Una traducción castellana anotada del artículo “Weierstrass et Sonja Kowalewsky” de Gösta Mittag–Leffler

Emilio Fernández Moral

campus iberus
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL DEL VALLE DEL EBRO

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Emilio Fernández Moral

Una traducción castellana anotada del artículo “WEIERSTRASS ET SONJA KOWALEWSKY” de Gösta Mittag-Leffler

publicado originalmente en *Acta Mathematica* 39 (1923), 133–198

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

2023

Publicado originalmente con el título “Weierstrass et Sonja Kowalewsky” en *Acta Mathematica* 39 (1923), 133–198

Edita: Universidad de La Rioja

ISBN 978-84-09-57790-3

ÍNDICE

Presentación

El artículo “Weierstrass et Sonja Kowalewsky” ocupa las páginas 133 a 198 del volumen 39, impreso el 5 de noviembre de 1923, de *Acta Mathematica*, revista de la que en esos momentos su autor, el insigne matemático Gösta Mittag-Leffler (1846–1927), era fundador y llevaba siendo director y redactor jefe cuarenta años. El artículo, que este año entonces ya cumple 100 años publicado, está escrito en francés, con abundantes transcripciones de fragmentos de cartas en alemán y la de un documento personal en latín. Se presenta aquí una traducción (quizás la primera que se lleva a cabo del texto completo) al castellano, aderezada con unas notas que comentan o tratan de aclarar o de precisar información ante todo sobre nombres propios o puntos matemáticos concretos del texto. Vayan por delante mil peticiones de perdón a los filólogos por el atrevimiento que ha supuesto hacer esta traducción a partir de un conocimiento meramente rudimentario del idioma alemán; aún así esperamos haber salvado el sentido de buena parte de los textos originales, y es en esta confianza en la que presentamos este trabajo.

En el servicio de acceso al documento *Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte* de la biblioteca de la Universidad de Heidelberg, de donde se puede descargar el original libremente, el artículo se presenta así, repitiendo lo que el propio Mittag-Lefler escribe en el Prefacio al volumen número 39 de las *Acta Mathematica* [156, p. IV]:

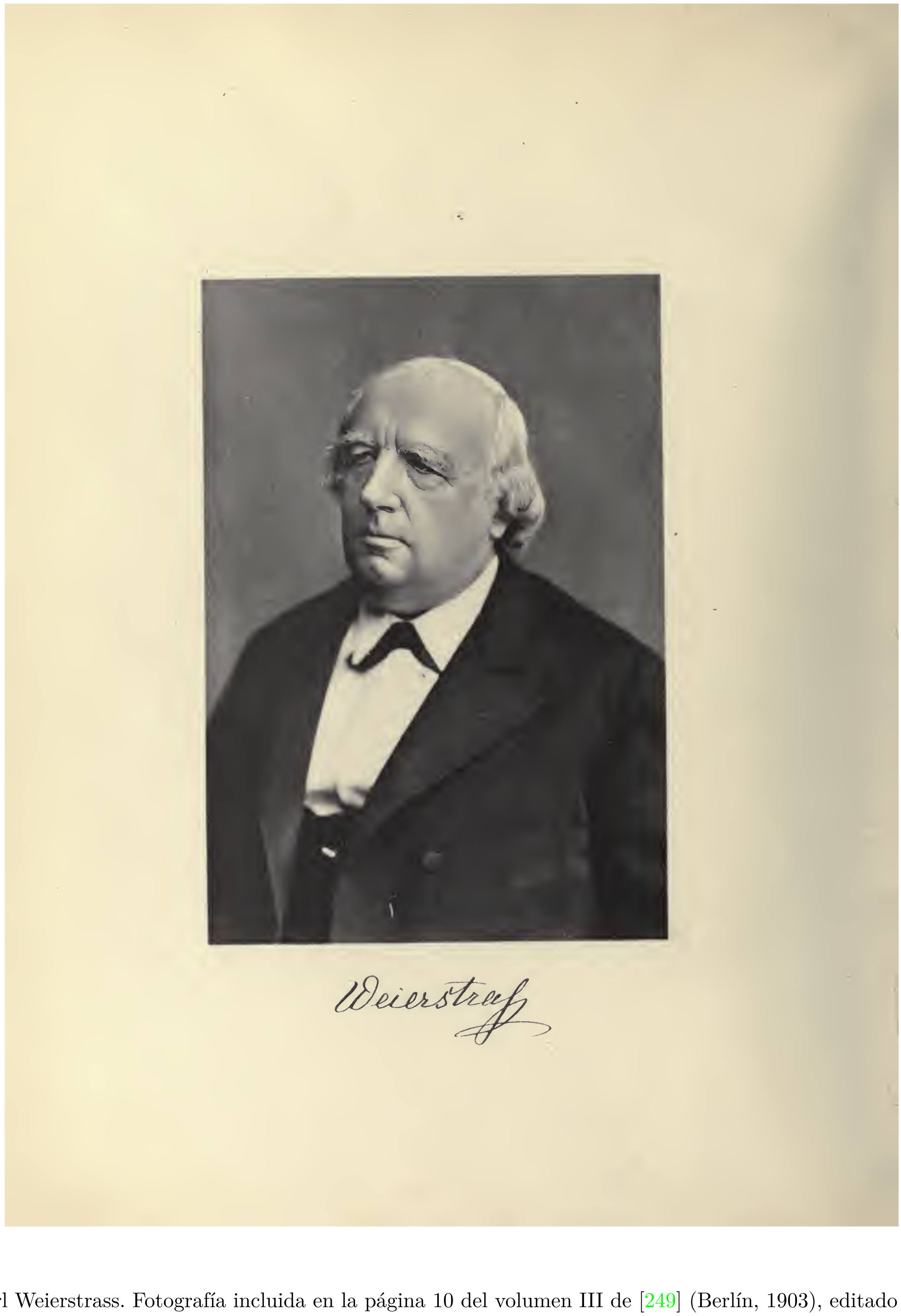
> “El siguiente artículo, basado en la comunicación enviada por el autor en 1900 al segundo Congreso internacional de Matemáticas en París, describe la relación de Sonja Kowalewsky (1850–1891) con su mentor Karl Weierstrass (1815–1897). Gran número de cartas en lengua alemana dirigidas por Weierstrass a su querida discípula enriquecen la presentación”.

Hemos cotejado y utilizado también aquella comunicación de Mittag-Leffler [151]. Las notas a pie del texto de la traducción, subrayadas como “(N. de M-L.)”, son del artículo original. Las notas finales, a continuación del texto del artículo, son nuestras. La publicación electrónica permite añadir algunos efectos de navegación directa e inversa en notas, referencias bibliográficas y entradas del índice de nombres final. Los fragmentos de las cartas de Weierstrass (originales en alemán) o los dos insertos de Sofía Kowalewsky (en latín y alemán, respectivamente) se presentan en colores azules de distinta tonalidad. El texto básico de Mittag-Lefler (original en fracés) va en negro.

Bernardo de la Calle, profesor de la Universidad Politécnica de Madrid muy motivado desde hace años por el estudio de la literatura matemática histórica en lengua alemana, me ayudó a pasar de la primera página de este artículo de Mittag-Leffler. Su traducción sería muchísimo mejor. Con el librito [202], que me puso en las manos Luis Español, a quien debo también valiosas sugerencias, he completado alguna de las últimas notas. A Manolo Benito y Manuel Bello les tengo que agradecer, entre tantas cosas, sabios consejos y constante ánimo. A Edgar Labarga y Alberto Arenas, el vital estímulo de sus diarias preguntas y respuestas. Alberto ha sido insistente en que, salvo en las referencias, escriba las transcripciones fonéticas Zolotariov y no Zolotarev, Chebyshov y no Chebyshev, por ejemplo. Agradezco al Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja acogerme con renovada confianza año tras año, siendo el espacio natural donde se ha podido elaborar este trabajo. Que pueda ver definitivamente la luz en una colección propia de esta Universidad se lo debo a la permanente amabilidad, disponibilidad e interés de Isabel Terroba, Responsable del Servicio de Publicaciones.

Emilio Fernández*, 2023

*Profesor jubilado de Enseñanza Secundaria. Investigador colaborador adscrito al Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja. Correo electrónico: emfernan@unirioja.es



Karl Weierstrass. Fotografía incluida en la página 10 del volumen III de [249] (Berlín, 1903), editado por Johannes Knoblauch.

Sofía Kowalewsky. Fotografía incluida en el volumen 39 (1923) de la revista *Acta Mathematica*.

WEIERSTRASS Y SONJA KOWALEWSKY[‡].

Por

G. Mittag-Leffler.[1]

El funesto año de 1870 que tanto dolor y lágrimas causó a dos grandes pueblos,[2] pero que al mismo tiempo promovió e inflamó sus pasiones patrióticas, trastornó las apacibles costumbres del gran analista de la ribera del Spree. Weierstrass estaba entonces en situación de ser considerado, no sólo en Alemania sino también en el extranjero, como el sabio que había sabido profundizar en los enigmas más recónditos del análisis mejor que ningún otro de sus coetáneos. Tres años más tarde llegué yo a París para seguir el curso de Hermite;[3] no olvidaré nunca la estupefacción que experimenté al escuchar las primeras palabras que éste me dirigió: "Se ha equivocado usted, señor, —me dijo: tendría que haber acudido a Berlín a seguir los cursos de Weierstrass. Él es el maestro, para todos nosotros".[4] Hermite era un francés con mayúsculas, gran patriota; en ese mismo momento comprendí hasta qué punto era también un gran matemático.

Weierstrass había tenido que renunciar a su habitual viaje de verano. Se lamenta de ello en una carta a Koenigsberger[5] fechada el 25 de octubre de 1870:

> "Esperemos que el año que viene permita, al menos a la gente de paz como nosotros, disfrutar sin sobresaltos de las vacaciones, de las que estaremos doblemente necesitados después de la zozobra actual."[6]

Su curso de conferencias sobre las funciones elípticas había comenzado ante tan sólo veinte oyentes, cuando dos años antes idéntica convocatoria había congregado a cincuenta.[7]

> "Lo que me es tanto más penoso es que el alto Senado académico, hasta hoy inflexible, siga rehusando concederme la compensación económica que, de tu mano, me viene ofrecida en la persona de la dama que hasta ahora ha sido oyente tuya; si se le asignara el oportuno coeficiente de ponderación, posiblemente esa compensación podría tener una cuantía importante."

Sofía Kowalewsky había sido alumna de Koenigsberger en Heidelberg desde la primavera de 1869,[8] aunque al mismo tiempo había asistido a las lecciones de Helmholtz[9] y de Kirchhoff y había conocido a Bunsen.[10] Antes incluso de cumplir veinte años, se había visto encumbrada a la elevada vida intelectual que fascinara sus sueños de muchacha. Las lecciones del discípulo —pues en efecto Koenigsberger fue uno de los primeros discípulos de Weierstrass— le inspiraron el deseo de acudir a sentarse a los pies del maestro para recoger el conocimiento de sus propios labios. Si Weierstrass tuvo más de un alumno a quien por sus enseñanzas, o simplemente por su personalidad, supo enardecer el ánimo, ninguno aportó al acercarse a él un entusiasmo tan ardiente ni unas expectativas tan fuertemente dirigidas como lo hizo Sofía Kowalewsky.

Ahora bien, ella tenía sólo veinte años, y aunque perteneciese a una familia de la gran nobleza que llevaba un alto tren de vida, apenas tenía más habilidades sociales que las de una simple estudiante escolar, ya que la brillantez de su hermana mayor, su adorada Anjuta, la había hecho colocarse permanentemente a su sombra. Era con modestia, y no sin emoción, como ella se acercaba al hombre que a sus ojos era el mayor sabio de nuestra época y a quien ella había decidido adoptar como su maestro en la ciencia de las ciencias. A esa resolución aportaba una fuerza de voluntad que en los momentos críticos de la vida sobrepasaba toda medida. Prueba de ello había dado unos años antes al contraer matrimonio, por la forma misma en que convino en hacerlo. De cómo era en esa época Sonja —ese fue el nombre con que la conocieron siempre sus amigos desde sus años de estudiante— podemos hacernos una idea a través de la carta de una tía suya, escrita dos años antes, el 28 de septiembre de 1868, donde se encuentra un relato de su boda:

> ... "y finalmente apareció Sonja, fresca, radiante de alegría y tan bella como una novia pudiera desear. La preparación del vestido de la novia fue en la habitación de Lisa (Lisa era la madre)[11]: un vestido sencillo, pero con el que se la veía preciosa. Su hermoso cabello caía sobre la nuca en largos rizos; y, abrochada al largo velo de tul, una corona de mirtos y flores de azahar. Ni una sola joya, ni adornos, pero un encanto tan grande que todo el mundo declaró no haber visto nunca novia tan atractiva. En ningún momento de la ceremonia la abandonó su expresión radiante, y no era la expresión de un sentimiento superficial, sino la íntima convicción de la verdadera felicidad."

[‡]Un extracto de este artículo se publicó en las Actas del II Congreso Internacional de matemáticos, París 1900, p. 131–153. (N. de M-L.)

Si con todo el resto de familia, a excepción de Anjuta que había estado en el complot, la tía leía erróneamente en la "expresión radiante" de Sonja la felicidad de un amor naciente, no se equivocaba en cambio al interpretar esa expresión como el reflejo, no de un sentimiento fugaz, sino de una convicción íntima de auténtica felicidad.

Tales eran el estado de ánimo de Sonja, y su apariencia, en el momento en que se comprometió en aquel pseudo-enlace matrimonial,[12] cuyo único objetivo para ella era que le abriera de par en par las puertas de la ciencia de los números y el espacio. Según esto nos podemos imaginar fácilmente cómo fue su primera entrevista con Weierstrass. Ella se presentaba con el rostro casi oculto por la gran ala de un sombrero, con el fin de disimular la timidez de sus veinte años y la emoción que le producía ese examen que, a su parecer, iba a ser decisivo para su porvenir. Weierstrass apenas pudo ver aquellos maravillosos ojos cuya elocuencia nadie podría resistir si ella se lo propusiera. Dos o tres años más tarde él mismo relataba, después de una visita a Heidelberg, cómo Bunsen, el viejo solterón empedernido, le había dicho, sin saber que ella era su alumna, que Sonja era una mujer "peligrosa".[13] En apoyo de esta opinión, Bunsen había añadido que él había jurado no admitir nunca a una mujer en su laboratorio, y mucho menos a una mujer rusa, pero que Sonja había ido a visitarlo, "y le había consultado de una manera tan gentil que no pudo resistirse y fue infiel a su resolución",[14] porque acto seguido había dado su conformidad al privilegio demandado para una de las amigas y compatriotas de Sonja.[15] Circulaban entonces rumores de todo tipo, y no precisamente del más delicado, a cuenta de las estudiantes rusas que tenían su residencia habitual en Zúrich, y Weierstrass no estaba muy predispuesto en favor de una alumna que, tal vez, pertenecería a esa categoría tan desacreditada. No parece haber tenido ni el menor presentimiento de que un día Sonja iba a ser su discípulo más estimado y que llegaría a estar más próxima a él que ningún otro. Le pidió opinión a Koenigsberger sobre las aptitudes de la extranjera para los estudios matemáticos avanzados, preguntándole además si "la personalidad de la dama ofrecía las garantías necesarias".[16] De cualquier manera, en el caso de una respuesta favorable se mostraba dispuesto a volver a plantear ante el Consistorio académico la cuestión del acceso de Mme. Kowalewsky a las conferencias de matemáticas.

El alto Consistorio permaneció inquebrantable,[17] y no fue hasta muchos años más tarde, siendo ya profesora en la universidad de Estocolmo, cuando Sonja acabó por obtener permiso, durante una visita a Berlín en vacaciones, para asistir a alguno de los cursos de Weierstrass.

Por su parte, Koenigsberger había respondido de una manera más que satisfactoria a las solicitudes que se le habían hecho llegar. Mme. Kowalewsky reiteró sus visitas a Weierstrass, fue menos tímida y renunció al sombrero de gran ala. Si en las clases de Koenigsberger había estudiado las funciones elípticas, Weierstrass le pasó un cuaderno con sus conferencias sobre las funciones hiperelípticas, y quedó tan satisfecho de la capacidad que desplegó ella para profundizar en ese tema, que se ofreció a darle, en clases particulares, el mismo curso que profesaba en la Universidad.

Ella acudía regularmente a casa de él todos los domingos al mediodía, y Weierstrass le devolvía a ella la visita entre semana. En los intervalos debieron verse a menudo, pese a toda la discreción que ponía Sonja para no abusar del tiempo de su ilustre maestro. En una nota, remitida el día 22 de noviembre de 1872 al domicilio de ella en Berlín, él le escribe ya:

> ... "Todavía no he vuelto a clase, con lo que no me produce ningún molestia sugerirte[18] el camino que en este momento me parece más conveniente. Así que no te preocupes por que me pueda sentir incómodo, que tratándose de mi querida amiga eso no va a pasar nunca."

Esta enseñanza se prolongó desde otoño de 1870 hasta otoño de 1874. Unos ataques de resfriado frecuentes hacían que Weierstrass se encontrase indispuesto a menudo y, además, tanto Sonja como él se ausentaban de la ciudad durante las vacaciones.

A estas circunstancias es a las que se debe una serie de no menos de cuarenta y una cartas de Weierstrass a Sonja, la primera fechada el 11 de marzo de 1871 y la última el 18 de agosto de 1874. Siendo una parte de esta lista cartas de interés científico, ante todo tienen el interés de ser documentos biográficos. En ellas se ven estrecharse las relaciones entre maestro y discípula y, además, cómo Sonja acaba por jugar un papel de importancia considerable en la vida de Weierstrass. Después de que ella dejara Berlín en el otoño de 1874, la correspondencia continuó, a intervalos más o menos dilatados, durante el resto de sus días. La última carta de Weierstrass lleva fecha de 5 de febrero de 1890.[19] Esta otra parte de su correspondencia comprende treinta y siete cartas, cierto número de ellas de gran importancia científica. Como, sin embargo, durante mucho tiempo no se pudieron publicar en su totalidad,[20] más de una opinión y más de un juicio fueron formulados con cargo sólo al testimonio de personas vivas. En cuanto a las cartas de Sophie Kowalewsky a Weierstrass, él las quemó todas tras la muerte de ella,[21] igual que hizo con la mayor parte del resto de su correspondencia recibida y, probablemente también, con más de un manuscrito matemático (lo que aún es más lamentable).

Después de la muerte de Sophie Kowalewsky, Weierstrass supo que sus cartas estaban en mis manos, y no puso ninguna objeción. Sin embargo, yo había declarado no querer leer esas cartas —conocía ya, por la propia Sonja, una parte de ellas correspondiente a la última época— más que en el caso de que yo sobreviviera a Weierstrass. Por tal motivo no puse aquella correspondencia a disposición de mi hermana, la novelista y dramaturga Anne-Charlotte Leffler, y eso explica el poco espacio que da en su biografía* a las relaciones entre Sonja y Weierstrass. De modo que ni pudo mostrar la influencia capital de aquellas relaciones en la vida de la protagonista, ni tampoco dar una idea exacta del talento matemático de Sonja.

Las lecciones de Sonja con Weierstrass comenzaron en el otoño de 1870. Las clases sufrieron su primera interrupción en la primavera de 1871, por causa del arriesgado viaje que emprendió Sonja a París en pleno sitio.[22] La biografía de Anne-Charlotte Leffler relata aquella odisea.[23] Una vez de vuelta en Berlín, ella pasó el semestre de invierno 1871–72 en la compañía de su fiel y devota amiga Julia Lermontoff. Las cartas nos muestran que las lecciones versaban, sobre todo, del tema favorito de Weierstrass, que devino en consecuencia el de Sophie Kowalewsky, a saber, las funciones abelianas. Sonja pasó la segunda mitad del verano de 1872 con sus padres en la villa de Palibino; la estancia en el campo y la certidumbre de que al fin iba a poder proseguir sus estudios predilectos en las condiciones más favorables parecen haber tenido una influencia particularmente benéfica en su salud, que había estado severamente afectada por las emociones y el exceso de trabajo. Regresó a Berlín en octubre, más madura y bella; ya no era una muchacha tímida, sino más bien una mujer plena, de mentalidad muy bien formada y que encantaba invenciblemente por el interés de su conversación a quien se acercara a ella. No parece que Weierstrass hubiera tenido conocimiento antes de ese momento de detalles curiosos de su vida privada ni de las circunstancias relativas a su matrimonio; pero parece ser que la noche del 25 de octubre de 1872, —se puede fijar la fecha gracias a una carta de Weierstrass del día siguiente— y para aliviar el cargo de conciencia que le producía estar mostrándose bajo una falsa apariencia ante los ojos de su paternal amigo y maestro, ella le abrió todo su corazón. La mañana del 26 de octubre de 1872, él escribe:

> ... "He estado muy preocupado contigo esta noche pasada, como no podía ser de otra manera; mis pensamientos vagaban de uno a otro extremos en las direcciones más variadas, pero seguían regresando a un punto sobre el que quisiera hablar hoy mismo contigo. No temas que vaya a tocar temas sobre los que hemos acordado no hablar, al menos de momento. Lo que te tengo que decir está, más bien, estrechamente relacionado con tus esfuerzos científicos, aunque no estoy seguro de que tú, con la amable modestia con la que juzgas lo que serías capaz de conseguir ahora mismo, vayas a estar dispuesta a aceptar mi plan. Pero todo esto sería mejor discutirlo personalmente. Así que, aunque solamente hayan pasado unas pocas horas desde este último encuentro que tanto nos ha acercado permíteme, por favor, visitarte de nuevo esta mañana para que me escuches durante escasamente una hora."

Él quería, sin duda, ofrecerle a Sonja el consejo de adquirir, a través del grado alemán de Doctor, un reconocimiento oficial de la finalización de sus estudios. Una idea que parece, por otra parte, que a Sonja le era ajena, y que si ella finalmente accedió a realizarla fue, posiblemente, más por consideración hacia Weierstrass que por satisfacer un deseo personal.[24] La franqueza de Sonja para con Weierstrass le sería más tarde de gran ayuda para la inevitable explicación a sus padres. Su madre, sorprendida durante una visita a Berlín de la rareza de las relaciones de Sonja con su esposo, había recibido finalmente la confesión del verdadero estado de las cosas. Muy abrumada, trató de hacerle ver a su hija que ninguna persona estimable que conociera la verdad querría proseguir sus relaciones con ella, al menos en Alemania. "¿Qué crees tú que diría Weierstrass, por ejemplo, —pudo objetarle,— si supiese la verdad?" "Pero él lo sabe ya desde hace mucho tiempo", —replicó tal vez Sonja. La hondamente confundida madre no insistiría más.

*Anna Charlotta Leffler, Duchessa di Cajanello: *Sonja Kowalewsky, hvad jag upplefvat tillsammans med henne och hvad hon berättat om sig själf* [Sonja Kowalewsky, lo que viví junto a ella y lo que me contó de sí misma]. Stockholm, Albert Bonniers forlag [1892]. Traducido al alemán por H. von Lenk: *Sonja Kowalewsky, was ich mit ihr zusammen erlebt habe und was sie mir über sicht selbst mitgeteilt hat.* Leipzig, Philipp Reclam jun.; en inglés por L. von Cassel: *Sonja Kowalewsky. Biography and autobiography. I. Memoir. II. Reminiscences of childhood written by herself.* London, Walter Scott, Ltd. (N. de M-L.) [Las acotaciones entre corchetes son nuestras].

[En internet se encuentran libres al menos una traducción danesa, por O. Borchsenius, Copenhague, G. B., 1893, una traducción al francés, [128], que contiene también *Souvenirs d'enfance* (1890) por Sofia Kovalevskaya, y una traducción inglesa, por A. de Furuhjelm y A. M. Clive Bayley, con una nota biográfica sobre Anne Ch. Leffler por Lily Wolffsohn, [136], que contiene también *Sisters Rajevsky* por Sonya Kovalevsky. Nuestras citas posteriores se referirán a esta última edición].

Weierstrass había tratado durante el otoño de 1872, entre otras cosas, del cálculo de variaciones, uno de los temas favoritos de sus conferencias en la universidad, sobre el que volvió en nueve ocasiones.[25] En él había obtenido sus resultados más bellos, gracias a su sagacidad crítica y a la habilidad que tenía para presentar, de manera sencilla y clara, los razonamientos más sutiles. Aunque esas conferencias sean hoy parcialmente conocidas gracias al libro de Kneser,[26] el mundo matemático tiene, desde luego, el derecho de esperar que se respete el supremo deseo expresado por Weierstrass y que, a la mayor brevedad, aparezcan publicadas las conferencias completas.[27] Weierstrass le confió unos manuscritos detallados sobre el tema a H. A. Schwarz,[28] quien quedó al cargo de su publicación. Esperemos que esos manuscritos se encuentren entre los papeles póstumos del fecundo Schwarz. Weierstrass desarrolló igualmente para Sonja la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. A propósito de este tema dice él en una carta del 4 de noviembre:

> …“Sobre las ecuaciones diferenciales lineales tengo además dos notas, escritas hace mucho tiempo, que también te voy a enviar, mi querida amiga (los números 2 y 4 del cuadernillo). Quizá te resulten útiles para una comparación con el método que te presenté ayer, en todo caso te pido que al practicar sobre ello lo hagas básicamente como te dejé indicado. Sólo tendrás que añadir la reducción de las ecuaciones diferenciales de orden superior a la forma que yo elegía ayer.”

Es verdad que Weierstrass había escrito en dos ocasiones unas cuantas páginas sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. La primera vez, en 1861, había elegido una exposición semejante a la que emplearía más tarde Casorati.[29] El segundo trabajo, escrito en 1863, es parecido al que publicó más tarde Hamburger.[30] Muy pronto, probablemente después de sus primeros años de estudio, Weierstrass había profundizado en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. Entre sus papeles póstumos se ha encontrado una exposición particularmente elegante de esa teoría.[31] Es muy probable que, después de ese momento, emprendiera el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. Sabemos que usó esta teoría en sus investigaciones sobre superficies mínimas limitadas por líneas rectas. Cuando, ya con una edad avanzada, pensó en publicar sus trabajos, trató en vano de recuperar aquellas dos exposiciones de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. Sophie Kowalewsky recordaba perfectamente haberlas tenido en las manos y creía que se las había devuelto a Weierstrass. Es posible que desaparecieran al mismo tiempo que otro gran número de manuscritos. Weierstrass tenía la costumbre de llevar consigo en los viajes una caja grande de madera blanca conteniendo notas hechas por él sobre diversos temas matemáticos. Sonja sintió siempre la máxima preocupación por la suerte de aquellos documentos. La caja fue facturada un cierto día de 1880 con algún otro equipaje, pero faltó a la llegada y ya nunca pudo volverse a encontrar. Por otra parte, tampoco es que Weierstrass tuviera sus papeles y anotaciones muy bien organizados. Los prestaba a quien se los pidiera sin preocuparse mucho de saber si se le devolvía lo que había prestado. Sería esperable que fuera posible reunir todavía un gran número de manuscritos de Weierstrass desaparecidos de esa forma. Si se pusieran a disposición de la redacción de *Acta Mathematica*, serían publicados sin demora.

Aunque las dos exposiciones de las que se habla en la carta a Sophie Kowalewsky posiblemente se hayan perdido para siempre, fuera cual fuese el modo como se produjo tal catástrofe, nos podemos hacer sin embargo una idea bastante exacta de su contenido mediante otras notas que hemos logrado reencontrar. Una característica de la manera de trabajar de Weierstrass era recomenzar varias veces la redacción de cada trabajo, a menudo según diferentes principios y razonamientos, hasta conseguir una perfecta claridad. Para él un simple resultado no tenía mucho valor. Quería profundizar completamente en las causas últimas de ese resultado y trataba de dar, en cada caso particular, una demostración que se pudiera considerar la única apropiada y la única natural. Solamente llegando a ese punto juzgaba que su estudio estaba maduro para la publicación. Aunque muchas veces tenía que diferir la publicación porque quería agotar de la misma manera otras cuestiones laterales.

Antes de verse publicado, cada trabajo debía presentarse como un todo acabado en todos los sentidos. En general, las redacciones preliminares eran destruidas por el propio Weierstrass. Sólo parece haber conservado deliberadamente las distintas redacciones de la teoría de las funciones abelianas, y entre sus papeles póstumos se hallan hasta cinco exposiciones diferentes.

Examinando con cuidado los papeles póstumos de Sophie Kowalewsky que, por otra parte, se encontraban en el mayor desorden, he tenido la suerte de descubrir un esbozo preliminar del cuaderno de 1863, escrito de propia mano de Weierstrass y fechado por él. Además he encontrado una hoja suelta que, cotejando los papeles legados por el propio Weierstrass, he reconocido que pertenecía a un esbozo del cuaderno de 1861. Entre los papeles de Sophie Kowalewsky se encuentra aún un tercer esbozo de la mano de Weierstrass y que formaría parte probablemente de un manual aún más antiguo que los anteriores. Ninguno de estos esbozos está terminado ni admite una forma que permita incluirlo en la edición de las Obras de Weierstrass. Pero tendría gran interés publicarlos a título de documentos. De ellos se desprende de forma irrefutable, entre otras cosas, que la célebre teoría de Weierstrass concerniente a los “divisores elementales” de las formas bilineales y cuadráticas[32] tuvo su origen en sus trabajos sobre las ecuaciones diferenciales lineales. También se ve claramente que alguna de las cuestiones fundamentales relativas a las ecuaciones diferenciales lineales que fueron retomadas más tarde no era extraña para Weierstrass hacia 1861–63, a excepción, en todo caso, de los importantes problemas que resolvió Poincaré.

En la primavera de 1873 tanto Weierstrass como Sonja cayeron enfermos y hubo un intercambio de cartas entre ellos. Sonja viajó a Suiza esperando recuperar las fuerzas allí y Weierstrass le envió consejos paternales requiriéndole que descansara lo suficiente y olvidase las matemáticas por una temporada. El 18 de abril de 1873, él le dice:

> “Si realmente tienes la intención de estar aquí de nuevo el 1 de mayo, —quiero decir, si esa intención se puede llevar a efecto—, me gustaría aconsejarte que, hasta entonces, evites cualquier trabajo serio —como si pudieras pensar en estas cosas con la vida tan agitada que llevas—, y reserves tus fuerzas para los estudios regulares que reanudaremos a tu vuelta. Espero que en los meses de verano avancemos tanto, al menos, que puedas adquirir el fondo material para algún trabajo que merezca la pena y que podrías hacer en el otoño.
>
> — — — — — — — — — — — — — — — — —
>
> Mientras tanto, he recibido bastantes visitas de amigos matemáticos, que en buen número han llegado aquí durante las vacaciones de Pascua, y casi todos ellos me han dedicado unas horas más de una vez. En particular, he hablado con Heine de Halle y con Baltzer de Giessen,[33] *con este último también sobre la “Geometría en un espacio finito”*, asunto por el cual el resto de mis amigos matemáticos, —con excepción de la querida pequeña que tú sabes—, tienen poca simpatía. Te informo de esto para que no vayas a creer que estoy enfermo de gravedad o tan afectado que con motivo de ello haya disminuido mi interés por lo que siento más cerca del corazón.”

La concepción que tenía Weierstrass de la “Geometría en un espacio finito” se vuelve a encontrar parcialmente, después de él, en los trabajos de Killing,[34] si bien compendiada de una manera no muy satisfactoria. Parece ser que Weierstrass, en sus conversaciones privadas con Sonja, se ocupó mucho de este tema y, sobre todo, de la mecánica en dicho espacio. Sonja conservó siempre el más ardiente entusiasmo por las ideas de Weierstrass en torno a ello; decía que Weierstrass había creado toda una nueva mecánica que superaba en sencillez, claridad y elegante definición de las leyes naturales antiguas y modernas, a la mecánica actualmente en vigor y que, sin embargo, la suya no tenía ninguna relación con los intentos de otros estudiosos en la misma dirección. De una carta que data de unos días más tarde (25 de abril) se desprende que la enfermedad de Weierstrass había sido esta vez bastante seria.

> “Pero menos mal que el miedo que yo tenía al principio de que hubiera podido reaparecer una antigua dolencia que interfirió en mi vida de una manera muy disruptiva, ha resultado ser completamente infundado … He trabajado poco y con muy poco éxito, incluso habiendo estado a veces enfrascado en mis cavilaciones todo el día; ni querían surgir ideas nuevas, ni las viejas se aprestaban a ser expresadas con palabras de la manera en que las tenía en la cabeza.

El carácter cordial de las relaciones entre el maestro y la alumna, que prevalecía en la primavera de 1873, se desprende de lo que sigue ahora. Sonja, en un momento de desánimo, expresa el temor de que “la estudiante podría ser una molestia para él, Weierstrass”. Él responde:

> “… Con toda seriedad, queridísima, apreciadísima Sonja, ten la seguridad de que nunca olvidaré que es a la gratitud de mi alumna a lo que debo agradecer el disfrute, no de mi mejor amiga, sino de mi única amiga de verdad. Entonces, si mantienes en el futuro la disposición que me has mostrado hasta ahora, puedes contar con el hecho de que siempre estaré a tu lado en tus esfuerzos científicos.”

Sonja volvió a Berlín en mayo de 1873 y las enseñanzas prosiguieron como antes. En el mes de agosto, Weierstrass fue a pasar una temporada a la isla de Ruegen y Sonja marchó a Suiza. De esa época (20 de agosto de 1873) resta una larga carta de Weierstrass, en la cual escribe:

> "Apenas me he puesto a trabajar todavia, exceptuado que le envié a Richelot[35] una carta bastante detallada conteniendo una descripción concisa de las investigaciones en las que he estado ocupado durante los últimos años. Y lamentablemente recibí una respuesta muy triste; Richelot, un amigo tan querido para mí, se encuentra gravemente enfermo a causa de una afección crónica, y dice que probablemente me esté escribiendo su última carta; aunque contesta con gran interés a mis comunicaciones, habla principalmente de sus deseos en relación con la renovación de su cargo, que por su parte recomienda encarecidamente que sea para mí."

Weierstrass cita a continuación, de la carta de Richelot, la siguiente opinión sobre sus trabajos acerca de las funciones abelianas:

> "El camino que tomas hacia la cuestión matemática más importante de este siglo es directo, diferente y más natural que el de Riemann, Clebsch y Gordan, y lo sigues hasta un límite establecido con claridad, lo que para mí es de la mayor importancia. Todavía lamento que no hayas querido publicar la segunda parte (sobre las funciones hiperelípticas) de tu primera memoria,[36] que ya contenía la esencia de tu método. Ni las Obras de Riemann ni el libro de Clebsch y Gordan[37] deberían haberte detenido. Pero supongo que habrás tenido razones de peso para hacerlo así."

Weierstrass dice que está encantado de la naturaleza y el clima de la isla de Ruegen, que ha pensado muchas veces en Sonja y ha deseado que se encontrase cerca:

> "Qué bien podríamos —tú con tu espíritu imaginativo y yo estimulado y rejuvenecido por tu entusiasmo— soñar aquí, fantaseando sobre tantos enigmas que nos quedan por resolver, *sobre espacios finitos e infinitos, sobre la estabilidad del sistema solar* y todas esas otras grandes tareas de las matemáticas y la física del futuro. Pero con el tiempo he llegado a aceptar que estos hermosos sueños nunca se harán realidad.[38]

Y se inquieta a propósito de la salud de Sonja:

> "Me llamó la atención, querida amiga, que en tu última carta guardabas completo silencio sobre tu estado de salud. Lo cual me podría tranquilizar, por supuesto, en la medida en que no hablaras de ello porque te encuentras perfectamente; pero ya sabes que soy poco amigo de las demostraciones indirectas, que nunca dan plena satisfacción. Por eso te ruego una información directa."

Sonja regresó a Berlín a finales de octubre de 1873, y las lecciones con Weierstrass retomaron su curso. Sin embargo, él fue nombrado rector de la universidad durante el curso 1873–74, y los deberes de su cargo le obligaron a economizar extraordinariamente su tiempo disponible.[39] Con todo, parece que en la compañía de Sonja encontró la mejor distracción de aquellas ocupaciones que tan poco encanto tenían para él. El 19 de noviembre le envía a ella:

> "... una serie completa de "Canciones sin palabras", todas ellas relacionadas con las superficies minimales delimitadas por segmentos rectilíneos. Encontré las hojas sueltas ayer mismo por la noche; representan diferentes etapas de la investigación, de manera que lo que finalmente quede no será tan extenso. Te ruego, sin embargo, que las mantengas exactamente en el orden en que van dispuestas, sobre todo porque sin una explicación oral van a ser indescifrables para tí. Pero las he querido poner ya en tus manos de manera inmediata para que no se vayan a traspapelar conmigo otra vez.[40]
>
> Y antes de nada, para que podamos aprovechar el tiempo de una manera más útil, te agradecería que repasaras un poco, hoy mismo ya, lo que llegué a explicarte ayer; porque así podríamos proseguir de manera inmediata, tan pronto quizá como el próximo domingo, con el desarrollo de las ecuaciones diferenciales lineales, a las que lleva el problema que te dejé para resolver. Por otra parte, seguramente quedan todavía algunos detalles, concernientes a la teoría general de dichas ecuaciones diferenciales, que hay que explorar para sacar a la luz la naturaleza de las relaciones transcendentes que existen entre los coeficientes de la ecuación. Relaciones que están completamente ausentes en Riemann, siendo éste uno de los defectos principales de su teoría".[41]

En una carta del 6 de diciembre de 1873, que contiene diversas adiciones a su última lección, escribe:

> "En relación con lo que discutimos en la última sesión, tengo algo interesante que contarte. Hasta ahora habíamos supuesto que la función $\varphi(s)$ es puramente imaginaria y que tiene factores simples distintos.[42] Pero esto último no es necesario. Porque todas las leyes de multiplicación y de división se conservan, sin hacer ninguna suposición sobre la naturaleza de $\varphi(s)$, si se presenta la multiplicación de dos números complejos
>
> $$f(e) = a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots + a_{2r-1}e_{2r-1}$$
> $$g(e) = b_0e_0 + b_1e_1 + \cdots + b_{2r-1}e_{2r-1}$$
>
> así: Sea
>
> $$f(e)g(e) = h(e) = h_0e_0 + h_1e_1 + \cdots + h_{2r-1}e_{2r-1}$$
>
> si $f(s)g(s) - h(s)$ es divisible por $\varphi(s)$. Ahora, para que toda ecuación
>
> $$F(x, e) = 0,$$
>
> es decir,
>
> $$f_0(e)x^n + f_1(e)x^{n-1} + \cdots + f_n(e) = 0,$$
>
> tenga solución, es necesario que $\varphi(s)$ (considerada como una función ordinaria de s) no se anule para ningún valor real de s pero, de hecho, sólo se requiere esta condición. Si $\varphi(s)$ tiene factores repetidos, de modo que es
>
> $$\varphi(s) = (s^2 + k_1s + \ell_1)^{\nu_1} \cdots (s^2 + k_\mu s + \ell_\mu)^{\nu_\mu},$$
>
> donde los k, ℓ son números reales y $\nu_1 + \nu_2 + \cdots = r$, se modificaría el teorema sobre el número de raíces de una ecuación, de manera que tal número ya no será igual a n^r como ocurría en el caso en que ν_1, ν_2, ... eran, a saber, iguales a 1. Bien, pues ahora piensa, mi querida alumna, ¿cómo debería ser $\varphi(s)$ —es decir, qué ley de multiplicación habría que suponer— para que una ecuación de grado n tuviera, en general, sólo n raíces?"

La teoría de Weierstrass sobre los números complejos con n unidades principales no se publicó hasta 1884.[43] En relación con esa teoría, Weierstrass me escribía el 7 de junio de 1880:

> "Responderé a su consulta acerca de cuál fue la primera vez que presenté algo sobre los números complejos generales, en el sentido de que eso tuvo lugar en el semestre de invierno de 1861–62; un tal sr. Schütz publicó una parte de mi conferencia en aquel momento sin nombrar su fuente. Después traté el tema con más detalle dos veces en el Seminario. A la primera de estas conferencias, sobre la que el sr. Kossak[44] publicó un informe bastante pobre, en el que faltaban los elementos esenciales, también asistió el sr. Hatzidakis,[45] quien luego realizó una investigación propia sobre el tema. Y tengo entendido que el sr. Hettner[46] conserva un resumen de alguna conferencia posterior. Fue la observación final de la breve comunicación de Gauss sobre el significado de los números complejos (en la reseña que él mismo hizo de sus investigaciones sobre los restos bicuadráticos)[47] lo que me estimuló a profundizar en el tema."

Todo esto caracteriza el método de trabajo de Weierstrass. Da conferencias sobre investigaciones tan importantes en 1861, y no las publica sino hasta 1884. Y, probablemente, aún debamos esta publicación a la insistencia del sr. Schwarz. El 6 de mayo de 1874 Weierstrass escribe:

> "En relación con el tema del que hablamos el domingo, ahora te puedo comunicar lo que sigue:
>
> Sea λ una variable real y $f(\lambda)$ una función de dicha variable, sujeta solamente a las siguientes condiciones:
>
> 1) Para valores *finitos* de λ, es decir, cuando esta cantidad se hace variar entre dos límites finitos arbitrarios λ_1, λ_2, no se puede hacer infinitamente grande.
> 2) Puede ser discontinua o indeterminada en cualquier número de puntos, incluso en un número infinito de ellos, pero de tal forma que la integral $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, d\lambda$, según la interpretación de Riemann, tenga sentido. (Véase la memoria de Riemann sobre la serie de Fourier.[48])

3) Cuando λ tiende a los límites $-\infty$, $+\infty$, $f(\lambda)$ no necesariamente permanece finita, pero debe ser tal que
$$\frac{\log|f(\lambda)|}{\lambda^2}$$
se anula para $\lambda = \pm\infty$. (Este es el caso, por ejemplo, cuando $f(\lambda)$ tiende a infinito como una potencia de λ, o como $e^{\alpha\lambda^\beta}$, donde α, β son cantidades positivas y $\beta < 2$.)

Entonces es válido el siguiente teorema: Si u, v, w son variables complejas, la primera de las cuales cumpliendo la condición de tener siempre positiva la parte real, entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{-(u\lambda^2+v\lambda+w)}\,d\lambda$$

toma siempre, para valores finitos de u, v, w, un valor bien determinado e *igualmente* [ebenfalls] finito, y es una *función regular* [reguläre Function] de u, v, w. De modo que, si u', v', w' es un sistema de valores determinados de u, v, w, dicha integral puede desarrollarse en una serie de potencias enteras positivas de $u - u'$, $v - v'$ y $w - w'$, serie que será siempre convergente si se supone que u está tan cerca de u' que todos los demás valores de esa cantidad que están a la misma distancia de u' que u tienen también positiva su parte real.

