_k |y_k| = \infty$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que y es una sucesión real y que

$$\sum_k y_k^+ = \infty \quad \text{donde} \quad y_k^+ := \text{máx}\{0, y_k\}.$$

Tomando $k_0 := -1$ definimos inductivamente la sucesión de índices (k_p) tal que

$$k_{p+1} \geq k_p + p + 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=k_p+1}^{k_{p+1}-p} y_k^+ \geq p + 1, \tag{3.19}$$

y tal que hay al menos $p+1$ valores de k con $k_p < k \leq k_{p+1} - p$ que cumplan que $y_k > 0$. Dividimos ahora estos valores en $p+1$ conjuntos a los que denotamos $F_{p,1}, F_{p,2}, \ldots, F_{p,p+1}$. Metemos en $F_{p,1}$ el primer elemento, en $F_{p,2}$ el segundo, $\ldots$, en $F_{p,p+1}$ el $(p+1)$-ésimo, en $F_{p,1}$ el $(p+2)$-ésimo, $\ldots$. Por (3.19) tenemos que al menos para un i se cumplirá

$$\sum_{k \in F_{p,i}} y_k = \sum_{k \in F_{p,i}} y_k^+ \geq 1.$$

Elegimos para cada $p \in \mathbb{N}^0$ uno de estos i_p, y denotamos

$$\bigcup_p F_{p,i_p} =: \{\nu_r \mid r \in \mathbb{N}^0\}$$

con $\nu_r < \nu_{r+1}$. La elección de los conjuntos F_{p,p_i} hace que la distancia entre dos elementos cualesquiera de F_{p,p_i} sea mayor que $p+1$. Por lo tanto, la sucesión de índices (ν_r) satisface $\nu_{r+1} - \nu_r \to \infty$ cuando $r \to \infty$. Como consecuencia, dicha sucesión de índices define una sucesión fina $x = (x_k)$ única tal que

$$\sum_k y_k x_k = \sum_r y_{\nu_r} = \sum_p \sum_{k \in F_{p,i_p}} y_k = \infty,$$

esto es, $y \notin \tau^\beta$, lo que prueba $\tau^\beta \subset l$. $\square$

Como corolario del teorema anterior obtenemos una versión más débil de la condición (3.2), que usaremos más adelante.

Corolario 3.47. *Sea $A = (a_{n,k})$ una matriz infinita. Entonces*

$$\sum_k |a_{n,k}| < \infty, \textit{ esto es, } (a_{n,k})_k \in l \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}^0,$$

si y solo si se cumple cualquiera de las inclusiones equivalentes $m \subset \omega_A$, $c \subset \omega_A$, $c_0 \subset \omega_A$, $m_0 \subset \omega_A$ o $\tau \subset \omega_A$.

También necesitaremos, para probar el teorema final de esta sección, una forma de calcular cuándo un método matricial es conservativo para sucesioens nulas.

Teorema 3.48. *Sea A una matriz infinita. Si se cumple que $\tau \subset c_A$, entonces $c_0 \subset c_A$ (en particular $\|A\| < \infty$). Dicho de otra forma, si A suma todas las sucesiones finas, entonces A es conservativo para sucesiones nulas.*

Demostración. Sea $\tau \subset c_A$. Como e^k es la diferencia entre dos sucesiones finas, $e^k \in \tau$, y por tanto $e^k \in c_A$. Por lo tanto A satisface la condición (3.3). Además, sabemos que $(a_{n,k})_k \in \tau^\beta = l$. Si podemos demostrar que $\|A\| < \infty$, entonces podremos usar el teorema 3.11 para probar que A es conservativa para sucesiones nulas. Para ello suponemos que

$$\sup_n \sum_k |a_{n,k}| = \infty$$

y construimos una sucesión fina $x \notin c_A$, contradiciendo $\tau \subset c_A$. Sin perdida de generalidad suponemos que A es una matriz real y que

$$\sup_n \sum_k a_{n,k}^+ = \infty \quad \text{donde } a_{n,k}^+ := \text{máx}\{0, a_{n,k}\}. \tag{3.20}$$

Como $e^k \in c_A$, tenemos que $Ae^k \in c \subset m$. Por lo tanto, podemos elegir para cada $r \in \mathbb{N}^0$ y un $M(r) > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{r} |a_{n,k}| < M(r) \qquad (n \in \mathbb{N}^0). \tag{3.21}$$

Definimos ahora recursivamente las sucesiones de índices k_p y n_p. Tomamos $k_{-1} := 0$. Si n_{p-1} y k_{p-1} ya han sido elegidos, elegimos $n_p \in \mathbb{N}^0$ tal que $n_p > n_{p-1}$ y (usando (3.20))

$$\sum_k a_{n,k}^+ > (p+1)M(k_{p-1}) + p^2 + 1. \tag{3.22}$$

Después elegimos $k_p \in \mathbb{N}^0$ tal que $k_p > k_{p-1}$ y

$$\sum_{k=k_p-p}^{\infty} |a_{n_p,k}| < 1. \tag{3.23}$$

Aplicando ahora (3.21), (3.22) y (3.23) obtenemos, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-p-1} a_{n_p,k}^+ &\geq \sum_k a_{n,k}^+ - \sum_{k=k_p-p}^{\infty} |a_{n_p,k}| - \sum_{k=0}^{k_{p-1}} |a_{n_p,k}| \\ &> (p+1)M(k_{p-1}) + p^2 + 1 - 1 - M(k_{p-1}) \\ &= pM(k_{p-1}) + p^2.\end{aligned}$$

Aplicamos ahora la misma idea que en la demostración del teorema 3.46. Para un p fijo, tomamos los valores de k tales que $k_{p-1} < k \leq k_p - p - 1$ que cumplan además $a_{n_p,k} > 0$. Estos valores los dividimos en p conjuntos, a los que denotaremos $F_{p,1}, F_{p,2}, \ldots, F_{p,p+1}$. Metemos en $F_{p,1}$ el primer elemento, en $F_{p,2}$ el segundo, ..., en $F_{p,p+1}$ el $(p+1)$-ésimo, en $F_{p,1}$ el $(p+2)$-ésimo, ... Nótese que, si hay menos de p valores, algunos de los conjuntos estarán vacíos. Aun así, para al menos un $i = i_p$ tendremos que

$$\sum_{k\in F_{p,i}} a_{n_p k} = \sum_{k\in F_{p,i}} a^+_{n_p k} \geq M(k_{p-1}) + p. \tag{3.24}$$

Elegimos, para cada $p \in \mathbb{N}^0$, uno de estos i_p; la unión de todos estos F_{p,i_p} es un conjunto numerable, y tomamos

$$\bigcup_p F_{p,i_p} =: \{\nu_r \mid r \in \mathbb{N}^0\},$$

donde $\nu_r < \nu_{r+1}$ para todo $r \in \mathbb{N}^0$. La elección de de los conjuntos F_{p,p_i} hace que la distancia entre dos elementos cualesquiera de F_{p,i_p} y la distancia entre $F_{p,p}$ y $F_{p+1,p}$ sea mayor que p. Por lo tanto, la sucesión de índices (ν_r) satisface $\nu_{r+1} - \nu_r \to \infty$ cuando $r \to \infty$. Como consecuencia, dicha sucesión de índices define una sucesión fina $x = (x_k) \in \chi$ única. Como, por hipótesis, A suma todas las sucesiones finas, tenemos además que $x \in \omega_A$. Vamos a probar ahora que $x \notin c_A$. Para cada $p \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}\Big|\sum_k a_{n_p,k}x_k\Big| &\geq \Big|\sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p} a_{n_p,k}x_k\Big| - \sum_{k=0}^{k_{p-1}} |a_{n_p,k}x_k| - \sum_{k=k_p+1}^{\infty} |a_{n_p,k}x_k| \\ &\geq \sum_{k\in F_{p,i_p}} a_{n_p,k} - \sum_{k=0}^{k_{p-1}} |a_{n_p,k}| - \sum_{k=k_p+1}^{\infty} |a_{n_p,k}| \\ &\geq M(k_{p-1}) + p - M(k_{p-1}) - 1 > p - 1.\end{aligned} \tag{3.25}$$