Además, esta serie se obtiene al desarrollar

$$f(\lambda)e^{-(u\lambda^2+v\lambda+w)}$$

según las potencias de $u - u'$*,* $v - v'$ *y* $w - w'$ *e integrando a continuación, de* $-\infty$ *a* $+\infty$*, cada coeficiente de la serie así obtenida.*

Este teorema, aplicado a la integral[49]

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4t}}\,d\lambda$$

muestra el siguiente hecho: si la cantidad t está sujeta a la condición de que su parte real sea siempre positiva (y, por consiguiente, lo sea también la parte real de $\frac{1}{t}$), mientras que x varía sin limitaciones, la integral se puede desarrollar en una serie uniformemente convergente, de la forma
$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\left\{\varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \cdots + \varphi_n(t)x^n + \cdots\right\},$$
donde $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, ... son funciones regulares de t. Además, $\varphi(x,t)$ satisface la ecuación diferencial
$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}$$
en todo el dominio (x,t) para el cual esté definida la función.

La demostración del teorema enunciado es muy sencilla; se puede incluso establecer uno mucho más general, que muestra cómo se puede, a partir de funciones completamente arbitrarias de una variable real λ, deducir funciones analíticas de variables complejas.

De todo esto y de muchas otras cosas que se relacionan con ello ya hablaremos con más detalle.

Ya ves, mi muy querida Sonja, cómo tu comentario, que tan simple te pareció, sobre la peculiaridad de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que pueden ser satisfechas *formalmente* por una serie infinita, sin que esta serie tenga que converger para ningún sistema de valores de sus variables, ha llegado a ser para mí el punto de partida de unas investigaciones que tienen mucho interés y explican muchas cosas.

Deseo que mi alumna pueda continuar dando, de esta manera, testimonio de su gratitud a su maestro y amigo."

No voy a ocuparme aquí de la parte matemática de la comunicación de Weierstrass. Sólo haré notar que algunos envidiosos han querido hacer creer que Sonja, al redactar su tesis doctoral, no había sido tan independiente como habría debido, y que le debía a Weierstrass más de lo que ella misma admitía. Prueba de lo contrario son hoy para nosotros las propias palabras de Weierstrass.

La demostración de que la ecuación diferencial

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}$$

es satisfecha formalmente por una serie de potencias que no converge para ningún sistema de valores de las variables independientes, era una de las partes más originales de la tesis y en esa época era un descubrimiento de alta importancia.[50] Más adelante volveré sobre otra anotación de Weierstrass a este respecto.[51] Las palabras sencillas y cordiales de Weierstrass muestran, mejor que todo comentario que podamos hacer, el tipo de relaciones que existían entre el maestro y su devota alumna.[52] Todavía él escribe, el 9 de mayo:

> "Un pequeño problema: La ecuación diferencial en derivadas parciales
>
> $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
>
> admite la integral particular
>
> $$\varphi = (\mu t)^{-\nu} F(u), \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu t}}(x-\lambda),$$
>
> donde λ, μ, ν designan constantes arbitrarias y $F(u)$ es una solución de la ecuación diferencial
>
> $$F''(u) + \frac{1}{2}\mu\, uF'(u) + \mu\,\nu F(u) = 0.$$
>
> ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?[53]
>
> Para $\mu = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ se puede poner
>
> $$F(u) = f(\lambda)e^{-\frac{u^2}{4}}$$
>
> y, a partir de la integral particular
>
> $$\varphi = \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{4}\,\frac{(x-\lambda)^2}{t}},$$
>
> se deduce la general[54]
>
> $$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{4}\,\frac{(x-\lambda)^2}{t}}\,d\lambda.$$
>
> Pero si, para valores infinitamente grandes de λ, $f(\lambda)$ se hace infinita en mayor medida que la función[55]
>
> $$e^{c\lambda^2}$$
>
> donde c es una constante que puede ser tan pequeña como se quiera, entonces la expresión precedente ya no tiene ningún sentido. ¿Se podría, en este caso, empleando una función general $F(u)$ que satisfaga a la ecuación diferencial escrita más arriba, para otros valores de las constantes, llegar a una expresión utilizable? ¿O es que la función arbitraria está *necesariamente* sujeta a la restricción de que deba ser
>
> $$\frac{\log|f(\lambda)|}{\lambda^2} = 0$$
>
> para $\lambda = \pm\infty$?"

Sonja recibió en otoño de 1874 "in absentia" su diploma de doctor en Gotinga.[56] En la biografía que presentó en la universidad de Gotinga para la ocasión, hacía una semblanza de su vida precedente:

"Vita.[57]

> Sophia de Corvin Krukovskoy, nací en Moscú el año 51 de este siglo, de padre Basilio[58], que sirvió como oficial en el ejército ruso, y madre Elisabeth, de la familia Schubert, ambos vivos aún lo que es motivo para mí de honda alegría.
>
> Mi nombre gentilicio cambió por el suyo al casarme, el año 1868, con Waldemaro de Kowalewsky, doctor en filosofía.
>
> Fui instruída en la fe católica griega.
>
> En la infancia, durante mi estancia en San Petersburgo o en la villa paterna de nombre Palibino, no fui confiada a maestros públicos, sino que recibí los elementos de la instrucción en mi propia casa, por parte de preceptores literarios. De este modo, a la edad de quince años aprendí los principios matemáticos de geometría y aritmética, lo que podríamos llamar los rudimentos analíticos, por los que sentí un gusto particular, así como las nociones de los cocientes diferenciales y de las integrales. Y fue, ciertamente, para entregarme por entero a estos saberes de mi predilección por lo que el año 1868 me dirigí, acompañada de mi marido, a Heidelberg donde, como la amabilidad del ilustrísimo vicerrector de la universidad literaria, Kopp[59] en aquel tiempo, me permitiese asistir a las aulas de matemáticas, pude escuchar durante tres semestres a los brillantes profesores de matemáticas y física du Bois-Reymond, Helmholz, Kirchhoff y Koenigsberger, así como asistir asiduamente a las clases prácticas de física y de matemáticas que preparaban para mí Kirchhoff y Koenigsberger, a los cuales, como a todos mis preceptores, siempre honraré con espíritu piadoso y agradecido.
>
> En el mes de octubre del año 1870 me mudé a Berlín, y como allí, por las normas académicas, no me estaba permitido asistir a las aulas públicas, recurrí a la extraordinaria generosidad de Weierstrass. Valga decir que durante cuatro años me ayudó con su consejo y su autoridad, no sólo instruyéndome en los mismos conocimientos que él transmite públicamente a sus oyentes, sino compartiendo también conmigo, libérrimamente, muchas cosas que no tenía todavía publicadas. Creo que nunca podré agradecerle cumplidamente esos favores y concesiones magnánimas que me ha otorgado.
>
> Dado que he regresado a mi patria, me atrevo a presentar dos memorias, primicias, a saber, de mis estudios con mi carísimo maestro y preceptor e ilustrísimo miembro del claustro de filosofía de Gotinga, una de las cuales concierne a la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales y la otra trata sobre un cierto problema abierto de la física matemática; ruego que, si son aprobadas, sirvan para conferirme los honores de Sumo en filosofía."

Sonja volvió a Rusia en septiembre de 1874. Con el sistema nervioso severamente afectado por el duro trabajo de los últimos tiempos, necesitaba tranquilidad y reposo, tratamiento que también le recomendaba vivamente Weierstrass en una carta de 21 de septiembre de 1874:

> "Por experiencia propia sé lo desgraciada que le puede hacer sentirse a una persona tener la cabeza llena de problemas y no poder atacarlos porque, físicamente, le faltan las fuerzas."

Cree que si ella quisiera seguir sus consejos, esa fotografía que espera recibir se asemejará

> "... a esa imagen, que pervive en mi memoria, del momento en que regresaste de tu tierra natal hace dos años."

Weierstrass había hecho un viaje de tres semanas con sus hermanas:[60]

> "En el Rin disfruté mucho de los recuerdos de mi juventud; qué grato sería que se me permitiera volver a recorrer la misma ruta en compañía de la querida amiga que un destino benévolo me dejó encontrar en los últimos años. Me sentí raro al volver a recorrer un paseo donde hace muchos años había estado con un amigo, y que en aquel momento fue determinante para que la decisión, durante largo tiempo considerada, de llegar a ser un matemático pasase finalmente de la idea al hecho. Sólo así tendría yo un futuro —él por su parte esperaba conseguir una posición de jurista científico en la república académica. Bien, pues he mantenido mi objetivo a la vista y estoy satisfecho con lo que he conseguido, aunque no todos aquellos floridos sueños se hayan hecho realidad; por cierto que aquel amigo renunció más tarde a una carrera científica, que había emprendido con brillante éxito, a cambio de progresar más rápidamente en la administración pública; ahora ocupa un cargo destacado, pero se ha convertido en un fanático tan irritante, y tan reaccionario políticamente, que ya no cabe entendimiento posible entre él y yo."[61]

En Heidelberg, Weierstrass había vuelto a estrechar los lazos de amistad que le unían con Kirchhoff y que ya nunca se aflojaron.

> "Desde siempre he mantenido una buena relación con Kirchhoff, y ambos esperamos obtener un provecho duradero también de nuestra colaboración actual. En concreto, tengo el proyecto de que pudiera venir a Berlín a ocupar un puesto en la Academia que le permitiría tener el tiempo libre necesario para desarrollar un programa completo para la física matemática. De esa manera prestaría un servicio esencial a la ciencia, pero incluso a sí mismo, porque ni las condiciones en Heidelberg son atractivas ya para él, ni tampoco el trabajo en física experimental. He llegado a un acuerdo con él sobre las condiciones en las que estaría dispuesto a venir aquí, y tengo confianza en que se puedan cumplir."

Una larga carta fechada el 15 de octubre, que contenía "un suplemento matemático" al que Weierstrass parece haber otorgado cierta importancia, no llegó nunca a su destino. Weierstrass se lamenta de esto en una carta del 12 de enero del año siguiente, 1875:

> "Me disgusta mucho que se perdiera mi carta de mediados de octubre, junto con el suplemento; pero no sé qué se podría hacer para recuperarla."

El 16 de diciembre de 1874 Weierstrass contesta a una carta de Sonja en la cual ella le contaba la parte activa que había comenzado a tomar en la vida social de San Petersburgo.

> "Por lo demás, ya me imaginaba desde el principio que, tras una privación tan prolongada de toda relación social, en los primeros meses de tu estancia en Petersburgo no ibas a llegar a tener una ocupación seria y estable, de manera que cuando me escribes que eso es exactamente lo que ocurre no me dejas muy preocupado, en parte por la convicción de que alguna distracción después del largo esfuerzo anterior no va a perjudicar tu bienestar físico, en parte también por la absoluta confianza en que tu espíritu crítico y tu inclinación entusiasta hacia las empresas ideales no te permitirán aguantar una abstención del trabajo científico demasiado duradera. Por lo tanto, siempre que sea tu propio gusto y no cedas a influencias externas, abandónate a esos placeres desconocidos de la vida mundana; sé que nunca le serás infiel a la ciencia y que tu impulso creador, aunque en ocasiones dé paso a un relajamiento razonable, siempre retornará a la existencia, incluso con mayor intensidad. Sin negar, desde luego, que en no pocas ocasiones necesitarás de estímulo y aliento externo."

El 15 de octubre Weierstrass quedó finalmente liberado del cargo de rector de la universidad:

> "Tras volver a ser un hombre libre el día 15 de octubre, sentí tanta añoranza por la actividad matemática que los últimos dos meses se me han pasado en un suspiro, de manera que hoy hasta he pensado que tenía que estar equivocado, al encontrarme en las manos con una carta sin contestar de fecha 19 de octubre. En lo que respecta a resultados de mi trabajo, con el que no estoy del todo insatisfecho, compartiré ahora algo de ello contigo.
>
> En primer lugar, y concerniente a mis conferencias, tuve que rellenar una laguna en la teoría de funciones. Como sabes, la siguiente cuestión aún no tenía respuesta: Si se da una sucesión infinita de cantidades cualesquiera[62]
>
> $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ \infty$$
>
> ¿existe siempre una función transcendente entera de una variable x que cumple la condición de anularse para $x = a_1,\ a_2,\ \ldots$ —y, a saber, de manera que la multiplicidad correspondiente a cada una de estas cantidades es igual a λ si dicha cantidad aparece repetida λ veces en la sucesión—, pero no para ningún otro valor de x?
>
> Para una respuesta afirmativa a esta pregunta aparece inmediatamente, como condición necesaria, que el valor absoluto de a_n, a partir de que n exceda un cierto límite, permanezca siempre mayor que una cantidad dada arbitrariamente; pero aún no había podido demostrar que esa condición es también suficiente. La pregunta queda resuelta ahora mediante el siguiente teorema:

Asignemos a la sucesión dada

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

de la cual inicialmente se supone que ninguno de los términos es cero, una sucesión de números enteros positivos (el cero contado como tal)

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n,\ \ldots,$$

de tal manera que la suma

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^{\nu_1+1} + \left(\frac{x}{A_2}\right)^{\nu_2+1} + \cdots,$$

donde A_n representa el valor absoluto de a_n, tenga un valor finito para todo valor positivo de x. Esto siempre es posible; a saber, se puede tomar

$$\nu_1 = 0,\ \nu_2 = 1,\ \nu_3 = 2,\ \ldots,\ \nu_n = n-1,\ \ldots.$$

Además, si se pone

$$\begin{aligned}
E(x)_0 &= 1 - x \\
E(x)_1 &= (1-x)e^{x} \\
E(x)_2 &= (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
E(x)_n &= (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}},
\end{aligned}$$

entonces, para todo valor finito de x, el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}\right)_n$$

tiene un valor finito independiente de la sucesión de sus factores, y es la expresión de una función analítica de x que en todo dominio finito tiene el carácter de una función polinómica y que para $x = a_1,\ a_2,\ \ldots$ se anula de la forma especificada.

La demostración del teorema se puede llevar a cabo de manera completamente elemental; no te perderás si usas de ayuda el capítulo del cuaderno sobre funciones elípticas que trata de la representación mediante productos infinitos de las funciones enteras transcendentes.[63]

Se enlaza con éste además el siguiente teorema (que en mi *Teoría de las funciones abelianas*[64] se presentaba aún como no demostrado):

Toda función analítica univaluada de x que para cada valor finito de esa variable tiene el carácter de una función racional, se puede siempre representar como el cociente entre dos series ordinarias de potencias uniformemente convergentes tales que las series numerador y denominador no se anulan simultáneamente para ningún valor de x.[65]

Le sigue a esto la cuestión acerca de la expresión analítica general de una función univaluada de una variable para la cual existan, como argumento de la función, un número finito de puntos límite en cuya vecindad queda indeterminada, como sucede en el infinito para el caso de una función entera transcendente.

La recopilación de todos estos teoremas dio como resultado una pequeña memoria muy bonita que leí anteayer en la Academia y que aparecerá en el número de diciembre de los *Monatsberichte*. No hay que decir que te la enviaré lo antes posible."

Pero la memoria no se imprimió sino hasta 1877 en las Memorias de la Academia de Berlín.[66]

Weierstrass fue diputado por la universidad de Berlín a las celebraciones jubilares de la universidad de Upsala en septiembre de 1877. Llevó allí su memoria con una dedicatoria para la universidad.

Se dice más adelante en la misma carta:

"Es más interesante para tí el tema del que aún sigo ocupándome; en relación con ello, desafortunadamente sólo puedo informarte de cierta esperanza de éxito, en principio, y debo reservar una comunicación más detallada para la discusión oral.

Recordarás, querido corazón, aquellos días en los que, como nuestra amistad se había hecho más íntima, sentía yo a veces la necesidad de hablar también contigo de los proyectos que me gustaría desarrollar, y ambos nos perdíamos en fantasías y elucubraciones científicas, discutiendo a menudo sobre las condiciones de estabilidad del sistema del mundo y las variadas cuestiones con las que dicho problema se relaciona. Sabes entonces bien que el problema matemático ahí involucrado se puede formular de la siguiente manera:

Para la determinación de n funciones de una cantidad real t, se dan n ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_1}{dt} = G_1(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = G_n(x_1, \ldots, x_n)$$

donde $G_1, \ldots, G_n$ denotan funciones polinómicas[67] de $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes reales. Se plantea la pregunta: ¿Cómo deben ser estas funciones G y qué condiciones deben cumplir los valores de $x_1, \ldots, x_n$ para $t = 0$, de modo que $x_1, \ldots, x_n$ resulten ser funciones regulares de t (entre los límites $-\infty$ y $+\infty$)? En particular, hay que determinar también las circunstancias bajo las cuales cada una de las cantidades x oscile uniformemente entre límites finitos. Y finalmente se deben encontrar, si es posible, unos desarrollos de $x_1, \ldots, x_n$ que correspondan a su carácter funcional.[68]

Me he estado ocupando de este problema muy en serio durante varias semanas, y creo haber encontrado un camino que algún día podría conducir a la meta, aunque va a requerir aún mayor esfuerzo conseguir hacerlo viable de verdad. Sólo quiero darte una indicación, lo único que puedo exponer sin extenderme demasiado. Como sabes, si se dan los valores iniciales de $x_1, \ldots, x_n$, entonces siempre se pueden especificar unas expresiones analíticas, para $x_1, \ldots, x_n$ como funciones de t, que satisfagan las ecuaciones diferenciales y sean válidas para un cierto intervalo limitado del tiempo. Ahora bien, para mí es claro que si $x_1, \ldots, x_n$ son, de hecho, unas funciones como las que se requieren, siempre se van a poder encontrar unas funciones polinómicas $y_1, \ldots, y_n$ de $x_1, \ldots, x_n$ satisfaciendo unas ecuaciones diferenciales similares, pero constituídas ahora de tal manera que las expresiones en t obtenidas a partir de ellas resulten ser válidas para un intervalo de tiempo más amplio. Pero con esas nuevas ecuaciones diferenciales se podría seguir, a continuación, procediendo de la misma manera. Entonces, como intuirás, en el caso en que, de acuerdo con la naturaleza de las ecuaciones diferenciales originales y los valores iniciales asumidos, dicho proceso pudiera proseguir indefinidamente, esto proporcionaría información completa sobre el dominio de definición de las funciones incógnita.

En el caso, principalmente en consideración, de los problemas reales de la astronomía y la física matemática, es evidente, además, que las aproximaciones sucesivas pueden realizarse mediante la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, por lo que surge la posibilidad de obtener desarrollos convergentes. Por supuesto, esto que estoy diciendo sólo te dará una noticia muy imperfecta de mis ideas; pero es que tampoco están tan maduras como para poder expresarme sobre ellas con suficiente claridad.

Te he extrañado también mucho durante esta temporada porque hablando contigo habría podido llevar algunas ideas a su pleno desarrollo más fácilmente de lo que me es posible cuando medito en solitario sobre ellas. Sin embargo, por mucho que me interese el tema anterior, de momento tengo que abstenerme de profundizar en él, porque antes tengo que cerrar los demás asuntos que esperan una elaboración definitiva por mi parte; y veo que con eso ya tengo trabajo suficiente para el resto de mi vida. Aún así, estoy muy satisfecho por haber dedicado unas semanas a reflexionar sobre ese problema de tanta importancia para mí; ahora me doy cuenta, al menos, de que el proyecto que tengo por delante está bien definido."

El problema que Weierstrass había formulado aquí le había preocupado, aparentemente, desde el comienzo de su carrera científica. Volvía también incesantemente sobre él. Cuando, en 1885, recibió el nombramiento de miembro del jurado del concurso para el cual el rey Óscar II quería instituir un premio con ocasión de su jubileo, fue el encargado de elegir el tema del concurso. Propuso obtener explícitamente los desarrollos de $x_1, \ldots, x_n$ de los que habla en la carta a Sonja. El premio, como es sabido, lo ganó Poincaré.[69] Vemos con ello el valor que Weierstrass reconocía a sus conversaciones con Sonja, incluso para sus propias investigaciones. Dice más adelante:

> "Una cosa más. He recibido respuestas de aprobación de varios colegas a quienes envié tu disertación doctoral. Por ejemplo, de Kirchhoff, Heine, Schwarz, Schering[70] y, sobre todo, de P. Dubois,[71] que está encantadísimo con tu carta autógrafa adjunta; en cualquier caso, pronto recibirás una carta suya muy amable, quizás incluso de admiración. También Heine está muy satisfecho con tu trabajo y, en mi opinión, comprende mejor su verdadero objetivo."

Parece ser que Sonja contestó, en una carta que le llegó a Weierstrass hacia Navidad, porque el día primero de año de 1875 él escribe:

> "Mi querida Sonja, te agradezco de todo corazón el precioso regalo de Navidad que me hiciste a través de tu última carta. En ella expresabas un entusiasmo científico que me encanta y que, lo mismo que el fiel afecto que guardas a tu maestro y amigo, me hace feliz. Pero casi temo haber despertado en tí demasiadas expectativas al dejarme vencer por la tentación de explicarte lo que aún tengo encima de la mesa de trabajo, haciendo algo que, desde luego, en otra ocasión sería inhabitual para mí, convencido de que con ello te iba a dar una alegría. El objetivo que quiero alcanzar está todavía muy lejos y lo veo ante mí con rasgos difuminados; hasta ahora he hecho poco más que analizar las herramientas mediante las cuales espero allanarme el camino. Además, como tú misma puedes comprender, es de urgente necesidad rematar antes mis trabajos antiguos. Hay otras razones que no me permiten demorarme en hacerlo. En la actualidad —especialmente desde que los matemáticos jóvenes han llegado a la conclusión de que escribir gruesos libros (N. B.: además sin referencias a sus fuentes) es el medio más efectivo para ganar prestigio entre el público y poder auparse a buenas posiciones— se están promocionando demasiadas paparruchas, en particular, en el área del análisis a la que yo he dedicado una investigación exhaustiva durante la mayor parte de mi vida, y va siendo hora de controlar semejantes excesos."

Y añade además:

> "Tengo conciencia de no ser un científico pedante y de no reconocer, en matemáticas tampoco, una única iglesia salvífica; sin embargo, a un trabajo científico le exijo unidad de método, prosecución consecuente de un plan determinado, elaboración adecuada de los detalles y, además, estar marcado por el sello de la investigación independiente. Ya es bastante dañino que aquí, igual que en otros lugares, los libros de texto estén escritos tan frecuentemente por personas poco competentes —y demos crédito a los franceses por, al menos, compensar la falta de profundidad con una presentación clara y elegante—, pero las partes más cimeras y difíciles de la ciencia, esas en las que uno solamente puede conseguir algo aplicando en ello todas sus energías, no deberían ser víctimas de la frivolidad en la escritura de libros.
>
> Perdóname esta digresión, querida amiga, acéptala si quieres como prueba de lo mucho que me he acostumbrado a convertirte en confidente de mis pensamientos, incluso de los amargos."

Así es como habla Weierstrass, enojado cuando encuentra con advenedizos que se atreven a inmiscuirse en las secciones más arduas y elevadas de la ciencia. Pero hay que reconocer también que nadie sabría celebrar más calurosamente que él aquello que considerara merecedor de elogio. Por ejemplo, diez años más tarde le escribe a uno de sus alumnos:

> "Admiro el valor que se necesita para abordar este problema y me alegraré con su éxito igual que si lo hubiese conseguido yo. Porque el éxito más hermoso que puede desear un investigador honrado consiste en, una vez alcanzado el límite que le fija su capacidad individual, poder dejar el trabajo iniciado para que jóvenes capaces lo promuevan más allá, independientemente pero, sin embargo, manteniendo su espíritu. Como verá, mi querido amigo, no soy de ninguna manera insensible al hecho de que mi trabajo sea, no diré reconocido sino, más bien, utilizado de manera correcta. La grata experiencia que a este respecto tengo con usted y con otros de mis oyentes no se ve confirmada, en cambio, en todas las memorias que se publican y que se asocian, supuestamente, a conferencias y comunicaciones mías."

Pero volvamos a la carta de año nuevo a Sonja:

"Ahora quiero, ante todo, responder a tus preguntas. Estoy totalmente de acuerdo con que quieras emplear este invierno principalmente para rellenar las lagunas de tu conocimiento sobre las partes más elementales de la matemática, como son la mecánica analítica y la física matemática. Pero, además de los ingleses, estudia también a Poisson y a Cauchy[72], así como las obras sobre electrodinámica (que están publicadas en las Memorias de la Academia de Berlín) del mayor de los Neumann; el libro del más joven (el hijo) sobre ese tema está escrito de una manera bastante torpe pero, aún así, contiene muchas cosas bien hechas y aprovechables.[73] Por otro lado, si has recibido el voluminoso libro de Hamilton sobre los cuaterniones,[74] supongo que su apariencia te habrá disuadido por completo de trabajar en él; en mi opinión eso sería, además, una verdadera pérdida de tiempo; siempre he compadecido a los pobres estudiantes para quienes los cuaterniones fueron una asignatura obligatoria en vida de Hamilton. Pues mientras tanto, en cambio, todavía tienes cosas para estudiar por tu cuenta, mucho más necesarias y útiles que una técnica particular cuyo fundamento algebraico es de naturaleza muy trivial y que, aunque no sea en absoluto necesaria, tal vez pueda ser bastante útil para ciertos problemas. Estoy seguro de que no querrás probar ese plato. Si tienes tiempo, también podrías echar un vistazo por encima a los *Comptes Rendus* de la Academia Francesa y prestar atención al trabajo de St. Venant en teoría de la elasticidad.[75] Seguramente vas a encontrar tropiezos por todas partes (y me refiero a todos los autores mencionados) en lo que toca al rigor en los desarrollos importantes. Pero no te detengas por eso, lo primordial es que puedas obtener una impresión general de lo que se ha conseguido hasta ahora en el campo de la física matemática, así como de los problemas pendientes. Y, de todos modos, podrías abordar alguna tarea no tan difícil para ejercitarte en las presentaciones porque, como te he repetido muchas veces, hay que considerar que la elaboración individual cuidadosa es un asunto esencial.

Un ejemplo podría ser el de determinar, en una variedad n-dimensional en la que cada punto está determinado por n coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ y el cuadrado de la distancia entre dos puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ es igual a $(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$, la línea más corta sobre la forma superficial definida por la ecuación

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{a^2} + \frac{x_n^2}{b^2} = 1$$

(correspondiente, en el espacio euclidiano, a la superficie de un elipsoide de revolución).[76] Otro, un problema de análisis por el que me han consultado recientemente los editores de la nueva edición de las Obras de Abel.[77]

Abel afirma:

Si $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ denotan funciones arbitrarias, cuyas derivadas son funciones algebraicas de x, y existe entre ellas y la variable x una relación algebraica general, entonces esa relación siempre se puede escribir en la forma

$$c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \varphi_0(x) = 0,$$

donde $\varphi_0(x)$ es una función algebraica y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes.

Entre los papeles póstumos de Abel solo se encuentra el inicio de una prueba de este teorema.[78] Yo he dado dos demostraciones, una puramente algebraica y otra que está basada en las primeras proposiciones de la teoría de los períodos de las integrales.[79] Inténtalo tú algún día, no obstante. Si se expresan racionalmente las derivadas de $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ en términos de x y de una función algebraica y de esta variable, entonces $\varphi_0(x)$ también es una función racional de x e y; este es un resultado adicional fácil de probar.

N. B.: Al demostrar el teorema que se encuentra al final de su trabajo con las elípticas, al tratar sobre la reducción de las integrales de tercera especie,[80] Abel presupone lo anterior, ya que desde un principio supone que entre las integrales relevantes subyace una relación lineal."

Después de su estancia en Heidelberg, donde había escuchado a Helmholtz y a Kirchhoff, Sonja había conservado el gusto por la física matemática. Ese interés aumentó durante el curso de sus estudios con

Weierstrass. Comenzó a profundizar en los trabajos de Maxwell y pidió consejo a Weierstrass sobre cómo organizar su estudio.[81]

El ilustre geómetra estaba vivamente interesado por la física matemática, y solamente quienes hayan sido próximos a él pueden saber hasta qué punto la dominaba. Ese interés que Weierstrass sentía por la física matemática queda expresado en la misma carta:

> "Kirchhoff, efectivamente, llegará aquí en la próxima Pascua, ya como miembro de la Academia y profesor de física matemática. Puedo acreditar su nombramiento en una buena parte como mérito propio mío. Pues este otoño lo encontré en Heidelberg, molesto por algunos incidentes acaecidos, bastante alejado de la física experimental y casi decidido a seguir a Koenigsberger al Politécnico de Dresde. Esto me hizo tomar la determinación, inmediatamente después de volver, de interesar a la Academia por su nombramiento . . . "[82]

Siguen unos detalles confidenciales sobre la nominación de Kirchhoff. La carta termina así:

> "Hoy celebramos el primero de año, el día en que se envían saludos y felicitaciones a todos los amigos. No he podido dejar pasar el día sin darle prueba a mi amiga más querida, a la que es mi alumna y a la vez confidente de mis pensamientos y empeños, de que la recuerdo con el afecto más cariñoso, y decirle lo afortunado que siempre me consideraré si, a pesar de las muchas millas que nos separan, puedo seguir siendo su guía en este camino que tan apartado queda del del resto de las personas."

La siguiente carta lleva fecha del 12 de enero de 1875:

> "Mi querida Sonja, en realidad y por varias razones, no estoy en buena disposición para escribirte hoy. Pero recuerdo que tu cumpleaños es el día 15, y no debo dejar de unir mis felicitaciones a las de los tuyos, en cuya compañía estarás celebrando hoy el día por primera vez en cinco años. Y, querida amiga, no te enfades conmigo si a la vez te confieso que soy lo bastante egoísta como para desear que todo hubiera seguido igual que el año pasado y el anterior cuando, excepto Julia, nadie aparte de mí sabía aquí nada de lo de ese día, y yo no podía darte ninguna alegría mayor que hablarte durante horas de mis investigaciones más recientes. El cuaderno cuya introducción te ofrecí hace dos años como regalo de cumpleaños aún está sin terminar, como imaginarás, aunque hace tiempo que he comenzado una segunda parte; pero no olvido mi deuda y te prometo que nadie se enterará antes que tú de las cosas que en él se tratan. Tendrás que tener en cuenta, también, que la dificultad del tema sólo permite una lenta progresión del trabajo; hay páginas que me han costado días enteros."

¿Qué contenía ese cuaderno a propósito del cual Sonja, como si fuese una niña, le había arrancado a su ilustre maestro la promesa de que nadie antes que ella sabría nada de las cuestiones que trataba? Sonja, que seguramente se imaginaba la manera rotunda en que yo desharía aquel compromiso, nunca me habló del cuaderno. No se encuentra entre sus papeles póstumos. Tal vez Weierstrass lo guardó en su casa pensando en completarlo. Pero no está entre sus papeles póstumos, y tampoco parece haberse utilizado durante la preparación de sus Obras Completas. ¿Lo quemó al mismo tiempo que las cartas de Sonja? ¿O se perdió tal vez, como tantos otros manuscritos, con aquella famosa caja de madera blanca? Es posible que se tratase de una investigación que Weierstrass nunca consideró lo suficientemente elaborada como para querer publicarla él mismo. Por mi parte creo poder concluir, de ciertas alusiones de Sonja, que trataba precisamente de ese tipo de *mecánica en un espacio limitado* que ella consideraba como una de las principales creaciones de Weierstrass.[83] Cuya carta proseguía:

> "Sin embargo, en un futuro cercano, y por las razones expuestas en mi carta anterior, voy a tener que ocuparme exclusivamente de las funciones abelianas —en el sentido ordinario— y reunir todas mis investigaciones relacionadas con ellas.[84] Ahora estoy intentando llevar a cabo esto de una manera peculiar, a saber, a lo largo de una serie de cartas dirigidas a mi amigo Richelot. Eso me da la libertad de poder contentarme, en muchos lugares, con exponer sólo el hilo de las ideas, lo que es bastante justificable porque la teoría no es un cuento infantil, desde luego, así que se puede esperar de quienquiera que se ocupe en ella que será capaz de realizar la parte mecánica de los cálculos a partir de las indicaciones que se dan. Además, dentro de una carta a un amigo puedo declarar, sin reservas, la originalidad de mi método, así como

aventurar alguna crítica al utilizado por Riemann y Clebsch. Aún no sé si este asunto llegará a término, pero en cualquier caso sería oportuna una reducción considerable del material si pretendo producir una obra legible. Unos apuntes de mis últimas lecciones sobre la teoría, en los que incluso falta alguna de ellas, ocupan 600 cuartillas.[85] Si tuviera ahora a mi fiel alumna a mi lado, sin ninguna duda ella me podría brindar una ayuda sustancial.

Te hablé de un suplemento matemático a mi carta anterior. También lo tengo preparado, sólo que no sé cómo enviártelo. Puede que haya quedado demasiado largo para una carta, son cinco hojas.

— — — — — — — — — — — — — — — — —

Me escribiste hace un tiempo que a Tchebychef[86] le gusta hacerte preguntas sobre la integración de las diferenciales elípticas mediante logaritmos. Eso me ha llevado a revisar mi antiguo trabajo sobre ese tema, para poder ponerte al corriente sobre ello utilizando los métodos y la notación con los que tú estás más familiarizada. Los trabajos de Tchebychef sobre ese asunto se refieren a dos cuestiones esencialmente distintas una de otra. En su primera comunicación, de 1857,[87] que es la única que yo tuve presente durante la elaboración de mi nota,[88] muestra cómo el estudio de si es posible representar mediante una expresión algebraico-logarítmica una integral de la forma

$$\int F\left(x, \sqrt{R(x)}\right)\, dx,$$

donde $R(x)$ es una función polinómica de grados 3 o 4 y F denota una función racional de x y de $\sqrt{R(x)}$,[89] se puede reducir a la pregunta, más simple, de bajo qué condiciones la integral

$$\int \frac{(x+\varkappa)\, dx}{\sqrt{R(x)}},$$

donde R se supone de cuarto grado y se entiende que $\varkappa$ es una constante, se puede expresar en la forma

$$C \log\left(\frac{P(x) - \sqrt{R(x)}}{P(x) + \sqrt{R(x)}}\right),$$

donde P denota una función racional de x. Según Abel, esas condiciones consisten en que el desarrollo de $\sqrt{R(x)}$ en fracción continua sea periódico y además, cuando esto ocurra, que $\varkappa$ tenga un cierto valor que depende de los coeficientes de R.[90]

Yo mantenía —y sigo manteniendo— dos objeciones contra esta forma de manejar la cuestión. Primero, porque la reducción surge de forma completamente automática cuando se va a resolver el problema, desde luego ineludible, de expresar una integral de la forma dada,

$$\int F\Big(x, \sqrt{R(x)}\Big)\, dx,$$

mediante el mínimo número posible de funciones transcendentes (logaritmos e integrales elípticas de las tres especies[91]); y para hacer esto no se requieren algoritmos nuevos. Y, además, creo que la comprensión de la verdadera naturaleza del problema de reducción tratado por Abel, es decir, el entendimiento de su conexión con la teoría general de las funciones elípticas, se facilita cuando se reemplazan las condiciones de Abel por la siguiente consideración:

Mediante la substitución que ya conoces,[92]

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + \frac{1}{2}C,$$
$$\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = -\frac{\sqrt{A}}{4}R'(x) - (Ax+B)\sqrt{R(x)},$$

la diferencial

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

se convierte en[93]

$$\frac{-ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$$

(los cálculos están en el libro verde[94]), y la diferencial

$$\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

se convierte en[95]

$$\left\{\frac{1}{2\sqrt{A}}\left(\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\right)-\left(\varkappa-\frac{B}{A}\right)\right\}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

donde[96]

$$s_0=\frac{B^2}{A}-C,\qquad \sqrt{S_0}=\frac{A^2B'-3ABC+2B^3}{A\sqrt{A}}.$$

Así que, poniendo[97]

$$du=-\frac{ds}{\sqrt{S}},\qquad \begin{matrix} s=\wp u \\ s_0=\wp u_0 \end{matrix}\ ,\quad u_0=\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

se tiene[98]

$$\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}}=\left\{\frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp' u+\wp' u_0}{\wp u-\wp u_0}+\left(\varkappa-\frac{B}{A}\right)\right\}du,$$

$$\int\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\log\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma u\,\sigma u_0}+\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0}u\right\}+\left(\varkappa-\frac{B}{A}\right)u.$$

Para que la integral en cuestión pueda expresarse logarítmicamente, *es necesario que u_0 sea un divisor exacto de alguno de los períodos de la función $\wp u$*. Y, si se cumple esta condición, entonces siempre se puede determinar $\varkappa$ de tal manera que la integral se exprese efectivamente mediante el logaritmo de una función racional de s y $\sqrt{S}$ (que es fácil de determinar usando el teorema de multiplicación de la función $\wp u$).[99]

Ya sé que el sr. Tchebychef ha puesto reparos a esto muchas veces: —Muy bien, pero, a partir de ahí, ¿cómo se obtiene que entre las cantidades transcendentes u_0, ω, ω' se verifica una relación como

$$u_0=\frac{2m\omega+2m'\omega'}{n},$$

en la que m, m' y n son números enteros?— A lo que yo respondo: Mi objetivo no es tanto dar un método de integración para un caso particular, en el que R tenga unos ciertos coeficientes numéricos,[100] sino expresar algebraicamente cualquier integral de la forma considerada que tenga la propiedad requerida. Y esto se hace como sigue. Para cada valor entero de n, $\wp(nu)$ se puede expresar en la forma

$$\frac{M_n(\wp u)}{N_n(\wp u)},$$

donde M_n y N_n son polinomios en $\wp u$; entonces mi criterio es: todos los valores que puede tener s_0 están dados por las ecuaciones[101]

$$N_2(s)=0,\ N_3(s)=0,\ \ldots,\ N_n(s)=0,\ \ldots.$$

(Los correspondientes valores de $\varkappa$ pueden entonces determinarse fácilmente).

No será posible, en general, comprobar si un valor numérico dado de s_0 satisface una de estas ecuaciones, para valores igualmente dados de g_2 y g_3. Debe ser suficiente que, dados g_2 y g_3, todos los valores posibles de s_0 se puedan determinar algebraicamente.

El sr. Tchebychef también se abstiene de realizar la investigación que acabo de mencionar. En un trabajo posterior (Bull. de l'Académie de St. Pétersbourg 3, 1860)[102] se ocupó de la misma cuestión para el caso en que los coeficientes de R son números racionales. Tiene cierta justificación dar importancia y hacer énfasis en este caso, y con mucho gusto reconozco la pericia con la que el sr. Tchebychef lo trató. Sólo que, en mi opinión, habría que generalizar un poco el problema, considerando que sean racionales no ya los cinco coeficientes de R, sino las tres cantidades s_0, g_2, g_3 compuestas a partir de ellos; porque entre éstas deben satisfacerse unas ecuaciones cuyos coeficientes sean, todos ellos, números enteros. Y, a propósito de esto, tiene sentido preguntar cómo se puede asegurar que va a existir una ecuación de ese tipo, para unos valores dados s_0, g_2, g_3, sin que los propios coeficientes A, B, C, A', B' tengan que ser necesariamente racionales.

Tchebychef daba su método sin demostración; aunque, como supe ayer por primera vez, la demostración la presentó más adelante el sr. Zolotareff en los *Clebschs Annalen*, vol. 5.[103] Pero el modo, y la propia forma, en que yo resuelvo el problema de Tchebychef, te convencerá de que, en el teorema que yo he dado, debe ser

$$s_0 = \wp\left(\frac{2m\omega + 2m'\omega'}{n};\ g_2,\ g_3\right),$$

siempre que el objetivo se logre, simplemente, aplicando la fórmula para $\wp(2u)$ en un número finito de operaciones.[104] Claro que este procedimiento puede que sólo difiera del de Tchebychef en la forma, y yo le doy importancia sólo en la medida en que lo que pretendo es mostrar que la teoría general de las funciones elípticas enseña a resolver con facilidad unos problemas para cuya respuesta, de otra manera, se requeriría una especial agudeza y el uso de unos medios de los que no está claro cuál sea exactamente el fundamento de su validez."

El 18 de febrero Weierstrass escribe de nuevo, apesadumbrado porque Sonja no haya dado señales de vida.

"¿Tan absorta estás en el trabajo que no te das cuenta de lo rápido que pasa el tiempo? Sé que es fácil decir esto, pero quiero imaginar que, alguna vez, mientras estás trabajando, tus pensamientos se detienen un momento y se dirigen hacia este amigo, del que conoces la alegría que le supone saber de tí y de lo que te estás haciendo."

El día 21 de abril, ninguna noticia de Sonja todavía.

"¿Por qué no oigo nada de tí? Me preocupa mucho que vuelvas a estar enferma, ya que, en otro caso, no me podría explicar por qué me he quedado sin noticias tuyas desde principios de febrero. Con la mayor urgencia te lo ruego, ¡no me dejes más en esta dolorosa incertidumbre!"

Vienen a continuación quejas sobre su propio estado de salud, que había sido muy malo durante las vacaciones de Pascua y le había impedido trabajar con comodidad.

En la incertidumbre acerca de la suerte que hayan podido correr sus cartas a Sonja, omite transmitirle algunas confidencialidades y, después, prosigue:

"Pero hay una cosa sobre la que necesariamente te tengo que informar. Descuidé a principios de año renovar a tiempo la suscripción a los *Comptes Rendus* de la Academia de París, por lo cual he recibido los números de esa revista con mucho retraso. Para mi gran sorpresa, después de enviarte mi última carta, encontré en los números 2 y 5 un ensayo de Darboux titulado "Sobre la existencia de la integral en las ecuaciones en derivadas parciales que contienen un número cualquiera de funciones y de variables independientes"[105], tema sobre el que ha presentado a la Academia una memoria detallada que ha sido entregada a una comisión para su evaluación. Inmediatamente a continuación, en el nº 6, Méray, otro matemático, anuncia también una memoria sobre ese tema y da un breve análisis de su contenido.[106] De manera que puedes ver, mi querido corazón, que yo tenía razón cuando te dije que la cuestión sobre la que has trabajado era de las que estaban actualmente a la espera de una respuesta definitiva, y estoy muy contento de que mi alumna haya tenido éxito, tanto por adelantarse en el tiempo a sus competidores como por no quedar, desde luego, por detrás de ellos en lo que se refiere al asunto en sí."

Es conmovedor escuchar a Weierstrass, que por su parte era indiferente a toda cuestión de prioridad, interesarse tan calurosamente por los derechos de prioridad de Sonja:

"Darboux habla de ciertos casos excepcionales que tienen gran interés;[107] casi me gustaría creer que él también encontró las mismas dificultades (como con la ecuación $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$) que a tí, al principio, tanto te detuvieron pero que, después, conseguiste superar tan felizmente, y no te negaré que habría observado con cierto regocijo malévolo que él no hubiera podido hacer frente a tales casos excepcionales."

Weierstrass les había remitido inmediatamente la tesis de Sonja a Darboux y a Hermite.

> "Hermite, pensando que el envío procedía de tí misma, le ha pedido a Borchardt[108] que te lo agradezca muy amablemente, añadiendo la observación de que Darboux le había hablado de la disertación con grandes elogios. Con ocasión de esto me ocurrió una graciosa equivocación. Con la copia que envié a Hermite adjunté también un diploma, pero me debí equivocar de diploma, porque sólo así me puedo explicar que la carta de Hermite incluyera además un agradecimiento a "Madame de Lermontoff" por el envío de su diploma de doctorado. ¿Qué habrá pensado Hermite de esa ambiciosa rusa con tanta ansia de que su fama, adquirida en el campo de la química, obtuviera también el reconocimiento de los matemáticos?"

La carta contiene a continuación un relato de las dificultades que la fiel amiga de Sonja y compañera de estudios en Heidelberg y en Berlín, la srta. Julia Lermontoff, había tenido que superar para ganar su diploma de doctor por Gotinga, y del triunfo que al cabo consiguió.

Finalmente, el 7 de mayo, Weierstrass puede ya escribir:

> "Tu larga y más que fervientemente esperada carta, que me llegó (sin fecha) anteayer, me ha liberado de una gran preocupación. Al no recibir de tu parte señal de vida alguna, ni tan siquiera un recibo de mi carta del 15 de febrero, la que llevaba el suplemento matemático sobre el que aún guardas silencio, tuve que suponer que estabas nuevamente enferma y, además, de tal gravedad que ni siquiera eras capaz de escribirle a tu amigo dos palabras tranquilizadoras. Si no me sintiera ahora tan feliz al saber que mis preocupaciones eran infundadas, estaría muy inclinado a demostrarte esta vez que, si es necesario, yo también soy capaz de regañar a mi "amiguita" querida[109], o al menos de pagarle con la misma moneda. Pero, además, has elegido la mejor manera posible de desarmarme del todo, al darme, en lugar de todo tipo de disculpas, la perspectiva segura de que vamos a volvernos a ver muy pronto y a podernos reunir durante más tiempo. Querida Sonja, te confieso que, aunque ni por un momento dudé de que cumplirías la promesa que me hiciste, en la medida en que estuviera dentro de tus posibilidades, tuve, sin embargo, muchas dudas de que las circunstancias te lo permitieran. Esta es también la razón por la que aún no había comentado en ninguna carta lo mucho que anhelo volver a tener a mi alrededor durante unas semanas a mi querida amiga y alumna, de la que aún se me hace raro saberla tan lejos de mí. Era bastante probable, dada tu procedencia familiar, que tuvieras que enfrentarte a obstáculos insuperables tras regresar a tu país natal por tan poco tiempo; en ese caso, yo no te quería importunar recordándote tu promesa. Si me hubieras escrito: "Querido amigo, no puedo ir este año", me habría resultado muy doloroso, pero no habría dudado de la seriedad de tu resolución."

Y, más allá, escribe:

> "Desde comienzos de año no me he encontrado muy bien y, en consecuencia, aparte del trabajo sin importancia sobre la integración de[110] $\int \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{S}}$ en términos de logaritmos, he sido incapaz de hacer nada que valga la pena, y en algún momento hasta he sentido aversión por el trabajo."

Ahora llega un pasaje que trasluce muy bien hasta qué punto Sonja siempre seguía siendo una mujer y que la retrata de una manera amable:

> "Así que, ¿vas a venir en compañía de una joven y "linda" matemática? ¿Quieres traerme una nueva alumna, precisamente tú, que me prohibiste expresamente aceptar a ninguna otra? Pero eso me pondrá, de hecho, en la embarazosa situación de tener que rechazar a una dama alemana que querría recibir mis lecciones de geometría."

Se recuerdan los regalos de cumpleaños, aquel cuaderno manuscrito de Weierstrass cuyo contenido, ante todo, sólo debía ser conocido por Sonia. A continuación, Weierstrass pide a Sonja que le envíe algunas copias de su fotografía

> ... "para los caballeros de Gotinga, a quienes les gustaría saber qué aspecto tiene en la realidad una criatura del género femenino[111] que se ocupa de ecuaciones en derivadas parciales, anillos de Saturno y transcendentes abelianas,"

y añade:

> "Que la imagen que se había hecho de tu persona no se correspondía del todo con la realidad, lo descubrí por la cara de asombro que puso Schering[112] cuando, ante su pregunta de si por casualidad tenía yo una fotografía tuya, le mostré una que llevaba a mano (esa más grande). Kirchhoff inauguró sus conferencias en esta ciudad hace ocho días; qué contento estoy de tenerlo aquí. El profesor Richelot, de Königsberg, falleció tras una grave enfermedad; una gran pérdida para aquella universidad. Yo he sentido que despedía, con él, a un amigo muy querido.[113]
>
> En este momento estoy ocupado en la revisión de una voluminosa disertación de uno de mis alumnos, que es una de las mejores que he tenido delante de mí alguna vez. Estudia la integración de $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ para una región múltiplemente conexa del plano xy bajo condiciones de contorno prescritas, y contiene una serie de resultados nuevos e importantes.[114]
>
> Por lo demás, tengo actualmente varios oyentes muy buenos; entre ellos, concretamente, hay un sueco (Mittag-Leffler) que me gusta especialmente, un austríaco y, oh sorpresa, dos polacos que al menos son estudiosos y perseverantes."[115]

El 17 de junio Weierstrass contesta a una carta de Sonja del 13 del mismo mes. Sonja había estado muy enferma de sarampión durante cinco semanas, y aún no se había recuperado. El viaje planeado a Berlín para ver a Weierstrass había tenido que posponerse a una fecha incierta. Weierstrass se siente con ello profundamente afligido:

> "No puedes ni imaginarte cuánto te he echado de menos. En el curso de los últimos cuatro años me había acostumbrado a ver en tí a la confidente de mis pensamientos y de mis afanes, con la que podía hablar como con un amigo que hubiera estado cerca de mí toda la vida. Y nunca había encontrado a nadie que me ofreciera tal comprensión de los objetivos más elevados de la ciencia y tan viva discusión de mis ideas y principios como tú lo hiciste. Oh, no deberíamos habernos separado todavía. Tendrías que haber seguido siendo mi alumna y haber trabajado conmigo durante uno o dos años más. Pero eso no ha sido posible.
>
> No quiero que me escribas mucho mientras eso te pueda perjudicar a la vista; pero te pido, cariñosamente, que me envíes aunque sea tres líneas cada ocho días, diciéndome qué tal estás, al menos hasta que te recuperes. Me asustaría mucho quedarme sin noticias tuyas durante un tiempo largo. ¿De acuerdo, entonces? ¿me concederás esta petición y me escribirás esas pocas palabras incluso aunque, entretanto, no hayas tenido noticias mías?
>
> También debo darte una noticia sobre algo que me concierne, porque es posible que te encuentres una nota al respecto en algún periódico. No sé si sabes que Friedrich Wilhelm IV fundó una particular *Orden Pour le mérite* para las Ciencias y las Artes que, a diferencia de otras, sólo se concede a veinte eruditos alemanes (y a diez artistas) y a la misma cantidad de extranjeros y que, cada vez que un caballero muere, los veintinueve restantes proponen un sucesor al rey, que siempre será confirmado. Pues bien, recientemente, este amigo tuyo se ha convertido inesperadamente en caballero de esta Orden y único representante de las ciencias matemáticas y astronómicas en esa Tabla Redonda.[116] Dado que la distinción se considera muy alta ya que, por ejemplo, permite al afortunado poseedor ser admitido en la corte, la concesión de la misma siempre provoca cierta agitación en la república académica, de manera que el destinatario será felicitado pero, más que nada, envidiado y criticado. Esto es lo que me ha ocurrido a mí también. Sabes que soy muy indiferente a todo esto y que me habría sentido perfectamente feliz si, por ejemplo, hubiera sido preferido Kummer[117] frente a mí, pero tampoco tengo reparo en decir que, en la situación de tener que llevar una medalla en determinadas ocasiones, prefiero lucir, mejor que ninguna otra, esta estrella que antes de mí lucieron Gauss, Jacobi y Dirichlet.[118] Por lo demás, desde que tú estás lejos, mis costumbres sociales se han deteriorado por completo; el invierno pasado estuve tres veces en un baile de palacio, cuando en los cuatro años anteriores no había acudido ni una sola vez."

No fue hasta tres meses más tarde, el 17 de septiembre, cuando Sonja contestó, pero no decía si había recibido la carta del 17 de junio. Weierstrass se queda desolado con que esa carta se haya perdido. Teme que Sonja pueda interpretar como falta de interés, o indiferencia,[119] el hecho de que ella no haya tenido noticias suyas después de haberlo tenido a él al corriente de su enfermedad.

El 23 de octubre nueva carta de Weierstrass en respuesta inmediata a una carta de Sonja en la que ella le anunciaba la muerte de su padre.

> "No, querido corazón, no quiero entrometerme en tu justificado dolor, que habrás de vencer en tu interior y por tus propias fuerzas.
>
> "Nicht in das Grab, nicht übers Grab verschwendet
> Ein edler Mensch der Sehnsucht hohen Wert.
> Er kehrt in sich zurück und findet staunend
> In seinem Busen das Verlorne wieder".[120]
>
> Pero quiero agradecerte sinceramente que me informases en detalle en tu carta sobre las circunstancias bajo las cuales ocurrió la muerte inesperada de tu respetado padre, —en contraposición a la sobria discreción con la que normalmente prefieres tocar los asuntos personales."

Por último, Weierstrass le plantea algunas preguntas concretas:

> . . . "tal vez hayas recibido una carta, con fecha de 1 de octubre, que no contenía otra cosa que matemáticas; originalmente debía haber sido un suplemento a mi carta desde Rüdersdorf, pero no estuvo listo a tiempo."

Esa carta, para mayor perjuicio de las ciencias matemáticas, parece haber compartido la suerte de las cartas de 15 de octubre de 1874 y de 15 de febrero de 1875 y haberse perdido para siempre. Aún una pregunta más:

> . . . "puede que te encuentres ya lo suficientemente recuperada como para recibir comunicaciones matemáticas mías suplementarias. Tengo un bonito teorema que, de manera completamente general, da un criterio necesario[121] y suficiente para la reducción de una integral de rango cualquiera a una de rango inferior."[122]

Desde mediados de octubre de 1875, cuando Sonja hizo partícipe a Weierstrass de la muerte de su padre, hasta mediados de agosto de 1878, es decir, durante tres años, Sonja no dio señales de vida. Weierstrass escribe el 15 de agosto de 1878:

> "Mi querida amiga, aún después de la recepción de tu —difícilmente podría haber sido más esperada— carta del día - - -, sí, la fecha vuelve a faltar como en tantas anteriores, sigue siendo para mí incomprensible la razón por la que me has dejado durante tanto tiempo sin noticias tuyas.
>
> ¿Es que no recibiste mis cartas? Pues, si no, ¿qué motivo podría haberte impedido prestar, como antes, plena confianza a tu mejor amigo, como tantas veces me llamabas? Me encuentro ahí ante un misterio cuya solución sólo me la puedes dar tú. Prométeme una carta detallada en la que estés dispuesta a contarme lo que has vivido y en lo que te has ocupado durante los tres últimos años, siempre que puedas ver en esta respuesta mía que mi actitud hacia tí no ha cambiado. ¿Lo has podido suponer tan sólo por un momento, querida Sonja? Pero te tomo la palabra, así que espero pronto un informe debidamente detallado. Pero además quisiera pedirte que, inmediatamente después de recibir esta carta, y aunque sea mediante unas pocas líneas, me hagas saber que ha llegado a tus manos; así, tendré que suponer lo contrario en caso de no recibir la esperada notificación en el plazo de los próximos ocho días.
>
> — — — — — — — — — — — — — — — — —
>
> Solo he sabido de tí, indirectamente, dos veces; por el sr. Mittag-Leffler, que te visitó en Petersburgo y después, recientemente, por el sr. Tchebychef. Yo no he llegado a hablar con este último, —siempre me visita en algún momento en que no estoy en casa—, pero a través de Borchardt me vino a decir que habías abandonado el trabajo con las matemáticas. Me alegra escuchar de tí misma la afirmación de lo contrario. Mittag-Leffler ha sido para mí un alumno muy apreciado; además de un conocimiento profundo, tiene una inusual facilidad de comprensión y una mente bien dirigida hacia la abstracción; estoy convencido de que la relación con él producirá en tí un efecto estimulante y favorecedor.

Ahora te gustará enterarte, por mí, de cómo me ha ido desde entonces y de lo que he estado haciendo. En lo que se refiere a mi salud, estoy contento. No me he encontrado muy mal en los últimos tres años; tan sólo empiezo a sentir que las clases de dos horas seguidas me fatigan, por lo que por las tardes tengo que descansar un buen rato. Mis ocupaciones son las antiguas; las lecciones me absorben completamente, en particular he trabajado aún un poco en la introducción a la teoría de las funciones analíticas —que desarrollé ante 102 oyentes en el último semestre—, así como en el cálculo de variaciones. También, en el semestre pasado, traté en clase por primera vez sobre algunas aplicaciones de las funciones hiperelípticas. En lo concerniente a mis investigaciones personales, por fin he completado de una manera satisfactoria las que tratan sobre las funciones $2n$-plemente periódicas o, mejor dicho, sobre los sistemas de n funciones de otros tantos argumentos para las que existe una fórmula de adición algebraica, de manera que ahora procederé a ocuparme de su publicación. A decir verdad, me veo obligado a empezar casi por el final, por razones externas al asunto, ya que, en Francia, la gente también se empieza ahora a ocupar de las funciones periódicas de varias variables. Espero que durante estas vacaciones podré tener lista para enviar a la imprenta la demostración de que todas las funciones univaluadas de n variables que se comportan como funciones racionales para valores finitos de sus argumentos y que poseen $2n$ sistemas independientes de períodos, pueden expresarse mediante funciones ϑ. Para el resto ya tengo unos voluminosos apuntes."

Todos esos voluminosos apuntes desaparecieron. En compensación, en el volumen 3 de las Obras de Weierstrass, memoria número 3, se encuentra una prueba del teorema: "Toda función univaluada de n argumentos que, para valores finitos de éstos, posee el carácter de una función racional y es, al mismo tiempo, $2n$-plemente periódica resulta, de la manera expuesta (en la introducción a dicha memoria)[123], a partir de una función θ de las mismas variables."[124]

Más adelante, Weierstrass escribe:

"Estoy menos satisfecho con las investigaciones que inicié sobre la solución de problemas de dinámica mediante desarrollos en serie adecuados a la peculiaridad de las ecuaciones diferenciales a integrar. Llego hasta un cierto punto; formo, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales para el problema de los n cuerpos, de manera que permitan formalmente una integración en forma de series que se pueda prolongar arbitrariamente lejos, pero mis intentos de demostrar la convergencia de los desarrollos tropiezan con un obstáculo que soy incapaz de superar. Los términos de las series tienen todos ellos la forma

$$A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r}\cos[\nu_1\varkappa_1(t-\tau_1)+\nu_2\varkappa_2(t-\tau_2)+\cdots+\nu_r\varkappa_r(t-\tau_r)],$$

donde los $A,\varkappa,\tau$ son constantes. Las cantidades $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_r$ son, suponiendo que el sistema de ecuaciones diferenciales a integrar sea de orden $2r$, r de las constantes de integración. En los coeficientes $A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r}$ no aparecen estas mismas constantes, sino otras r,[125] que están relacionadas con las constantes $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_r$ mediante r ecuaciones. Pero estos coeficientes aparecen en forma de fracción, y resulta que los denominadores se hacen infinitamente pequeños cuando la suma de los valores absolutos de los números enteros $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r$ se hace infinitamente grande. Por tanto, habría que demostrar que los numeradores también se hacen entonces infinitamente pequeños, y que lo mismo les ocurre a las propias fracciones, pero esto parece imposible dada la complicada composición de las expresiones.

El hecho en sí no me sorprende, en muchos casos ocurre que una función algebraica de varios argumentos que nunca se hace infinitamente grande para valores finitos de sus argumentos solamente admite representación en forma de fracción. Pero, como he dicho, no puedo superar la dificultad que surge. No me hagas esperar demasiado para ese informe detallado prometido, y permanece convencida de que mi actitud hacia tí sigue siendo la de un amigo leal y sincero. Envía tu carta a Berlín a la dirección antigua, que me la remitirán aquí con seguridad."

Pero no fue al cabo de ocho días, sino dos años después, cuando Weierstrass recibió la notificación de que su carta del 15 de agosto de 1878 había llegado efectivamente a manos de Sonja. El 23 de septiembre de 1880 ella le escribió una larga carta, unos días después una nota muy breve y, finalmente, a finales de octubre una nueva nota. Todas estas misivas le llegaron a Weierstrass al mismo tiempo. El día 28 de octubre de 1880 responde:

> “Ahora tengo prisa en contestarte. Sin embargo, apenas esperaba ya recibir señal alguna de vida por tu parte. Hace dos o tres años, tras un lapso muy largo, me escribiste diciéndome que recibiría noticias tuyas detalladas en un futuro cercano, pero después de aquello ya no volví a oir nada relacionado contigo que proviniera directamente de tí.
>
> Sólo el sr. Mittag-Leffler me traía, de vez en cuando, alguna noticia tuya de la que yo podía inferir, al menos, el hecho de que tu estado físico era satisfactorio, pero eso era todo.”

¿Cuáles fueron los motivos que hicieron observar a Sonja ese largo silencio, tan cruel a ojos del hombre que había sido para ella más que un padre? Es en este punto donde, particularmente, se hace sentir la pérdida que ha supuesto, para la historia privada de Sonja y de Weierstrass, la destrucción de las cartas de ella. ¡Cómo nos habría gustado escucharla a ella misma defendiendo su causa, escuchar sus hermosas palabras realzadas por la claridad del pensamiento y la profundidad del sentimiento del que su naturaleza eminentemente artística tenía el secreto!

Weierstrass ya había quemado las cartas de Sonja cuando apareció la biografía de Anne-Charlotte Leffler. No me ocultó que él habría preferido que ese libro no se hubiera publicado. ¿De qué servía presentar ante el gran público la rica personalidad de su Sonja? “Mueren las personas, las ideas perviven”:[126] hubiera bastado con que la alta figura de Sonja pasara a la posteridad por la sola virtud de sus obras, matemáticas y literarias.

Ahora bien, personalmente, como se sabe, la propia Sonja había sido de un parecer completamente distinto.[*]

Esta conversación que tuve con él y la constatación de que, a pesar de todo, la biografía de Anne-Charlotte Leffler era un hecho irrevocable,[127] determinaron indudablemente a Weierstrass a entregar a mi discreción el uso y el empleo de sus cartas a Sonja.

Conocemos, a través de la biografía de Anne-Charlotte Leffler, los aspectos externos de la vida de Sonja durante esos tres años. Waldemar Kowalewsky, habiendo aceptado las condiciones bajo las cuales se acordó su matrimonio con Sonja, deseaba y esperaba algo completamente diferente. Para él ella era y siempre seguiría siendo, a pesar de todas las tiranteces y de todos los conflictos, la amada de su juventud, y nunca renunció a la esperanza de que un día fuese realmente su esposa. “Fue en ese momento en Palibino, rota como estaba por el dolor de la muerte de su padre, cuando la necesidad de afecto llevó a Sonja a superar todos los prejuicios y, por decisión propia y en el calmo silencio de la casa mortuoria, convertirse realmente en esposa de su marido”[‡].

Los dos esposos pasaron el invierno de 1875-76 en San Petersburgo. Sonja, liberada ya del condicionamiento antinatural en el que había vivido hasta entonces, estaba en un momento de plena floración de su belleza juvenil. Ahora vivía entre las circunstancias y los elementos más libres que puedan existir desde un punto de vista intelectual y podía, dentro de un círculo que era capaz de comprenderla y admirarla, dar rienda suelta a una genialidad fecundada desde el principio por la cultura más extensa y profunda que quizá nunca haya recibido una mujer. De modo que, dicho a grandes rasgos, saboreaba la alegría de vivir y gozaba de la felicidad de ser joven.

Ahora bien, su entorno estaba compuesto menos por hombres de ciencia que por escritores, artistas o periodistas. ¿Cómo habría podido escribir, entonces, a Weierstrass para explicarle semejante cambio, para confesarle —pues en esta ocasión no se trataba de otra cosa— que había olvidado la ciencia en favor de la vida? Pues ya no era, como antes, una perturbación momentánea producto de la vida social, no: esta vez se trataba de traicionar a la ciencia para llevar, por los caminos trillados y conocidos —aunque fuera con más plenitud y riqueza que otros—, una vida puramente femenina.

Fue durante el período 1875-78 cuando yo conocí a Sonja. A comienzos de febrero de 1876, y dirigiéndome a Helsingfors, pasé por San Petersburgo y, tanto por satisfacer mi propia curiosidad como por atender una promesa formal hecha a Weierstrass, fui a visitar a la mujer que tanto daba que hablar en aquel momento en el mundo de la cultura. Sin intentar reconstruir de memoria las impresiones que sentí entonces, reproduciré las palabras que vuelvo a encontrar en una carta que escribí a Malmsten:[128] “Lo que más vivamente me ha interesado en San Petersburgo ha sido conocer a Madame Kowalewsky. Hoy (10 de febrero de 1876) he pasado varias horas en su casa. Una mujer deliciosa. Es guapa y, cuando habla, su rostro se ilumina con una mirada de simpatía femenina y de superior inteligencia que no se puede sostener sin deslumbramiento. Sus modales son sencillos y naturales, sin rastro alguno de pedantería o de saber afectado. Por lo demás, y en todos los sentidos, una “dama del gran mundo”. En lo académico se distingue

[*] Anna Charlotta Leffler, l. c. (N. de M-L.)
[‡] Anna Charlotta Leffler, l. c., p. 48. (N. de M-L.) [Cf. [136, p. 37].]

por una claridad y una precisión en la expresión poco comunes, así como por una comprensión singularmente rápida. Muy pronto se da uno cuenta también del nivel de profundidad hasta donde ha llevado sus estudios, y entiendo perfectamente que Weierstrass la reconozca como el más dotado de sus discípulos."

Mis impresiones de esta visita a Sonja iban a influir, a su manera, en el rumbo que tomaría su vida. Al parecer, en principio ella no me había recibido de muy buena gana. Sabía que yo iba de parte de Weierstrass, y ella creía haber roto ya con las matemáticas. Pero ella había nacido matemática, tenía de una forma muy clara la conformación de la región ocular izquierda que Gall y Moebius[129] han reconocido como característica del instinto matemático; por cierto que ese rasgo se ha eliminado por retoque en la mayoría de sus retratos. Pero no cumplió la promesa que me hizo de escribir inmediatamente a Weierstrass, y durante mucho tiempo no volvió a las matemáticas. Muy pronto la vida le impuso otras obligaciones, de austeridad y ternura, que ya no podía eludir, de manera que durante una larga temporada le fue materialmente imposible reconectar con el pasado. Sin embargo, una sola conversación con un matemático, discípulo de Weierstrass, había tenido el efecto de hacer desplomarse[130] en ella la convicción de haber terminado con las matemáticas que mantenía.

Sin embargo, su marido, que se había embarcado en vastas empresas financieras, en las que ella no dejaba de tener parte de responsabilidad, se encontró enfrentado a graves apuros. Ella fue para él una esposa devota, un apoyo y una ayudante amorosa y enérgica, y logró evitar una catástrofe. El 5/17 de octubre de 1878 nació su hija, llamada "Foufie" en Rusia, y "la pequeña Sonja" en Suecia.[131] Sophie von Adelung, la prima de Sonja,[132] habla de su apasionado amor por la pequeña, a la que sin embargo tuvo que confiar al cuidado de una nodriza.

Durante el período de relativa tranquilidad anterior al nacimiento de su hija se despertó en Sonja un irresistible deseo de retornar a las matemáticas. No pudo dejar de escribir entonces a Weierstrass. En su carta, fechada en agosto de 1878, pide consejo a su viejo maestro en relación con una cuestión de matemáticas que se había puesto a estudiar. Él le escribirá:

> "Esta vez no puedo entretenerme contigo en el problema que has abordado, pues primero tendría que revisar la literatura concerniente."

Al haber estado Sonja dos años enteros, en lugar de los ocho días solicitados, sin responder a la carta de Weierstrass (la de agosto de 1878), fue su culpa no haber recibido nunca las explicaciones para el problema que había acometido que, sin duda, en otra situación él le habría enviado. La tranquilidad que había esperado tener para poder retomar su trabajo matemático no había querido llegar. Su hijita había nacido y reclamaba sus cuidados. Los intereses de su marido absorbían absolutamente el resto de su tiempo: ella volvía a ser su auxiliar incomparable. Sin embargo, Weierstrass debió sentirse más herido todavía por no haber recibido respuesta tampoco a la carta en la que daba noticias de máximo interés sobre su propia persona. Escribía, el 28 de octubre de 1880:

> "Así que ya me había acostumbrado a contemplar aquel tiempo, en el que estuviste conmigo como estudiante y amiga, como un tiempo concluido que solo pertenecía a la memoria. La larga carta tuya que ahora sostengo en mis manos me da una clave para comprender tu largo silencio; no obstante, lamento profundamente que no hablaras antes con tu viejo amigo con total confianza. Lo lamento particularmente porque, de esta manera, se han perdido años en los que pude haber encontrado muchas oportunidades para apoyarte en tus estudios y alentar tu porfía y tu trabajo mediante comunicaciones escritas. Pero no me gusta reflexionar mucho sobre el pasado, de modo que echemos la mirada hacia el futuro."

A finales del año 1879 y comienzos de 1880 tuvo lugar en San Petersburgo un congreso de científicos naturales rusos en el participé.[133] Yo era entonces profesor en la universidad de Helsingfors. Me encontré allí, por segunda vez, con Sonja y conocí a su marido y a "Foufie". Sonja, aunque estaba apuntada al congreso, no tomaba parte en las sesiones. Se notaba, por un lado, que había perdido contacto con su carrera matemática y, por otro, que su espíritu ardía en deseos de reintegrarse en ella. Yo no supe nada de cuál era su situación privada, personal o material. Parece ser que en octubre de 1880 llegó a ser tan difícil que ella llegó a pensar que sería insuperable. En ese momento dio pruebas, sin embargo, de ser una matemática nata al reencontrar el equilibrio emocional en la reanudación de sus estudios. Se atrevió a presentarse de nuevo ante Weierstrass. Le escribió para preguntarle si podía acudir a Berlín. Pero antes de que la respuesta, que salió con fecha de 28 de octubre, llegara a Moscú, ella ya había emprendido el viaje. Llegó a Berlín el día 31 por la mañana, y a las tres de la tarde ya tenía en su casa a Weierstrass. La carta de él no era muy ilusionante. Ya he citado el comienzo. Lo que seguía suena con un tono muy distinto al de los tiempos de antes:

"En primer lugar puedes estar segura, querida amiga, de que seré muy feliz cuando pueda volver a verte un día, después de tan larga separación. Pero antes de que decidas hacer el largo viaje hasta aquí, tengo que informarte de algunas circunstancias que me afectan, para evitar que vengas con unas expectativas que, lamentablemente, no vaya a poder cumplir en un futuro inmediato. Sin duda te sorprenderá enterarte por mí de que mis obligaciones externas, en lugar de reducirse en los últimos años como habría debido ocurrir, hayan aumentado cada vez más. Tengo tanto trabajo por delante para hacer este invierno, que casi ni sé cómo podré salir airoso. Ya sabrás, sin lugar a dudas, que mi amigo Borchardt murió el verano pasado después de una penosa enfermedad.[134] Ya desde el 1 de abril me encargué de la redacción del *Journal* en su lugar y, tal como están las circunstancias, tendré que proseguir con ello, juntamente con Kronecker[135]. Aparte de eso, estábamos terminando en la Academia una edición completa de las Obras de Jacobi, Dirichlet y Steiner.[136] Borchardt se había hecho cargo de Jacobi, y yo de Steiner. Después de la enfermedad de Borchardt tuve que continuar yo también con la publicación de Jacobi, ya que no se pudo encontrar para ello a una persona adecuada, pero ni siquiera antes había pensado yo que dicha empresa requiriera un trabajo con tanta exigencia de tiempo. Además, Borchardt me nombró tutor de sus seis hijos; dada la estrecha relación que he tenido con Borchardt y su familia durante 25 años, no puedo eludir el deber de ayudar con consejos y actuaciones a la sra. Borchardt en la gestión de su importante fortuna, ya que ella es completamente inexperta en los negocios. Por cierto, no tengo ningún reparo en decirte que en algunas ocasiones me veo también obligado a aceptar trabajos, como los mencionados anteriormente, para aumentar mis ingresos. Porque el sueldo que recibo como profesor ya no es suficiente para cubrir los gastos que van en aumento anualmente. Te transmito todo esto, querida amiga, solamente para dejarte claro que este invierno dispondría de poco tiempo para tí y que, por esa razón y si tus circunstancias te lo permitieran, preferiría que vinieras más adelante —en primavera—. Si eso no puede ser, tú para mí, y esto te lo recalco, serás bienvenida en cualquier momento y lo que pueda hacer por tí lo habré de hacer. Pero si vinieras más tarde, podríamos mantener, desde luego, una correspondencia matemática metódica. Que marcharía muy bien, porque he aprendido a escribir cartas durante, por ejemplo, las reuniones de profesores, los exámenes de doctorado, etc. Por ejemplo, hace dos años intercambié una serie de cartas con Borchardt sobre la media aritmético-geométrica de cuatro elementos,[137] de las cuales las mías fueron escritas todas en la sala del Senado."

Las razones citadas son plenamente válidas, y a ellas se podría añadir el estado de salud de Weierstrass. Había estado muy enfermo de neumonía en la primavera de ese mismo año, y a esa enfermedad se había sumado una afección hepática aguda. Pero, ¿no había habido razones semejantes durante el año en que Weierstrass había sido rector de la universidad y, sin embargo, las conversaciones científicas entre Weierstrass y Sonja habían proseguido entonces sin ningún impedimento?

Esta carta, que Sonja no recibió, le fue devuelta a él a Berlín. De todas maneras, no es muy probable que hubiera servido para detener a Sonja. Ésta conocía a su amigo y sabía que si le era posible defender su causa cara a cara, la iba a ganar con seguridad. Después veremos cómo acertaba en eso completamente.

A finales de enero de 1881, Sonja se encuentra de nuevo en Moscú, después de haber pasado sin embargo algún tiempo en San Petersburgo y haberse entregado allí a las matemáticas con tal pasión que sus amigos en la ciudad ya no la reconocían. Se ocupó entonces sobre todo, siguiendo el consejo de Weierstrass, del problema del movimiento de la luz en un medio cristalino.[138] Él escribe, el 1 de febrero de 1881:

"Ya que hasta el día 24 del mes pasado no recibí de tu parte los papeles sobre ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales, debo concluir que, en tu trabajo, todavía no has conseguido un resultado de completa validez, lo que, para ser sincero, yo tampoco esperaba. Estoy convencido de que aún quedarán muchas dificultades que superar, aunque también creo, firmemente, que el tema merece la más profunda investigación. De manera que no te desanimes porque el difícil problema ofrezca una terca resistencia ante esos primeros ataques."

Weierstrass habla también con Sonja el 1 de febrero de 1881 sobre la integración de las ecuaciones diferenciales de las órbitas planetarias, problema que él nunca pierde de vista. Escribe:

"Desde que te fuiste, he estado atareado con las ecuaciones diferenciales lineales cuyos coeficientes son funciones reales y periódicas de una variable, y creo que ahora ya he encontrado la manera correcta de tratarlas. Aunque al hacerlo tengo que limitarme a una clase especial de este tipo de ecuaciones, pero esa es, precisamente, la única que aparece en los problemas de mecánica analítica.[139]

Quiero compartir contigo el teorema principal que me ha sido dado obtener: Sea

$$F(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\lambda,\mu} F_{\lambda,\mu}(t) x_\lambda x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, 2n)$$

un polinomio homogéneo de segundo grado en las $2n$ variables $x_1, \ldots, x_{2n}$, en el que los coeficientes son funciones reales de la variable t y están compuestos, necesariamente, por términos de la forma

$$A\cos(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \cdots)t + B\sin(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \cdots)t,$$

donde $a_1, a_2, \ldots$ denotan números reales arbitrarios y $\nu_1, \nu_2, \ldots$ números enteros (positivos o negativos). Supongo también que las funciones $F_{\lambda,\mu}(t)$ son tales que, para valores reales de $t, x_1, \ldots, x_{2n}$, la función $F(x_1, \ldots, x_{2n})$ no cambia de signo. Asumido esto, ahora supongo que se cumplen las siguientes ecuaciones diferenciales entre las variables $x_1, \ldots, x_{2n}$ y t:

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}}, \\ \frac{dx_{n+\alpha}}{dt} &= -\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Entonces, las expresiones más generales que satisfacen estas ecuaciones diferenciales tienen la forma:

$$x_\lambda = \sum_\rho \left\{ f_{\lambda,\rho}(t)\cos(m_\rho t) + f'_{\lambda,\rho}(t)\sin(m_\rho t) \right\} \qquad (\lambda = 1, \ldots, 2n),$$

donde las m_ρ, cuyo número no es mayor que n, son constantes reales, en general no constituidas a partir de las $a_1, a_2, \ldots$, mientras que las $f_{\lambda,\rho}(t)$ y $f'_{\lambda,\rho}(t)$ son funciones de la misma naturaleza y composición que las $F_{\lambda,\mu}(t)$.[140]

Hasta ahora puedo demostrar estrictamente este teorema sólo en el caso en que el número de las cantidades $a_1, a_2, \ldots$ se reduce a uno. Pero el método que sigo para obtener los desarrollos efectivos de las expresiones de $x_1, \ldots, x_{2n}$ es independiente de esa presuposición de manera que, una vez probado en el caso particular, probarlo en el caso general tampoco tendría que causar mayor dificultad. Si, ahora mismo, pudiera dedicar algunas semanas exclusivamente a estas investigaciones, pronto llegaría a tener la certeza de si las ideas por las que me estoy guiando de momento son correctas o no. Y, si puedo así resolver las ecuaciones diferenciales lineales de la forma dada creo que, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales que sirven para determinar las órbitas de los planetas también podrán ser sometidas a un razonable método de tratamiento análogo. En este momento estoy más convencido que nunca de que todos los métodos que se han probado hasta ahora para la integración de estas últimas no pueden llevar a la meta.”

Una carta del 8 de enero de 1881 que Sonja me escribió a mí desde San Petersburgo[141] es de mucho interés, tanto para la biografía de Sonja como para la de Weierstrass.

“Hoy comenzaré mi carta hablándole a usted del sr. Weierstrass. Tuve el placer de encontrarlo en buen estado de salud, aunque abrumado por el trabajo y, por desgracia, por un trabajo que, al menos a mi parecer, podría estar siendo llevado a cabo fácilmente por algún matemático más joven y cuyo tiempo no sea todavía tan valioso. El curso, que ahora imparte diariamente y ante un auditorio de 250 personas, la revisión de la edición de las Obras de Jacobi y de Steiner, las diversas reuniones de Academia-Senado-Facultad y otras, llenan su jornada hasta el punto de hacerle casi imposible completar sus propias investigaciones, sobre todo teniendo en cuenta su edad, ya bastante avanzada, y su salud, cuyo estado no le permite fatigarse impunemente. Verdaderamente no entiendo cómo los demás matemáticos de Berlín no son capaces de hacerle comprender al ministro lo necesario que sería liberar al sr. Weierstrass, al menos durante una temporada, de toda obligación externa y asegurarle los medios para que se pudiera dedicar durante un año, exclusivamente, a la publicación de sus propias Obras. A este respecto es también una gran desgracia el fallecimiento del sr. Borchardt, ya que creo que se trataba del único, entre los amigos influyentes de Weierstrass, que se tomó realmente en serio sus intereses, que son también los de la Ciencia. Es muy lamentable, realmente, que quizá nunca vayamos a ver una descripción completa de su teoría de las funciones abelianas, ya que me parece que uno de los mayores méritos de Weierstrass consiste, justamente, en la unidad de su método y en la manera, tan natural como lógica, como deduce toda la teoría a partir de un único teorema fundamental,[142] que así queda presentada verdaderamente como un todo orgánico; y es precisamente este lado de su genio el que se pierde completamente de vista con la publicación de sus investigaciones por entregas, como ha hecho hasta ahora, lo que hace que no sea merecidamente apreciado más que por un reducido número de sus alumnos. Pues, ¿no es realmente sorprendente cómo, en la actualidad, la teoría de las funciones abelianas, con todas las particularidades metodológicas que le son propias y que la convierten en una de las ramas más hermosas del análisis, todavía se estudie y se entienda poco en todas partes menos en Alemania? Yo realmente me he indignado leyendo, por ejemplo, el tratado sobre las funciones abelianas de Briot,[143] que hasta hoy no había podido hojear. ¿Cómo es posible exponer una materia tan bella de una manera tan árida y tan poco provechosa para el estudiante? Casi no me extraña que nuestros matemáticos rusos, que solamente conocen esta teoría a través de los libros de Neumann[144] y de Briot, profesen una indiferencia tan profunda hacia el estudio de estas funciones. ¿Me creeríais si os digo, por ejemplo, que he tenido que mantener, hace poco tiempo, una discusión muy viva con varios profesores de matemáticas de la Universidad de Moscú que sostenían que las funciones abelianas no se habían mostrado capaces aún de ninguna aplicación seria, y que toda su teoría seguía siendo árida y embrollada hasta el punto de resultar completamente inadecuada para constituir el tema central de un curso universitario?”

El 6 de marzo de 1881 Weierstrass no había recibido todavía ninguna noticia de Sonja, salvo un breve recado que le anunciaba que había vuelto a Moscú. Pero ese mismo día, él escribe:

“Sobre mí, poco tengo que contar. He trabajado mucho este año, pero sin el éxito que habría correspondido. Tu presencia me ha hecho retomar mis antiguas investigaciones sobre la integración de las ecuaciones diferenciales de la dinámica; como ya te escribí, no he dejado de hacer algunos progresos, aunque todavía surgen ante mí unas dificultades que, a veces, se me antojan insuperables. En el Seminario,[145] este invierno, diserté detalladamente sobre los métodos existentes hasta ahora para la determinación de los movimientos planetarios bajo las condiciones que se dan en nuestro sistema solar, y he llegado a la convicción cada vez más firme de que, para encontrar la solución de los problemas que están ahí involucrados, hay que tomar unos caminos completamente distintos de los recorridos anteriormente, aunque de momento esos nuevos caminos siempre se abren a mi vista sólo de una manera confusa. Si tuviera aquí a alguien con quien poder discutir todo lo que trato de hacer a diario, quizá muchas cosas me quedarían más claras.

Y prosigue escribiendo:

“Mis investigaciones sobre funciones univaluadas también son en el fondo valiosas para mí, porque han mostrado a los matemáticos más jóvenes el camino para trabajar en el mismo campo, que es la mayor recompensa que un maestro y escritor puede desear para sí. Además de Mittag-Leffler, el yerno de Hermite, É. Picard,[146] y el coeditor del Boletín de Darboux, J. Tannery,[147] han hecho investigaciones muy interesantes a partir de mi trabajo. Este último me informa,[148] por ejemplo, de que la serie que denoté por $\psi(x)$ en mi último estudio[149] puede ser reemplazada por otras que tienen las mismas propiedades que la mía, pero que son de una naturaleza mucho más elemental. Si se pone, por ejemplo,[150]

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \frac{2x^8}{x^{16}-1} + \cdots,$$

entonces la suma de los n primeros términos de esta serie es

$$\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}},$$

de donde se deduce, cuando se hace $n = \infty$, que

$$\psi(x) = 1, \qquad \text{cuando } |x| < 1,$$
$$\psi(x) = -1, \qquad \text{cuando } |x| > 1.$$

Con esta función se puede deducir todo lo que demostré con ayuda de mi función $\chi(x)$.[151]

No necesito decirte explícitamente que tengo muchas ganas de saber cuánto has progresado en tu trabajo, me refiero al λ-trabajo."[152]

Sonja no daba noticias suyas, porque después de su vuelta a Moscú había tomado la resolución de abandonar Rusia (por qué y en qué condiciones, lo sabemos por la biografía de Anne-Charlotte Leffler).[153] Ella pensó en ir de inmediato a Berlín. Llegó allí en la primavera de 1881 y se quedó hasta comienzos de 1882, cuando fue a instalarse en París. Weierstrass le escribe a París el 11 de abril de 1882:

"Mi querida amiga, ya han pasado más de tres meses desde que te fuiste de Berlín, y no te he escrito ni una sola vez, por lo que tendrías derecho a quejarte de mí si no hubieras tenido con bastante frecuencia la experiencia de que uno puede ser claramente consciente de una obligación y al mismo tiempo posponer su cumplimiento día tras día sin que ni la negligencia ni la indolencia sean la verdadera causa de ello. Tu primera carta desde París[154] también tardó mucho tiempo en llegar y, francamente, admito que me habría resultado muy difícil contestarla rápidamente. A partir de cada línea de la misma y, más aún, de lo que se dejaba leer entre líneas, quedaba suficientemente claro que ciertas circunstancias sobre las que ni podías ni querías expresarte, te generaban una inquietud y unas preocupaciones que amenazaban con frustrar tu deseo ferviente de poder dedicarte tranquilamente a tu trabajo durante mucho más tiempo. No estás acostumbrada a hablar sin reservas con tus amigos en tales casos, y piensas que cada persona debe tratar de soportar ella misma aquello con lo que le toque cargar. En eso coincido plenamente contigo y, por lo tanto, no me puedo decidir a pedirte aclaraciones ni más información, y sin embargo, como sincero amigo tuyo y "confesor"[155] que me considero, difícilmente podría haber ignorado alguna de las cosas que tú me contaste a grandes rasgos o que yo me imaginé. Ésa es la verdadera razón por la que me resultaba tan difícil decidirme a escribirte.