En la segunda desigualdad hemos usado la definición de x y el hecho de que $\|x\|_\infty \leq 1$. En la tercera desigualdad hemos usado las cotas (3.24), (3.21) y (3.19). Usando (3.25) obtenemos que Ax no está acotado, es decir $Ax \notin m \supset c$. Por lo tanto, $x \notin c_A$. $\square$

El siguiente teorema es el teorema fundamental de esta sección, pues como corolario suyo obtendremos el resultado que estábamos buscando.

Teorema 3.49 (Schur)**.** *Sean una matriz infinita $A = (a_{n,k})$ y su método matricial asociado. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) A es coactivo.

(b) A satisface la condición (3.3) *y $\sum_k |a_{n,k}|$ converge uniformemente para todo $n \in \mathbb{N}^0$.*

(c) A es conservativo para sucesiones nulas y

$$h(A) := \limsup_n \sum_k |a_{n,k} - \delta_k| = 0.$$

Además, si se cumple cualquiera de estas afirmaciones también se cumple que, para todo $x = (x_k) \in m$,

$$A\text{-}\lim x = \sum_k \delta_k x_k.$$

Este teorema lo vamos a probar junto con el siguiente.

Teorema 3.50 (Hahn)**.** *Si un método matricial suma todas las sucesiones de ceros y unos, entonces suma todas las sucesiones acotadas. Esto es,* $\chi \subset c_A$ *implica que* $m \subset c_A$*.*

Demostración. Denotamos a la condición «$\chi \subset c_A$ » como (a^*). Vamos a probar los teoremas 3.49 y 3.50 mediante la cadena de implicaciones

$$(b) \implies (c) \implies (a) \implies (a^*) \implies (b).$$

(**b**) $\implies$ (**c**): Suponemos que se cumple (b). Por la convergencia uniforme de $\sum_k |a_{n,k}|$, tenemos que existe un $K \in \mathbb{N}^0$ tal que

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |a_{n,k}| < 1 \quad (n \in \mathbb{N}^0).$$

Como A cumple la condición (3.3), esto implica que

$$\sum_k |a_{n,k}| \leq \sum_{k=0}^{K} \|(a_{n,k})_n\|_\infty + 1 < \infty;$$

y por lo tanto A cumple la condición (3.2). Como por hipótesis también cumple (3.3), tenemos que A es conservativa para sucesiones nulas, por el lema 3.11. Además,

$$\sum_k |\delta_k| < \infty. \tag{3.26}$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Usando (3.26) y la convergencia uniforme de la serie $\sum_k |a_{n,k}|$ para todo $n \in \mathbb{N}^0$, podemos elegir $N \in \mathbb{N}^0$ tal que

$$\sum_{N+1}^{\infty} (|a_{n,k}| + |\delta_k|) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^0). \tag{3.27}$$

Ahora podemos elegir $n_0 = n_0(N) \in \mathbb{N}^0$ que cumpla

$$\sum_{k=0}^{N} |a_{n,k} - \delta_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq n_0). \tag{3.28}$$

Usando ahora (3.28) y (3.27), para todo $n \geq n_0$ tenemos

$$\sum_k |a_{n,k} - \delta_k| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_{n,k} - \delta_k| + \sum_{N+1}^{\infty} (|a_{n,k}| + |\delta_k|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que

$$0 = \lim_n \sum_k |a_{n,k} - \delta_k| = \limsup_n |a_{n,k} - \delta_k| = h(A),$$

y por tanto se cumple (c).