— — — — — — — — — — — — — — — — —

Llevé mi curso sobre las funciones hiperelípticas, siguiendo un plan nuevo, a una conclusión satisfactoria;[156] me agradó, además, ver que varios de mis oyentes lo siguieron perfectamente y que la mayor parte, al menos, aguantó fielmente hasta el final. La edición de Steiner me dio mucho trabajo; lo más duro fue comprobar la exactitud de las abundantes notas que me habían llegado por parte de los revisores de las memorias individuales, y comprimirlas en unas pocas páginas. Pero la dejé ya preparada hace unas semanas; el segundo (y último) grueso volumen, de 47 pliegos, se ha publicado a primeros de este mes.[157] Estoy muy contento de haberme librado de aquel compromiso que asumí que por cierto, según tengo entendido, ha obtenido plena satisfacción del público interesado. La edición de Jacobi requiere menos esfuerzo para mí y además me resulta más interesante.[158]

En este momento estoy ocupado en una memoria no muy extensa, que da una visión general acerca de cómo resulta la teoría de las trascendentes abelianas generales cuando se construye sobre la misma base que en el curso del que te he hablado. Si y es una función n-valuada de x, asocio con ella todas las funciones que están compuestas racionalmente por y y por cualquier número de funciones univaluadas de x y que además se pueden representar en la forma

$$f_0(x) + f_1(x)y + \cdots + f_{n-1}(x)y^{n-1},$$

siendo $f_0(x)$, $f_1(x)$, …, $f_{n-1}(x)$ funciones univaluadas de las que supongo, además, que cada una de ellas solamente posee un número finito de singularidades esenciales. Con esta restricción, la teoría de estas trascendentes multivaluadas puede desarrollarse como hice para las funciones univaluadas; el concepto de funciones *primarias*[159] y, en particular, de las que desempeñan el mismo papel que las unidades algebraicas en la teoría de números, se puede establecer de una manera bastante general, y se puede demostrar que cada función del tipo en cuestión va a estar compuesta por funciones primarias, —en general por un número infinito de tales funciones—, etc. Si, además, se trata de integrar una diferencial

$$F(x, y)\, dx,$$

donde F denota una de las funciones consideradas, esto siempre se podrá hacer en la forma

$$\int F(x, y)\, dx = F_0(x, y) + \sum_{\nu} C_\nu \log F_\nu(x, y),$$

donde las F_ν nuevamente denotan funciones del mismo tipo, y la expresión de la derecha consta de un número finito o infinito de términos según que el número de polos de la función $F(x, y)$ sea finito o no. En el caso en que se toma como $F(x, y)$ una función racional de x, y, se llega a las integrales abelianas, cuyas propiedades esenciales resultan ahora de una manera sencillísima a partir de la teoría general precedente. Con esto se consigue también proporcionar un acercamiento sencillo a las funciones Θ.[160] Como he dicho, en la memoria solo voy a poner los fundamentos de la teoría, sin entrar en el detalle de los cálculos; esto queda muy bien y, además, creo que esta forma de presentación va a ser bienvenida por muchos lectores.

La memoria aparecerá dentro de pocas semanas."

La memoria nunca se publicó y las notas, que probablemente existieron, han desaparecido. Pero nos podemos hacer una idea del trabajo que Weierstrass le había dedicado y de la pérdida que sufrió la ciencia a consecuencia de su desaparición por el siguiente pasaje de una carta de su hermana Clara Weierstrass a Sonja el 22 de marzo de 1882:

"Te digo que con el trabajo es lo nunca visto. Mientras está sentado a la mesa para comer, está escribiendo fórmulas con el dedo índice de la mano derecha en la palma de la otra. — En cuanto termina el último bocado, vuelve a su escritorio para trabajar. Tenemos un tiempo primaveral increíblemente hermoso, pero él no sale a la calle. — Trabaja desde por la mañana hasta altas horas de la noche sin cesar y sin descanso. — Probablemente trata de llegar a alguna conclusión y no quiere que nada en el mundo le moleste hasta haber llegado a ella. Los matemáticos son, después de todo, un punto masoquistas. Este trabajo forzado lo puede llevar bien durante una temporada, hasta que de pronto tiene los nervios tan alterados que ya no aguanta más."

Weierstrass escribe de nuevo el 11 de abril de 1882:

"Ha aparecido recientemente un extenso trabajo de Kronecker: "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen"[161]. Contiene los resultados de muchos años de investigación en una forma muy concisa, pero que será muy difícil de entender para los lectores que no hayan escuchado las conferencias de Kronecker, por lo que me temo que, de momento, será más admirado que estudiado."

Finalmente un pasaje que muestra hasta qué punto Weierstrass seguía y apreciaba lo que se hacía en Francia en esa época:

"¿Te has fijado en el último trabajo de Poincaré?[162] En cualquier caso, se trata de un eminente talento matemático; parece que ahora hay en Francia una nueva generación de matemáticos jóvenes que se esfuerzan, y con gran éxito, por hacer conquistas también en el campo del análisis, cuyo único representante, después de que Liouville[163] se apartase de él, fue durante mucho tiempo sólo Hermite. Las investigaciones iniciadas por Poincaré en conexión con los trabajos de Fuchs,[164] Schwarz y Klein,[165] aunque quizás no se halle aún del todo en el camino correcto, conducirán, en cualquier caso, a nuevas transcendentes analíticas. Sólo hay que lamentar que para los jóvenes investigadores franceses la Academia sea un objetivo tan tentador, ya que llevar cada semana a los *Comptes Rendus* un artículo que merezca realmente la pena es, desde luego, imposible."

Sonja habría podido defender los artículos de los *Comptes Rendus* recordando la sugestiva influencia que tiene siempre el intercambio frecuente de ideas entre los científicos ocupados en el mismo problema.

De una carta del 14 de junio de 1882 se desprende lo reservada que, a pesar de todo, había sido Sonja ante Weierstrass en relación con sus asuntos personales:

"Mi querida amiga, lo que me cuentas en la primera parte de tu tan esperada carta[166] me ha entristecido mucho, aunque no me haya sorprendido precisamente. De hecho, desde hace mucho tiempo he sospechado cuál era el verdadero motivo de tu larga estancia en París y de la absoluta reserva que guardabas conmigo. Las escasas horas durante las que tuve oportunidad de poder conocer al sr. Kowalewsky fueron suficientes para convencerme de que vuestra relación sufre un desgarrón interno que amenaza con destruirla por completo. Él ni comprende ni tiene interés en tus ideas y aspiraciones, y tú no eres capaz de sentirte cómoda en el seno de la agitación de su vida. Vuestros caracteres son demasiado diferentes como para que tú, lo que se necesitaría en un matrimonio feliz, pudieras esperar disponer en él de un apoyo firme para tí, y él pudiese encontrar en tí el necesario complemento de su naturaleza. Si eso fuera distinto, creo que incluso los extravíos por su parte no impedirían una sincera reconciliación. Cuando yo pensé que tenía que contradecir tu plan de marcharte a Estocolmo como profesora privada mientras él seguía con sus negocios en Moscú, lo hice con la convicción de que vuestra relación conyugal era antinatural, y tampoco puedo disuadirme de pensar que a tí no te habría pasado eso por la cabeza si te sintieras unida íntimamente con tu esposo y lo amaras de la forma en que un hombre merece ser amado. No puedo culparlo a él por mostrarse contrario a ese plan, que quizás fue, precisamente, lo que le hizo sentirse algo mejor predispuesto hacia tus esfuerzos matemáticos. Tal como dices que están las cosas ahora, la relación anterior entre vosotros dos parece haberse vuelto insostenible; ojalá se pudiera organizar de modo que consigas esa liberación de desvelos y preocupaciones que es tan necesaria para tu existencia. Tienes que salir de tu aislamiento actual lo antes posible y, además, debes tener contigo a la pequeña Sonja; preocuparte por ella y observar su desarrollo te mantendrá ocupada y feliz de una manera beneficiosa. En lo que antecede he expresado mi opinión francamente y sin ambages. Te agradezco la confianza que me has demostrado, pero te conozco demasiado bien como para tratar de imponerte algún consejo, y sé que eres lo suficientemente fuerte como para hacer frente a tu destino por tu cuenta. Pero si crees que, de alguna manera, mis consejos o mi ayuda pueden serte útiles, ahora ya sabes que puedes recurrir a mí sin dudarlo."

Weierstrass se alegra de que Sonja haya conocido a Charles Hermite. Yo había estado en París en la primavera de 1882 y descubrí que Sonja no se había puesto en contacto con ninguno de los matemáticos franceses y finalmente, con mucha dificultad, la persuadí para que visitara a Hermite. Weierstrass escribe:

"Tendrás que entrar en contacto también ahora con los demás matemáticos; los jóvenes, Appell,[167] Picard, Poincaré te han de interesar mucho. Poincaré es, en mi opinión, el más cualificado de todos para la especulación matemática, ojalá pueda evitar que su extraordinario talento se disperse demasiado y haga posible que sus investigaciones maduren. Los teoremas que ha publicado en los *Comptes Rendus* sobre las relaciones algebraicas entre dos variables y sobre las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes algebraicos son realmente impresionantes; abren nuevos caminos para el análisis que conducirán a resultados inesperados.[168] Sin embargo, estoy convencido de que la nueva forma de manejar las relaciones en cuestión, correcta en sus ideas básicas, aún tendrá que emprenderse desde puntos de vista más generales y avanzados. Permíteme explicarme de una manera un poco más precisa. Dada una relación algebraica $f(x, y) = 0$, Poincaré dice que todos los sistemas de valores x, y que satisfacen la ecuación pueden representarse en la forma

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

donde $\varphi(t), \psi(t)$ denotan funciones univaluadas de la variable independiente t, cuyo dominio puede ser acotado o no acotado. Estas funciones, además, tienen la propiedad de que permanecen invariantes si se sustituye t por ciertas funciones lineales de la misma variable t. Determinar los coeficientes de estas últimas a partir de los valores dados de los coeficientes de la ecuación $f(x, y) = 0$ es un problema extremadamente difícil que conducirá, en general, a ecuaciones transcendentes de la naturaleza más complicada. Si los coeficientes de $f(x, y)$ son funciones racionales o algebraicas de unas cantidades indeterminadas $a, b, \ldots$, entonces obviamente la determinación completa de $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ se efectuará de una manera, o de otra completamente distinta, evidentemente, según la forma en que esas constantes arbitrarias figuren en la ecuación. Prosiguiendo estas reflexiones se llega necesariamente al siguiente problema:

Dada una relación algebraica entre $n+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$, cuyos coeficientes son números racionales, tratar de escribir todos los sistemas de valores $(x, x_1, \ldots, x_n)$ que satisfagan esa ecuación en la forma

$$x = \varphi(t_1, \ldots, t_n), \quad x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n),$$

de tal manera que $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sean funciones univaluadas de las variables independientes $t_1, t_2, \ldots, t_n$. (Esto se puede hacer, por ejemplo, cuando se da la ecuación $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$, en cuyo caso se pueden expresar x, y, k mediante las funciones $\vartheta_\lambda(\upsilon|\tau)$.)[169] En esta investigación habrá que esforzarse por encontrar, entre las ecuaciones algebraicas, las que podrían llamarse *ecuaciones madre*, cada una de las cuales tiene un comportamiento particular y a las que se podrán reducir todas las demás. La primera de todas las tareas será, sin embargo, determinar funciones de varias variables que tengan unas propiedades similares a las que Poincaré ha denominado "funciones fuchsianas" y de las que un ejemplo lo proporcionan los cocientes de las funciones $\vartheta_\lambda(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n|\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{nn})$ consideradas como funciones de las υ y las τ.[170] Se trata de perspectivas a muy largo plazo, pero hay que intentar ver claramente cuál ha de ser, necesariamente, la meta definitiva de las investigaciones tan brillantemente iniciadas por Poincaré.

Lo anterior, naturalmente, se aplica en mayor medida en lo que se refiere a las investigaciones de Poincaré sobre ecuaciones diferenciales lineales. Como he señalado, lo publicado al respecto hasta ahora por Poincaré ha causado asombro, en cierto modo, a algunos de los mayores especialistas en las ecuaciones diferenciales lineales. Para muchos de ellos debía resultar muy difícil desprenderse de la idea de que para integrar una ecuación diferencial lineal haya, necesariamente, que expresar una variable en términos de la otra."

Mi colección de cartas de esa época da prueba de la mala recepción que tuvieron las detalladas memorias de Poincaré publicadas unos meses más tarde en *Acta Mathematica*[171] entre más de uno de los matemáticos cercanos a Weierstrass. Las declaraciones tan francas de Weierstrass muestran, entre tantas otras cosas, cuán superior era el maestro respecto de su entorno y qué equivocación se cometía al identificar, como ocurría a veces, al maestro con este o aquel otro de sus discípulos. Para mí, personalmente, ante la aprobación del maestro toda reprobación era irrelevante. Leo en una carta que Weierstrass me dirigió en una fecha más reciente (5 de abril de 1885), cuando las memorias en cuestión habían sido ya, en su mayor parte, publicadas:

"En cualquier caso, la historia de las matemáticas del siglo XIX registrará el hecho notable de que los trabajos pioneros del más brillante de los jóvenes matemáticos franceses se publicaron por primera vez, expuestos en detalle, en una revista que se publicaba en Estocolmo. Trabajos que, inicialmente, se basan en los resultados de estudios de investigadores alemanes pero que, a través de estos, están finalmente relacionados con los descubrimientos de Abel."

Pero vuelvo con la carta a Sonja del 14 de junio de 1882:

"No conozco la memoria de Poincaré sobre las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

¿Dónde figura?[172] Con respecto a la integración de las ecuaciones diferenciales de la mecánica anunciada por Poincaré,[173] puedo decir lo que sigue. Hace dos inviernos expuse alguna idea sobre el tema en el Seminario y probé, entre otros, el siguiente teorema:

Si cualquier número de puntos materiales interactúan de acuerdo con la ley de Newton o, con mayor generalidad, con la ley que resulta al sustituir $\frac{1}{r^2}$ por una función analítica cualquiera de r que para valores reales y positivos de esta última cantidad se hace infinitamente grande solamente para $r = 0$, y las condiciones iniciales del movimiento son tales que no hay dos puntos ocupando la misma posición ni tampoco hay dos puntos infinitamente distantes entre sí, entonces las coordenadas de los puntos móviles son funciones analíticas del tiempo t, definidas unívocamente no sólo para todos los valores reales de esa cantidad sino también para todos los valores complejos cuya segunda coordenada permanezca, en valor absoluto, por debajo de una cota determinada.

El teorema del que parte Poincaré, según comunicación de Appell, sólo es correcto, por tanto, si se cumplen las condiciones para la estabilidad del sistema considerado. La verificación de esas condiciones es quizás la parte más difícil de toda la investigación. En el caso, por ejemplo, en que sólo hay dos puntos y, en un instante determinado, el movimiento de cada uno de ellos se dirige hacia el otro, sus coordenadas no podrán ser unas funciones del tiempo de la naturaleza indicada. Si Poincaré es realmente capaz de determinar los coeficientes de la serie en que se pueden desarrollar dichas coordenadas suponiendo la estabilidad inicial del sistema, entonces sería posible que pudieran determinarse a continuación las condiciones bajo las cuales la serie converge y estas serían, entonces, las condiciones de estabilidad. Pero incluso así, no creo que la forma de esas series refleje el verdadero carácter analítico de las funciones a representar. El simple caso en que hay dos puntos y el movimiento de cada uno en torno al baricentro común tiene lugar en una elipse ya contradice esto. Esperaremos y ya se verá."

Me ha parecido interesante citar también este pasaje aunque, evidentemente, Sonja no le transmitiese a Weierstrass de una manera completamente correcta la comunicación de Appell acerca del trabajo de Poincaré.[174] Weierstrass formula aún otra comunicación de carácter matemático:

"Con respecto a la cuestión que te plantearon Hermite y Picard, de momento puedo comunicarte lo siguiente.

Sea $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ una función $2r$-plemente periódica de las r variables u, del tipo que he expuesto detalladamente en el volumen 89 del *Journal* en la carta dirigida a Borchardt.[175] Además, sean

$$\begin{array}{cccc} P_{1,1} & P_{2,1} & \ldots & P_{r,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2} & \ldots & P_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1,2r} & P_{2,2r} & \ldots & P_{r,2r} \end{array}$$

$2r$ sistemas primitivos de períodos correspondientes de esta función, de modo que, si

$$P_1, \ P_2, \ \ldots, \ P_r$$

es un sistema cualquiera de períodos de la función, se tiene

$$P_1 = \sum_{\nu=1}^{2r} n_\nu P_{1,\nu}, \ \ldots, \ P_r = \sum_{\nu=1}^{2r} n_\nu P_{r,\nu}.$$

Se pueden introducir, en lugar de $u_1, \ldots, u_r$, otras variables $v_1, \ldots, v_r$ funciones lineales de las primeras de manera que, para la función de $v_1, \ldots, v_r$ que resulta de $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ se obtengan, como sistemas de períodos correspondientes a los anteriores, los que figuran aquí abajo:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \ldots & \tau_{1,r} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \ldots & \tau_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{r,1} & \tau_{r,2} & \ldots & \tau_{r,r} \end{array}$$

Cuando la función φ es una de aquellas a las que conduce el problema de inversión de Jacobi, entonces entre las cantidades τ se cumple la relación

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, r \\ \beta = 1, \ldots, r \end{pmatrix}$$

y, al mismo tiempo, la forma cuadrática

$$i \sum_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta$$

es tal que, para valores reales de $n_1, \ldots, n_r$[176] que no sean todos nulos, la parte real de la forma siempre tiene un valor negativo.

Según una observación de Hermite (*Note sur le calcul différentiel et le calcul intégral*, p. 26)[177] parece ser que Riemann probó que entre las cantidades $\tau_{\alpha,\beta}$ tienen lugar las relaciones especificadas, para toda función $2r$-plemente periódica $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$. En las Obras de Riemann no se encuentra nada sobre esto, ya que lo que figura acerca de ello en la *Teoría de las funciones abelianas*[178] se refiere sólo al caso de las funciones periódicas antes indicadas, en las que las $\tau_{\alpha,\beta}$ dependen sólo de unas cantidades supuestas arbitrariamente. Pero, de hecho, el teorema en su versión precedente no es válido para las funciones $2r$-plemente periódicas generales; hay también, en efecto, en el caso general, $\frac{1}{2}r(r-1)$ relaciones entre las $\tau_{\alpha,\beta}$, pero éstas se expresan mediante ecuaciones lineales homogéneas en las $\tau_{\alpha,\beta}$ con coeficientes enteros. A pesar de todo, siempre se pueden establecer $2r$ sistemas correspondientes de períodos independientes entre sí, pudiendo ser incluso primitivos, para los cuales valgan, entre las $\tau_{\alpha,\beta}$, las simples relaciones dadas $\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha}$ y la forma cuadrática que se define tenga la propiedad indicada. Con ayuda de un teorema que enuncié en la carta mencionada se puede probar, finalmente, lo siguiente:

Toda función $2r$-plemente periódica de r variables se puede representar racionalmente mediante otra función $2r$-plemente periódica de las mismas variables que posee $2r$ sistemas de períodos primitivos para los cuales las cantidades $\tau_{\alpha,\beta}$ formadas a partir de ellos tienen las propiedades anteriormente indicadas.

O también: Si $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ es una función $2r$-plemente periódica de las variables $u_1, \ldots, u_r$ del tipo supuesto, se puede determinar un sistema de constantes

$$\begin{matrix} \tau_{1,1} & \ldots & \tau_{1,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{r,1} & \ldots & \tau_{r,r} \end{matrix}$$

que verifican las igualdades $\tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\beta,\alpha}$; además, la forma cuadrática antes citada tiene la propiedad indicada, y $\varphi(u_1, \ldots, u_r)$ se puede expresar mediante un cierto número de funciones[179]

$$\vartheta_\lambda(v_1, \ldots, v_r | \tau_{1,1}, \tau_{1,2}, \ldots, \tau_{r,r}),$$

cuando en éstas se toman para $v_1, \ldots, v_r$ determinadas funciones lineales de las cantidades u.

Tengo terminada una pequeña memoria sobre este tema que uno de mis oyentes franceses, el sr. Molk,[180] va a traducir al francés."

Esa memoria ha desaparecido igualmente. Finalmente, una comunicación relativa a la tesis de Lindemann sobre el número π:

> "Finalmente, tengo alguna noticia matemática importante y muy interesante para compartir contigo. El profesor Lindemann de Friburgo acaba de demostrar que π es un número transcendente y, a saber, lo que interesará mucho a Hermite, mediante una generalización muy ingeniosa del teorema principal mediante el cual Hermite probó que el número e es transcendente."[181]

En una nueva carta del 15 de junio de 1882, Weierstrass pregunta:

"¿Querrías tener la bondad de decirme dónde están los dos trabajos de Poincaré mencionados por tí, me refiero al que trata de las ecuaciones diferenciales de la mecánica y al que trata de las ecuaciones $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$?[182] Yo no he llegado a verlos.

El trabajo de Lindemann sobre el número π es muy notable por varios motivos; los resultados son correctos, pero están basados fundamentalmente en unos teoremas mal comprendidos y que aún hoy siguen sin estar demostrados rigurosamente por Lindemann.

Con la ayuda de unos teoremas que se corresponden en el círculo a los desarrollados por Hermite en su bello tratado sobre la función exponencial, pero que no requieren tanto aparato de fórmulas, yo he llegado a una demostración completamente rigurosa y nada difícil del teorema general de Lindemann,[183] enunciado, a saber, en la forma siguiente:

Si $z_0, z_1, \ldots, z_n$ son números algebraicos todos distintos y $N_0, N_1, \ldots, N_n$ son números algebraicos cualesquiera, entonces la ecuación

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0$$

sólo puede satisfacerse cuando los N son todos iguales a cero."

El día 5 de agosto, Weierstrass escribe:

"Estos días me ocuparé con un pequeño trabajo que le prometí a Mittag-Leffler para la nueva revista sueca."[184]

En relación con esto, Weierstrass me escribió el 5 de agosto de 1883:

"La memoria destinada para usted: "Bestimmung der allgemeinsten Funktionen einer Veränderlichen, für die ein Additionstheorem besteht"[185], está terminada en cuanto a su contenido, pero ni aún comprimida resultará ser muy breve, ya que he considerado conveniente incluir también en ella la determinación de las funciones univaluadas del tipo en cuestión. Lo que está escrito al respecto en la recopilación de fórmulas de Schwarz[186] no será suficiente para quienes no estén familiarizados con mis conferencias."

Esa memoria, o no se escribió nunca o nunca llegó a salir de las manos de Weierstrass; en todo caso ha debido perderse. Se conoce una parte, sin embargo, por el curso de Weierstrass.[187]

Aquí se produce una interrupción bastante larga en la correspondencia. Sonja había recibido en París, en marzo de 1883, sin preparación alguna, la noticia de la muerte trágica de su marido. El fuerte impacto emocional que sufrió hizo que cayera peligrosamente enferma. Marie Mendelsohn* relata cómo, fiel a su máxima de que "jeder Mensch muß mit dem, was er zu tragen hat, selbst fertig zu werden suchen"‡, tras pasar cuatro días ella sola aislada sin tomar ningún alimento y llegar a perder el conocimiento el quinto día, el sexto día se recuperó, pidió papel y lápiz y llenó el papel de fórmulas matemáticas.

Pero siguió seriamente enferma mucho tiempo. Weierstrass me escribió, desde Grande-Rive près Evian les Bains (Saboya), en su carta del 5 de agosto:

"Pero lo esencial sobre lo que tengo que escribirle en esta ocasión se refiere a la sra. de Kowalewsky. Sin lugar a dudas usted sabe —en realité je n'en avais aucune connaissance—[188] que lamentablemente perdió a su esposo, pero tal vez no que estuvo gravemente enferma durante meses como resultado de ese suceso totalmente inesperado. Al menos yo no sabía nada, cuando hace unas cinco semanas apareció extremadamente afectada en Berlín, desde donde va a partir hacia Rusia en los próximos días. Pero esta estancia en Berlín le ha sentado muy bien, ha podido volver a trabajar, y con éxito, lo que la ha hecho sentirse muy animada y la ha conducido a reanudar viejos planes."

Y más adelante:

"Ahora, con la muerte de su marido, ha dejado de existir lo que yo consideré que era un obstáculo muy importante para su proyecto —l'acceptation d'une place de maître de conférence à Stockholm—[189]."

Sonja partió de Berlín a Odessa, donde en otoño de 1883 tomó parte en un congreso de científicos naturales rusos.[190] Había recuperado la valentía y encontrado la fuerza para vivir, y durante su viaje le envió a Weierstrass una carta muy simpática en la que se quejaba, en tono de broma, de un joven matemático de Berlín que, al parecer, le había dado unos consejos para el viaje, consejos que no habían sido demasiado prácticos. Weierstrass contesta, al respecto, el 27 de agosto de 1883:

*Neue Deutsche Rundschau, 8. Jahrg., p. 592. (N. de M-L.) [Con más detalle: Marie Mendelson (ed.), "Briefe von Sophie Kowalewska", *Neue Deutsche Rundschau (Freie Bühne)* **8** (1897) (reimp. 1970), p. 589–614.]

‡La carta de Weierstrass del 11 de abril de 1882, citada anteriormente. (N. de M-L.) ["Cada persona debe tratar de soportar ella misma aquello con lo que le toque cargar".]

"Con relación ahora a tu carta del día 15, escrita de tan buen humor desde una estación desconocida para mí y sólo imperfectamente caracterizada por el añadido de "en el camino hacia Odessa". En primer lugar, debo defender muy seriamente a las matemáticas y a los matemáticos contra tus injustas acusaciones. Ciertamente es bueno, en los asuntos importantes, pedir consejo a los expertos, pero debe ser a los adecuados. Si yo quiero saber, por ejemplo, cómo llegar desde la Puerta de Brandenburgo a Schlesischen, el experto para mí será el cochero, y si tú quieres volver a viajar de Berlín a Odessa en el futuro, acude mejor al Internationale Reisebureau[191] (Unter den Linden 68), donde encontrarás al experto que no sólo te brindará información, sino además un billete directo, y se encargará de tu equipaje."

Encontramos en esta misma carta, a causa de una manifestación de Sonja, una interesante clasificación de los distintos tipos de matemáticos:

"Hay diferentes categorías de persona entre los matemáticos de edad avanzada; es ésta una proposición trivial, ciertamente, pero que explica muchas cosas. Mi querido amigo Kummer, por ejemplo, tanto en la época en que dedicaba todas sus energías a encontrar la demostración de las leyes de reciprocidad superiores, como ahora, después de haberlas agotado con aquel tema, ni tenía interés realmente entonces en lo que sucediese, ni tampoco hoy le importa lo que suceda, en los diversos campos matemáticos; no es que se comporte de una manera negativa al respecto, sino que le resulta indiferente. Si le dices que la geometría euclidiana descansa sobre un principio no demostrado, está de acuerdo contigo; sin embargo, admitiendo este punto de vista, el planteamiento de la pregunta: ¿cómo se construye entonces la geometría sin ese principio?, repugna a su naturaleza; los esfuerzos dirigidos en ese sentido, y las investigaciones generales que se han ido elaborando en orden a liberarse de datos empíricos o de axiomas, son para él especulaciones ociosas o hasta, incluso, una abominación. Kronecker es completamente distinto; se familiariza rápidamente con todo lo nuevo porque su fácil capacidad de comprensión se lo permite, aunque no sea de una manera profunda: no tiene el don de ocuparse de un buen trabajo ajeno con el mismo interés científico que cuando se trata de una investigación propia. A esto se añade un defecto que se encuentra en muchas personas extremadamente inteligentes, particularmente en las de raza semítica; no tienen suficiente imaginación (o habría que decir intuición), y la verdad es que un matemático que no es un poco poeta nunca será un matemático completo. Las comparaciones son instructivas: la visión de conjunto que lo abarca todo y se dirige hacia lo más elevado, hacia lo ideal, coloca de una manera muy evidente a Abel por delante de Jacobi, incluso a Riemann por delante de todos sus contemporáneos (Eisenstein, Rosenhain),[192] y a Helmholtz por delante de Kirchhoff (aunque en este último no haya ni una gota de sangre semita)."[193]

Quienes hayan frecuentado personalmente a Weierstrass reconocerán aquí su profunda admiración y simpatía por su gran émulo Riemann, una admiración que no sólo se dirigía hacia el sabio sino también hacia el hombre. "Riemann era un 'anima candida' como jamás conocí otra igual", me decía a menudo. Por el contrario, Abel era el matemático del que Weierstrass había recibido las impresiones más duraderas para sus propios trabajos, y Weierstrass podría ser caracterizado como sucesor de Abel más que ningún otro matemático.[194]

Respecto de sí mismo, Weierstrass se expresa así:

"Por lo demás, en lo que respecta a mis esfuerzos científicos, —de los que se me permitirá hablar sabiendo que, por poco que hayan contribuido al desarrollo de la Ciencia, siempre se han consagrado únicamente a su servicio—, hace mucho que renuncié a hacerlos aceptar por los colegas mayores que yo; es hacia la juventud adonde me he dirigido y, en ella, he encontrado gran comprensión y una acogida entusiasta."

Sonja llegó a Estocolmo a finales del otoño de 1883, e impartió su primer curso en la Universidad de Estocolmo durante el semestre de otoño de 1884. Queda toda una serie de cartas de Weierstrass, dirigidas a Sonja o a mí, que hablan de su situación en Estocolmo. Pasaré en silencio sobre estas cuestiones, ya que todavía tienen un carácter de actualidad demasiado acusado. Siempre será un honor para Suecia, para la joven Universidad de Estocolmo y para los hombres y mujeres ilustrados que tuvieron parte en ello, que a esta universidad se añadiera una fuerza tan imponente como la de Sophie Kowalewsky. ¿Habría sido posible algo semejante, en ese momento, en cualquier otra universidad europea? Pero, por otro lado, sería una jactancia fuera de lugar querer pretender que la contratación de Sonja sea prueba de la existencia de una cultura social más avanzada, desde un punto de vista feminista, en Suecia que en otros países.[195] Su contratación tuvo éxito, sobre todo, gracias a una especie de factor sorpresa que no dio tiempo a la oposición para organizarse suficientemente. Las verdaderas dificultades llegaron después. Las manifestaciones de esa hostilidad son todavía demasiado recientes como para que yo pueda someter a la consideración de todo el mundo la correspondencia pertinente que un día ha de revelar un gran número de curiosas interioridades de las repúblicas académicas, no sólo de Estocolmo y Upsala, sino también de Berlín, San Petersburgo y otros centros de la cultura intelectual.[196]

En una carta de 27 de diciembre de 1883, Weierstrass presta a Sonja algún consejo en relación con un curso sobre ecuaciones en derivadas parciales que ella había programado.

> "Por otro lado, te recomendaría encarecidamente que trataras con más detalle algunas ecuaciones en derivadas parciales provenientes del campo de la física matemática, aunque su integración apenas tenga nada en común con la primera parte de tus lecciones. En los Cursos de Riemann y de Dirichlet[197] puedes encontrar ejemplos. A saber, la ecuación $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ es de gran interés. Suponiendo que, para $t = 0$, sea dada $\varphi = f(x)$, entonces $f(x)$ puede ser una función completamente arbitraria, basta que sea integrable y, entonces, $\varphi(t, x)$ resultará ser, para cada valor positivo de t, una función analítica de x, pero no se puede definir para valores negativos de t —il faut collationner ici la lettre de 6 may 1874 que j'ai déjà citée—,[198] con lo que se puede recordar la peculiaridad de estas ecuaciones diferenciales que hiciste notar en tu disertación doctoral. La enorme diferencia de comportamiento que existe entre las dos ecuaciones diferenciales
>
> $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$
>
> tan semejantes aparentemente, es muy chocante e instructiva.
>
> Si, al mismo tiempo, quisieras enseñar algo del que denominas como método mío para la integración de las ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes, te quedará bastante bien si te limitas a los casos simples en los que mis fórmulas, tal como se presentan en la redacción que tú conoces, son de aplicación inmediata. Además, la integración exacta, por ejemplo, de las ecuaciones diferenciales que se refieren a las vibraciones del éter en un medio isótropo es, indiscutiblemente, de gran interés."

Una carta de Weierstrass desde Wilhelmshoehe, fechada el 13 de septiembre de 1884, da una explicación satisfactoria a un hecho que posteriormente causó cierta agitación. El sr. Vito Volterra demostró que las funciones que había dado Sophie Kowalewsky en su memoria "Über die Brechung des Lichtes in kristallinischen Mitteln" como integrales generales de las ecuaciones diferenciales de Lamé, no satisfacen esas ecuaciones.[199] Pero la memoria de Sonja se presenta como una especie de colaboración con Weierstrass, a la vista de que el trabajo que, bajo el título de "Zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten", forma parte del primer volumen de las obras de Weierstrass, está reproducido por completo en el trabajo de Sophie Kowalewsky.[200] La gente se preguntó cómo era posible que Weierstrass no hubiera notado el hecho señalado por el sr. Volterra.[201] Weierstrass escribe:

> "Mi querida amiga, estoy totalmente abrumado por el peso de los reproches que, en forma de peticiones, contiene la carta que me enviaste ayer (sin datos de lugar ni fecha). Con todo, espero que llegues a un juicio más benévolo de mi conducta al saber que desde hace ya seis semanas no me he encontrado muy bien y no me he podido preocupar absolutamente de nada, ni siquiera de corregir. Aparentemente, no padezco de ningún dolencia y como, bebo y duermo con normalidad, pero se ha apoderado de mí un terrible cansancio, físico y mental, que me deja completamente apático y me llena de aversión a todo lo que suponga pensar o redactar. En resumen, tengo lo que los médicos llaman fatiga mental. Mientras seguía teniendo que dar clase lo notaba menos y culpé de la desgana para trabajar, que ya venía sintiendo desde hacía tiempo, al esfuerzo físico que me causaban las lecciones; fue sólo al salir de viaje cuando me dí cuenta realmente de lo afectado y necesitado de descanso que estaba, y que sigo estando."

El 24 de marzo de 1885 Weierstrass escribe a Sonja:

> "Te felicito de todo corazón por el gran número de oyentes que tienes;[202] por supuesto, también pasarás por la experiencia de que en muchos de ellos la voluntad es buena, pero la capacidad

es mediocre, de modo que, incluso con los más perseverantes, no puedes estar seguro de si lo que los retiene es el interés hacia el tema o la fidelidad al deber. Ojalá pudiera uno reunir siempre en torno suyo un círculo de aunque sólo fuera una docena de estudiantes de talento, bien preparados y apasionados por su ciencia, ... ”

—El propio Weierstrass, durante el invierno de 1884–85, había tenido 250 oyentes en sus clases sobre la teoría de funciones y se había podido convencer de que la calidad de los alumnos disminuía con la cantidad. Al parecer no quedó ni una sola redacción aprovechable de aquella, que fue la última, exposición detallada de la teoría de funciones presentada por Weierstrass—

“... porque entonces la enseñanza académica sería la ocupación más envidiable e interesante del mundo. Y, sinceramente, a esto tengo que añadir algo que cada vez se echa más de menos: la colaboración armoniosa con los colegas basada en la concordia, el acuerdo en los principios y el reconocimiento mutuo más sincero.”

A continuación dice:

“Mientras que yo digo que un número denominado *irracional* tiene una existencia tan real como cualquier otro en el mundo de las ideas, ahora es un axioma para Kronecker que sólo existen ecuaciones entre números enteros.[203] Mientras yo trato de hacer evidente por qué es errónea la opinión de Jacobi[204] de que es absurdo considerar x como función de u cuando se suponen ambas cantidades relacionadas por la ecuación

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}},$$

—y es errónea porque los valores de u que corresponden a un mismo valor de x forman[205] un conjunto numerable del que Cantor,[206] como bien sabemos, ha demostrado indiscutiblemente que no sólo hay infinitos valores que no están contenidos en él, sino que además esos valores forman un conjunto de mayor potencia—, y con ello motivar que en una estructura [*Gebilde*] analítica hay que distinguir entre los puntos que pertenecen a la estructura y los que se agregan a ella como puntos límite, —repito, que mientras trato de aclarar tales cosas para los principiantes,—[207] Fuchs permite que aparezca en los *Sitzungsberichten der Akademie*,[208] un artículo que se supone que demuestra también que hay ecuaciones diferenciales lineales mediante las cuales no quedan definidas funciones “analíticas”, sin darse cuenta que, en caso de estar en lo cierto, pondría de esa manera el sello del absurdo en la inmensa mayoría de aquellas funciones cuyas propiedades él mismo se ha aplicado a estudiar con tanto éxito. Estarás de acuerdo conmigo, querida amiga, en que no es muy alentador ver que, incluso en personas tan capaces como Fuchs, el duro esfuerzo ha sido inútil. Pero lo peor es que Kronecker emplea su autoridad para sostener que todos los que han trabajado hasta ahora en fundamentar la teoría de funciones son pecadores ante el Señor. Cuando un tipo excéntrico como Christoffel[209] nos dice que dentro de veinte o treinta años la actual teoría de funciones va a quedar enterrada y que todo el análisis se verá reconducido a la teoría de formas, le podemos contestar encogiéndonos de hombros. Pero cuando Kronecker mantiene esta proposición, que reproduzco literalmente: “Si aún me queda tiempo y fuerza suficiente, yo mismo mostraré al mundo matemático que no sólo la Geometría, sino incluso la Aritmética, le pueden enseñar el camino al Análisis y, ciertamente, el más riguroso. Si yo ya no lo pudiera hacer, los que vengan después de mí lo harán, y además reconocerán la incorrección de todos esos razonamientos en los que se basa hoy lo que llamamos *Análisis*”; una declaración así, hecha por un hombre dotado de un talento tan grande para la producción matemática y cuyos eminentes trabajos admiro tan sinceramente y con tanto placer como todos sus colegas, no sólo es humillante para aquellos a quienes demanda que reconozcan como un error lo que ha constituído el objeto de sus pensamientos y de sus incesantes esfuerzos y que renieguen de ello, sino que es también una invitación directa a la generación más joven para que abandone a sus guías actuales y se agrupe, a su alrededor, como en torno al apóstol de una nueva doctrina que, desde luego, ante todo se debería justificar. Es triste, en efecto, y me llena de amargo dolor ver que un hombre cuya gloria está fuera de peligro se deje arrastrar, aunque sea por una bien justificada autoestima, a unas manifestaciones de las que ni siquiera parece comprender lo ofensivas que son para otros.[210]

Pero ya basta de estas cosas, que solo he mencionado para explicarte por qué razones ya no podré disfrutar en lo sucesivo, en mi actividad docente, del mismo placer que hasta ahora, incluso si mi salud me permitiera proseguirla aún algunos años. Y tú no hables de esto; no quisiera que otras personas, que no me conocen tan bien como tú, puedan ver en lo que digo la expresión de un resentimiento que, de verdad, me es ajeno. Nadie mejor que yo mismo sabe lo lejos que me he quedado de la meta que me propuse en el entusiasmo de la juventud, pero nadie tampoco podrá quitarme el íntimo convencimiento de que mis esfuerzos y mi actividad no han sido completamente estériles y de que el camino que yo empecé a recorrer en la búsqueda de la verdad no resultará ser un camino equivocado."

Weierstrass temió, ciertamente, que se viese en las expresiones que he citado arriba la expresión de una "Empfindlichkeit"[211] que le era extraña, pero no creo que ahora pueda pensar eso nadie. Kronecker, el amigo y antagonista de Weierstrass, no vive ya, y por esta razón me ha parecido que nada debía impedir mostrar a estas alturas, y en las propias palabras de Weierstrass, las preocupaciones que vinieron a ensombrecer el ocaso de sus días.

Una carta del 16 de mayo de 1885 contiene lo que sigue:

"Imagínate, después de tu partida he vuelto a la teoría de funciones con argumentos reales. He obtenido algunos resultados interesantes, sobre los que publicaré algo el mes que viene, como por ejemplo:

1. La definición de Riemann[212] de

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

que se ha considerado como la más general concebible, es insuficiente. Resulta más adecuado considerar lo siguiente:

Sea $f(x)$ una función univaluada de la variable real x. Admitiremos que pueda haber infinitos valores entre a y b para los cuales $f(x)$ no esté definida e, incluso, que los puntos de discontinuidad puedan presentarse como una colección numerable o no numerable. Sólo hace falta suponer que en cada pequeña parte del intervalo $a \dots b$ hay puntos en los que la función está definida, así como, además, que el valor de la función no excede en ninguna parte un límite determinado. Entonces, siempre se puede dar una definición de $\int_a^b f(x)\,dx$ en la que se sigan cumpliendo todas las propiedades de la integral que resultan de las definiciones de Cauchy y de Riemann. Esto se puede inferir, muy simplemente, a partir del concepto de *contenido* de un conjunto arbitrario de puntos establecido por Cantor en el Volumen 4 de *Acta*.[213] Aunque a mí, en principio, me condujeron a ello otras consideraciones más generales.

2. Si $f(x)$ es continua a lo largo del intervalo $a \dots b$, se pone

$$\varkappa = \frac{2\pi}{b-a}$$

y se denota por $f_\nu(x)$ una serie de Fourier con un número finito de términos:

$$f_\nu(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} (A_\lambda \cos \lambda\varkappa x + B_\lambda \sin \lambda\varkappa x),$$

donde n es un número entero que crece con ν, entonces $f(x)$ siempre se puede representar en la forma

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x).$$

Además, esta serie converge absoluta y uniformemente en todo el intervalo $a \dots b$.[214] Por otra parte, si se desarrolla en serie de Fourier la función lineal de x que va al principio y, después, se entresacan y se juntan en uno solo los términos que contienen el mismo múltiplo de $\varkappa x$ en las series restantes, se obtiene la serie de Fourier ordinaria. Esta serie, sin embargo, no siempre convergerá.[215]

3. Aunque $f(x)$ sea indeterminada o discontinua en un número cualquiera de puntos (incluso en infinitos puntos), la serie anterior representa a la función en todos los puntos de continuidad y, en el caso de que existan segmentos formados por puntos de continuidad, converge absoluta y uniformemente en cada uno de los segmentos. En un punto de discontinuidad, la suma de los n primeros términos oscila entre límites finitos cuando n crece indefinidamente.

4. Toda función $f(x)$ de la naturaleza especificada proviene de una función $f(x, \varkappa)$ que, respecto de x, es una función analítica (transcendente entera) y contiene además un parámetro variable $\varkappa$ (positivo) de manera que se verifica

$$f(x) = \lim_{\varkappa=0} f(x, \varkappa)$$

en cada punto de continuidad de la función $f(x)$, mientras que, si x es un punto de discontinuidad o de indeterminación, entonces $f(x, \varkappa)$ oscila entre los mismos límites que

$$\frac{1}{2}\big(f(x+\varkappa) + f(x-\varkappa)\big)$$

cuando $\varkappa$ se hace infinitamente pequeño.[216]

Estos teoremas pueden parecer importantes, pero son de una naturaleza muy trivial."*

Compárese con esto la comunicación de Weierstrass en las cartas del 6 de mayo de 1874 y del 27 de diciembre de 1883. Las pruebas de estas proposiciones, aunque expresadas de una forma menos general, se vuelven a encontrar en el último trabajo de Weierstrass: "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen", Berliner Sitzungsberichte 9, 30 de julio de 1885, p. 633–640, 789–806.[217]

El 22 de septiembre de 1885 Weierstrass escribe:

"Mittag-Leffler te lleva dos pequeños trabajos sobre las funciones de argumentos reales.[218] Aún se añadirán otros dos."

Como se sabe, nunca han aparecido. Tampoco han quedado notas sobre este tema.

"A finales de octubre aparecerá una colección de trabajos más antiguos míos de teoría de funciones. Me atrevo a presentarla ante el público, aunque ahora sepamos que nueve décimas partes de la moderna teoría de funciones son un sinsentido."

La parte matemática de las cartas más recientes de Weierstrass se relaciona únicamente con el trabajo de Sonja sobre el problema de rotación. Sonja había entregado a tiempo su memoria para el Premio Bordin,‡ [219] pero se le había dado permiso para revisarla antes de su publicación. Este trabajo fue realizado en su mayor parte en Wernigerode, en el Harz, en el verano de 1888, durante el cual Sonja pasó unas semanas con Weierstrass. El 13 de julio él escribe a Sonja:

"Entretanto, —malgré le mauvais temps[220]— la estancia aquí (llevamos desde el día 3) ha tenido un efecto beneficioso sobre mí, y me noto mucho más fresco que durante la última temporada en Berlín. De modo que no tendré que evitar toda conversación matemática, aunque estemos antes del 1 de agosto; al menos podré mantener a mi antigua y querida alumna bajo una estricta supervisión a fin de que trabaje con diligencia (es decir, algunas horas cada día). Porque es muy importante que el trabajo que ahora tienes entre manos no sólo quede terminado a tiempo sino también que satisfaga absolutamente todos los requisitos formales."

Yo mismo pasé varias semanas con Weierstrass en Wernigerode para estudiar con él las memorias de concurso para el premio del rey Óscar.[221] Durante ese tiempo, Weierstrass recibió gran número de visitas

*Cf. p. 214–219 de este volumen [de *Acta Math.*]. (N. de M-L.)
[Mittag-Leffler está remitiendo aquí a dos cartas de Weierstrass a du Bois-Reymond de 20 de abril de 1885, [250, p. 214–219]. Son de interés también las notas finales (13 a (16) a estas cartas, *ibid.*, p. 224–225. Por nuestra parte volvemos a citar, a propósito del contexto matemático de la carta, nuevamente el artículo [212].]

‡Publicada en [124]. La memoria fue coronada, en la sesión solemne de la Academia de Ciencias de París del 24 de diciembre de 1888 con el premio Bordin, elevado de 3000 a 5000 francos. (N. de M-L.) [El aumento de la cuantía original del premio, que se indica en nota a pie de [124, p. 177], se debió a que el trabajo era excepcional, ver [7, p. 157–158].]

por parte de una multitud de matemáticos alemanes y extranjeros, y todos ellos podrán atestiguar el vigor de espíritu que le iluminaba a pesar de haber cumplido 73 años. Incluso estando obligado él a recluirse en solitario durante gran parte del día, sin embargo, cuando podíamos volvernos a encontrar con él, nos parecía estar todavía en posesión de todo su genio matemático, viendo las cosas con más profundidad y más claramente que ningún otro, y prodigando, como sólo él podía hacerlo, consejos e información en el campo completo de las matemáticas.

En febrero del año siguiente Sonja estaba todavía en París, adonde había acudido para recibir, en la víspera de Navidad de 1888, el Premio Bordin. Weierstrass escribe:

> "No necesito asegurarte cuánto nos ha alegrado tu éxito, a mí y a mis hermanas antes que a nadie, así como también a tus amigos de aquí, Fuchs, Hettner, Knoblauch,[222] Hensel,[223] P. Dubois y Hansemann,[224] que ha vuelto recientemente. Yo, en particular, siento una verdadera satisfacción: ahora son jueces competentes quienes han pronunciado el veredicto de que mi "alumna fiel", mi "debilidad", después de todo no es un "vano engaño".[225]

NOTAS

1. Para una biografía completa del autor, ver el libro reciente [215] de Arild Stubhaug. Los artículos [146], de María Rosa Massa-Esteve, y [148], de José Manuel Méndez Pérez, dan unos marcos bien documentados, tanto biográficos como científicos, de los dos protagonistas, en catalán y castellano respectivamente.

2. La guerra franco-prusiana, librada entre el 19 de julio de 1870 y el 10 de mayo de 1871 causó en torno a los 200.000 muertos entre los soldados combatientes y, posiblemente, más de medio millón de víctimas civiles.

3. Charles Hermite (1822–1901). En 1869–1870 sucedió a Jean-Marie Duhamel a la vez como profesor de análisis en la Escuela Politécnica y como catedrático de álgebra superior de la Facultad de Ciencias de París. Para las circunstancias personales de Mittag-Leffler tras su doctorado en 1872, ver [253, p. 210, nota 44].

4. Al parecer esta frase la acuñó Friedrich Julius Richelot, ver la nota 35. En una carta a Jules Houël de fecha 8 de febrero de 1881, Gaston Darboux habla de Weierstrass como “el gran berlinés, al que Hermite siempre se refiere como el gran legislador de las Matemáticas” [64, p. 152].

5. Leo Koenigsberger (1837–1921), alumno de Weierstrass en Berlín y mejor conocido por su extensa biografía de von Helmholtz (ver la nota 9), se trasladó por varias universidades prusianas a lo largo de su vida académica. Entre los años 1869 y 1875 y, de nuevo, entre 1884 y su retiro en 1914, fue profesor en la de Heidelberg.

6. Weierstrass nació en 1815, el año de Waterloo, el mismo año que Bismarck. Pero Weierstrass fue profundamente pacifista. En 1882 fue nombrado caballero de la Legión de honor por el estado francés [64, p. 44]. Este artículo bilingüe francés-alemán de Mittag-Leffler parece querer referenciar en su misma escritura una voluntad europea de conciliación tras la Gran Guerra de 1914–1918.

7. Se encuentra una relación de los cursos impartidos por Weierstrass en Berlín desde el semestre de invierno de 1856/57 hasta el semestre de invierno de 1889/90, con el número de horas semanales que comportaban, en [249] III, p. 355–360.

8. Esa carta de Weierstrass a Koenigsberger se puede leer en el mismo número de *Acta Math.*, [251, p. 230–231]. La carta proseguía: “Por cierto, serías muy amable si me dieras tu opinión sobre esta dama y su capacidad para los estudios matemáticos más profundos. Esto sería tanto más deseable para mí ya que en la próxima sesión del Senado, de hoy en ocho días, se va a discutir de nuevo la misma solicitud de admisión a las conferencias matemáticas y yo defendería esta solicitud si pudiera, en base a tu juicio, expresar mi convicción de que la dama tiene una auténtica vocación científica.” Una primera solicitud de admisión había sido apoyada por el fisiólogo Emil du Bois-Reymond, hermano del matemático Paul du Bois-Reymond, que fue rector de la Universidad de Berlín el curso 1869/70, ver [26, p. 85–93; 117–121]; en este trabajo reciente, Reinhard Bölling aporta el conocimiento, y la traducción al alemán en su caso, de unas fuentes en ruso (en particular, la correspondencia entre los hermanos Wladimir y Alexandr Kowalewsky entre los años 1867 y 1873; libros de Jelisaweta Litwinowa la segunda mujer, como él anota, que obtuvo un doctorado en matemáticas —Berna 1878—, y que conoció a Sonja en Zúrich en 1873) que habrían pasado desapercibidas hasta la fecha en la literatura.

9. Hermann von Helmholtz (1821–1894) es un renombrado médico y físico alemán, con trabajos reconocidos en campos diversos, como fisiología sensorial, oftalmología, acústica, electrodinámica y termodinámica. Entre 1858 y 1871, año en que aceptó su posición final como profesor de física en la Universidad Humboldt de Berlín, fue profesor de fisiología en la Universidad de Heidelberg, en Baden.

10. El físico Gustav Kirchhoff (1824–1887) y el químico Robert Bunsen (1811–1899) se conocieron como profesores en la Universidad de Breslavia el curso 1850–1851, y fueron amigos desde entonces. En 1854, Bunsen era ya catedrático de química en Heidelberg y convenció a Kirchhoff para que aceptase allí un nombramiento de profesor de física, comenzando entonces una fructífera colaboración entre ambos. Juntos, por ejemplo, fueron descubridores del cesio y el rubidio, por métodos espectroscópicos, en 1860 y 1861.

11. Elisabeth Fjodorovna Schubert (1820–1879). La explicación en francés —(Lisa était la mère)—, inserta en el texto alemán, es de Mittag-Leffler.

12. Como es bien conocido, Sofja Wassilyevna Corvin-Krukovskoy y Wladimir Kowalewsky (1842–1883) acordaron un matrimonio blanco, puramente formal, que a ella le daba la oportunidad de estudiar en el extranjero lejos de los padres. En el contexto del movimiento nihilista de la joven intelectualidad rusa de aquellos años ese pacto amistoso no era infrecuente [26, p. 85].

13. acotación en alemán —eine gefährliche Frau— de Mittag-Leffler en su texto francés.

14. acotación en alemán —und habe ihn so allerliebst gebeten, daß er nicht habe widerstehen können und seinem Vorsatze untreu geworden sei— de Mittag-Leffler.

15. Se trataba de Julia Lermontoff (quien aparecerá más adelante), que se doctoró en química en 1874, también por Gotinga.

16. La acotación en alemán —die Persönlichkeit der Dame die erforderlichen Garantien bietet— de Mittag-Leffler, transcribe el texto original de la carta de Weierstrass a Koenigsberger un poco más adelante del fragmento incluido en la nota 8. Y aquí proseguía Weierstrass: “—un punto que también será importante en la audiencia en el Senado—, aunque puedo suponerlo, ya que ella ha estudiado bastante tiempo en tu universidad. Sin embargo, una garantía expresa sobre esto también sería bienvenida para mí, ya que realmente uno no se suele encontrar aquí ante una situación tan insólita como que una joven dama quiera estudiar matemáticas y no tenga miedo de entrar a un lugar como nuestra Aula 17” ([251, p. 231]).

    Koenigsberger contestaba a Weierstrass tres días más tarde: “. . . creo que tu universidad no corre ningún riesgo al permitir que esta dama asista a conferencias matemáticas, aunque yo, por supuesto, y otros varios de mis colegas, creemos que en general al sexo femenino se le debe negar el derecho a escuchar conferencias en la universidad" ([26, p. 88]).

17. Prusia no permitió la matriculación de las mujeres en la universidad hasta 1908. Fue uno de los últimos estados alemanes en hacerlo [26, p. 88].

18. Para el uso en nuestra traducción del tuteo familiar cuando Weierstrass se dirige a Sonja, hemos tenido en cuenta lo que señalan Don H. Kennedy, [101, p. 150], Roger Cooke, [54, p. 19] y Bölling, [26, p. 90].

19. Sophie Kowalewsky murió en Estocolmo el 10 de febrero de 1891. "En su funeral, entre las muchas coronas, hay una de laurel, decorada con camelias y otras flores, y un lazo: SONJA — VON WEIERSTRASS" [26, p. 93].

20. La correspondencia se publicó completa por primera vez, traducida y con notas en ruso por Pelageya Kochina, en [113]. Es más accesible hoy la inmejorable edición crítica preparada, en base a la de Kochina, por R. Bölling (editor, presentador y comentarista), [253], que ya hemos citado en la nota 3. Roger Cooke escribió una interesante reseña de ella, [57]. Dejaremos constancia aquí de que sólo hemos tenido noticia del libro de Bölling con nuestro trabajo en un estado bastante avanzado (por eso hemos seguido adelante con él).

21. Bölling encontró en 1990, en los archivos del Instituto Mittag-Leffler de Estocolmo, un fragmento del borrador de una carta de Sophie Kowalewsky a Weierstrass: [23]. El fragmento se puede leer, traducido al inglés, en [22]. Leer también [7, p. 62–65], de Michèle Audin, un libro que nos parece precioso también por lo inusual.

22. El sitio de París, ocurrido entre el 19 de septiembre de 1870 y el 28 de enero de 1871, fue el episodio que marcaría el final de la guerra franco-prusiana.

23. [136, p. 28–32], [128, p. 180–183]. Cf. también [7, p. 47–50].

24. Cf. [26, p. 89]. Aquí Bölling, en base a fuentes rusas ya mencionadas, aclara que esta opinión de Mittag-Leffler no es correcta, porque ya desde la estancia en Heidelberg Sonja había tenído presente la idea de realizar un doctorado en "Matemáticas y Mecánica".

25. En [249] III (1903), p. 355–360, se registran hasta diez cursos semestrales impartidos por Weierstrass. El primero, de 4 horas semanales, en verano de 1865; el último, de 3 horas semanales, en invierno de 1889-1890. Oskar Bolza (1857–1942) da los siguientes detalles, en el Prefacio de [27]: "Mi principal fuente de información concerniente a la teoría de Weierstrass ha sido el curso de lecciones sobre el cálculo de variaciones, del semestre de verano de 1879, al que tuve la fortuna de asistir como estudiante en la Universidad de Berlín. Además he tenido a mi disposición dos conjuntos de notas de los cursos de 1877 (gracias al sr. G. Schulz) y de 1882 (copia del de la biblioteca de Gotinga, que agradezco al profesor Tanner), una copia de algunas páginas del curso de 1872 (de notas tomadas por el sr. Ott) y finalmente unos apuntes (que debo al sr. J. C. Fields) de un curso de lecciones sobre el cálculo de variaciones por el profesor H. A. Schwarz (1898-1899)".

26. El *Manual del cálculo de variaciones* [109] de Adolf Kneser (1862–1930).

27. Sobre este deseo que hacía suyo Mittag-Leffler, Kurt-R. Biermann (1919–2002) declaraba al respecto ante la Academia de Berlín, en 1966 [15, p. 192–193]: "[Weierstrass] ni siquiera pudo completar la edición de su obra, cuya publicación trató de proteger contra todas las incidencias adversas imaginables con todos los medios a su alcance. Quedó truncada. A pesar de todos los esfuerzos de Max Planck, que encabezó de 1915 a 1939 la comisión académica encargada de su publicación, y de los dos editores sobre quienes recayó la carga principal del trabajo (Johannes Knoblauch hasta 1915 y después Rudolf Rothe), los tres tomos que faltan no han salido, y el séptimo volumen, con las *Lecciones sobre el cálculo de variaciones*, que no apareció hasta 1927, quedó como último volumen de la obra".

28. Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) presentó su disertación doctoral en 1864, en Berlín, dirigida por Kummer y Weierstrass. Fue profesor en Gotinga desde 1875 hasta 1892, año en que aceptó la cátedra que había dejado libre Weierstrass en Berlín. Editor de mucha de la obra de Weierstrass, sirva [210] como ejemplo importante.

29. Mittag-Leffler, tal vez, se refiere a los artículos [42] y [43] de Felice Casorati (1835–1890), profesor en la universidad de Pavía, bien conocido por dar nombre al teorema de Sokhotskiĭ-Casorati-Weierstrass (cf. [164]; [145, p. 230–231]).

30. Mittag-Leffler se refiere seguramente aquí a Meyer Hamburger (1838–1903). Cf. el pequeño artículo [85] de este autor.

31. Sobre la integración de las ecuaciones ordinarias de este tipo, en las Obras de Weierstrass solamente se encuentra la breve comunicación de octubre de 1875 a la Academia de Ciencias de Berlín [240], donde se aplican resultados de la memoria [228].

32. Cf. la memoria [228] citada antes.

33. Eduard Heine (1821–1881), fue profesor de la Universidad de Halle desde 1856. Richard Baltzer, (1818–1887), profesor en la Universidad de Giessen desde 1869.

34. Wilhelm Killing (1847–1923), mejor conocido por sus trabajos pioneros en la teoría de grupos y álgebras de Lie, fue alumno de Weierstrass y presentó la tesis doctoral en 1872 bajo su dirección. En el discurso, titulado "Karl Weierstrass", que leyó en su toma de posesión en octubre de 1897 del rectorado de Münster, en el que honraba la memoria de su maestro, fallecido sólo ocho meses antes, declaraba: "dessen Schüler zu sein stets meinen grassten Stolz bilden wird" (ser alumno suyo será siempre mi mayor orgullo). En la introducción de su tesis Killing escribió: "[Con esta obra] sólo estoy pensando en dar la interpretación geométrica de una memoria que mi venerado maestro, el profesor Weierstrass, leyó en la Academia el 18 de mayo de 1868" (se estaba refiriendo a [228]). Después de la tesis, su primer trabajo publicado fue la memoria [103]. Otras obras de Killing, cuyos títulos pueden quizá dar mejor idea de a qué se refiera esta "Geometrie des endlichen Raumes" del texto, aunque sean algo posteriores a él en el tiempo son, el libro [104] y la memoria [105].

35. Friedrich Julius Richelot (1808–1875) fue profesor de la Universidad de Königsberg durante toda su vida profesional. En su tesis doctoral (Königsberg, 1831), dirigida por Jacobi, presentó la primera construcción con regla y compás del polígono regular de 257 lados. Cuando Jacobi se trasladó a la universidad de Berlín, en 1845, Richelot lo sustituyó como director del departamento de matemáticas y siguió ocupando este cargo hasta el día de su fallecimiento. Está enterrado en el cementerio de sabios de Königsberg. En 1854, Weierstrass recibió un doctorado honorario de la Universidad de Königsberg, ver la nota 36. Fue en el acto de entrega del diploma en el Gymnasium católico de Braunsberg, adonde acudió una delegación de la Facultad de Filosofía, cuando Richelot iba a acuñar la expresión, utilizada una y otra vez desde entonces, y que al comienzo la hemos visto usada por Hermite en París, que decía que los matemáticos habían encontrado en Weierstrass a su maestro [15, p. 200].

36. Richelot se puede referir aquí a la memoria [224] de Weierstrass, aparecida también reimpresa en separata como un "Primer cuaderno" que previsiblemente iba a tener una continuación, [225]. Era una versión extensa de la memoria [223], que sacaba a la luz pública los resultados de [221] y que fue la que le valió a Weierstrass el doctorado honoris causa por Königsberg, ver la nota 35, y dio un giro decisivo a su vida. "Hubo asombro general cuando el trabajo ["Sobre la teoría de las funciones abelianas"] apareció en el volumen 47, de 1854, del *Journal de Crelle*. . . . Richelot escribió [a Weierstrass] desde Königsberg: 'No puedo expresarle con palabras lo mucho que valoro y admiro el brillante coraje que le debe haber inspirado para superar las dificultades causadas por la generalidad de sus investigaciones. Usted tiene la fama indiscutible de haber sido el primero en establecer las fórmulas finales, y yo tengo el agradable deber de expresar abierta y felizmente mi admiración por su trabajo'. También hubo una respuesta entusiasta desde París. Liouville calificó el trabajo como 'una de esas obras que marcan una fecha en la ciencia' [15, p. 199–200]".

En la edición recogida en [249] I, la memoria [224] está incompleta. Falta todo el final del segundo capítulo, la "Digresión sobre funciones elípticas", [224, p. 339–380]. En una nota final, el propio Weierstrass, que tomó parte en la edición de ese primer volumen de sus Obras y lo prologó, explica: "sólo se ha impreso una parte de la memoria . . . porque la teoría de las funciones hiperelípticas aparecerá en un volumen posterior de mis *Memorias*, sujeto a una nueva edición, y el contenido de la digresión sobre las transcendentes elípticas coincide esencialmente con el de la primera memoria de este volumen".

Esta primera memoria de [249] I es [221], que en su día pasó desapercibida. En una nota final a ella, Weierstrass escribe: "La memoria precedente, escrita en verano de 1840, la presenté en otoño de ese año a la Comisión de exámenes científicos de Münster para obtener la *Facultas docendi*. Juzgada muy favorablemente por mi venerado maestro Gudermann [Christoph Gudermann (1798–1852). Ver [67, p. 20–25]], quien me había introducido en la teoría de las funciones elípticas (o "funciones modulares", como él las llamaba) el invierno anterior, se debería haber impreso. Pero, por razones en las que no voy a entrar aquí, eso no se hizo. Más tarde, ofrecí parte de su contenido en el volumen *52* del *Crelle's Journal* (p. 346–379) [nuestra referencia [224]] y, desde entonces, me han pedido varias veces publicar el trabajo completo, lo que es particularmente deseable para los matemáticos interesados en la historia de las transcendentes elípticas. Esto me ha determinado a comenzar con ella la edición completa de mis memorias matemáticas".

Como resume Hilbert en su artículo *In memoriam K. Weierstrass* de 1897, fueron tres las memorias básicas de Weierstrass sobre el denominado *problema de inversión de Jacobi* de las integrales hiperelípticas (ver la nota 204); la primera, [222], escrita y publicada en el Gymnasium de Braunsberg, contiene la derivación de las relaciones entre los periodos de las integrales; la segunda, [223], y la tercera, [224] (publicadas en el *Crelle's Journal*, vols. 47 y 52 resp.), "presentan brevemente el camino por el cual las funciones que resuelven el problema de inversión se presentan como cocientes de series de potencias uniformemente convergentes. Este camino era completamente nuevo, y opuesto hasta el hasta ahí emprendido por por Rosenhain [ver la nota 192] y Göpel para el caso de género $p = 2$. Mientras que estos matemáticos tomaban como base de su teoría las funciones zeta y las relaciones existentes entre ellas, Weierstrass partía de las ecuaciones diferenciales de las funciones hiperelípticas y, en él, las funciones zeta aparecían como pieza final de su teoría. La solución del problema de inversión de Jacobi, que Weierstrass en estos trabajos dio por primera vez, y la que después, para cualquier integral abeliana fue dada, primero por Riemann por otro camino y después por el propio Weierstrass en sus Lecciones, se puede considerar con todo derecho como uno de los mayores logros en el Análisis" [94, p. 331].

37. Alfred Clebsch (1833–1872), profesor de la Universidad de Giessen entre 1863 y 1868, fue cofundador, con Carl Neumann, de la revista *Mathematische Annalen*. Paul Gordan (1837–1912) fue nombrado también profesor de la universidad de Giessen en 1863, y allí hizo amistad con Clebsch. Richelot se refiere aquí al libro [52], fruto del trabajo conjunto de ambos matemáticos durante sus primeros años en Giessen.

Por su parte, la memoria [192] se considera una de las obras fundamentales de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) sobre las funciones de variable compleja, juntamente con su disertación doctoral de 1851 en Gotinga. Sobre las interacciones entre Riemann y Weierstrass, cf. el artículo [165] de Erwin Neuenschwander. Ver, también, la nota 122.

38. Ver [7, p. 207]. Nos hemos ayudado de la versión al inglés de la carta que ofrece ahí la autora.

39. K.-R. Biermann anota: "Durante su mandato como rector de la Universidad de Berlín en 1873/74, Weierstrass se deshizo de muchos viejos hábitos e implementó reformas que estaban muy atrasadas. Sus predecesores se habían negado a acabar con las deficiencias que ellos también notaron durante su, entonces único, año de rectorado. Desafortunadamente, nos tenemos que contentar con repetir esta afirmación de su alumno Kiepert, ya que los archivos del rectorado, que podrían habernos dado una información más detallada, desaparecieron en la guerra [Biermann se refiere a la segunda guerra mundial]. Tampoco se ha encontrado el informe que Weierstrass, según Killing, emitió en contra de la división de la Facultad de Filosofía en Histórico-filosófica y Matemático-científica" [15, p. 198]. "En su discurso de toma de posesión como rector en 1873, Weierstrass exigía al profesor universitario 'señalar los límites de su ciencia aún no superados', así como indicar los puntos 'a partir de los cuales parece posible ir más adelante'. El conferenciante no debía negar al oyente 'incluso una visión profunda del curso de su propia investigación', ni ocultar sus propios errores y sus esperanzas frustradas" [15, p. 206].

40. Sobre superficies minimales delimitadas por segmentos rectilíneos, en las Obras de Weierstrass sólo se recoge el trabajo [247] sobre el cual, en una nota final, se advierte: "la memoria anterior, aún inédita, ha sido preparada por el sr. H. A. Schwarz, como era el deseo de Weierstrass, a partir de unas notas que éste le proporcionó y que contenían exclusivamente fórmulas".

41. Sobre el trabajo de Weierstrass en las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, ver la anterior carta de 4 de noviembre de 1872. Para la teoría de Riemann al respecto, ver [194, §37–40; p. 95–104].

42. Por el contexto se entiende que $\varphi(x)$ es un polinomio de coeficientes reales que sólo tiene raíces complejas, es decir, que no tiene raíces reales, de manera que su grado es par, $2r$. Además, que no tiene raíces múltiples (cf. [253, p. 111, nota 4]).

43. En [241]. Este artículo de 1884 es, de hecho, el extracto de una carta dirigida a H. A. Schwarz y comunicada a la Real Sociedad de Ciencias de Gotinga el 1 de diciembre de 1883, con notas adicionales de Schwarz. Para seguir la notación y el razonamiento del fragmento "de lección" que queda presentado en el texto de la carta de Weierstrass cf. [241, p. 317–319] y las excelentes notas 5 a 9 de Bölling (que contesta a la pregunta final de Weierstrass: —$\varphi(s)$ debe tener sólo un par de raíces conjugadas simples) en [253, p. 111-112]. Leer también [34, p. 172–174].

44. Ernst Kossak (1839–1892) fue el sucesor, en 1872, de Elwin Christoffel en la segunda cátedra de matemáticas creada en el *Königlichen Gewerbeinstitut* de Berlín, la institución académica de formación profesional (que se integraría en la Universidad Técnica de Berlín en 1879) donde Weierstrass, en 1856, había ocupado la primera cátedra.

45. Ioannis N. Hatzidakis (o Hazzidakis, 1844–1921), doctorado por la Universidad de Atenas en 1868, fue alumno de Weierstrass en Berlín durante una estancia postdoctoral becada. No podemos dar más noticia de su investigación sobre el asunto.

46. Georg Hettner (1854–1914), que era uno de los amigos de Sophie Kowalewsky en Berlín (ver las líneas finales del artículo), presentó en la universidad de Berlín en 1877 su disertación doctoral *Sobre la reducción de las integrales de un tipo particular de diferenciales algebraicas a integrales hiperelípticas*, [92], dirigida conjuntamente por Kummer y Weierstrass. Junto con Knoblauch, fue editor del volumen [249] IV (1902), dedicado íntegramente a la teoría de las funciones abelianas.

47. Esta reseña de Gauss, [74, p. 169–178], publicada en 1831, se refería a su propia memoria *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda*, [74, p. 93–148], que se publicó en 1832. Weierstrass se refiere aquí, como expresa claramente en la primera página de [241], a las últimas líneas de aquella reseña. Riemann había llamado la atención sobre la reseña de Gauss al comienzo de la primera sección de su lección inaugural de 1854, para la Facultad de Filosofía de Gotinga, *Sobre las hipótesis en que se funda la Geometría* (cf., por ejemplo, [196, p. 3]). Pero el desarrollo de esta teoría por Weierstrass aparece como una contribución completamente original.

48. Esa memoria, [191]: "Sobre la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica", fue la tesis de habilitación de Riemann para la Universidad de Gotinga en 1854. Para la extensión que da Riemann en ella del concepto de integral cf., en particular, las secciones 4–6: *Sobre el concepto de integral definida y su ámbito de validez* [196, p. 53–58].

49. Ver la siguiente nota 54.

50. Ver [99, p. 40–42]. En una carta de 15 de diciembre de 1874 dirigida a Paul du Bois-Reymond (como se verá enseguida, Sophie Kowalewsky había presentado su tesis en el verano, y la primera de las memorias que conformaron la tesis tocaba este asunto), Weierstrass escribe ([250, p. 204]): "Quiero responder muy seriamente a la cuestión de conciencia que me planteaste. Aparte de enmendar abundantes errores gramaticales, no he tenido otra parte en la disertación en cuestión que haberle recomendado el tema a su autora. Y a este respecto, además, debo señalar que yo, según lo que conocíamos sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias, que se resume en su introducción del modo en que lo suelo presentar, en realidad esperaba un resultado diferente. Yo era, por detenernos en el caso más simple, de la opinión de que una serie de potencias de varias variables que satisface formalmente una ecuación en derivadas parciales dada, debe siempre también converger dentro de un cierto rango y, además, representar a una función que satisface a la ecuación diferencial. Que este no es el caso, como se muestra en el ejemplo de la ecuación $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ estudiada en la disertación, fue descubierto para mi gran sorpresa por mi estudiante de una manera completamente independiente, e inicialmente con ecuaciones diferenciales más complicadas que la mencionada, por lo que que ella misma desesperaba ya de la posibilidad de llegar a un resultado general; la solución, aparentemente tan sencilla, que ella encontró para la dificultad surgida fue, para mí, prueba suficiente de una intuición matemática genial".

51. Ver la nota 198 y su contexto.

52. Volvemos a citar a K.-R. Biermann: "En vista de la estrecha colaboración con su maestro y de los prejuicios de la época contra la actividad femenina en la ciencia, no es de extrañar que inmediatamente después de la publicación de su primer trabajo se expresara en voz baja y luego con más vehemencia la sospecha de que en estos trabajos quien hablaba no era su presunta autora, sino Weierstrass. Se puede uno imaginar lo duro que tales sospechas debieron golpear a un hombre de tan absoluta honestidad, inocencia y decencia como Weierstrass. . . . Weierstrass tuvo que admitir con enojado resentimiento que su relación con Sonja fue malinterpretada, que su patrocinio fue retratado como 'una debilidad del gran hombre' y el talento de ella como 'un vano engaño'; todo el círculo de sus amigos y alumnos más cercanos fue denigrado —hoy hablaríamos de un 'asesinato moral'. . . . No cabe duda de que las sospechas y acusaciones no siempre se basaron en razones científicas. La conexión de Sonja con los círculos socialistas, su trabajo como novelista y como pionera de la emancipación de la mujer tuvieron una fuerte influencia en el veredicto. . . . Tampoco debemos dejar de notar que Weierstrass, quien dijo de sí mismo: 'También puedo ser un crítico severo de las personas y obras en las que estoy interesado', no fue del todo imparcial en su juicio sobre su alumna. Es precisamente por esto que él, cuya superioridad a veces sus contemporáneos sintieron como 'sobrehumana', se nos aproxima como un ser humano, y las innegables habilidades fenomenales y el saber de su alumna no se ven disminuidos por tal constatación" [15, p. 209].

53. Ver el detallado estudio de Bölling en las notas 5 y 6 de [253]. Cf. también [4], p. 187–189 y 208–216, donde Appell (ver la nota 167) cita, a propósito de la ecuación del calor, la memoria doctoral [119] de Sophie Kowalewsky, el trabajo [243] de Weierstrass, y su versión francesa [244].

54. La siguiente expresión para la solución general de la ecuación del calor se encuentra ya en la *Teoría analítica del calor* de Fourier (capítulo IX, sección II, nº 374): [69, p. 475]. Ver también [207, p. 298–299]. Presenta la solución del problema de

Cauchy $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ $(-\infty<x<+\infty,\ t>0)$, $\varphi(x,0)=2\sqrt{\pi}f(x)$ como la convolución de la función dato inicial con el *núcleo del calor* $E(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$, una función que en ese dominio cumple la ecuación $\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\delta_0$, siendo δ_0 la distribución *delta de Dirac* en $(x,t)=(0,0)$ (ver [135, p. 27–30, 245–251]).

55. Hemos corregido la expresión que aparecía aquí en el texto (lo mismo se lee en [151, p. 141]), poniendo $e^{c\lambda^2}$ donde ponía $e^{-c\lambda^2}$, entendiendo que c es positivo y λ es una variable real (cf. [253, p. 127–129, notas 8 y 9]).

56. Sofía Kowalewsky había enviado al efecto, en julio de 1874, tres memorias a la Universidad de Gotinga. Las había preparado en 18 meses bajo la supervisión de Weierstrass. Para Weierstrass, sólo las dos primeras ya eran suficientes para conseguir el grado doctoral en cualquier universidad y, en particular, la primera era de tan extraordinaria calidad (conteniendo el que hoy se denomina *teorema de Cauchy-Kowalewsky*, ver [114, p. 231–235]) que no dejaba lugar a dudas en cuanto a los merecimientos de su autora. De hecho, remitida en agosto al *Journal de Crelle*, se publicó en dicha revista el año siguiente. La tercera memoria fue, según concluye Bölling, la primera escrita, seguramente ya en 1872, e iba a haber sido enviada entonces a Clebsch en Gotinga. Pero Alfred Clebsch murió el 7 de noviembre de 1872 (cf. [26, p. 89–90]). Las memorias segunda y tercera Kowalewsky las entregó para su publicación mucho más adelante, estando ella ya en Estocolmo (cf. las secciones 1.11, 2.8, 3.13 y 4.11 de [54]). Enumeramos a continuación las tres memorias de la tesis; se pueden leer unos interesantes comentarios breves de su interés y contenido matemático, en castellano, de J. M. Méndez Pérez, en [148, p. 81–86]:

   1. *Sobre la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales*, [119].
   2. *Comentarios y notas adicionales a la investigación de Laplace sobre la forma de los anillos de Saturno*, [120], publicada en 1885 en la revista sueca *Astronomische Nachrichten.* El editor, Hugo Gyldén, escribía esta presentación: "A petición mía, la autora me dio permiso para entregar el manuscrito del artículo adjunto a la redacción de *A. N.* La memoria, escrita hace varios años, nunca se ha impreso, por lo que creo que los lectores darán la bienvenida a la publicación de este altamente interesante estudio".
   3. *Sobre la reducción a integrales elípticas de un cierto tipo de integrales abelianas de tercer rango*, [121], publicada en 1884 en *Acta Mathematica.* Su autora indicaba que la memoria, que había presentado en verano de 1874 a la Facultad de Filosofía de Gotinga, aparecía aquí completamente inalterada.

57. Damos una versión castellana del documento original en latín que transcribe aquí Mittag-Leffler. La solicitante dice en él que presenta dos memorias (solamente, no tres) para su aprobación. Finalmente fueron tres y la tercera, en apoyo de la solicitud de exención del *examen rigorosum*, se presentó después (cf. [26, p. 91]). De hecho, en carta a Lazarus Fuchs (que era uno de los árbitros para el doctorado de Sonja) del 27 de junio de 1874, Weierstrass escribe que Frau von Kowalewsky presenta las tres memorias citadas antes, y le da una noticia del contenido de cada una de las tres. Ver [7, p. 72–75] y, para la carta a Fuchs, [255]. En su presentación escribe M. Wentscher, en enero de 1909: "La información sobre los logros científicos de Sonja von Kowalewsky que contiene esta carta tendría que tener un interés especial en vista de la degradación, que últimamente se ha hecho habitual, de los méritos de esta brillante alumna de Weierstrass". Esta carta, junto con otras tres que se intercambiaron Fuchs y Weierstrass ese verano de 1874 y que, comunicadas por L. Schlesinger, obran a continuación en [255, p. 93–99], las incluyó también Mittag-Leffler, [252], en este mismo volumen 39 de *Acta.* Ver también la nota 50. En esa carta Weierstrass también le comenta a du Bois-Reymond sobre los tres trabajos que compusieron la tesis doctoral.

    En su biografía, A. Ch. Leffler recoge el siguiente escrito, dirigido al decano de la facultad de Gotinga, en el que Sophie Kowalewsky explica los motivos que le hacen pedir la dispensa "in absentia" tan rara y excepcional [136, p. 33–34]:

    "Su Señoría tendrá la amabilidad de permitirme agregar algo más a mi carta de petición para postularme al grado de Doctor en Filosofía en su facultad: no sin dificultad, decidí abandonar mi reserva habitual y vencer mis escrúpulos solo por el deseo de satisfacer a mis personas más queridas y demostrarles que al dedicarme a la estudio de las matemáticas, sigo una decidida inclinación de mi naturaleza y que, además, este estudio no está exento de resultados. Me han asegurado que, como extranjera, podría graduarme "in absentia" si mis trabajos parecen de suficiente importancia y aporto unos avales de personas competentes. Su Señoría no malinterpretará, espero, la franqueza de mi declaración, si reconozco abiertamente que no creo tener la seguridad necesaria para someterme a un examen "rigorosum". Me preocupa mucho que la obligación de responder, cara a cara, a hombres a quienes no conozco bien, por muy benévolos que sean estos examinadores, me confunda por completo. A este miedo se suma el conocimiento incompleto de la lengua alemana; aunque estoy acostumbrada a usarlo en matemáticas cuando tengo tiempo para pensar, no lo hablo con fluidez; aunque comencé a estudiar este idioma hace cinco años, durante mis cuatro años en Berlín no tuve otra ocasión para hablar o escuchar el idioma sino durante las pocas horas que me dedicó mi venerado Maestro. Por estas razones me atrevo a solicitar la amable intervención de su Señoría para que, teniéndolas en cuenta, pueda ser eximida del examen "rigorosum". "

58. Wassily Wassilyevich Corvin-Krukovskiy (1800–1874).

59. El químico Hermann Kopp (1817–1892), que fue profesor en la universidad de Heidelberg desde 1864 hasta su retiro en 1890, está considerado uno de los primeros historiadores de la química.

60. Clara (1823–1896) y Elisabeth (1826–1898). Weierstrass y sus dos hermanas vivían juntos en un apartamento en Berlín. Los tres permanecieron siempre solteros. Para las hermanas de Weierstrass, Sonja fue la "querida pequeña rusa". Ver [67, p. 12–16]; [26, p. 89; 100–105].

61. Después de terminar los estudios del Gymnasium con la máxima calificación de "Primus omnium" y matricularse, siguiendo el deseo paterno, en los estudios de "Cameralística" (Derecho y Administración) en la Universidad de Bonn en octubre de 1834, Weierstrass se había dedicado al estudio prácticamente autodidacta de matemáticas: la *Mécanique céleste* de Laplace, los *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* de Jacobi, . . . Consiguió unos apuntes de las lecciones sobre funciones modulares de Christoph Gudermann en Münster y, con ello, una presentación de la teoría de las funciones elípticas que podía entender. Entonces, escribía en 1966 Kurt-R. Biermann: "De repente, toda la materia estuvo clara ante él. No solo la entendió, sino que comenzó su propia investigación. Con eso nació y se hizo irrevocable la decisión de hacer de las matemáticas el propósito de su vida. Fue alentado en su resolución por el que posteriormente sería presidente de la corte de Mecklenburg,

Budde, de quien se había hecho amigo y en cuya promoción había actuado como oponente, lo que, de paso, era una prueba de que no había ignorado por completo los estudios jurídicos. Dejó la Universidad de Bonn sin examinarse, después de 8 semestres” [15, p. 194–195].

Jürgen Elstrodt da más detalles de aquel amigo y de aquel acto de promoción en [67, p. 19–21]: “Aparentemente [Weierstrass, en Bonn] prosiguió sus estudios con cierto éxito, porque durante el examen de doctorado de su hermano de corporación, el abogado Johann Friedrich Budde (1815–1894), impugnó enérgicamente que “su querido amigo y hermano” “obtuviera el doctorado en derecho”, “dejándose derrotar, al final, de manera elegante”, como escribió Weierstrass irónicamente a P. du Bois-Reymond el 6 de junio de 1875 en [250, p. 210].”

62. La siguiente notación $a_1, a_2, a_3, \ldots \infty$ sólo indica la infinitud de los elementos de la sucesión, no que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, siendo ésta la condición necesaria de la que se habla a continuación.

63. Para la prueba por el propio Weierstrass de este resultado, conocido hoy como *teorema de factorización de Weierstrass*, ver la sección 2 de la memoria [233]. É. Picard dio en 1879 una traducción francesa de esta memoria, [234], revisada por Weierstrass. Ver también, en las *Lecciones sobre la teoría de las funciones elípticas*, [249] V, p. 103–108, donde se prueba el resultado de la carta antes de representar la función auxiliar σu como producto infinito.

64. Cf. el comienzo del § 7, Kap. 2 de la memoria [224] ya citada (en [249] I, p. 346–347).

65. Weierstrass prueba este resultado, que hoy podemos enunciar como: *toda función meromorfa (es decir, tal que sus singularidades, aisladas, son todas o bien evitables o polos) se puede representar como el cociente de dos funciones holomorfas*, en la sección 3 de [233].

66. La memoria citada [233]. *Berl. Abh.* es abreviatura de la revista *Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (Memorias matemáticas de la Academia de Ciencias de Berlín). Como se ve, la referencia actual de esta memoria de Weierstrass indica el volumen correspondiente al año 1876.

67. Weierstrass escribe aquí “ganze Funktionen”, es decir, literalmente, “funciones enteras”, pero entendemos que está abreviando su expresión más ordinaria “ganze rationale Funktionen”, es decir, polinomios, y que nuestro actual concepto de *función entera*, es decir, la desarrollable en todo punto (del plano complejo) como una serie de potencias convergente, es el contenido en la denominación de *función regular* que se lee en otros momentos.