(**c**) $\implies$ (**a**): Si (c) se cumple, entonces $(\delta_k) \in l$ por (3.11) y $m \subset \omega_A$ por el teorema 3.47. Además, notando que $l^\beta = m$, obtenemos que para toda sucesión $x = (x_k) \in m$ se cumple

$$\begin{aligned} \left| \sum_k a_{n,k} x_k - \sum_k \delta_k x_k \right| &\leq \sum_k |a_{n,k} - \delta_k| |x_k| \\ &\leq \|x\|_\infty \sum_k |a_{n,k} - \delta_k| \to 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

lo que implica que $x \in c_A$ y A-lím $x = \sum_k a_k x_k$, para $x = (x_k) \in m$. Por tanto (c) implica (a) además de la fórmula del límite.

(**a**) $\implies$ (**a***): Esta implicación es trivial.

(**a***) $\implies$ (**b**): Supongamos que se cumple $\chi \subset c_A$. Asumimos sin pérdida de generalidad que $a_{n,k} \in \mathbb{R}$. En caso de trabajar con $\mathbb{C}$ tendríamos que usar las matrices de las partes real e imaginaria de forma separada. Por el teorema 3.48 el método A es conservativo para sucesiones nulas, y usando entonces el teorema 3.11 tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty, \quad (a_{n,k})_k \in c \quad \text{y} \quad (\delta_k) \in l. \tag{3.29}$$

Falta entonces probar que $\sum_k |a_{n,k}|$ converge uniformemente para $n \in \mathbb{N}^0$. Sea la matriz infinita $B = (b_{n,k})$ definida por

$$b_{n,k} := a_{n,k} - \delta_k \quad \text{para todo} \quad n, k \in \mathbb{N}^0.$$

Como $(\delta_k) \in l$, es suficiente con probar que la serie $\sum_k |b_{n,k}|$ converge uniformemente. Notemos que, por (3.29), B cumple las condiciones $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{m,n}| < \infty$ y $(b_{n,k} \in c_0)$. Asumamos que $\sum_k |b_{n,k}|$ no converge uniformemente. Entonces

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall K \in \mathbb{N}^0 \quad \exists n \in \mathbb{N}^0 \text{ tal que } \sum_{k=K}^{\infty} |b_{n,k}| \geq \varepsilon.$$

De hecho, para cada K hay infinitos valores de $n \in \mathbb{N}^0$ para los cuales $\sum_{k=K}^{\infty} |b_{n,k}| \geq \varepsilon$. Así, cambiando ε por $\varepsilon/5$, podemos elegir para cada K una sucesión de índices $(\nu_j(K))_j$ tal que

$$\sum_{k=K}^{\infty} |b_{\nu_j(K),k}| \geq 5\varepsilon \quad (j, K \in \mathbb{N}^0). \tag{3.30}$$

Definimos ahora inductivamente las sucesiones de índices (n_p) y (k_p). Sea $k_{-1} := 0$, y sean $n_0, k_0 \in \mathbb{N}^0$ elegidas de forma que

$$\sum_k |b_{n_0}, k| \geq 5\varepsilon, \quad |b_{n_0,0}| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |b_{n_0,k}| < \varepsilon.$$

Si $p > 0$ y n_{p-1} y k_{p-1} ya han sido elegidos, podemos usar (3.30) y el hecho de que B cumple (3.12) para elegir $n_p > n_{p-1}$ con

$$\sum_k |b_{n_p,k}| \geq 5\varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{k_{p-1}} |b_{n_p,k}| < \varepsilon. \tag{3.31}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{m,n}| < \infty$, podemos encontrar $k_p > k_{p-1}$ con

$$\sum_{k=k_p+1}^{\infty} |b_{n_p,k}| < \varepsilon. \tag{3.32}$$

Podemos usar ahora las cotas (3.31) y (3.32) para obtener que, para todo $p \in \mathbb{N}^0$, tenemos

$$\sum_{k_{p-1}+1}^{k_p} |b_{n_p,k}| = \sum_k |b_{n_p,k}| - \sum_{n=0}^{\infty} |b_{m,n}| - \sum_{k=k_p+1}^{\infty} |b_{n_p,k}| > 5\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon. \tag{3.33}$$