68. Remitimos en este punto a la extensa anotación de Bölling en [253, p. 168–171, nota 28].

69. En el volumen 7 (1885/1886), *Acta Mathematica* anunció la institución de un premio en honor del rey Óscar II de Suecia y Noruega, que sería otorgado el día 21 enero de 1891 con ocasión de su 60º cumpleaños. La fecha límite de entrega de originales era el 1 de junio de 1888. El jurado, de tres miembros, estuvo compuesto por Gösta Mittag-Leffler, Charles Hermite y Karl Weierstrass. La primera de las cuatro cuestiones propuestas era encontrar una solución en serie de potencias convergente para el problema newtoniano de n cuerpos. Ninguno de los doce trabajos presentados obtuvo un desarrollo como el requerido, pero el jurado decidió otorgar el premio a un joven Jules Henri Poincaré (1854–1912), por su notable contribución a la comprensión de las ecuaciones de la dinámica y las nuevas ideas aportadas. Ver, por ejemplo, [63]. Las dos memorias coronadas de Poincaré, “Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica”, formaron el cuaderno completo *Acta Math.* **13** (1–2) de 1890. Posteriormente, en [187], Mittag-Leffler recogió las cartas que, en relación con el trabajo premiado, había recibido en su día de Poincaré.

70. Ernst Schering (1833–1897), conocido por ser editor de las Obras de Gauss, era entonces profesor y miembro de la Academia de Ciencias de Gotinga.

71. Paul du Bois-Reymond (1831–1889), bien conocido analista germano, había sido uno de los profesores de Sonja en Heidelberg, como hemos visto que ella declaraba en la “Vita” que presentó en Gotinga con ocasión de su disertación doctoral. En esta época, du Bois-Reymond era profesor titular en Tubinga. Ver la nota 50 que contiene un fragmento de una larga carta que Weierstrass le escribe el 15 diciembre de 1874, sólo un día antes que ésta. En ella, Weierstrass le anotaba a du Bois-Reymond la dirección que éste le había solicitado: M$^{\text{d}}$ Sophie Kowalewsky (nicht a) [*sic.*; entendemos que quiere decir: no es Kowalewskaya], St. Petersburg, Wassily Ostrow, 1$^{\text{ère}}$ Ligne, Maison No. 14.

72. Siméon Denis Poisson (1781–1840) ocupó la cátedra de mecánica racional en la Facultad de Ciencias de París entre 1809 y 1840. Entre su extensa lista de publicaciones, el *Tratado de mecánica* fue una obra de referencia, que se tradujo al alemán en 1836 y al inglés en 1842. En [189, t. 2, p. 121–178] Poisson estudia el movimiento del sólido rígido en torno a un punto fijo, problema sobre el que Sophie Kowalewsky llegaría a hacer la contribución magistral [124]. Ver la nota 219.

Las obras completas de Augustin Louis Cauchy (1789–1857), editadas entre 1882 y 1974, suman 27 volúmenes. Tal vez alguno de los volúmenes de [45] pudo estar entre las lecturas aconsejadas por Weierstrass. Pero también, las extensas notas y comunicaciones publicadas en los volúmenes **14** y **15** de *Comptes Rendus* del año 1842: sobre integración de ecuaciones en derivadas parciales, [46, p. 3–86], que acreditan la parte debida a Cauchy en el teorema de Cauchy-Kowalewsky; sobre mecánica celeste y astronomía, [46, p. 86–126]; sobre la teoría de la luz, [46, p. 127–199].

73. Aquí, Weierstrass está mencionando las memorias [160] y [161] de Franz Ernst Neumann (1798-1895); de su hijo, Carl Gottfried Neumann (1832-1925), en 1873 se publicó [163], la primera parte de *Las fuerzas eléctricas*, que es el libro al que se refería a continuación Weierstrass. La segunda parte se publicó en 1898, después de la muerte de Weierstrass. Carl Neumann publicó en 1865 [162], uno de los primeros libros sobre la teoría de las funciones de variable compleja, donde introdujo el término “polo”. Su segunda edición de 1884, mejorada y ampliada, tuvo, según Hölder, el enorme valor de que, a su través, los matemáticos comprendieron mayoritariamente por primera vez las ideas de Riemann (cf. [33, p. 695–701]).

74. El célebre libro [86] de William Rowan Hamilton (1805–1865) tenía 762 páginas. Hasta la década de 1880 no apareció una traducción alemana.

75. Adhémar J. C. Barré de Saint-Venant (1797-1886), autor pionero en las nacientes mecánicas modernas de fluidos y de medios continuos, tiene más de veinte publicaciones sobre elasticidad en *C. R. Acad. Sci. Paris* entre los años 1868 y 1872. Como sería demasiado prolijo citarlas todas, solamente citaremos [9], que se publicó también, con un complemento, en el *Journal de Liouville* en 1871. En 1883 Barré de Saint-Venant publicaría [10], una traducción al francés del tratado [51] sobre elasticidad de Clebsch, añadiendo notas propias.

76. Se puede ver la determinación, por Weierstrass, de las líneas geodésicas sobre la superficie de un elipsoide de revolución (el caso $n = 3$) en las *Lecciones sobre las aplicaciones de las funciones elípticas*, [249] VI, p. 330–354. Weierstrass ya había tratado, en [227], la determinación de las líneas geodésicas sobre la superficie de un elipsoide de tres ejes.

77. A saber, Sophus Lie (1842–1899) y Ludwig Sylow (1832–1918). La primera edición, de 1839, [1], del también noruego Bernt Michael Holmboe (1795–1850) que fue maestro de Niels Henrick Abel (1802–1829), era difícil de conseguir 30 años después, y varios matemáticos, sobre todo alemanes y franceses, entre los que se encontraba Weierstrass, solicitaron a sus colegas noruegos una nueva edición. Con el auxilio del Estado noruego, esa nueva edición, revisada y más completa, [2], no vio la luz hasta 1881.

78. Las memorias póstumas de Abel ocupan el segundo volumen (en ambas ediciones) de sus Obras completas. El resultado que enuncia aquí Weierstrass es el *Théorème* I de la primera sección de la *Mémoire sur les fonctions transcendantes de la forme* $\int y\,dx$*, où* y *est une fonction algébrique de* x [2, v. 2, XVII, p. 206–216, y notas de Sylow en p. 327–329]. Esta memoria, escrita en 1828 no se encontraba en la edición de Holmboe, y sus resultados se exponían también en una carta de Abel a Adrien-Marie Legendre (1752–1833). ([1, vol. 2, p. 256–263]; [2, vol. 2, p. 271–279]) que iba a quedar en posesión de Weierstrass (cf. [2, vol. 2, p. 287-289]).

79. Puede ser apropiado aquí leer la Introducción, p. 1–10, de la *Teoría de las funciones abelianas* de Weierstrass, [249] IV.

80. El trabajo de Abel que cita Weierstrass aquí es la extensa memoria *Théorie des transcendantes elliptiques*, [1, vol. 2, XIV, p. 93–184]; [2, vol. 2, XIII, p. 87–188]. Weierstrass se refiere concretamente al comienzo de la última sección del capítulo III, que se titula *Méthode de trouver une infinité de formules de reduction pour les transcendantes elliptiques de troisième espèce*, [1, p. 180]; [2, p. 183].

81. James Clerk Maxwell (1831–1879) recibió el *premio Adams*(que conmemora el descubrimiento de Neptuno por John Couch Adams) del año 1856, en la universidad de Cambridge, por el ensayo [147], que fue una de las referencias que Sophie Kowalewsky daba, junto con las [224] de Weierstrass y [75] de Gauss, en la segunda memoria [120] de su tesis doctoral.

82. Cf. el último de los fragmentos vistos anteriormente de la carta de 21 de septiembre de 1874.

83. Ver la carta de 18 de abril de 1873.

84. Ver la anterior nota 36.

85. Hoy también contamos con el volumen [249] IV: *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten*, de 632 páginas, que hemos citado ya en la nota 46.

86. Pafnuti Lvóvich Chebyshov (1821–1894), eminente y muy conocido matemático ruso, fue profesor de la universidad de San Petersburgo desde 1850.

87. La memoria [48].

88. “Sobre la integración de diferenciales algebraicas por medio de logaritmos”, [226]. Weierstrass cita, al comienzo de esta suya, la memoria [48] de Tschebyscheff (*sic*).

89. Recordemos que, cuando $R(x)$ es irreducible, esto es lo que se llama una *integral elíptica* (*hiperelíptica* o ultraelíptica, si el grado de R es mayor que 4). Legendre (ver, por ejemplo, [33, p. 21–22]) probó que toda integral elíptica se podía reducir a una de las tres formas siguientes:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

que denominó, respectivamente, integrales elípticas *de primera, segunda y tercera especie* (de *módulo* k, $0 < k < 1$). Definidas estas integrales, en el plano complejo, de cierta manera (no trivial) como funciones (univaluadas) de uno de sus extremos, las funciones inversas, meromorfas y doblemente periódicas, son las denominadas *funciones elípticas*, y las propias integrales elípticas son expresables en términos de funciones algebraicas, logarítmicas y elípticas. Ver el capítulo XV de [82], y los capítulos 20 y 21 de [257]. Una referencia moderna puede ser [211].

90. Es en la memoria de 1826 *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$*,* R *et* ρ *étant des fonctions entières* ([1, vol. 1, p. 33–65]; [2, vol. 1, p. 104–144]) donde Abel se planteaba la cuestión de caracterizar las diferenciales de la forma de su título (R y ρ polinomios en x), cuyas integrales se pueden expresar de la forma que indica aquí Weierstrass. Una condición necesaria y suficiente era la posibilidad de desarrollar $\sqrt{R}$ como una fracción continua periódica. Cf. la extensa nota 20 de Bölling en [253, p. 191–193]. Al margen de esto añadamos que Chebyshov, en la posterior comunicación [49], daba una demostración del resultado con cuyo enunciado concluía Abel su memoria: “Cuando una integral de la forma $\int \frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, donde R y ρ polinomios en x, es expresable (de una manera cualquiera) por logaritmos, siempre se puede expresar de la manera siguiente: $\int \frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}} = A\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$, donde A es una constante y p y q polinomios en x. Me reservo demostrar este teorema en otra ocasión” ([1, vol. 1, p. 65]; [2, vol. 1, p. 144]).

91. Weierstrass escribe aquí: *elliptische Integrale der 3 Gattungen*; se refiere a las especies de Legendre.

92. En las *Lecciones sobre la teoría de las funciones elípticas* de Weierstrass, las dos que siguen son las fórmulas (VII.) y (VIII.) del primer capítulo: [249] V, p. 16. La notación que emplea Weierstrass para el polinomio $R(x)$ y para los coeficientes g_2 y g_3 de la forma reducida del radicando (los *invariantes*), aquí como en las *Lecciones*, es la que sigue:

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A', \quad g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2, \quad g_3 = ACA' + 2BCB' - A'B^2 - AB'^2 - C^3$$

(cf. *ibid.*, p. 8–14).

93. Hemos corregido la siguiente igualdad, añadiendo un signo menos que faltaba en la primera fracción, escribiendo esta tal como aparece, por ejemplo, en [249] VI, p. 2.

94. En el legado póstumo de Schwarz que se conserva en la Academia Brandenburguesa de Ciencias de Berlín se encuentra una transcripción de Weierstrass, al parecer no muy bien conocida, de un esbozo de su teoría de las funciones elípticas con número de catálogo 478, que lleva el título "Das Grüne Buch von Weierstrass", a propósito de la cual Bölling dice [253, p. 193] que es razonable suponer que fuese una fuente para la obra posterior [210] de Schwarz. Edoardo Confalonieri ha publicado recientemente [53], una edición electrónica completa de ese curioso "libro verde". Para los cálculos anteriores, en concreto, ver [53, p. 6–8].

95. La comunicación [49] de Chebyshov de 1861 se titulaba "Sobre la integración de la diferencial $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$", precisamente, de manera que Weierstrass le puede estar presentando aquí a Sonja, o recordando, su particular acercamiento alternativo a la resolución de esa cuestión.

La transformación de la diferencial puede comenzar poniendo $x + \varkappa = (x + B/A) + (\varkappa - B/A)$. Y se puede comprobar que se tiene $x + \frac{B}{A} = -\frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}$. La expresión que se lee originalmente en la línea siguiente es esta que sigue:

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0} - \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right) \right\} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

En nuestro texto la presentamos libre de erratas y, a partir de ahí, corregimos también las dos últimas fórmulas de este cálculo, ver la nota 97.

96. El primer sumando en el numerador de $\sqrt{S_0}$ debe ser A^2B', como hemos también corregido (cf. [249] VI, p. 45). Por otra parte, podemos observar que se tiene $S_0 = S(s_0)$, siendo $S(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3$.

97. "Además de matemáticas y física, Weierstrass también tuvo que enseñar [en el *Gymnasium* católico de Braunsberg, entre 1848 y 1856] alemán, botánica, geografía, historia, gimnasia y escritura. Una reminiscencia de las lecciones de caligrafía puede ser la peculiar $\wp$ de la función $\wp u$ de Weierstrass" [15, p. 196].

En [249] V, p. 23, Weierstrass define de la siguiente manera la función elíptica $\wp u$ que lleva su nombre: *Sea* $s = \wp u$ *una solución particular de la ecuación diferencial* $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$, *a saber, la que se hace infinito para* $u = 0$. La función compleja $\wp$ es doblemente periódica, de períodos $2\tilde{\omega} = 2m\omega + 2n\omega'$ ($\omega/\omega' \notin \mathbb{R}$; m, n enteros no ambos cero). Sus únicos puntos singulares son polos de segundo orden en $u = 0$ y en cada punto $u = 2\tilde{\omega}$, con residuos iguales a 1 en todos ellos. Además, $\wp u - \frac{1}{u^2} = 0$ si $u = 0$ (ver también [82, nº 327, 328]). Cuando, por ejemplo, los *invariantes* g_2 y g_3 son reales y $S = (s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)$ con $e_1 > e_2 > e_3$, el par (ω, ω') *primitivo* de semiperíodos es

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} \quad \text{y} \quad \omega' = i\int_{-e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

(cf. [249] V, p. 74–85). Weierstrass define también integrales elípticas de primera, segunda y tercera especie (*Art*; cuando se refiere a una de las especies de Legendre la denomina *Gattung*), a saber, respectivamente,

$$J(s) = \int_{(s,\sqrt{S})}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = u, \quad J'(s) = \int^{(s,\sqrt{S})} \frac{s\,ds}{\sqrt{S}}, \quad J(s, s_0) = \int \frac{1}{2} \frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

Así, se llega a que *toda integral elíptica se puede representar como la suma de una función racional de* s *y* $\sqrt{S}$*, una integral de primera especie, otra de segunda y un número finito de integrales de tercera especie* (cf. *ibid.*, p. 228–234; [210, 85–89]).

98. Para la siguiente expresión de la diferencial, hay que tener en cuenta que $\sqrt{S} = -\wp' u$ y $\sqrt{S_0} = -\wp' u_0$ (cf. [249] VI, p. 15). Como ya hemos indicado, hemos corregido el texto original (tanto el de *Acta* como el de la carta, cf. [253, p. 187]), donde aquí se leía:

$$\frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\wp' u + \wp' u_0}{\wp u - \wp u_0} - \left(\varkappa - \frac{B}{A}\right) \right\} du,$$

$$\int \frac{(x+\varkappa)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \log \frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma u\,\sigma u_0} + \left(\frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0} - \varkappa + \frac{B}{A} \right) u \right\}.$$

Para la integración, Weierstrass tenía definida la función σu (cf. [249] V, p. 32–33) como la solución de la ecuación diferencial $\wp(u) = -\frac{d^2}{du^2}(\log \sigma(u))$ que verifica $\frac{\sigma(u)}{u} \to 1$ y $\frac{d}{du}(\log \sigma(u)/u) \to 0$ cuando $u \to 0$. La función σu es la más simple de las funciones enteras que admiten como ceros simples todos los polos de la función $\wp u$. Se tiene la representación como producto infinito

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{2\tilde{\omega}}\right) e^{\frac{u}{2\tilde{\omega}} + \frac{u^2}{8\tilde{\omega}^2}} \qquad (2\tilde{\omega} = 2m\omega + 2n\omega')$$

(cf. *ibid*, p. 67, 115–120. El producto está extendido a todos los pares $(m,n) \neq (0,0)$ de números enteros). La derivada logarítmica $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ es la expresión en *forma normal* de la integral de segunda especie $J'(s)$. En el texto se está expresando una suma de integrales de primera y de tercera especie en *forma normal* (cf. *ibid.*, p. 36–37, 144–147, 229–231). Se aplica la fórmula

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(u_0)}{\wp(u)-\wp(u_0)} = \frac{\sigma'(u-u_0)}{\sigma(u-u_0)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)},$$

y se elige adecuadamente la constante de integración, como indica Weierstrass (*ibid.*, p. 231). En este lugar, usando que la función σu es impar, la *integral normal de tercera especie* adopta la forma, sólo ligeramente diferente de la del texto,

$$J(s,s_0) = \log\frac{\sigma(u_0-u)}{\sigma(u)\,\sigma(u_0)} + u\frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)}.$$

Cf. también la expresión que escribe Weierstrass en otro lugar (donde Weierstrass está mostrando cómo calcular el área de un triángulo trazado sobre la superficie de un elipsoide):

$$\int_{a_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\log\frac{\sigma(u_0+u)}{\sigma(u_0-u)} + u\frac{\sigma'(2u_0)}{\sigma(2u_0)}\right) - \frac{B}{A}u,$$

donde $s_0 = \wp(u_0) = \frac{1}{24}R''(a_0)$ ([249] VI, p. 48, fórmula (13.)).

99. Cf., sobre todo, [249] V, p. 132–146 y el artículo [102] de 1873, que Weierstrass cita en [249] V, p. 216. Su autor, Ludwig Kiepert (1846–1934), había presentado su tesis doctoral sobre integrales elípticas, bajo la dirección de Kummer y Weierstrass, en 1870. La necesidad de la condición de que u_0 sea de la forma $\frac{2\mu\omega+2\nu\omega'}{n}$ siendo (ω,ω') un par primitivo de semiperíodos de $\wp u$, μ,ν enteros no ambos nulos y n un cierto entero positivo, puede resultar de que es necesario formar, a partir de $\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma u}$, una función elíptica con los mismos períodos que $\wp u$ para poder tener así, usando las fórmulas de adición de $\wp u$ y $\wp' u$, una función racional de $\wp u = s$ y $\wp' u = -\sqrt{S}$ (*ibid.*, p. 146; [210, p. 15–17]). Pues bien, esta función deberá formarse a partir de un *σ-cociente* de *grado* mayor o igual que 2 (*ib.*, p. 140), y este grado va a ser el denominador n.

Suponiendo, entonces, que $u_0 = \frac{2\mu\omega+2\nu\omega'}{n}$ $(\mu,\nu = 0,1,\dots,n-1;\ (\mu,\nu)\neq(0,0))$, sea $\eta_0 = \frac{2\mu\eta+2\nu\eta'}{n}$, donde $\eta = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}$ y $\eta' = \frac{\sigma'\omega'}{\sigma\omega'}$. Se tiene:

$$\log\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma u} = \frac{1}{n}\log\left(\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma u}\right)^n = -\eta_0 u + \frac{1}{n}\log\left(\frac{e^{\eta_0 u}\sigma(u-u_0)}{\sigma u}\right)^n.$$

La función $\left(\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma u}\right)^n$ es un σ-cociente de grado n. Usando la *relación de Legendre* $\eta\omega' - \omega\eta' = \text{signo}\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)\frac{\pi i}{2}$ (*ib.*, p. 130), se prueba que $\left(\frac{e^{\eta_0 u}\sigma(u-u_0)}{\sigma u}\right)^n$ tiene los períodos 2ω y $2\omega'$ y que, por consiguiente, se va a poder representar como una función racional $R(s,\sqrt{S})$. Y, como observa Weierstrass, se puede determinar la constante κ —de hecho, $\kappa = \frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\eta_0 - \frac{\sigma' u_0}{\sigma u_0}\right)$—, de modo que el coeficiente de u sea 0 y tener como resultado de la integral simplemente una constante $(-\frac{1}{\sqrt{A}}\log(\sigma u_0))$, más $\frac{1}{n\sqrt{A}}\log R(s,\sqrt{S})$.

100. Chebyshov, en [48, p. 35–42], ejemplificaba su método mostrando la realización completa del siguiente cálculo:

$$\int \frac{2x^6+4x^5-7x^4-3x^3-x^2-8x-8}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}} = \frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2-1}\Delta + \frac{1}{4}\log\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}{(1-3x)\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+3x^2-x+1}}\right]^{10}\\ \times\frac{2x^5+x^3+3x^2-x+1-(2x^2-x+1)\Delta}{2x^5+x^3+3x^2-x+1+(2x^2-x+1)\Delta}\end{array}\right\},$$

donde $\Delta = \sqrt{x^4+4x^3+2x^2+1}$.

101. Ver [249] V, p. 211–221. Weierstrass ha presentado aquí la *fórmula de multiplicación de la función* $\wp u$ como en *ibid.*, (11.), p. 216. El polinomio M_n es de grado n^2 en $\wp u$, y N_n es de grado n^2-1. También se tiene que $\wp(nu) = \frac{P_n(\wp u)}{\varphi_n^2(u)}$ y $\wp'(nu) = \frac{Q_n(\wp u)}{\varphi_n^3(u)}$ con P_n, Q_n y φ_n polinomios. Y el polinomio $\varphi_n(u)$ se anula sólo (*ib.*, p 212) cuando $\sigma(nu) = 0$, lo que ocurre para los (n^2-1) valores $u_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{n} = \frac{2\mu\omega+2\nu\omega'}{n}$ con $\mu,\nu = 0,1,\dots,n-1$, $(\mu,\nu)\neq(0,0)$.

102. La comunicación [49] que ya hemos citado.

103. Se trata del artículo [258], de Yegor Ivanovich Zolotariov (1847–1878). Ver p. 563–564, con la reducción, similar a la de Weierstrass, de la integral $\int\frac{z+A}{\sqrt{Rz}}\,dz$ a “forma canónica”, siendo $Rz = z^4+lz^3+mz^2+nz$ con l,m,n enteros.

104. Hemos añadido los paréntesis en la fórmula anterior, a partir de [253, p. 188]. Sobre esta notación, ver [210, p. 10]. Para la fórmula de duplicación de $\wp u$, cf. [210, p. 15–17]. Para su uso, cf. también la nota 38 de Bölling en [253, p. 196].

105. Gaston Darboux (1842–1917), [62].

106. La nota [149] (y su corrección), de Charles Méray (1835–1911).

107. Darboux escribe [62, p. 101]: “Me propongo demostrar aquí que, con convenientes modificaciones, su método [el de Cauchy, Briot y Bouquet para probar que todo sistema de ecuaciones en derivadas ordinarias admite integrales satisfaciendo a condiciones iniciales determinadas] es aplicable a las ecuaciones, más generales, en derivadas parciales, y puede así proporcionar la primera demostración rigurosa de la existencia de la integral en tales ecuaciones. Una demostración de este tipo me parecía muy deseable; porque, además del teorema fundamental que permite establecer, *el estudio de los casos excepcionales que*

presenta no puede dejar de conducir a consecuencias importantes.” Recordemos de nuevo las notas y comunicaciones de Cauchy [46, p. 3–86] que constituyen su contribución al teorema de Cauchy-Kowalevsky.

108. Carl Wilhelm Borchardt (1817–1880), miembro de una familia judía berlinesa, estudiante y amigo de confianza de Jacobi, profesor en la Universidad de Berlín desde 1848, fue editor del *Crelle's Journal* entre 1856 y 1880, período durante el cual la revista se conoce como *Borchardt's Journal*. Cuando apareció [223] en el volumen 47 de 1854, Borchardt, que aún era docente privado, pero ya muy conocido en los círculos matemáticos (cf. [15, p. 200], y también [14, p. 43] para referencias a fuentes) se apresuró a ir a Braunsberg para conocer a Weierstrass, y ahí comenzó una estrecha relación de amistad entre ambos, que solo terminó en 1880 con la muerte de Borchardt. Fue el único colega, aparte de Sonja, al que Weierstrass trató por su nombre propio. Tras el fallecimiento de Borchardt, Weierstrass se hizo cargo de la tutela de sus hijos. Ver, más adelante, la carta de Weierstrass a Sonja fechada el 28 de octubre de 1880 y las notas 134 y 137.

109. meine liebe “kleine Freundin”, escribe exactamente aquí Weierstrass.

110. Hemos corregido el denominador, poniendo $\sqrt{S}$ en lugar de $\sqrt{s}$, en la fórmula que sigue, como vemos en [253, p. 205].

111. Weierstrass escribe aquí: ein Menschenkind generis feminini.

112. Ya se ha dicho en la nota 70 que Ernst Schering fue profesor y académico en Gotinga; en esta fecha era también miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Berlín.

113. Ver la nota 35.

114. El alumno en cuestión era Friedrich Schottky (1851–1935), que presentó en 1875, en la universidad de Berlín, su disertación doctoral *Sobre la representación conforme de superficies planas múltiplemente conexas*, [204], bajo la dirección conjunta de Weierstrass y von Helmholtz. La tesis se publicó en 1877 en el *Borchardt J.* En `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schottky/` se puede leer algún extracto más de esta carta de Weierstrass, tomado de [24, p. 80].

115. Bölling da, en [24, p. 73–74], una larga lista de matemáticos, posteriormente renombrados, que fueron alumnos de Weierstrass en Berlín. A partir de ahí, “el austríaco” al que se refiere aquí Weierstrass es posible que fuera Leopold Gegenbauer (1849–1903), que presentó su tesis doctoral en 1875 con Weierstrass y Kronecker. Y, para poner cara a aquellos “estudiosos y perseverantes polacos” de 1875 podemos proponer a Arthur Schoenflies (1853–1928; tesis en 1877 con Weierstrass y Kummer) y a Friedrich Schur (1856–1932; tesis en 1879 con Kummer).

116. La *Orden* (militar) *Pour le mérite*, fundada por el rey Federico II de Prusia, fue ampliada por Federico Guillermo IV en 1842, a instancias del naturalista y geógrafo Alexander von Humboldt, para incluir una clase civil (*Friedensklasse*) por méritos especiales en el campo del arte y la ciencia: *Pour le mérite für Wissenschaften und Künste*. Von Humboldt fue el primer canciller, y Gauss y Jacobi fueron nombrados, en ese mismo año, caballeros en el campo de la matemática. Lejeune-Dirichlet, lo mismo en 1855. Fueron caballeros extranjeros Cauchy (1848) y Poncelet (1863). Darwin (ciencias naturales) lo fue en 1868. Antes que Weierstrass, que recibe la medalla en 1875 cubriendo la vacante producida por el fallecimiento del astrónomo Friedrich Argelander, la habían recibido también (química, fisiología, física) sus colegas Bunsen (1864), von Helmholtz (1873) y Kirchhoff (1874). Stokes la recibió en 1879. Entre los compositores de música más conocidos, Mendelssohn y Rossini en 1842, Brahms y Verdi en 1887. Santiago Ramón y Cajal recibió la Orden Pour le mérite (Medicina-Histología) en 1915. Más datos en `http://www.orden-pourlemerite.de/`

117. Ernst Eduard Kummer (1810–1893) obtuvo su doctorado en 1831, en la universidad de Halle, por la calidad de una memoria que había conseguido un premio, “De cosinuum et sinuum potestatibus secundum cosinus et sinus arcuum multiplicium evolvendis”, y que fue publicada un año después. De 1832 a 1842 enseñó matemáticas y física en el Gymnasium de Liegnitz, donde tuvo entre sus alumnos a Leopold Kronecker y a Ferdinand Joachimsthal (1818–1861). Fue miembro electo de la Academia de Berlín desde 1839. Catedrático en la universidad de Breslavia de 1842 a 1855, año en que pasó a ocupar la cátedra de Berlín que dejaba vacante Dirichlet al trasladarse a Gotinga. Recomendando para la vacante que él dejaba en Breslavia, donde Weierstrass era fuerte candidato, a su antiguo alumno Joachimsthal, Kummer consiguió tener también a Weierstrass, junto con Kronecker, de colegas en Berlín en 1856. La Universidad de Berlín devino así en la universidad germana más eminente en matemáticas durante tres décadas, hasta que en la última década del siglo ese lugar lo pasaría a ocupar Gotinga (Klein, Hilbert). Ver `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kummer/`.

118. Lo mismo le escribe Weierstrass a du Bois-Reymond en una carta de 6 de junio de 1875 al agradecerle su felicitación por la concesión de esta Orden, cf. [250, p. 210]. Para unas breves semblanzas científicas (en inglés) de Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) y Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) ver, respectivamente, [84], [190] y [87].

119. “Teilnahmslosigkeit”, transcribe Mittag-Leffler del original sin traducir esa palabra al francés.

120. Weierstrass valoraba la poesía y ocasionalmente él mismo escribió versos [15, p. 194]. Aquí transcribe literalmente un pasaje perteneciente al Acto III del drama *Die natürliche Tochter* de Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832). Una versión castellana de estos versos, debida a Rafael Cansinos-Assens [77, p. 713]:

    “El hombre noble no malgasta en el sepulcro, ni más allá de él, el alto valor de la nostalgia. Vuelve sobre sí mismo, y allí, asombrado, halla en su propio pecho otra vez lo perdido”.

    Transcribimos también el fragmento de una versión francesa de Jacques Porchat, [78], que ya podía leerse en 1875:

    “. . . un cœur généreux ne prodigue pas dans le tombeau, ni au-delà du tombeau, le précieux trésor de la mélancolie. Il rentre en lui-même, et retrouve, avec étonnement, dans son cœur ce qu'il avait perdu.”

121. Hemos corregido aquí una errata, cotejando la versión del mismo fragmento que escribía Mittag-Leffler en su comunicación al congreso de París de 1900: aquí se leía “mathematisches und hinreichendes” (matemático y suficiente) en lugar de

“nothwendiges und hinreichendes” (necesario y suficiente). Cf. también [253, p. 223].

122. Vamos a echar aquí una ojeada (por fuerza brevísima) a la presentación weierstrassiana de las integrales abelianas, con su definición de *rango*, etc., siguiendo esencialmente las páginas de [249] IV.

Cuando se da una relación algebraica $f(x, y) = 0$ entre dos cantidades variables x e y, donde se supone que $f(x, y)$ es un polinomio en x e y, el conjunto de los pares de valores (x, y) que la satisfacen se llama la *estructura algebraica* (“algebraische Gebilde”) definida por la ecuación, siendo cada par (x, y) un punto de dicha estructura (p. 13).

Una función racional $F(x, y)$ de los argumentos x e y, no independientes uno de otro sino relacionados por la ecuación $f(x, y) = 0$ de la estructura considerada, se llama una *función racional del par* (x, y) (p. 46). La integral $\int F(x, y)\, dx$, definida entre dos puntos de la estructura, es una *integral abeliana*. En particular, cuando $f(x, y) = y^2 - R(x)$ y $R(x)$ es un polinomio irreducible de grados 3 o 4, tenemos las *integrales elípticas* (o asociadas a una estructura elíptica) y, cuando el grado de $R(x)$ es mayor que 4, *hiperelípticas*. En general, dada una estructura, se definen, como con las elípticas, integrales abelianas de primera, segunda y tercera especie asociadas a ella (p. 258), de manera que una integral abeliana general se podrá representar siempre como una cierta suma de integrales de las tres especies, más una parte algebraica.

El *rango* de la estructura algebraica $f(x, y) = 0$ es el número entero ρ tal que el mínimo número de puntos arbitrariamente elegidos que debe suponerse para que exista una función racional del par (x, y) que se hace infinita sólo en esos puntos, teniendo en cada uno de ellos un polo de primer orden, es $\rho + 1$ (p. 69). Es invariante por transformaciones racionales, y se tiene $\rho = s/2 - (n - 1)$, donde n es el *grado* del polinomio $f(x, y)$ respecto de y, y el número par s es de determinación más prolija (p. 125). Para las estructuras asociadas a $f(x, y) = y^2 - R(x)$ con $R(x)$ polinomio irreducible de grado m, el rango es $\rho = m/2 - 1$ si m es par, y $\rho = (m - 1)/2$ si m es impar (p. 139). De modo que el rango de la estructura asociada a una integral elíptica es igual a 1, y el rango de una hiperelíptica es mayor que 1; por ejemplo, es 2 cuando R es de grados 5 o 6.

En la presentación riemanniana (en [192]) el dominio de las variables (complejas) es una *superficie* (“Fläche”) T conexa. Cuando la relación algebraica entre las variables es tal que T es $(2p+1)$-plemente conexa y presenta w puntos de ramificación donde se unen n hojas que forman la superficie, se tiene $p = w/2 - n + 1$ [192, p. 129]. Este número p se llama hoy *género* de la superficie de Riemann.

En el tercer trabajo de su tesis doctoral Sophie Kowalewsky anotaba a pie de página, resumiendo la situación ágilmente: “El número ρ es el mismo que Riemann denota con p” [121, p. 394]. Y, en [121, p. 401], Kowalewsky presentaba un teorema que establece una condición necesaria y suficiente para que una integral abeliana de rango ρ, es decir, dependiente de una función algebraica dada de rango ρ, se pueda reducir a una integral elíptica (lo que, cuando $\rho > 1$, supone rebajar el rango).

Sólo un par de años posterior a la carta que estamos comentando es la disertación [92] de G. Hettner citada en la nota 46, que tiene su objetivo principal en la misma línea de investigación. Hettner estudia en ella la reducción a integrales hiperelípticas de las integrales abelianas asociadas a la estructura algebraica definida por la ecuación $f(x, y) = y^4 - 2P(x)y^2 + Q(x) = 0$, con $P, Q \neq 0$ polinomios y $P^2 - Q \neq 0$. Comienza su memoria con una exposición breve y autocontenida de la teoría weierstrassiana del rango y de las tres especies de integrales abelianas [92, p. 1–4].

Escribe K.-R. Biermann: “Como es bien sabido, en 1857 Weierstrass presentó una primera versión de su memoria sobre las funciones abelianas generales a la Academia de Berlín. La memoria estaba en prensa cuando el famoso trabajo de Riemann sobre el mismo tema apareció en el volumen 54 del *Journal de Crelle*. Weierstrass retiró su trabajo para reexaminar primero sus propias explicaciones, pero por supuesto también las de Riemann, en particular para ver si los resultados obtenidos de maneras tan diferentes se correspondían entre sí y si los fundamentos eran sólidos. Es bien conocida [cf. su comunicación de julio de 1870 a la Academia de Ciencias de Berlín [231]] su crítica al llamado *principio de Dirichlet*, en el que Riemann basaba buena parte de su ingeniosa teoría. Hilbert, en 1904, fue el primero en rellenar la laguna dejada por Riemann [en [95]], después de que Schwarz ya había buscado y encontrado demostraciones alternativas de los teoremas de existencia de Riemann unos 30 años antes, a instancias de Weierstrass. En 1869, Weierstrass presentó su solución al problema general de inversión en la forma en que después la presentó en sus conferencias. Aquel encuentro con Riemann no estuvo exento de consecuencias. Una de ellas en el mundo matemático, que ahora tenía reservas sobre Riemann. Sólo en nuestro siglo volvió a vincularse la teoría de las funciones con las ideas de Riemann y superó el ceño fruncido de Weierstrass hacia la ilustración geométrica. ... El estilo de presentación de Riemann era tan poco convencional, y sus puntos de vista tan novedosos que, como recuerda Koenigsberger [ver [116, p. 30]] , todos los matemáticos jóvenes de la época coincidían unánimemente en que los métodos de Riemann no pertenecían a las matemáticas rigurosas de los Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi, Dirichlet. Sólo el propio Weierstrass reconoció enseguida la importancia de las nuevas ideas. Aunque no sin dudar, las aceptó, pero sin embargo se mantuvo firme en su camino” [15, p. 215]. Félix Klein recoge este nacimiento conjunto de la teoría de funciones de variable compleja de las manos de Riemann y Weierstrass en el capítulo VI, p. 246–295 de [108].

123. Esta aclaración entre paréntesis, intercalada en francés en el enunciado del teorema en alemán, es de Mittag-Leffler.

124. La memoria a la que remite aquí Mittag-Leffler, publicada sólo póstumamente, es [246]. El teorema, resultado principal de la memoria, se enuncia en la pág. 67, al final de una larga introducción. Una función analítica $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ de n variables (complejas) no acotadas para la que existen constantes $P_1, \ldots, P_n$ no nulas tales que $\varphi(u_1 + P_1, \ldots, u_n + P_n) = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ para todos los valores de $u_1, \ldots, u_n$ se dice *periódica*, y $(P_1, \ldots, P_n)$ es un *sistema de períodos* suyo. Si $(P_{1,1}, \ldots, P_{n,1})$, $(P_{1,2}, \ldots, P_{n,2})$, ..., $(P_{1,r}, \ldots, P_{n,r})$ son r sistemas de períodos cualesquiera de la función, todo sistema de la forma

$$(P_1, \ldots, P_n) = \nu_1(P_{1,1}, \ldots, P_{n,1}) + \cdots + \nu_r(P_{1,r}, \ldots, P_{n,r}) \quad (\nu_1, \ldots, \nu_r \text{ enteros})$$

es también un sistema de períodos de φ. La función se dice *r-plemente periódica* cuando todos sus sistemas de períodos se pueden obtener de esta forma a partir de r de ellos, pero no a partir de menos de r. *Si la función φ es, además, una función racional de sus argumentos, entonces sólo puede ser, a lo sumo, $2n$-plemente periódica* [246, p. 53–54].

Sobre estas funciones Weierstrass llegó a ver publicados los siguientes trabajos:

- *Sobre las funciones univaluadas y $2n$-plemente periódicas más generales de n variables* [230],
- *Prueba / Nueva prueba de un teorema de la teoría de las funciones periódicas de varias variables* [232],

- *Investigaciones sobre las funciones $2r$-plemente periódicas de r variables* [236]. Esta comunicación tiene fecha de 5 de noviembre de 1879, y su edición en [249] contiene esta nota final de Weierstrass: "La continuación prevista de la comunicación anterior fue omitida, porque enfermé gravemente en el invierno de 1879-1880 y aún no estaba completamente recuperado cuando murió Borchardt (27 de junio de 1880)",
- *Recherches sur les functions $2r$-fois périodiques de r variables. (Lettres de M. C. Weierstrass à M. C.-W. Borchardt)* [239]. Esta es la traducción al francés por J. Molk, autorizada por Weierstrass, de la carta de Weierstrass a Borchardt que dio lugar a [236]. El enunciado final que reproducimos a continuación aquí es más explícito que el del texto alemán de [236], que decía simplemente "*se puede expresar mediante una función* Θ [sic.] *de r argumentos*":

  "Si quieres permitirme que continúe comunicándote mis resultados, te expondré en otra carta la vía que seguí para probar los teoremas enunciados en esta. No es una vía corta, ciertamente, pero creo que las demostraciones son perfectamente rigurosas. Por otra parte, me ha conducido a la meta que tenía como objetivo desde el principio de mis investigaciones: demostrar que *toda función $f(u_1, \ldots, u_r)$ del tipo considerado se puede expresar racionalmente mediante un cierto número de funciones $\vartheta_\lambda(v_1, \ldots, v_r)$, todas ellas con los mismos módulos y cuyos argumentos $v_1, \ldots, v_r$ son funciones lineales y homogéneas de $u_1, \ldots, u_r$.*"

Para las funciones ϑ_λ de Jacobi de uno o varios argumentos ver, más adelante, las notas 160 y 170.

125. Seguimos aquí la lectura que hace Bölling en su edición [253, p. 229], "sondern r andere", en lugar de "sondern in ν andern" que se lee en el texto de *Acta*.

126. En alemán en el original: "Die Menschen sterben, die Gedanken bleiben".

127. Anne-Charlotte Leffler iba a morir también prematuramente, en Nápoles, en octubre de 1892, con las pruebas de imprenta de su libro (ver la nota a pie $*$) apenas corregidas. En la introducción ella escribía: "Tan pronto como me enteré del súbito e inesperado final de Sophie Kovalewsky, sentí que era mi deber continuar de alguna manera los *Recuerdos de infancia* que ella había publicado en sueco con el título de *Las hermanas Rajevsky*. Era un deber por muchas razones, pero principalmente porque Sophie, convencida de que iba a morir joven y de que yo la sobreviviría, me hizo prometerle muchas veces que escribiría su biografía" [136, p. vii].

128. Carl Johan Malmsten (1814–1886), matemático y político sueco, profesor en la universidad de Upsala desde 1842, ayudó a Mittag-Leffler en el proyecto de la revista *Acta Mathematica* que éste fundó en 1882. Ver la nota 184.

129. Franz Joseph Gall (1758–1828) fisiólogo y antropólogo alemán que colaboró con von Helmholtz, es un exponente de las teorías del determinismo fisiológico. De él tomó la idea de que la fisiología era la única ruta para establecer el estudio científico de la naturaleza humana, y entiende la nueva fisiología como el medio para construir el estudio científico de las diferencias humanas, tal como expone en su obra, conjunta con Johann Gaspar Spurzheim, [73].

    Paul Julius Moebius (1853–1907), neurólogo y profesor en Leipzig, a quien Sigmund Freud consideraba uno de los fundadores de la psicoterapia, era nieto del célebre matemático August Ferdinand Moebius, y alcanzó dudosa notoriedad por sus científicamente indefendibles publicaciones en torno a 1900, *Über die Anlage zur Mathematik* (Sobre la aptitud para las matemáticas) y *Über den physiologischen Schwachsinn des Weibes* (La inferioridad mental fisiológica de la mujer). Michèle Audin [7, p. 229–230, 234] transcribe un fragmento del primer libro donde Moebius hace una mención explícita a Sophie Kowalewsky. Moebius recibió aplausos por esas obras, pero también fuertes críticas, como *Die Antifeministen* (Las antifeministas) (1902) de Hedwig Dohm. En respuesta a Moebius se escribieron *Das Weib und der Intellectualismus* (Mujer e intelectualismo) de Oda Olberg en 1903 y *Feminismus und Wissenschaft* (Feminismo y ciencia) de Johanna Elberskirchen en 1902. Elberskirchen escribe: "La verdad es que cuando los varones estudiosos lanzan sus opiniones sobre las mujeres, tienen demasiado de machos y muy poco o nada de razonamiento científico humano". El segundo libro citado de Moebius se publicó en español en 1900 (F. Sempere y Comp., Valencia), traducido y prologado por la escritora feminista Carmen de Burgos Seguí (1867–1932). Concepción Arenal (1820–1893) argumentó contra las tesis de Gall, cf. [6, p. 106–111].