Definimos ahora $x = (x_k) \in m_0$, con $\|x\|_\infty \leq 1$ de la siguiente manera. Tomamos $x_0 := 0$ y

$$x_k = (-1)^p \operatorname{sgn} b_{n_p k} \quad (k_{p-1} < k < k_p \text{ y } o \in \mathbb{N}^0).$$

Vamos a probar que $Bx \notin c$. De esta forma obtendremos que $x \notin c_A$, por la definición de B y porque $(\delta_k) \in l$. Esto contradice nuestra asunción $\chi \subset c_A$, ya que $x \in m_0 =< \chi >$. Para probar que $Bx \notin c$ usamos (3.31), (3.32) y (3.33), junto con $\|x\|_\infty \leq 1$, para obtener que, para cada $p \in \mathbb{N}^0$, se cumple

$$\begin{aligned} t_{n_p} &:= \sum_k b_{n_p k} x_k \\ &= \sum_{k=0}^{k_{p-1}} b_{n_p k} x_k + (-1)^p \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p} |b_{n_p,k}| + \sum_{k=k_p+1}^{\infty} b_{n_p k} x_k \\ &\begin{cases} > -\varepsilon + 3\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon & \text{si } p \text{ es par,} \\ < \varepsilon - 3\varepsilon + \varepsilon = -\varepsilon & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto $(t_{n_p}) \notin c$, y entonces $Bx \notin c$. □

Finalmente llegamos al resultado que presentamos al principio de la sección. El corolario que vamos a ver a continuación nos dice que los métodos matriciales coactivos, es decir, los métodos que suman todas las sucesiones acotadas, tienen característica 0. Esto es incompatible con ser un método matricial regular, pues los métodos matriciales regulares tienen característica 1.

Corolario 3.51. *Todo método matricial coactivo es conulo. En particular, un método matricial no puede ser a la vez regular y coactivo.*

Demostración. Sea un método matricial coactivo A. La característica de un método matricial está definida como $\chi(A) = A\text{-}\lim e - \sum_k A\text{-}\lim e^k$. Notando que $A\text{-}\lim e^k = \delta_k$ y usando la formula de límite del teorema 3.49 para $x = e$, obtenemos que $\chi(A) = 0$. Como $\chi(A) = 1$ para todo método regular, se tiene que A no puede ser a la vez regular y coactivo. □

Capítulo 4

Métodos definidos por series de potencias

A lo largo de este capítulo vamos a trabajar únicamente con sucesiones $p = (p_n)$ de números reales y tales que $p_0 > 0$ y $p_n \geq 0$ para el resto de valores de $n \in \mathbb{N}$. Además, sus correspondientes series de potencias

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k \tag{4.1}$$

tendrán un radio de convergencia $0 < R \leq \infty$ (con un pequeño abuso de notación, estamos llamando p tanto a la sucesión como a la función. Siempre que hablemos de la serie de potencias aparecerá explícitamente la dependencia de t). Denotaremos I al intervalo $(-R, R)$.

Definición 4.1. Sea $p = (p_n)$ y, con la notación de (4.1), tomamos

$$C_p := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \mid \text{existe el límite } \lim_{0<t\to R^-} \frac{f(t)}{p(t)} \right\}.$$

Además, dada otra sucesión $x = (x_k)$, denotamos mediante p_x a la función

$$\begin{aligned} p_x &: I \to \mathbb{R} \\ t &\mapsto p_x(t) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k x_k t^k, \end{aligned}$$

siempre que la serie anterior converja. Para definir un método de sumación asociado a la sucesión p, y que denominaremos P_p, tomamos ahora el conjunto

$$C_{P_p} := \left\{ x = (x_k) \in \omega \mid p_x(t) \text{ tiene radio de convergencia } \geq R \text{ y } p_x \in C_p \right\}$$

y la transformación

$$\begin{aligned} P_p : C_{P_p} &\longrightarrow C_p \\ x = (x_n) &\longmapsto p_x(t). \end{aligned}$$

A partir de esta transformación definimos el límite

$$\begin{aligned} P_p\text{-}\lim : C_{P_p} &\to \mathbb{K} \\ x = (x_n) &\mapsto \lim_{t\to R^-} \frac{P_p(x)}{p(t)}. \end{aligned}$$

Diremos que el método de sumación P_p obtenido es un **método de sumación por series de potencias**.

Obsérvese que en el caso $0 < R < \infty$ podemos cambiar la sucesión (p_k) por la sucesión $(p_k R^k)$, obteniendo así un radio de convergencia 1. Por lo tanto, es suficiente con considerar los casos $R = 1$ y $R = \infty$.

Entre los ejemplos iniciales de métodos de sumación vimos uno de los métodos de sumación por series de potencias más famosos, el método de Abel. Veamos cómo se puede representar este método con la notación que acabamos de introducir.

Ejemplo 4.2. Tomando la sucesión $p_k = 1$, tenemos que $R = 1$ y $p(t) = 1/(1-t)$. Por lo tanto, el método de sumación obtenido es precisamente el método de Abel visto en el ejemplo 2.5. Esto justifica la siguiente definición.

Definición 4.3. A los métodos de sumación por series de potencias con $R = 1$ se les conoce como **métodos de tipo Abel** y se les denota mediante J_p.

Por otra parte, tenemos los métodos en los que R es infinito.

Definición 4.4. A los métodos de sumación por series de potencias con $R = \infty$ se les conoce como **métodos de tipo Borel** y se les denota mediante B_p.

Una propiedad que nos interesa poder estudiar de un método de sumación es su regularidad. Vamos a ver una caracterización de la regularidad para los métodos definidos por series de potencias. La regularidad de estos métodos está muy relacionada con unos métodos matriciales asociados a ellos, que veremos a continuación.

Definición 4.5. Sean $p = (p_n) \in \omega$ una sucesión dada y la función $p(t)$ como en (4.1), y $(t_n) \in \omega$ una sucesión que cumple $0 < t_n \to R^-$. Al método de sumación matricial dado por la matriz

$$P_{p,t_n} := \left(\frac{p_k t_n^k}{p(t_n)} \right)$$

se le llama **método de sumación por series de potencias discreto**. Obviamente, el método P_{p,t_n} es más fuerte que el método de sumación por series de potencias P_p, y es consistente con él. Se cumple además que

$$C_{P_p} = \bigcap \left\{ c_{P_{p,t_n}} \mid (t_n) \text{ cumple que } 0 < t_n \to R^- \right\}.$$

A partir de los métodos de sumación por series de potencias discretos, podemos caracterizar la regularidad de un método por series de potencias con el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Sea $p = (p_n) \in \omega$ una sucesión dada y la función $p(t)$ como en* (4.1). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *P_p es regular.*
- *P_{p,t_n} es regular para toda sucesión (t_n) que cumpla $0 < t_n \to R^-$.*

- P_p *cumple la propiedad*
$$\lim_{0<t\to R^-} \frac{p_k t^k}{p(t)} = 0$$
para todo valor de $k \in \mathbb{N}^0$.

A continuación veremos de forma independiente las dos clases de métodos por series de potencias, en cada caso centrándonos en sus métodos más importantes.

4.1. Métodos de tipo Abel

En esta sección vamos a ver el comportamiento de los métodos de tipo Abel, es decir, los métodos en los que $R = 1$. Lo primero será particularizar el teorema de caracterización de la regularidad a este tipo de métodos.

Teorema 4.7. *Sea* J_p *un método de sumación de tipo Abel. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- J_p *es regular.*
- $p(t) \to \infty$ *cuando* $t \to 1^-$.
- $P_n := \sum_{i=0}^{n} p_i \to \infty$ *cuando* $n \to \infty$.