    Al estilo de Gall, Moebius había realizado investigaciones en las que trataba de mostrar la correlación entre ciertas peculiaridades morfológicas del cerebro y la excelencia de ciertas facultades. Por ejemplo, quería demostrar que el talento matemático se manifiesta en una preponderancia de la corteza supraorbital. Ver el artículo [80] de Amparo Gómez Rodríguez (1954–2018).

130. Leemos aquí *ébouler* en lugar del término original *ébeauler* que no sabemos traducir.

131. Sophia "Fufa" Wladimirovna Kowalewsky (1878–1952). A la muerte de Sophie Kowalewsky, el astrónomo Hugo Gyldén (amigo suyo, y editor de *Astronomische Nachrichten*) y su esposa Teresa se quedaron unos meses a cargo de la pequeña Sonja, que finalmente fue adoptada en Rusia por la amiga de su madre Julia Lermontova (cf. [7, p. 139]; [101, p. 316]).

132. La madre de Sophie von Adelung (1850–1927), que fue una escritora y pintora alemana, y la madre de Sophie Kowalewsky eran hermanas. Sonja conoció a la familia de su prima, en Stuttgart, en 1867 ([101, p. 55]).

133. El Sexto Congreso de Naturalistas y Médicos Rusos. Con el apoyo de Chebyshov, Sophie Kowalewsky preparó una charla para la sección matemática, que versaba sobre los resultados, ya de seis años de antigüedad pero aún sin publicar, de su trabajo doctoral sobre integrales abelianas. Su presentación, entre cuya audiencia se encontraba Mittag-Leffler, fue bien recibida ([61, p. 90]).

134. En 1888 se publicaron, por iniciativa de la Academia prusiana de Ciencias, las Obras Completas de C. W. Borchardt, [31]. Se puede leer una semblanza biográfica, escrita por un amigo suyo (¿Weierstrass?), en las páginas finales: [31, p. 502–503]. Ahí se lee que Borchardt fue "reverenciado por todos quienes fueron personalmente próximos él como un hombre del carácter más puro, de una naturaleza sin pretensiones y de la mejor educación". El profesor berlinés Ernst Lampe, en su reseña `JFM 20.0015.01` de [31], añadía a esto que "sobre todo fue su desinteresada devoción por la ciencia lo que hizo que el noble carácter de Borchardt fuera tan entrañable. Sin envidia y felizmente reconoció cada logro importante y animó alegremente

cada talento floreciente. ... En su funeral, un viejo maestro de nuestra ciencia se lamentó por él: «este hombre insustituible fue una biblioteca de matemáticas que ahora se ha perdido»".

135. Leopold Kronecker (1823–1891) defendió en 1845, bajo la supervisión de Dirichlet, su disertación doctoral en teoría algebraica de números. Dedicado después a los negocios con éxito y a las matemáticas como hobby, llegó a ser amigo íntimo de Weierstrass cuando éste acababa de incorporarse como profesor a la universidad, y de su antiguo profesor Kummer, que había ocupado la cátedra que había dejado vacante Dirichlet. Como resultado de sus numerosas publicaciones llegó a ser miembro de la Academia de Berlín en 1861, lo que le daba derecho a impartir clase en la universidad, lo que hizo desde 1862. En 1866 se le ofreció, pero no aceptó, prefiriendo mantener su posición en la Academia, ocupar la cátedra de Gotinga vacante por la muerte de Riemann. En 1883, con la jubilación de Kummer, le sucedió como profesor ordinario. Con la colaboración de Weierstrass, von Helmholtz, Schröder y Fuchs, fue editor del *Journal de Crelle*. Su particular punto de vista filosófico de las matemáticas tensó notablemente su relación con Weierstrass quien, por ello, estuvo a punto de dejar la Universidad en 1888 (ver la nota 210).

136. Jacob Steiner (1796–1863). Ver [12].

137. El interés de Borchardt por los algoritmos de medias aritmético-geométricas y su representación funcional se reflejó en varias publicaciones a lo largo de su vida. Dados dos números reales positivos a y b, las sucesiones a_n y b_n definidas por recurrencia a partir de $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ y $b_1 = \sqrt{ab}$ por

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}; \qquad a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}; \qquad \text{etc.}$$

tienen el mismo límite ω, al que Gauss llamó la *media aritmético-geométrica* (MAG) de a y b, probando la fórmula (ver, por ejemplo, [60, p. 259])

$$\frac{\pi}{2\omega} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

donde el inverso de ω queda expresado en términos de una *integral elíptica completa de primera especie*. Borchardt estudió la (MAG) ω, contemplándola como función analítica de a y b, en una comunicación a la Academia de Ciencias de Berlín de febrero de 1858, publicada en 1861 [28]. Ya entonces Borchardt manejaba un algoritmo más general, que se podía usar a partir de cuatro elementos. Esta generalización se publicó primero en alemán en 1876, [29], y traducida al francés el año siguiente. Si $a > b > c > e$ son cuatro números reales positivos que cumplen $a - b - c + e > 0$, se definen

$$a_1 = \frac{1}{4}(a+b+c+e), \quad b_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{ce}), \quad c_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ac} + \sqrt{be}), \quad e_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ae} + \sqrt{bc})$$

y, a partir de aquí, por la misma ley, cuatro sucesiones a_n, b_n, c_n, e_n de las que se encuentra que tienen el mismo límite g, la *media aritmético-geométrica de los cuatro elementos* a, b, c, e. Borchardt estudió la caracterización de g como función analítica de a, b, c, e y obtuvo representaciones de esta función como ciertas integrales hiperelípticas. De hecho, si $R(x) = x(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_2)$ con ciertos α_j que se obtienen a partir de a, b, c, e, se tiene (p. 343 de la versión en francés de [29])

$$\frac{4\pi^2}{g} = \int_0^{\alpha_3} dx' \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{x - x'}{\sqrt{R(x)R(x')}}\, dx.$$

En 1878, en la versión ampliada [30] de su trabajo, Borchardt refinó esta expresión a otra ([30, p. 431, fórmula (40)]) más semejante a la de Gauss para la (MAG) de dos números. En [29] Borchardt también discutió la posibilidad de extender su algoritmo a un número de elementos que fuera potencia de 2.

138. Se trataba de resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con el que Gabriel Lamé (1795–1870) modelizaba, en particular, la birrefringencia. Sophie Kowalewsky publicó [122] y [123]. Ver [7, p. 145–147], [54, p. 119–137] y, en castellano, [148, p. 86–90].

139. Ver [253, p. 245, nota 8]. Bölling llama ahí la atención hacia la memoria [235], donde Weierstrass trata el caso en que los subsiguientes coeficientes $F_{\lambda,\mu}(t)$ son constantes.

140. Remitimos aquí a la extensa anotación [253, p. 245–246, nota 9] de Bölling.

141. Mittag-Leffler también reproducía esta carta, escrita en francés, en su comunicación al Congreso de 1900, [151, p. 144–145].

142. Cf. [33, p. 450–463]. Ugo Bottazzini, en [32, p. 82–84], reproduce unas cartas de Pincherle a Casorati que pueden ilustrar este punto. Salvatore Pincherle (1853–1936), disfrutando de una beca postdoctoral y con unas cartas de recomendación de Casorati y Betti para Kronecker y Weierstrass, se inscribió en los cursos de ambos del semestre de invierno 1877/78. El 4 de diciembre de 1877 escribía a Casorati: "El curso del prof. Weierstrass, que también ocupa seis horas a la semana, tiene un carácter mucho más avanzado: lee sobre teoría de las funciones abelianas, desarrollando esencialmente su memoria del volumen 52 del Giornale di Crelle. Aunque sus lecciones comenzaron hace poco más de un mes, ya ha explicado la mayor parte de la teoría y tiene la intención de dar varias aplicaciones a la geometría y a la mecánica. Su tratamiento, bastante distinto del que yo conocía, que era el de Clebsch y Gordan, me resultó bastante difícil al principio, pero espero estar pronto al día y poder seguirlo con provecho, particularmente con la ayuda de aquella memoria". Y el 21 de abril de 1878: "Weierstrass trata sobre las funciones abelianas, o más propiamente, sobre las funciones hiperelípticas. Su curso se puede dividir en tres partes. En la primera, él parte de las ecuaciones diferenciales de la forma

$$u_\lambda = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{P(x_\alpha)}{y_\alpha} \frac{dx_\alpha}{x - a_\alpha} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \rho),$$

donde las u_λ son las variables independientes y los (x_α, y_α) son pares de puntos tomados sobre la curva fundamental

$$y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2\rho-1});$$

entonces demuestra que las x_α que satisfacen al sistema de ecuaciones anterior son las raíces de una ecuación algebraica de grado ρ, cuyos coeficientes se prueba que son funciones univaluadas de las variables independientes u_λ, y se denotan por $\wp(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)$; y es a estas funciones univaluadas a las que denomina funciones abelianas. Después estudia el teorema de adición para estas funciones, así como las relaciones que existen entre ellas y sus derivadas parciales. Esta parte no difiere mucho de la primera parte de la memoria del tomo 52 del Crelle. ... En la segunda parte estudia las integrales hiperelípticas, la descomposición de la integral general en integrales de las formas normales, ... En la tercera parte, finalmente, define las funciones Θ de varias variables, ... ”

143. Charles Auguste Briot (1817–1882), matemático y físico francés. En 1855 fue nombrado maestro de conferencias en mecánica y astronomía en la Escuela normal superior. En 1870 sucedió a Lamé en la cátedra de física matemática en la Facultad de Ciencias de París. El texto que cita aquí Sophie Kowalewsky es [35]. Se puede descargar en formato pdf, de la Biblioteca digitalizada de la Universidad de Lille, en https://iris.univ-lille.fr/handle/1908/1531. Se verá que Briot en ningún lugar de su libro hace mención de Weierstrass.

144. Suponemos que Sophie Kowalewsky se refiere aquí al Neumann joven, Carl Gottfried (ver la nota 73) y a su libro [162] (que se puede encontrar en el sitio web de la Biblioteca nacional de Francia https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99576m). Tampoco hay ninguna mención a Weierstrass en este libro de Neumann.

145. Para más información sobre el Seminario de matemáticas de Berlín, creado por Weierstrass y Kummer en 1860, ver [15, p. 205–207].

146. Charles Émile Picard (1856–1941) se casó en 1881 con Marie Hermite, matemática como él. Sustituyó ese año a Jean-Claude Bouquet (1819–1885) en la cátedra de mecánica de la Facultad de Ciencias de París, y fue titular de la misma desde 1856. En 1897 ocupó la cátedra de análisis y álgebra superior vacante por jubilación de su suegro, hasta su propio retiro en 1931. Fue también profesor en la Escuela normal superior y en la Escuela central de ingeniería. En [169, p. 46], Picard cita la memoria [233] de Weierstrass sobre la teoría de las funciones “uniformes” (es decir, univaluadas) como el origen de los trabajos suyos encaminados a “completar alguno de los resultados del ilustre geómetra”. De esos trabajos (ver [169, p. 3–4]) entresacaremos casi al azar dos, contemporáneos con la carta comentada: [167] y [168].

147. Jules Tannery (1848–1910) es el hermano menor del también matemático e historiador de las matemáticas Paul Tannery (1843–1904), traductor de Diofanto y editor de las Obras de Fermat. Jules fue reconocido, sobre todo, como un gran profesor. Después de haber comenzado ya a dar clases en la Escuela normal superior en 1872, defendió su tesis doctoral “Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables” dirigida por Hermite, en 1874. En la Escuela normal fue “maître de conférences” desde 1881, y subdirector de estudios científicos desde 1884. Editor del *Bulletin des Sciences Mathématiques* desde 1876 hasta su muerte, colaboró en este proyecto con Darboux, Guillaume-Jules Houël (1823–1886) y Picard, firmando en él un gran número de reseñas de publicaciones, en particular de las memorias de Cantor, contribuyendo a dar a conocer en Francia sus ideas. Ver https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tannery_Jules/ y [216, p. 29–40].

148. Carta de Jules Tannery à Weierstrass, [216, p. 19–20]; [238].

149. La memoria [237] sobre la teoría de funciones.

150. Tannery anota, y después Weierstrass se hace también eco de ello, que esta serie que él ha comunicado a Weierstrass ya había sido señalada por Ernst Schröder (1841–1902) en [205, p. 184].

151. Corregimos, $\psi(x)$ por $\chi(x)$, como nos muestra Bölling en [253, p. 248]. Esa es la notación de Weierstrass para su función auxiliar, ver [249] II, p. 216–221. Si ω, ω' son números complejos no nulos tales que $\Re\left(\frac{\omega}{\omega' i}\right) \neq 0$, entonces

$$\psi(u;\omega,\omega') = \frac{1}{u} + \sum_{\nu,\nu'}{}' \left\{ \frac{1}{u - 2\nu\omega - 2\nu'\omega'} \left(\frac{u}{2\nu\omega + 2\nu'\omega'} \right)^2 \right\}$$

(la suma se extiende a todos los pares (ν, ν') de enteros no ambos nulos), es una función univaluada y analítica de u (para una prueba de esto, Weierstrass remite a [233, §2]). La función

$$\chi(x) = \frac{2x}{\pi}\,\psi(1,1,xi) + \frac{2}{\pi x}\,\psi\left(1,1,\frac{i}{x}\right)$$

vale $+1$ o -1 según que $\Re x$ sea positiva o negativa. Entonces, por ejemplo, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes complejas tales que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, se sabe que la curva $\Re\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right) = 0$ es una circunferencia K. Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones univaluadas cualesquiera, con un número finito de singularidades esenciales, y se definen $\mathfrak{F}_0(x) = \frac{F_1(x)+F_2(x)}{2}$, $\mathfrak{F}_1(x) = \frac{F_1(x)-F_2(x)}{2}$, entonces la expresión $\mathfrak{F}_0(x) + \mathfrak{F}_1(x)\chi_1(x)$, donde $\chi_1(x) = \chi\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)$, representará a una de las funciones $F_1(x)$ o $F_2(x)$ en el interior de K y a la otra en el exterior de K.

152. Lamé usaba la letra λ para denotar el *tiempo* que tarda una superficie de ondas en alcanzar un punto determinado, y el proyecto al que se refiere aquí Weierstrass (cf. [253, p. 251, nota 22]) debe ser la propuesta, que le había hecho él, de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de Lamé que modelizaba el desplazamiento de una partícula en un medio elástico, y sobre el que Sophie Kowalewsky acabaría publicando, en 1885, su trabajo sobre propagación de la luz ([54, p. 93]). Ver la nota 138 anterior.

153. “Cuando, a pesar de todo, vio a su marido apartarse de ella, y creyó que había puesto a otra en su lugar, ... decidió construir un futuro para ella y su hijita enteramente por sus propios esfuerzos, y abandonó esposo, hogar y país, para reanudar una vez más su vida de estudiante en el extranjero” ([136, p. 43–44], final del cap. IV).

154. Bölling hace una esquemática reconstrucción de esta carta perdida y de las circunstancias personales que la rodearon, incluyendo un extracto de una carta de Sophie Kowalewsky a su cuñado Aleksandr (ver la nota 190) desde París, en febrero de 1882 (nota 4), en [253, p. 255–256, carta 103].

155. "Beichtvater" en el original.

156. El curso en la Universidad de Berlín sobre *Teoría de las funciones abelianas* de invierno de 1881–82, de 5 horas semanales, según consta en [249] III, p. 359 (el catálogo de cursos del archivo de la Universidad de Berlín le da sólo cuatro horas por semana [253, p. 261, nota 12]).

157. K. Weierstrass (ed.): [214]. El Prefacio del editor del primer volumen, de viii+528 páginas, con el retrato de Steiner y 44 láminas de figuras, está firmado por Weierstrass el 28 de noviembre de 1880. El Prefacio del segundo volumen, de x+744 páginas (notas y adiciones: p. 727–743), con 23 láminas de figuras, es del 6 de marzo de 1882. En los pocos años que coincidió con Steiner en Berlín, a quien conocía personalmente desde 1844, antes de la muerte de éste, "Weierstrass fue uno de esos pocos colegas con los que Steiner no se había llegado a pelear del todo. . . . Hasta 1873, Weierstrass dio también clases sobre geometría sintética durante siete semestres, cumpliendo una promesa hecha a Steiner. El 25 de abril de 1873 le escribió a Sonja Kovalevskaja que ya no le interesaban mucho las clases de geometría, y que sólo las había tomado a su cargo porque en la Universidad donde había trabajado Steiner no debía descuidarse esta disciplina, y no se habría podido encontrar ningún otro matemático para impartirla" [15, p. 205].

158. De los siete volúmenes numerados de las Obras de Jacobi, [98], Weierstrass fue el editor de los seis últimos, desde el segundo, aparecido en 1882, hasta el séptimo, publicado en 1891.

159. En [233], Weierstrass escribe: "Llamaré *función primaria* (en el original, *Primfunktion*) de la variable x a toda función univaluada de esta cantidad que tiene sólo un punto singular, esencial o no esencial, y uno sólo o ningún cero. La forma general de una tal función es, si se designa con c el punto singular,

$$\Big(\frac{k}{x-c}+\ell\Big)e^{G\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

donde k,ℓ son constantes y $G\big(\frac{1}{x-c}\big)$ un polinomio en $\frac{1}{x-c}$" (*ib.*, p. 91–92). Weierstrass prueba, en primer lugar, el conocido teorema de factorización para funciones enteras: *Toda función univaluada entera* (es decir, analítica en todo el plano complejo) *se puede representar en la forma de un producto cuyos factores son funciones primarias de la forma* $(kx+\ell)e^{g(x)}$*, donde* $g(x)$ *es un polinomio que se anula en* $x=0$ *y* k,ℓ *constantes* (p. 100) y, a continuación, representaciones para funciones univaluadas con un número finito de singularidades (§ 5), con n singularidades y ninguna otra singularidad ni cero (§ 6), o con n singularidades esenciales y cualquier número, finito o infinito, de singularidades no esenciales (§ 7).

160. Usaremos la notación de [210, Art. 34] (la misma se emplea en [3, p. 4–6, 202, 205]) para las funciones zeta de Jacobi ([98] I, p. 501). A saber, con la abreviatura $\vartheta_\lambda(\upsilon)=\vartheta_\lambda(\upsilon\mid\tau)$, se definen

$$\vartheta_0(\upsilon)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}e^{2n\pi i\upsilon};\quad \vartheta_1(\upsilon)=\frac{1}{i}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)\pi i\upsilon};$$

$$\vartheta_2(\upsilon)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)\pi i\upsilon};\quad \vartheta_3(\upsilon)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}e^{2n\pi i\upsilon},$$

donde $q=e^{\pi i\tau}$, siendo τ un parámetro tal que $\Im(\tau)>0$. Entonces se tiene $|q|<1$ y las series son absolutamente convergentes para todo $\upsilon\in\mathbb{C}$. La notación de Jacobi para la función ϑ_0 es, simplemente, ϑ. Whittaker y Watson [257, p. 477–478] la denotan θ_4. En [249] V, p. 177–179 encontramos un desafortunado desplazamiento de subíndices: las $\vartheta_0,\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ anteriores se denotan, respectivamente, $\vartheta_3,\vartheta_0,\vartheta_1,\vartheta_2$. Chandrasekharan [47, p. 59, 63] denota $\vartheta_0,\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ respectivamente como $\vartheta_2,\vartheta,\vartheta_1,\vartheta_3$.

La función $\vartheta_3(\upsilon)$ es una función entera de período 1. Las cuatro funciones ϑ satisfacen la ecuación diferencial $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\upsilon^2}=4\pi i\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}$. Los cocientes θ_1/θ_0, θ_2/θ_0 y θ_3/θ_0 son funciones meromorfas y doblemente periódicas (respectivamente de períodos 2 y τ, 2 y $1+\tau$, 1 y 2τ), es decir, son funciones elípticas (ver la nota 169). En un contexto proveniente ahora de una función elíptica $\wp u$, es usual tomar el parámetro τ igual al cociente ω'/ω entre un par de períodos primitivos (ver la nota 97). Así, poniendo además $u=2\omega\upsilon$, Weierstrass define las funciones Zeta más generales

$$\Theta_\lambda(u)=\Theta_\lambda(u\mid\omega,\omega'):=e^{2\eta\omega\upsilon^2}\vartheta_\lambda\Big(\upsilon\mid\tfrac{\omega'}{\omega}\Big)\qquad(\lambda=0,1,2,3),$$

que incluyen a las funciones ϑ_λ para $\eta=0$ y, salvo una constante multiplicativa, a la función σu y a sus variantes σ_a ($a=1,2,3$, ver [249] V, p. 88) para $\eta=\sigma'(\omega)/\sigma(\omega)$.

161. La memoria [129]: "Fundamentos de una teoría aritmética de las cantidades algebraicas. Publicación conmemorativa del quincuagésimo aniversario del doctorado de Ernst Eduard Kummer, 10 de septiembre de 1881".

162. Weierstrass se refiere aquí, sin duda, a alguna (o al conjunto) de las entregas que formaron una extensa comunicación [171] de Poincaré con el título común de *Sur les fonctions fuchsiennes* en *Comptes Rendus*. Por ejemplo, la entrega de *C. R.* **94** (1882), 1038–1040 es del 10 de abril de 1882, el día anterior a la salida de la carta que estamos comentando. Y como puede comprobarse, por ejemplo en zbMATH, estas no fueron las únicas contribuciones de Poincaré en los tomos 92 a 94 de *C. R.* Todo este material, y el del trabajo [173] que le publicó Klein, encontraron acomodo poco después en la memoria [180], continuada, hasta formar en principio una trilogía, por [181] (esta memoria y la anterior aparecieron, en otoño de 1882, en el primer número de *Acta Mathematica*) y [182]. Klein estuvo en principio incómodo con las designaciones de Poincaré en estas memorias, haciéndole notar cierta literatura pertinente de Riemann, Schwarz y Schottky. Se puede seguir la correspondencia

que ambos mantuvieron entre junio de 1881 y septiembre de 1882, [157], en este mismo número de *Acta* del año 1923. Ver también la extensa nota a pie de Klein en [173, p. 564].

163. Además de sus logros académicos, Joseph Liouville (1809-1882), notable organizador, fundó en 1836 el *Journal de mathématiques pures et appliquées* (Journal de Liouville), revista que mantiene hoy su alta reputación.

164. Lazarus Fuchs (1833–1902), que ya ha aparecido anteriormente en las notas, presentó su disertación doctoral en Berlín, en 1858, dirigida por Weierstrass y Kummer. Comenzó su docencia universitaria como profesor asociado en Berlín en 1866. Después fue profesor titular en Greifswald, Gotinga y Heidelberg, sucediendo aquí a Koenigsberger en 1875. En 1884 sucedió a Kummer en Berlín. Desde 1892, al morir Kronecker, fue editor del *Journal de Crelle*. Sus trabajos [70] y [71] inspiraron a Poincaré y motivaron una correspondencia a propósito entre ambos (recogida en [155]) en la que se explica la denominación "funciones fuchsianas".

165. Para H. A. Schwarz, ver la nota 28. En relación con el tema que nos ocupa, Félix Klein (1849–1925) le apuntó a Poincaré las memorias [208] y [209] de Schwarz. Y en los *Math. Annalen*, a continuación del trabajo y del extracto de una carta [173] de Poincaré, Klein publicó [106], donde ya mencionaba su libro [107] de aparición reciente (ver también la carta XVII de la citada correspondencia Klein-Poincaré [157]).

166. Bölling hace una reconstrucción también de esta otra carta perdida de Sophie Kowalewsky en [253, p. 264–265, carta 105].

167. Paul Émile Appell (1855–1930), "ilustre sabio y gran ciudadano", reza hoy la placa conmemorativa de su casa natal en Estrasburgo. Su autobiografía científica [5] lista una gran cantidad de trabajos, y aún no estaban todos: 140 de análisis, 30 de geometría, 87 de mecánica, varios libros de texto, correspondencia, conferencias sobre historia de las matemáticas y sobre la educación matemática. En `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Appell/` se puede leer un resumen de una trayectoria vital ejemplar.

168. Weierstrass se sigue refiriendo aquí a las comunicaciones de Poincaré englobadas en [171] y, posiblemente también, a [172], ésta de la reciente, dada la fecha de su carta, sesión del 22 de mayo de 1882. De las comunicaciones [171] ver, para el contexto que sigue, la siguiente secuencia, por ejemplo: *C. R.* **92** (1881), 333–335; **92** (1881), 395–398; **92** (1881), 859–861; **92** (1881), 1198–1200; **92** (1881), 1274–1276; **93** (1881), 301–303; **94** (1882), 1038–1040. Las nuevas funciones *fuchsianas* y *zetafuchsianas* de Poincaré (ver su definición original en la primera de las referencias de la secuencia) venían a resolver el problema de la *uniformización* de las curvas algebraicas generales, ver la nota 169. Para los "impresionantes teoremas", ver las dos últimas referencias. Por ejemplo, "Se concluye que: 1º Toda ecuación diferencial lineal con coeficientes algebraicos se integra mediante las funciones zetafuchsianas; 2º Las coordenadas de los puntos de una curva algebraica cualquiera se expresan mediante funciones fuchsianas de una variable auxiliar" (*C. R.* **93** (1881), 303).

Mittag Leffler dedicó a Poincaré el volumen *A. M.* **38** (1921) completo que, "sous la pression des malheurs qui pendant cette periode ont frappé les différents peuples de la terre", (bajo la presión de las desgracias que durante este período golpearon a los distintos pueblos de la tierra), estuvo retenido cinco años, como se lee en [154, p. 2].

169. Las *eindeutig Funktionen*, que estamos traduciendo como "funciones univaluadas", en Francia se denominaban "funciones uniformes", y el problema de obtener unas ecuaciones paramétricas que expresasen las variables x e y, relacionadas por una ecuación algebraica $f(x,y)=0$, como funciones univaluadas de un parámetro y fuesen válidas en cierto entorno de un punto (x_0,y_0) de la curva es el *problema de uniformización de la curva* (ver [257, p. 475-478]), y es el tema de trasfondo aquí. Un ejemplo elemental, pero ilustrativo de la situación, es el de la curva $y^2=1-x^2$ que, además de otras conocidas parametrizaciones por funciones racionales (es por ello una curva *unicursal*, como todas las cónicas), admite la parametrización $x=\cos u$, $y=\operatorname{sen} u$ $(0\le u<2\pi)$ por funciones transcendentes, donde la función (de variable compleja) $y=\operatorname{sen} u$ se puede definir como la inversa, univaluada, de la integral $u=\int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ [143, p. 14, 25–35]. En el caso de una curva genérica de la forma $y^2=R(x)$ con $R(x)$ polinomio de tercero o cuarto grado sin raíces múltiples, Weierstrass define como se ha visto anteriormente (nota 92), a partir de un cambio de variable, la correspondiente función elíptica $s=\wp u$, para la que se cumple, para ciertos coeficientes g_2 y g_3 (tales que $g_2^3-27g_3^2\neq 0$), $4s^3-g_2s-g_3=\wp' u$ y se obtiene una parametrización para la curva, en el entorno de un punto fijo (x_0,y_0) arbitrario, de la forma siguiente ([249] V, p. 13–14):

$$x=x_0+\frac{y_0\wp' u+\frac{1}{2}R'(x_0)\Big(\wp u-\frac{1}{24}R''(x_0)\Big)+\frac{1}{24}R(x_0)R'''(x_0)}{2\Big(\wp u-\frac{1}{24}R''(x_0)\Big)^2-\frac{1}{48}R^{iv}(x_0)},$$

$$yy_0=-R(x_0)-\frac{1}{2}R'(x_0)(x-x_0)+2\Big(\wp u-\frac{1}{24}R''(x_0)\Big)(x-x_0)^2.$$

Para $x_0=\infty$, cuando además es precisamente $R(x)=4x^3-g_2x-g_3$, esta parametrización queda ([249] V, p. 16) $x=\wp u$, $y=-\wp' u$, siendo g_2 y g_3 los invariantes que determinan esta función $\wp u$. Ver también [82, nº 338, 339]. Para el caso de la curva $y^2=(1-x^2)(1-k^2x^2)$, la parametrización que requiere Weierstrass la encontramos explícitamente en [47, VII, §§1–2]; la referencia de este libro de Chandrasekharan se la debemos agradecer a Bölling, [253, nota 19, p. 276]. Recordemos que la integral $u=\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ $(0<k<1)$ define la función elíptica *seno amplitud* de Jacobi $x=\operatorname{sn}(u,k)=\operatorname{sn} u$ y que, a partir de ella, se definen las funciones elípticas *coseno amplitud* $\operatorname{cn}(u,k)=\operatorname{cn} u$ por $\operatorname{cn}^2 u+\operatorname{sn}^2 u=1$ y *delta amplitud* $\operatorname{dn}(u,k)=\operatorname{dn} u$ por $\operatorname{dn}^2 u+k^2\operatorname{sn}^2 u=1$ $(\operatorname{cn} 0=\operatorname{dn} 0=1)$. Entonces, la parametrización $x=\operatorname{sn} u$, $y=\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u$ de la curva en cuestión queda expresada en términos de funciones $\vartheta_\lambda(v\mid\tau)$ (ver la nota 160) si se usan las fórmulas

$$\operatorname{sn} u=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_1\big(\frac{u}{2K}\mid\tau\big)}{\vartheta_0\big(\frac{u}{2K}\mid\tau\big)},\quad \operatorname{cn} u=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2\big(\frac{u}{2K}\mid\tau\big)}{\vartheta_0\big(\frac{u}{2K}\mid\tau\big)},\quad \operatorname{dn} u=\sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3\big(\frac{u}{2K}\mid\tau\big)}{\vartheta_0\big(\frac{u}{2K}\mid\tau\big)},$$

donde $k^2+k'^2=1$, $\tau=(K'/K)i$, $K=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ y $K'=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$; $(4K,2K'i)$ es un par de períodos primitivos de la función $\operatorname{sn} u$ [143, p. 80]. Para terminar, se verifica la expresión $k^2=\vartheta_2^4(0,\tau)/\vartheta_3^4(0,\tau)$, que define k^2 como una función analítica univaluada del parámetro τ (ver [210, Art. 54]).

Al margen, se puede leer también aquí a Poincaré en [186, §10–14] (este breve artículo, cuya referencia debemos a Mª Rosa Massa, [146, p. 20–23, 33], bien merecerá una lectura completa).

170. Por ejemplo, en notación actual, la función θ_3 de r argumentos con matriz de parámetros $T = (\tau_{\alpha,\beta})_{r\times r}$ se define así:

$$\vartheta_3(\upsilon_1, \dots, \upsilon_r | \tau_{1,1}, \tau_{1,2}, \dots, \tau_{r,r}) = \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^r} \exp\Big(2\pi i\Big(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{m}T\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{\upsilon}\boldsymbol{m}'\Big)\Big),$$

donde $\boldsymbol{m} = (m_\alpha)$ es un vector fila, $\boldsymbol{m}'$ su transpuesto, $\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_\alpha)$. Ver también la nota 160.

171. Formando la memoria [180], ver la nota 162. Además de las tres memorias allí citadas, la revista iba a publicar, completando el trabajo de Poincaré sobre el tema, [183] y [184]. Poincaré le explicaba a Klein su plan de publicación del trabajo en cinco partes en su última carta de 22 de septiembre de 1882, [157, p. 132].

172. Presentamos la fórmula del texto corregida de acuerdo con [153, p. 33]. Poincaré considera estas dos ecuaciones diferenciales simultáneas, donde X, Y, Z son polinomios en x, y, z, en la nota [175], de 13 de febrero de 1882. El caso plano, $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, lo trató en dos notas con el mismo título (damos las referencia de ambas en [174]). Volvió sobre el tema más adelante, ver la nota [178] y las dos memorias de igual título que agrupamos en la referencia [179], que completaron una memoria cuadripartita con otras dos memorias extensas anteriores (que hemos agrupado en la referencia [177]).

173. Es, posiblemente, el resultado que aparece enunciado en la breve nota [176], presentada a la Academia de Ciencias de París por Hermite en la sesión del 27 de febrero de 1882. Traducimos un fragmento: "...podría tener interés estudiar si se pueden integrar las ecuaciones diferenciales mediante series que sean convergentes para todos los valores reales de la variable ... Un sistema cualquiera de relaciones algebraicas entre un número igual de funciones de una sola variable y de sus derivadas se puede llevar a la forma siguiente:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n},$$

donde $X_1, X_2, \dots, X_n$ son polinomios en $x_1, x_2, \dots, x_n$. Voy a introducir una variable auxiliar s definida por la ecuación diferencial

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{ds}{X_1^2 + X_1^2 + \cdots + X_n^2 + 1}.$$

Demuestro que *siempre se puede encontrar un número α tal que $x_1, x_2, \dots, x_n$ se pueden expresar mediante series ordenadas según las potencias de $\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$ y convergentes para todos los valores reales de s. Los coeficientes son funciones racionales de α, de los coeficientes de los polinomios X y de los valores iniciales de las variables.* ... Si, por ejemplo, se quisiera aplicar este método a las ecuaciones de la Mecánica celeste, las series serían convergentes para todos los valores reales del tiempo".

Esta publicación produce un carteo inmediato entre Hermite y Mittag-Leffler en los meses de marzo y abril de 1882 (ver [90, p. 150–153]). El 6 de abril, Hermite escribe: ... "en una de nuestras charlas, [Poincaré] me ha hecho saber que las series a las que llega para el [caso del] movimiento elíptico convergen más o menos rápidamente, según la elección de la constante α, pero siempre a la manera de una progresión geométrica, lo que creo que es de la mayor importancia".

174. No podemos dar ninguna noticia de cuál fue esa comunicación de Appell, ni de la información que, sobre ella, tal vez Sofía pudiera transmitirle a Weierstrass, cosas que aparentemente son evidentes para Mittag-Leffler. Él no anota nada, ni aquí ni en [153, p. 34], donde también se recoge esta carta de Weierstrass. Los siguientes documentos son del año siguiente:

Carta de Weierstrass a Mittag-Leffler de 8 de marzo de 1883 ([153, p. 34–36]): "Me informan de que Poincaré también derivó el teorema en cuestión, al menos asumiendo la ley de Newton, y concluyó que era posible desarrollar las coordenadas de todos los puntos en series de potencias convergentes de la forma $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\varphi(t))^\nu$, donde $\varphi(t)$ es una función bien determinada de t. Esto se ve muy fácilmente. El dominio de valores de t en que que las coordenadas son funciones univaluadas es una franja paralela que contiene la recta de valores reales de t. Esta franja se puede mapear en un círculo, y esto es lo que determina la función $\varphi(t)$ ...".

Carta de Poincaré a Mittag-Leffler de 18 de abril de 1883 ([187, p. 161–162]): "He leido con gran interés la carta del sr. Weierstrass de la que me ha proporcionado copia. Es bien claro, como dice Weierstrass, que las coordenadas de los planetas no pueden expresarse en series de potencias de $\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$ más que si se está seguro de partida de que los planetas no se reencontrarán y que, por otra parte, de esto nunca se puede estar seguro. Ahora bien, yo no desarrollaba según las potencias de $\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$, sino según las de $\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$, donde s es una variable auxiliar que goza de las siguientes propiedades: 1º [la variable] t se expresa, lo mismo que las coordenadas, como una serie de potencias de $\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$, ... No creo que, en el caso de la Mecánica celeste, esta solución que yo doy sea la más apropiada, pienso que hay que investigar mejor sobre ello".

(En esta anotación nos hemos ayudado del documento de trabajo en prepublicación [159] de Philippe Nabonnand, Universidad de Lorraine, 2012.)

175. En la memoria [236]. Ver la nota 124. Para lo que sigue, ver también [249] III, p. 104–105, [249] IV, p. 513–538.

176. En el texto original se leía aquí $n_1, \dots, n_\rho$.

177. (Ver [253], nota 40 en p. 278). Weierstrass cita aquí la extensa nota [89] de Hermite. Ver [89, p. 390–394]. Hermite adjudica a Riemann la relación de simetría entre lo que serían los coeficientes $\tau_{\alpha,\beta}$ ([89, p. 391–392]): "Una función unívoca de n variables no puede admitir más de $2n$ periodos simultáneos. ... al Dr. Riemann, de Gotinga, se debe el bello descubrimiento analítico de que los $2n$ periodos no pueden ser cantidades dadas a priori e independientes unas de otras." Después, en la p. 393, que en el libro está señalada tipográficamente con el número 26 (¿comienzo del pliego 26 de la encuadernación?), Hermite

hace una elogiosa mención conjunta de Weierstrass y de Riemann. Riemann le comunicaba a Weierstrass, en una carta de 26 de octubre de 1859, una demostración detallada del teorema "que últimamente ha sido objeto de nuestro entretenimiento, que *no puede existir una función univaluada de n variables con más de $2n$ períodos* [193] (ver la nota 124; leer también [186, §15]).

178. La memoria [192]. Ver los números 18 a 21, p. 142–145 en la edición del *Crelle's J.*, p. 144–148 en la edición francesa.

179. Ver la nota 170.

180. Jules Molk (1857–1914), de quien hemos citado en la nota 124 su traducción de la carta de Weierstrass a Borchardt, fue catedrático en la universidad de Nancy desde 1890 y, de 1902 hasta su muerte, director y editor en jefe de la gran *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, versión francesa de la *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (Enciclopedia de las ciencias matemáticas con inclusión de sus aplicaciones)* alemana organizada por Klein y Wilhelm Franz Meyer.

181. Ferdinand von Lindemann (1852–1939), se doctoró bajo la dirección de Klein, en Erlangen, en 1873. Profesor ordinario en Friburgo en 1879, fue después profesor en Königsberg en 1883, donde tuvo a David Hilbert como estudiante doctoral, y en Munich desde 1893. Demostró la transcendencia de π, a partir de la del número e y la fórmula $e^{i\pi} = -1$: [140], [141], [142].

182. Ver las anteriores notas 172 y 173. Hemos corregido también aquí la fórmula que se lee en el texto original, poniendo letras mayúsculas en los denominadores.

183. Ver [242]. El resultado se conoce hoy [8, Theorem 1.4, p. 6–8] como "teorema de Hermite-Lindemann-Weierstrass". En 1893 la demostración fue simplificada por Hilbert, Hurwitz y Gordan (cf. [8, p. 3]).

184. Como ya se ha dicho, *Acta Mathematica* fue fundada por Mittag-Leffler en 1882. Sophie Kowalewsky fue editora de la revista desde el volumen **5** de 1884 hasta el **14** de 1890–1891 inclusive, es decir, hasta el final de su vida. Ver [7, p. 22 y 141–145].

185. "Determinación de las funciones más generales de una variable para las que existe un teorema de adición".

186. Ver [210, p. 1–5]. La primera edición de esta obra había aparecido, por fascículos (Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner), Götingen), en los años 1881–1882. Los tres primeros artículos se agrupan bajo el título "Allgemeine Lehrsätze betreffend diejenigen analytischen Funktionen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen", es decir, "Teoremas generales relativos a las funciones analíticas que poseen una fórmula algebraica de adición", y se expone en ellos, por ejemplo, que *una función analítica univaluada $\varphi(u)$ que verifica una fórmula de adición*, es decir, tal que entre cada tres valores de la función $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ y $\varphi(u+v)$ existe una relación algebraica con coeficientes independientes de u y v, *es, o bien una función racional de u, o bien una función racional de $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ donde ω es una constante apropiada, o bien una función racional de una función $\wp u$ y de su derivada primera $\wp' u$, y este último caso engloba los dos primeros* [210, p. 3].

187. No sabemos precisar cuál es el "cours de Weierstrass" al que se refiere aquí Mittag-Leffler.

188. "—yo, desde luego, no había tenido conocimiento de ello—" (acotación en francés dentro del texto original en alemán).

189. "—la aceptación de una plaza de maestro de conferencias [docente privada no remunerada oficialmente, en principio, para llegar a ser después profesora] en Estocolmo— (la acotación está en francés dentro del resto del texto en alemán).

190. El Séptimo Congreso de Naturalistas y Médicos Rusos. Darwin había fallecido el año anterior y el cuñado de Sofía, el embriólogo Aleksandr Kowalevsky, pronunciaba en este congreso un discurso conmemorativo. Aleksandr había llegado a mantener correspondencia con Darwin gracias a la relación personal entre éste y su hermano Wladimir, el marido de Sofía, que fue un paleontólogo evolucionista muy activo. Sofía también había conocido personalmente a Darwin, en un viaje a Londres con Wladimir el año 1869. Ver [7, p. 19, 40]; [198, p. 379–380]; [220, p. 59, 87]. Por su parte, Sofía presentó en este congreso su trabajo con las ecuaciones de Lamé a propósito de la refracción de la luz (ver la nota 138 y [54, p. 100–101]). Ver también [217, p. 89].

191. Agencia Internacional de viajes.

192. Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852) nació en una familia judía berlinesa convertida al protestantismo. De extraordinaria, en cantidad y calidad, producción matemática en una vida tristemente breve, ya que murió de tuberculosis antes de los treinta años, es notable su trabajo en formas cúbicas, leyes de reciprocidad superiores y funciones elípticas. Cuando propuso a Dirichlet para la orden *Pour le mérite* en 1845, Gauss señaló que había estado a punto de proponer a Eisenstein en su lugar. Kummer consiguió que la universidad de Breslavia concediera a Eisenstein un doctorado honorario en 1845. En 1847 se habilitó en la universidad de Berlin y comenzó a dar clases; Riemann escuchó ese año su curso sobre funciones elípticas. Su memoria [66], raramente citada, muestra una vía de acceso completamente original a la teoría analítica de las funciones elípticas, cf. [33, p. 225–228]. K.-R. Biermann, en su artículo [13], rescata del olvido a Eisenstein presentando con minucioso detalle las fechas más importantes de su vida y obra, fuentes y literatura sobre su biografía y una lista con las 38 obras publicadas en el Journal de Crelle. Más reciente y breve (en inglés), es [203], de donde extraemos (p. 58) esta cita: "Mirando hacia atrás desde la perspectiva de hoy, las matemáticas de Eisenstein nos parecen más actuales que nunca. No es tanto la cosecha de teoremas, ni la creación de teorías completas lo que nos asombra, sino la propia forma de observar las cosas —y que pudo ser lo que, en su día, impresionó a Gauss".