Veamos ahora un par de ejemplos de métodos de tipo Abel regulares.

Ejemplo 4.8. Si $p_k := 1/(k+1)$, obtenemos $p(t) = \sum_k p_k t_k = -\log(1-t)$. Al método de sumación obtenido se le llama **método de sumación logarítmico**, y se le denota por L. Por el teorema 4.7 este método es regular.

Ejemplo 4.9. Sea $\alpha > 0$ y tomamos la sucesión $p_k := \binom{k+\alpha-1}{k}$. Tenemos entonces que $p(t) = \sum_k p_k t_k = (1-t)^{-\alpha}$. Para $\alpha = 1$ este método es el método de Abel visto en el ejemplo 2.5. Por lo tanto, a estos métodos se los conoce como **métodos de Abel generalizados**, y se les denota por A_α. Por el teorema 4.7 son métodos regulares.

En último lugar, mostraremos la relación que existe entre el método de Abel y los métodos de Cesàro. Hemos estudiado los métodos de Cesàro en profundidad, y hemos probado que sus dominios son crecientes, es decir, al aumentar el orden aumentamos el tamaño del dominio. Pero también nos hemos encontrado con una limitación para las sucesiones que estos métodos pueden sumar. El método de Abel actúa como una especie de cota superior para los métodos de Cesàro, como pone de manifiesto el siguiente teorema.

Teorema 4.10. *El método de Abel es más fuerte que el método de Cesàro* C_α *para todo* $\alpha > 0$, *y es consistente con él. Además, se cumple que*
$$\bigcup_{\alpha>0} c_{C_\alpha} \subsetneq C_A.$$
Es decir, el método de Abel puede sumar todas las sucesiones que pueden sumar los métodos de Cesàro; y, además, existen sucesiones que los métodos de Cesàro no pueden sumar y que el de Abel sí puede.

4.2. Métodos de tipo Borel

En esta sección nos centraremos principalmente en los dos métodos que definió el propio Borel y que dan nombre a este tipo de métodos. Pero primero vamos a ver la caracterización de regularidad para los métodos de tipo Borel en general.

Teorema 4.11. *Un método de sumación de tipo Borel es regular si y solo si la función $p(t)$ no es polinomial; es decir, si se cumple que $p_k \neq 0$ para infinitos valores de $k \in \mathbb{N}^0$.*

Borel definió dos métodos distintos, y a ambos se les conoce como método de Borel. A pesar de compartir nombre, están definidos de formas distintas y no tienen exactamente las mismas propiedades. El primero de ellos lo obtenemos de la siguiente forma.

Definición 4.12. Sea la sucesión $p = (p_n)$ con $p_n := 1/n!$. Entonces $R = \infty$ y $p(t) = e^t$. El método de sumación por series de potencias obtenido es el conocido como método de Borel o método B.

Veamos ahora la definición del otro método de Borel. Este método está definido de forma distinta a la mayoría de métodos vistos en este trabajo, ya que no usa un límite, sino que define directamente la suma de la serie.

Definición 4.13. Sea una sucesión $a = (a_n)$. Definimos

$$A(x) := \int_0^x e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \, dt.$$

Si

$$\lim_{x \to \infty} A(x) = S,$$

diremos que la sucesión a, o la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, es B'-sumable, y que su suma es S. Al método de sumación obtenido lo llamaremos método B'.

Ambos métodos son muy parecidos, y de hecho comparten algunas propiedades, como las presentadas en los dos siguientes teoremas.

Teorema 4.14. *Los métodos B y B' son regulares.*

Teorema 4.15. *Los métodos B y B' son lineales.*

Se cree que Borel intentó definir dos métodos equivalentes al definir B y B'. Sin embargo, los teoremas siguientes ponen de manifiesto que ambos métodos no son en realidad equivalentes.

Teorema 4.16. *Los métodos B y B' serán equivalentes si y solo si*

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \to 0$$

cuando $x \to \infty$.

Teorema 4.17. *El método B' es más fuerte que el método B y consistente con él.*

Teorema 4.18. *Existe alguna sucesión s sumable por el método B', pero no por el método B.*

Para encontrar un ejemplo de una sucesión del teorema anterior, buscamos una sucesión tal que $e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!}$ no converja a 0. Podemos tomar la sucesión

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+2)^n}{(2k+1)!},$$

ya que

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}e^{(2k+2)x} = \operatorname{sen}(e^x),$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(e^x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Veamos ahora cómo se relacionan estos métodos con los métodos vistos en los capítulos anteriores. Al igual que el método de Abel se comporta en cierta manera como una extensión de los métodos de Cesàro, los métodos de Borel también se comportan como la extensión de otro tipo de métodos de sumación matriciales, los métodos de Euler.

Teorema 4.19. *El método B es más fuerte que el método de Euler E^{α} para todo $\alpha > 0$, y consistente con él.*

Por otra parte, los dominios de los métodos de Borel no están relacionados con los dominios de los métodos de Cesàro ni de Abel; es decir, hay tanto sucesiones sumables por el método de Abel que no son sumables por los métodos de Borel, como sucesiones sumables por los métodos de Borel que no son sumables por el método de Abel.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo era presentar diversos métodos de sumación, con el objetivo de mostrar las múltiples formas en las que se puede generalizar la definición de suma de una serie para casos que normalmente no son sumables. Partiendo de una definición general de método de sumación, hemos definido múltiples métodos de sumación, cada uno con sus distintos dominios y propiedades.

Primero hemos visto los métodos de sumación matriciales, de entre los cuales el más método regular más sencillo, quitando el método de sumación habitual, es el método de Cesàro. Partiendo de este método, y buscando generalizarlo hemos presentado los métodos de Hölder y Cesàro, dos tipos de método de sumación muy relacionados, ya que, como hemos visto, son equivalentes. Como una generalización de ambos tipos de método aparecen las medias de Nørlug, cuyas propiedades hemos visto sin entrar en profundidad. Por otra parte hemos visto los métodos de Euler, que a diferencia de todos los anteriores, no generalizan el método de Cesàro. Finalmente hemos desarrollado la teoría necesaria para probar el teorema de Schur, del que se deduce como corolario que no existe ningún método matricial que sea a la vez regular y que sume todas las sucesiones acotadas, limitando por tanto el dominio máximo de este tipo de métodos.

Para terminar hemos visto brevemente los métodos definidos por series de potencias, entre los cuales se encuentran el método de Abel y los métodos de Borel. Estos métodos resultan interesantes no solo por sus propiedades, sino también por su relación con los métodos de Cesàro y de Hölder. El dominio del método de Abel actúa como cota superior de los dominios de los métodos de Cesàro, y la misma relación se da entre los métodos de Borel y de Hölder.

Como conclusión final, notar que a pesar de haber visto las propiedades básicas de múltiples métodos, hay partes de la teoría de métodos de sumación en las que no hemos entrado, como pueden ser los métodos tauberianos o el estudio de los métodos de sumación desde el punto de vista del análisis funcional. En los libros incluidos en la bibliografía es posible encontrar información en mayor profundidad sobre estos temas y otros relacionados, además de ver otros métodos de sumación no mencionados en este trabajo pero no por ello menos interesantes.

Bibliografía

[1] J. Boos, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, Nueva York, 2000.

[2] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford University Press, Londres, 1949.

[3] K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series*, Blackie, Londres, 1951. Reimpresión: Dover, 1990.

[4] J. Rey Pastor, *Teoría de los Algoritmos Lineales de Convergencia y de Sumación*, con notas y comentarios por E. Fernández Moral, Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 2006.

[5] B. Shawyer y B. Watson, *Borel's Methods of Summability: Theory and Applications*, Oxford University Press, Nueva York, 1994.