Johann Georg Rosenhain (1816–1887), también de familia judía, hizo su tesis doctoral en Königsberg con Jacobi, de quien editó sus lecciones sobre teoría de números *Vorlesungen über Zahlentheorie. Wintersemester 1836/37.* En 1844 se habilitó como profesor en Breslavia con la tesis *Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum*, donde estudiaba las funciones triplemente periódicas de dos variables. Demócrata militante, la represión política lo llevó primero a la universidad de Viena, donde tuvo que habilitarse de nuevo en 1851, y finalmente a la de

Königsberg, donde fue profesor de 1857 a 1885. Su memoria [200] consiguió el Grand Prix que la Academia de Ciencias de París había convocado en 1846 sobre el tema de "resolver el problema inverso para una integral abeliana de una curva de género 2". Fue publicada en alemán sólo póstumamente: [201]. La memoria se encabezaba con la siguiente cita de *Ifigenia en Táuride*, de Goethe:

Das Wenige verschwindet leicht dem Blick,
Der Vorwärts sieht, wie viel noch übrig bleibt.

("Poco es eso y fácilmente se borra la mirada que a lo lejos se tiende y ve cuánto camino aún queda por andar" [79, p. 746].) De Rosenhain han quedado, también, los extractos [199] de sus cartas a Jacobi. No publicó nada más.

193. Mittag-Leffler comentó en [152] estas palabras de Weierstrass. Francisco Vera (1888–1967), en el capítulo 4 de su libro [218], señala aquel comentario de Mittag-Leffler como digno de ser traducido. Transcribimos a continuación, literalmente, la traducción que entonces presenta allí Vera:

"La opinión de Weierstrass es de gran interés por muchos conceptos. Al lado de la escuela del rigor matemático, cuyos más ilustres representantes modernos son Gauss, Cauchy, Abel y el mismo Weierstrass, se ha desarrollado poco a poco otra escuela que pretende percibir, gracias a ciertos aspectos geométricos, caminos transversales en las verdades matemáticas. Se presenta de buena voluntad en esta escuela el método de Weierstrass como una especie de lógica aritmética casi escolástica, y se profesa que las verdades descubiertas no se hacen jamás por vía puramente deductiva, en que cada proposición está ligada inflexiblemente a la que le precede. Esto es absolutamente justo, pero el ejemplo de Abel demuestra que es un error considerar los aspectos geométricos como la fuente única de descubrimientos nuevos. Abel no se entrega jamás a consideraciones geométricas y jamás mostró el menor interés por las proposiciones o por los métodos geométricos. Sin embargo, tenía un don de intuición como pocos lo han tenido antes o después de él. Y este don es el que le ha conducido a sus grandes descubrimientos. Pero, al propio tiempo, era completamente opuesto a la pretensión que preconizan los protagonistas de los aspectos geométricos en el Análisis: hacer aceptar como demostrados rigurosamente teoremas que deducían de vagas consideraciones espaciales. Abel era demasiado grande como pensador para tener tal pretensión. Había visto muy profundamente la íntima conexión de las cosas para no saber que incluso su intuición, necesitaba comprobarse por una deducción rigurosa. La frase de Weierstrass: "El verdadero matemático es poeta", puede parecer singularmente extraña al gran público. Y, sin embargo, es así. Dicha frase no implica sólo que al matemático le hace falta, como al poeta, imaginación e intuición. Esto es verdad para todas las ciencias, pero no en el mismo grado que para la Matemática. La frase tiene un significado de mayor alcance. Los mejores trabajos de Abel son verdaderos poemas líricos, de una belleza sublime, en donde la perfección de la forma deja transparentar la profundidad del pensamiento, a la vez que llena la imaginación de cuadros de ensueños sacados de un mundo de ideas aparte, por encima de la trivialidad de la vida y más directamente emanados del alma misma que todo lo que haya podido producir ningún poeta en el sentido ordinario de la palabra. No hay que olvidar, en efecto, hasta qué punto el lenguaje matemático, hecho para las más altas necesidades del pensamiento humano, es superior a nuestro lenguaje ordinario. No hay que olvidar tampoco que el pensamiento interior está allí más completa y claramente expresado que en ningún otro dominio del hombre".

194. Transcribiremos nuevamente dos citas de K.-R. Biermann: "Weierstrass nunca dejó de mostrar su gran estima por Riemann. Elaboró la propuesta en base a la cual Riemann se convirtió en miembro correspondiente de la Academia de Berlín en 1859. En ella decía, entre otras cosas, que reconocía las contribuciones de Riemann 'con gran placer'. Y siete años más tarde, medio año antes de la prematura muerte de Riemann, firmó la nominación para su elección como miembro no residente, citando el 'raro genio' de Riemann y su destacada posición en las matemáticas, afirmando que merecía la máxima distinción de la Academia. Weierstrass había conocido a Riemann personalmente durante la visita de éste a Berlín en 1859 y se dice que dijo más tarde que 'amaba a Riemann como a un hermano'. . . . Ya en el siglo pasado, pero incluso hasta el día de hoy, se han hecho varias veces intentos de comparar la importancia de Weierstrass y Riemann, y valorar cuál de ellos superaba al otro en profundidad, variedad y fecundidad de ideas, así como en vigencia, tanto en su momento como a largo plazo. Me parecen inútiles esas comparaciones" [15, p. 216].

"Entre todos los matemáticos, Weierstrass tuvo a Abel en la más alta estima. . . . : 'Feliz Abel: ¡ha logrado algo duradero!', 'Mientras exista la cultura, Abel siempre despertará la admiración de los expertos', 'En él lo habitual era ocupar en todas partes la posición más alta', 'Abel se distinguió por su visión omnicomprensiva, dirigida a lo más elevado, a lo ideal'. Estos y otros juicios similares nos muestran cuán grande era la admiración que Weierstrass sintió por el tempranamente desaparecido noruego. La escucha de la siguiente oda de Klopstock, que Weierstrass tenía transcrita en su ejemplar personal de las Obras de Abel en 1842, es decir, al comienzo de su carrera matemática, nos puede evocar cuánto trató de emularlo y en qué medida lo logró:

Reizvoll klinget des Ruhmes lockender Silberton
In das schlagende Herz,
und die Unsterblichkeit
Ist ein großer Gedanke,
Ist des Schweißes der Edlen wert.

(El atrayente sonido plateado de la gloria tintinea encantador // en el corazón palpitante, // y la inmortalidad // es un gran ideal, // merecedor del sudor de los caballeros)" [15, p. 218]. Es la decimotercera estrofa del poema *Der Zürchersee* (El lago de Zúrich) del poeta alemán Friedrich Gottlieb Klopstock (1724–1803).

195. La llegada de Sonja a Estocolmo (en barco, desde San Petersburgo) fue el 18 de noviembre de 1883; impartió la primera clase (en alemán) el 30 de enero de 1884, y en junio de ese año fue nombrada profesora por cinco años. El siguiente nombramiento académico de una mujer en Suecia no se produjo hasta 1938, más de cincuenta años después [26, 92–93].

Por otra parte, Klein escribía en 1926: "Después de este caso [el de Sophie Kowalewsky] singular, el estudio de las matemáticas por parte de las mujeres en Alemania se ha encaminado por caminos mucho más claros a partir del otoño de 1893, cuando el gobierno prusiano admitió estudiantes femeninas, inicialmente en Gotinga. La primera doctora en matemáticas por exámenes regulares fue Grace Chisholm, ahora Sra. Young, en 1895" [108, p. 295] (encontramos aquí cierta contradicción frente a lo citado en la nota 17). La matemática inglesa Grace Chisholm Young (1868–1944) efectivamente consiguió de forma "normal" el doctorado en Gotinga, donde antes había sido doctora Sophie Kowalewsky, con la disertación, supervisada por Klein, "Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie (Investigaciones algebraico-grupoteóricas sobre trigonometría esférica)". Ya se ha dicho en la nota 8 que la siguiente doctora en matemáticas después de Sophie Kowalewsky fue Elisa Litwinowa. La siguiente doctora en matemáticas en Alemania fue Emmy Noether (1882–1935), en Erlangen, con Paul Gordan en 1907.

196. Ver [7, p. 125–131; 157–176].

197. Riemann trabajó en física matemática, por ejemplo, en problemas de conducción de calor, problemas de potencial, ecuaciones hiperbólicas (problema de Riemann) y figuras de líquidos en rotación. Su estudiante Karl Hattendorf publicó sus lecciones sobre ecuaciones diferenciales parciales en física matemática después de su muerte: [194]. Esta obra conoció tres ediciones, la última en 1882. Más tarde fue muy apreciada, como libro de texto, la edición preparada por Heinrich Weber: [197]. Ver [166, p. 7–8].

Lejeune-Dirichlet probó la unicidad de solución del problema de frontera para una ecuación en derivadas parciales de segundo orden elíptica (problema de Dirichlet) e introdujo el *principio de Dirichlet* usado por Riemann en su teoría de las funciones abelianas, dicho principio era un método para resolver ese tipo de problemas reduciéndolos a problemas variacionales, mejorando un método que había sido introducido por Gauss. De sus contribuciones a la física matemática podemos citar la memoria [138], publicada a partir de su legado póstumo por Richard Dedekind, y las lecciones sobre la teoría del potencial: [139] (que tuvieron una segunda edición en 1887), a las que se refiere seguramente aquí Weierstrass, basadas en las conferencias del curso impartido en invierno de 1856–1857. Ver el artículo [87].

198. Es decir, "hay que cotejar aquí la carta del 6 de mayo de 1874 que ya he citado" (inserto en francés en el texto original en alemán). Ver la nota 51.

199. Vito Volterra (1860–1940) se lo comunicó por carta a Mittag-Leffler al poco de morir Sophie Kowalewsky. Ya hemos citado la memoria [123] de Sophie Kowalewsky en la nota 138. El episodio que Mittag-Leffler recuerda aquí, y que exponía de forma elegante en la pág. 386 de su obituario [150], no lo conoció Sofía en vida. Ver [7, p. 145–147]. En el mismo número de *Acta* se publicaba el artículo "corrector" [219] de Volterra.

200. Esta memoria de Weierstrass, [229], fue incorporada con permiso de su autor, entrecomillada, formando parte de la memoria [123] de Sophie Kowalewsky (págs. 254–279).

201. Ver también [54, p. 136].

202. Ver [7, p. 131–133]. Anne-Charlotte Leffler, en [136, VIII, p. 74–76], recoge el texto de una carta de Sonja a su amigo Gustav Hansemann (ver la nota 224), escrita desde Estocolmo en abril de 1885, que comienza así: "Querido sr. H. (Hansemann, en [128, p. 217–218]), me siento muy culpable de no haber contestado antes a su amistosa carta. Mi excusa está en la cantidad de ocupaciones diversas que me han absorbido el tiempo durante los últimos meses. Le voy a contar todo lo que he hecho: 1º Ante todo he tenido que pensar en mis tres clases semanales en *sueco*, donde leo y estudio la introducción algebraica a la teoría de las funciones abelianas, lecciones que en todas partes en Alemania pasan por ser las más difíciles. Tengo muchos oyentes y los he conservado casi todos, a excepción de dos o tres. 2º He escrito durante este tiempo una pequeña disertación matemática que cuento con enviársela inmediatamente a Weierstrass, pidiéndole que la haga publicar en el Journal de Borchardt. 3º Mano a mano, Mittag-Leffler y yo hemos emprendido un gran trabajo de matemáticas con el que nos prometemos mucho placer y éxito —esto es un secreto en este momento, no debería usted hablar con nadie de ello aún ..."

203. Ver [65, p. 67–68].

204. En su intento de resolver el problema de inversión para integrales hiperelípticas, Jacobi, en [97], demuestra primero (lo que sería un caso particular de lo que hoy se conoce como teorema de aproximación diofántica de Kronecker, [131]): *si functio proposita tribus periodis gaudeat, aut eas e duabus componi, aut eam habere indicem omni data quantitate minorem.* Quod cum absurdum sit, *functio tripliciter periodica non datur*: "si una función dada tiene tres períodos, o bien estos se componen a partir sólo de dos (el tercero es combinación lineal entera de los dos primeros), o bien la función debe tener un período menor (en módulo) que cualquier cantidad dada. Como esto es absurdo, no existe ninguna función triplemente periódica" [97, p. 61] (ver [82, nº 324]). Y a continuación ([97, p. 61–71]; cf. [253, p. 332–333, nota 13]) demuestra que, si la integral

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}},$$

donde $1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2$, definiese una función $x = \lambda(u)$, esta $\lambda(u)$ sería cuádruplemente periódica, lo que, por lo anteriormente probado, es absurdo. Esto se conoció como la *paradoja de Jacobi.* El propio Jacobi comenzaba a salvar su paradoja pasando a considerar funciones de dos variables complejas, abriendo el camino a exitosos trabajos, como el artículo póstumo [81] de Adolph Göpel (1812–1847) y el ya citado [200] de Rosenhain (el artículo premiado por la Academia de París en 1851). Pero la explicación definitiva la dio Riemann en [192] donde en particular demostraba que una integral abeliana, correspondiente a una curva algebraica de género p, aplica unívocamente la correspondiente superficie T en otra cierta superficie S de manera que la función inversa a la integral es $2p$-plemente periódica sobre S. Pero sus contemporáneos tuvieron dificultades para entender sus resultados, que requerían soltura en el uso de esa noción de *superficie de Riemann.* Tras la aparición de la memoria de Riemann, Weierstrass detuvo la publicación de su propia investigación sobre el tema. Felice Casorati, en varios artículos entre 1863 y 1866, defendió otro punto de vista, considerando que la anterior función denotada como $\lambda(u)$ es ∞-valuada. Ver [44].

Hemos consultado [145, p. 178–183, 220–227, 264–272] y, del mismo autor, [144, p. 17–27] (y todo el primer capítulo).

205. Hemos corregido la errata del texto original, que decía "los valores de x que corresponden a un mismo valor de u", gracias a la advertencia de Bölling en [253, p. 333, nota 14]. Dado x_0, si $x_0 = \lambda(u_0)$, también es, por la demostrable cuádruple periodicidad, $x_0 = \lambda(u_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4)$ para enteros m_i cualesquiera y números complejos ω_i fijos que, con mucha generalidad, hacen que el conjunto $\{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4\}_{m_i\in\mathbb{Z}}$ es denso en $\mathbb{C}$.

206. El conocido fundador de la teoría de conjuntos Georg Cantor (1845-1918), profesor en la universidad de Halle, fue alumno de Weierstrass. En el trabajo [39], que Weierstrass conoce (ver [253, p. 333, nota 15]), Cantor demostraba la numerabilidad del conjunto de los números reales algebraicos y la no numerabilidad de los transcendentes y, por consiguiente, del conjunto de los números reales.

207. Cf. [253, p. 333, nota 16]. Bölling aporta la invaluable referencia [248], que contiene una edición del curso del semestre de verano de 1886 sobre 'Aspectos seleccionados de la teoría de funciones' de Weierstrass, remitiendo en particular a p. 124–133.

208. Weierstrass se refiere aquí al artículo [72] (*Berl. Ber.* es la abreviatura de la revista *Sitzungsberichten der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*). Remitimos aquí al extenso comentario de Bölling [253, p. 333–334, nota 17]. Casorati se refiere también a este artículo de Fuchs en el suyo [44] que hemos citado en la nota 204.

209. Sobre el físico y matemático Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), ver el obituario [76] y el *In memoriam* [256] escrito por su colega el filósofo Wilhelm Windelband de la universidad de Estrasburgo, donde fue catedrático de 1871 a 1894. Cf. también, con menos detalles personales, [37]. Christoffel nunca se casó, como Weierstrass, y no dejó familia al morir.

210. Sobre el deterioro final de la relación entre Weierstrass y Kronecker, que había llegado a ser de amistad y discusión científica muy estrecha, ver p. 95–100 del capítulo (citado en la nota 57) de Bölling en [118]. Ver también la comunicación [25]. La cita literal que le transcribe aquí Weierstrass a su amiga de confianza Sonja pertenece a un fragmento de una carta de Kronecker a H. A. Schwarz, de 28 de diciembre de 1884, que se conserva en el *Nachlass Schwarz* de la Academia de Ciencias de Berlín. Schwarz le había comunicado ese pasaje a Weierstrass en una carta de 16 de marzo de 1885. Bölling añade que esas eran "palabras muy fuertes", y que a partir de ahí Weierstrass ya no podía pensar en mantener una cooperación fructuosa con Kronecker [26, p. 98]. También se produjo una ruptura entre Schwarz y Kronecker. Weierstrass llegó a estar completamente desanimado para seguir trabajando en la universidad. En 1885 estaba decidido a abandonar Alemania y mudarse a Suiza [15, p. 211]. Finalmente, la controversia entre Weierstrass y Kronecker llevó a una discordia permanente entre ellos. Su angustiante efecto sobre Weierstrass es evidente en sus cartas posteriores, como en estas a Sonja: ... "lamento profundamente que un hombre de tan eminente talento intelectual y de tan indiscutible mérito científico sea al mismo tiempo tan mezquino, vanidoso y envidioso" (26 de marzo de 1886). "El sr. Kronecker, que se hunde cada vez más en la adoración de sí mismo y en el desprecio supremo por el llamado Análisis y por sus representantes ... " (22 de mayo de 1888). En esta, a Mittag–Leffler [15, p. 213]: "La ruptura entre nosotros se ha completado recientemente" (27 de junio de 1888). O en esta, a su hermano Peter Weierstrass (1820–1904): "Como había sido previsto durante años, tuve que cortar todo trato con Kronecker; su arrogancia era insoportable y su falta de fiabilidad en varias ocasiones quedó expuesta escandalosamente" (6 de octubre de 1890).

A finales del siglo pasado Gert Schubring recuperó en Berlín, en un fondo hasta ahí desconocido del legado de Weierstrass, 43 cartas de Kronecker a Weierstrass, fechadas entre 1858 y pocos meses antes de la muerte de Kronecker en 1891, de especial importancia para la historia de las matemáticas, que muestran la evolución de sus discusiones (ver [206, p. 425–426]). Hemos llegado a saber de Gert Schubring y su trabajo gracias al trabajo [146] de Mª Rosa Massa.

Por otro lado y "en su descargo", Kronecker fue, como recuerda André Weil en [254, p. 3–4], uno de los raros reivindicadores, en toda la literatura matemática del siglo XIX, de la memoria [66] de Eisenstein (citada en la nota 192), aunque fuera al final de su vida. Las memorias tardías de Kronecker sobre las funciones elípticas [130] suponen una continuación natural de las ideas,"tan buenas como perdidas", del tempranamente desaparecido Eisenstein.

211. Mittag-Leffler recoge aquí, en el alemán original, la palabra (femenina) del texto anterior que nosotros hemos traducido por "resentimiento"; podría ser también "susceptibilidad".

212. Que se expone en las secciones 4 a 6, "Sobre la noción de la integral definida, y sobre la extensión en la que es aplicable", de la memoria [191] (en francés, [195, p. 239–246]) de Riemann, citada ya en la nota 48. Habría que citar, como antecedente, la memoria [137] de Dirichlet y, como consecuentes, las memorias [18] de du Bois-Reymond y [96] de Hölder, de las que Weierstrass acusaba lectura en su carta [250, p. 217] a du Bois.

Escribe Bölling:"Para extender su famoso teorema de aproximación a funciones discontinuas, Weierstrass necesitaba una extensión del concepto de integral definida para funciones acotadas" [26, p. 78]. De todas maneras, Weierstrass no logró esa pretendida mejora del concepto de integral, ni tampoco llegó a publicar nada sobre una posible extensión del teorema de aproximación a funciones discontinuas (que anunciaba en [243, p. 18]; [244, p. 127]). Ver la discusión de Bölling en [26, p. 78–80], así como el capítulo [213] del mismo libro, a cargo de Reinhard Siegmund-Schultze. En el detallado artículo [212] de este autor se encuentra una información más completa sobre el trasfondo de estas investigaciones de Weierstrass y, en particular, para la cuestión de la extensión del teorema de aproximación a funciones discontinuas remite (*ibid.*, p. 305) a los apuntes del curso de 1886, [248, p. 109–112] en nuestras referencias.

213. Weierstrass remite a [41, p. 388–390], la publicación del extracto de una carta de Cantor a Mittag-Leffler. A su vez Cantor remitía allí, para algún detalle concreto, a su trabajo [40] publicado en *Acta* el año anterior. Cantor había comenzado a desarrollar una teoría del contenido ("contenido exterior" en terminología actual) de conjuntos infinitos y acotados de puntos [26, p. 79].

214. En la memoria [243] (que Mittag-Leffler cita a continuación y que pone trasfondo al texto de esta carta), publicada en julio de 1885, Weierstrass demuestra, entre otros, los siguientes resultados (cf. [212, p. 300]):

- Si la función (real, de variable real, univaluada) $f(x)$ es continua en un intervalo finito y $g > 0$, se puede encontrar (de infinitas maneras) un polinomio $G(x)$ tal que $|f(x) - G(x)| < g$ para todo x del intervalo (teorema (B): [243, p. 5]; [244, p. 109]).

- Toda función de la naturaleza considerada puede representarse (de infinitas maneras) por una serie de polinomios absoluta y uniformemente convergente en el intervalo (teorema (C): [243, p. 6–7]; [244, p. 111]).
- Sea $f(x)$ una función de la naturaleza considerada y periódica. Si $g > 0$, se puede encontrar (de infinitas maneras) una serie de Fourier finita (es decir, un polinomio trigonométrico) $F(x)$ tal que $|f(x) - F(x)| < g$ para todo x (teorema (D): [243, p. 22]; [244, p. 132]).
- Toda función de la naturaleza considerada y periódica de período $2c$ puede representarse en la forma de una serie cuyos términos son todos sumas de Fourier finitas de período $2c$. La serie es absolutamente convergente para todo valor de x y uniformemente convergente en todo intervalo finito (teorema (E): [243, p. 22]; [244, p. 132]).

El método general de prueba de Weierstrass es el denominado *método de las integrales singulares* (cf. [212, p. 304]), en el que $f(x)$ se representa, adelantando la técnica moderna de las *aproximaciones de la identidad*, como el límite de ciertas integrales impropias $F(x, k)$ que tienen la forma de un *producto de convolución*, dependientes de un parámetro real $k > 0$ y desarrollables en distintas formas de series de funciones de x (potencias, polinomios, polinomios esféricos, polinomios trigonométricos):

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

donde $\psi(u)$ es una función infinitamente derivable, par, positiva, integrable entre $-\infty$ y $+\infty$ de modo que $\int_0^\infty \psi(u)\, du = \omega$, y por lo demás arbitraria.

215. Du Bois-Reymond había probado en 1873, en [16], la existencia de funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en algún punto. En una carta de 15 de diciembre de 1874 (cf. [212, p. 308, nota 4.]), Weierstrass llama la atención de du Bois-Reymond sobre el trabajo [39], del mismo año, donde Cantor ha probado la numerabilidad de los números algebraicos, lo que parece abrir la posibilidad de, entonces, obtener funciones continuas con serie de Fourier divergente en cualquier valor racional o algebraico de la variable. Y, en efecto, en las memorias [19], [20] y [21] publicadas en 1876 (cf. [64, p. 169]) du Bois-Reymond llegó a probar que la serie de Fourier de una función continua (incluso infinitamente derivable) en un intervalo podía ser divergente en un conjunto de puntos denso en el intervalo.

216. Cf. el ejemplo que da Weierstrass, “para aclarar lo que precede”, después de su teorema (E): [243, p. 22–27]; [244, p. 132–138] (estas páginas merecen un estudio más detenido). Por otra parte, la oscilación en un punto de discontinuidad de las series de Fourier había sido analizada ya por du Bois-Reymond en 1874, [17, p. 254], que se quedó sólo a un paso de identificar (cf. [93, p. 147]) el que hoy se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

217. La memoria ya citada, en dos partes, [243], que se publicó en francés al año siguiente: [244]. En la edición de *Mathematische Werke* III se añadió una sección final ([243, p. 27–37]) sobre la generalización de algunos de los resultados para funciones de varias variables reales.

218. Posiblemente son las dos partes de la publicación que acaba de citar Mittag-Leffler.

219. La Academia había propuesto en la sesión del lunes 27 de diciembre de 1886 (*C. R.* **103** (1886) 1395), como tema del premio Bordin a otorgar en 1888, la cuestión siguiente: “*Perfeccionar en un punto importante la teoría del movimiento de un cuerpo sólido*”. El pequeño discurso y el acta de otorgamiento del premio el último lunes de 1888, “por unanimidad, a la Memoria inscrita bajo el nº 2 y llevando el lema: *Dis ce que tu sais, fais ce que dois, advienne que pourra* (Di lo que sabes, haz lo que debes y que ocurra lo que sea)”, firmada por “M$^{\text{me}}$ Sophie de Kowalewsky” como se supo una vez abierta la plica sellada, se pueden leer en *C. R.* **107** (1888), 1035–1036, 1042. Sophie Kowalewsky recibió también un premio de la Academia Sueca de Ciencias en 1889 por el artículo [125], un desarrollo que continuaba la memoria premiada, y por la publicación [126] de la memoria por la Academia de París, con el mismo contenido esencialmente que en *Acta* (cf. [54, p. 218]). De hecho, y aunque siguió estudiando este tema (cf. [7, p. 105], [114, p. 246]), estos fueron los últimos trabajos que su autora llegó a ver publicados en vida. Uno anterior a estos, [127] (cf. [150, p. 389], [54, p. 165–167], [148, p. 95]), fue publicado ya póstumamente por Mittag-Leffler. No cabe duda de que la extensa memoria premiada es una auténtica piedra preciosa de la investigación matemática. El “trompo asimétrico de Kovalevskaya”, ese nuevo tercer caso (después de los de Euler y Lagrange) de integrabilidad exacta (en este caso, en términos de funciones hiperelípticas definidas por funciones ϑ de dos variables) de las ecuaciones del movimiento del sólido rígido grave con un punto fijo, quizás hoy estaría todavía por descubrir, o tal vez por integrar, si no hubiera existido Sophie Kowalewsky.

    Para una detallada información de las matemáticas de [124], ver [7, p. 89–108] (su autora, Michèle Audin, es especialista en sistemas integrables y geometría simpléctica); [54, p. 114–115, 137–164]; [115, p. 163–169, 323]; [114, p. 231–235]; [88, p. 153–154] y, en castellano, [148, p. 90–95] y los estudios [38], [170] y [68].

220. “a pesar del mal tiempo” (en francés dentro del texto original en alemán.)

221. Ver la nota 69.

222. Johannes Knoblauch (1855–1915). En 1882 se doctoró con la disertación “Ueber die allgemeine Wellenfläche (Sobre la superficie de ondas general)”, dirigida por Weierstrass. Como ya hemos dicho anteriormente, fue coeditor, junto con Georg Hettner, del volumen IV de [249].

223. Kurt Hensel (1861–1941). Se doctoró en 1884 con la disertación, dirigida por Kronecker: “Arithmetische Untersuchungen über Diskriminaten und ihre außerwesentlichen Teiler (Investigaciones aritméticas sobre discriminantes y sus divisores no esenciales)”, y posteriormente fue el editor de las Obras de su maestro, [132]. Hensel pasó a emérito, en la Universidad de Marburgo, en 1930. Debido a su ascendencia judía se vio obligado a jubilarse definitivamente en 1935. Hasta su muerte abrió su casa de Marburgo a los ciudadanos judíos perseguidos. Murió de un ataque cardíaco el 1 de junio de 1941.

224. Gustav Hansemann (1829–1902), físico y economista, colaboró con Kirchhoff, que fue probablemente profesor suyo, y se encargó hasta finales del s. XIX de las cuestiones financieras de la Sociedad berlinesa de Física. La identificación de Hansemann

como el “sr. H”, corresponsal de Sophie Kowalewsky en la carta mencionada en la nota 202, se debe a una comparación historiográfica concluyente. En el artículo [36], Marie von Bunsen recogía una serie de cartas de Sonja a Gustav Hansemann de entre los años 1884 a 1890; por otra parte, el fondo documental del Instituto Mittag-Leffler de Estocolmo conserva seis cartas de Hansemann a Sonja de los años 1885 y 1886. Ver [115, p. 205–207]. Cf. también [56, p. 76].

225. Fue Kronecker, que entonces era editor del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, quien se encargó de informar a sus lectores, el 20 de febrero de 1891 en [133], de que Sophie Kowalewsky había fallecido de pleuroneumonía en Estocolmo el martes 10 de febrero a las 4 de la mañana. Escribió:

. . . “Así, a los 40 años, fue arrebatada demasiado pronto de la ciencia que cultivó con excelente éxito y del nutrido círculo de amigos que la querían y admiraban. *Sophie von Kowalevsky* (según sus últimas tarjetas de visita *“Sonja Kovalevsky”*) combinó, con una diligencia concienzuda e incansable, un talento extraordinario para la especulación matemática general con la técnica necesaria para la ejecución de investigaciones especiales, manteniendo siempre su mente abierta a otros intereses intelectuales a pesar de la actividad profesional más intensa . . . La historia de las matemáticas tendrá que informar sobre ella como una de las presencias más singulares entre las extremadamente raras mujeres investigadoras. Su recuerdo vivirá en el mundo matemático a través de las valiosas, aunque pocas en número, obras que publicó, y el recuerdo de su personalidad brillante y llena de encanto vivirá en los corazones de todos los que han tenido la suerte de conocerla”.

Cooke, en la reseña citada en la anterior nota 224 recomienda [110] “a los lectores que” busquen una biografía de Sophie Kowalewsky y “prefieran la verdad prosaica a la ficción poética”. Su autora, Ann Hibner Koblitz, es directora del *Fondo Kovalevskaia*, que apoya a las mujeres en la ciencia en los países en desarrollo. A nosotros nos ha resultado muy interesante y provechoso leer, de ella, el artículo [112]. También en la primera sección de [100], titulada *Kovalevskaya - her life and work*, Koblitz escribe [111] y Cooke escribe [55]. De Roger Cooke son más recientes los artículos [58] y [59]. Una referencia que hemos conocido y leido a última hora y queremos todavía añadir aquí es el pequeño libro [158], una contribución original en castellano a la biografía de Sophie Kowalewsky (“Sonja, Sofja, Sonya, Sophie, Sophia, Sonia, Sofya, son algunos de los nombres que hacen referencia a esta mujer excepcional como matemática, como escritora y como persona . . . ” *ibid.*, p. 12) que escriben otras dos estudiosas mujeres matemáticas, María Molero y Adela Salvador.

Del final de Weierstrass, K.-R. Biermann escribe: “Durante los últimos tres años de su vida, Weierstrass estuvo confinado a una silla de ruedas y casi completamente inmovilizado. Si su salud le permitía salir del apartamento, tenía que bajar las escaleras en brazos para poder dar un pequeño paseo por el zoológico en el coche. Un año antes de su muerte también murió su hermana Clara, que había estado al frente de su casa durante cuatro décadas junto con su segunda hermana Elise, que le sobreviviría un año. . . . A principios de 1897 contrajo una gripe que progresó a neumonía. La muerte puso fin a su sufrimiento el 19 de febrero de 1897. Su lápida, erigida por su alumno Johannes Knoblauch, el más próximo a él en los últimos años de su vida y que consagró toda su energía a la publicación de las obras del venerado maestro, ha sobrevivido ilesa al paso del tiempo” [15, p. 217–218]. En la sesión del lunes 1 de marzo de 1897 el Secretario perpetuo anuncia a la Academia de Ciencias de París la pérdida que acaba de sufrir en la persona de su socio extranjero Weierstrass y se publica (ver [146, p. 19–20]) un escrito de homenaje de Hermite en el número correspondiente de los *Comptes Rendus*: “El sabio ilustre, cuya pérdida lamenta la Academia, comparte con Riemann y Cauchy la gloria de haber descubierto unos principios fundamentales que han llevado al Análisis por nuevas vías y han venido a ser el origen de los grandes progresos de esta ciencia en nuestra época. . . . La vida de nuestro ilustre Colega ha estado por completo consagrada a la Ciencia, a la que ha servido con absoluta dedicación. Ha sido larga, y ha estado colmada de honores; . . . [su memoria] vivirá tan largo tiempo como haya espíritus ávidos de verdades que consagren sus esfuerzos a las investigaciones del Análisis, al progreso de la ciencia del Cálculo” [91, p. 429–433].

Por su parte, Mittag-Leffler terminaba su comunicación al Congreso Internacional celebrado en París del 6 al 12 de agosto de 1900 con las siguientes palabras [151, p. 153]:

“Señoras y Señores,

Permítanme concluir aquí esta breve revisión de las cartas de Weierstrass a Sonja. Como habrán comprendido perfectamente, la tarea que me he propuesto no ha sido ilustrar con colores propios y según mi concepción personal las relaciones de Weierstrass y de Sophie Kowalevski. He dejado que Weierstrass hablara él mismo. Y nos ha entretenido, hablando no sólo de su relación personal con Sonja, sino también, al mismo tiempo, de toda una serie de cuestiones de la mayor transcendencia científica. En este último día de las sesiones del segundo Congreso internacional de Matemáticas, que ha reunido tan gran número de matemáticos, he pensado que quizás hubiera interés por escuchar las palabras de un hombre que somos unánimes, creo yo, en reconocer como el más grande, junto con Riemann, de los matemáticos del medio siglo que se nos acaba de ir.”

Referencias

[1] N. H. Abel (B. M. Holmboe ed.), *Œuvres complètes de N. H. Abel, mathématicien, avec des notes et développements, rédigées par ordre du roi*, 2 vols., Gröndahl, Christiania, 1839. 56

[2] N. H. Abel (S. Lie y L. Sylow eds.), *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, 2 vols., Grøndahl & Søn, Christiania, 1881. 56

[3] N. I. Akhiezer, *Elements of the theory of Elliptic Functions*, Translations of Mathematical Monographs Volume 79, American Mathematical Society, Providence - Rhode Island, 1990. 64

[4] P. Appell, Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0$ et la théorie de la chaleur, *Journ. de Math.* (4) **8** (1892), 187–216. 53

[5] P. Appell, Notice sur les travaux scientifiques, *Acta Math.* **45** (1925), 161–285. 65

[6] C. Arenal, *La emancipación de la mujer en España*, Júcar, Madrid, 1973. 61

[7] M. Audin, *Remembering Sofia Kovalevskaya*, Springer, Berlin, 2011 (Translation from the French language edition: *Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya*, Calvage et Mounet, France, 2008). 48, 51, 52, 54, 61, 62, 67, 69, 71

[8] A. Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge Mathematical Library (2nd ed.), Cambridge University Press, 1990. 67

[9] A. J. C. Barré de Saint-Venant, Sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, *C. R.* **70** (1870), 473–480. En *Liouville J.* (2) **16** (1871), 308–316 y 373–382 (complèment). 56

[10] A. J. C. Barré de Saint-Venant, *Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch*, Dunod, Paris, 1883. 56

[11] H. G. W. Begehr, H. Koch, J. Kramer, N. Schappacher y E.-J. Thiele (eds.), *Mathematics in Berlin*, Springer Basel AG, 1998. 73, 74, 79

[12] H. Begehr y H. Lenz, Jacob Steiner and Synthetic Geometry, [11], 49–54. 62

[13] K.-R. Biermann, Gotthold Eisenstein. Die wichtigsten Daten seines Lebens und Wirkens, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* **214/215** (1963), 19–30. 67

[14] K.-R. Biermann, Die Berufung von Weierstraß nach Berlin, *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815–1965*, Herausgegeben von Heinrich Behnke und Klaus Kopfermann, 41-52, Wissenschaftliche Abhandlungen der Arbeitgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Band 33, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1966. 59

[15] K.-R. Biermann, Karl Weierstraß. Ausgewählte Aspekte seiner Biographie, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* **223** (1966), 191–220. 51, 52, 53, 55, 57, 59, 60, 63, 64, 68, 70, 72

[16] P. du Bois-Reymond, Ueber die Fourier'schen Reihen, *Gött. Nachr.* 1873 (1873), 571–582. 71

[17] P. du Bois-Reymond, Über die sprungweisen Werthänderungen analytischer Functionen, *Math. Ann.* **7** (1874), 241–261. 71

[18] P. du Bois-Reymond, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen, *Borchardt J.* **79** (1874), 21–37. 70

[19] P. du Bois-Reymond, Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe $f(x) = \sum(a_p \cos px + b_p \sin px)$ die Werthe $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\, f(\alpha)$, $a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\, f(\alpha)\cos p\alpha$, $b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\, f(\alpha)\sin p\alpha$ haben, jedesmal, wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind (1^{te} Abth.), *München Akad. Abhandl.* **12** (1876), 117–168. 71

[20] P. du Bois-Reymond, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln, (2^{te} Abth.), *München Akad. Abhandl.* **12** (1876), 1–102. 71

[21] P. du Bois-Reymond, Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln (Abh. der K. Bayer. Akademie der W. II. Cl. XII. Bd., II. Abth.), *Clebsch Ann.* **10** (1876), 431–445. 71

[22] R. Bölling, Deine Sonia: A Reading from a Burned Letter, *The Mathematical Intelligencer* **14** 3 (1992), 24–30. 51

[23] R. Bölling, Zum ersten Mal: Blick in einen Brief Kowalewskajas an Weierstrass, *Historia Mathematica* **20** (1993), 126–150. 51

[24] R. Bölling, Weierstrass and some members of his circle: Kovalevskaia, Fuchs, Schwarz, Schottky, [11], 71–82. 59

[25] R. Bölling, Karl Weierstraß and some basic notions of the calculus (18 p.). Comunicación a *The second W. Killing and K. Weierstraß Colloquium*, Braniewo (Poland), 24-26 March 2010. 70

[26] R. Bölling, Zur Biographie von Karl Weierstraß und zu einigen Aspekten seiner Mathematik, [118], Capítulo 2, 53–122. 50, 51, 54, 68, 70

[27] O. Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations*, The Decennial Publications 2^{nd} Series, Vol. XIV, The University of Chicago Press, Univ. Chicago Press, Chicago, 1904. 51

[28] C. W. Borchardt, Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel, *Borchardt's Journal* **58** (1861), 127–134; [31], 119–129. 62

[29] C. W. Borchardt, Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen, *Berl. Monatsber.* 1876 (1876), 611–621; [31], 327–338. Traducida al francés: Sur la moyenne arithmétique-géométrique de quatre éléments, *Darboux Bull.* (2) I (1877), 337–348. 62

[30] C. W. Borchardt, Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen, *Math. Abhand. der Berliner Akademie*, 1878, 33–96; [31], 373–431. 62

[31] C. W. Borchardt (G. Hettner ed.), *C. W. Borchardt's Gesammelte Werke*, Auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Mit dem Bildnisse Borchardt's, G. Reimer, Berlin, 1888. 61, 73

[32] U. Bottazzini, The influence of Weierstrass's analytical methods in Italy, *Amphora. Festschrift for H. Wussing zu seinem 65*, 67–90, Demidov, S. S. et al. (eds.), Birkhäuser, Basel, 1992. 62

[33] U. Bottazzini y J. Gray, *Hidden Harmony – Geometric Fantasies. The Rise of Complex Function Theory*, Springer, New York-Heidelberg, 2013. 55, 56, 62, 67

[34] U. Bottazzini, Building analytic function theory: Weierstraß's approach in lecture courses and papers, [118], 165–194. 53

[35] Ch. A. Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, Gauthier-Villars, Paris, 1879. 63

[36] M. von Bunsen, Sonja Kowalevsky: Eine biographische Skizze, *Westermanns Illustrierte Deutsche Monatshefte* N.82 (Mai 1897), 218–232. 72

[37] P. L. Butzer, An Outline of the Life and Work of E. B. Christoffel, *Historia Mathematica* **8** (1981), 243–276. 70

[38] M. Buys, El trompo de Kovalevskaia, [202], capítulo III, 57–71. 71

[39] G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, *Borchardt J.* **77** (1874), 258–263. 70, 71

[40] G. Cantor, Sur les ensembles infinis et linéaires de points, *Acta Math.* **2** (1883), 349–380. 70

[41] G. Cantor, De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur, *Acta Math.* **4** (1884), 381–392. 70

[42] F. Casorati, Sull'equazione fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali lineari, *Rend. Ist. Lomb.* (2) XIII, (1880), 176–182. 51

[43] F. Casorati, Sulle equazioni differenziali lineari, *Rom. Acc. L.* (3) VI, (1882), 121–124. 51

[44] F. Casorati, Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes, *Acta Math.*,**8** (1886), 345–359. 69, 70

[45] A. L. Cauchy, *Exercises d'analyse et de physique mathématique*, 4 vols., Bachelier, Paris, 1840–1847. 55

[46] A. L. Cauchy, *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, série 1, tome VII, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1892. 55, 59

[47] K. Chandrasekharan, *Elliptic Functions*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 281. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985. 64, 65

[48] P. L. Chebyshev, Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré, *Liouville J.* 2$^{\text{e}}$ série, **II** (1857) 1–42, extraída de *Mémoires de l'Académie Impérial de St.-Pétersbourg* 6$^{\text{e}}$ série, **6** (1857), 208–282; [50], 179–200. 56, 58

[49] P. L. Chebyshev, Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$, *Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg* **3** (1861), 1–12; [50], 515–530. 56, 57, 58

[50] P. L. Chebyshev *Œuvres de P. L. Tchebychef*, publiées par les soins de MM. A. Markoff et N. Sonin. Tome I, St.-Pétersbourg, 1899. 74

[51] A. Clebsch, *Theorie der Elasticität fester Körper*, B. G. Teubner, Leipzig, 1862. 56

[52] A. Clebsch y P. Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1866. 52

[53] E. Confalonieri, *Beiträge zur Geschichte der mathematischen Werke von Karl Weierstrass*, Teil IV: Das grüne Buch von Weierstrass (Copyright 2018. U.K. Copyright Office Registration No. 284725989). 57

[54] R. Cooke, *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1984. 51, 54, 62, 63, 67, 69, 71

[55] R. Cooke, Sonya Kovalevskaya's place in nineteenth-century mathematics, [100], 17–52. 72

[56] R. Cooke, Review of [101], *Historia Mathematica* **13** (1986), 74–77. 72

[57] R. Cooke, Review of [253], *Historia Mathematica* **22** (1995), 73–77. 51

[58] R. Cooke, The life of S. V. Kovalevskaya, *The Kowalevski property* (V. B. Kuznetsov ed.), CRM Proc. Lecture Notes vol. 32, 1–19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. 72

[59] R. Cooke, Kovalevskaya's mathematical work, *The Kowalevski property* (V. B. Kuznetsov ed.), CRM Proc. Lecture Notes vol. 32, 21–40, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. 72

[60] D. A. Cox, The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss, *L'Enseignement Mathématique* **30** (1984), 275–330. 62

[61] M. R. S. Creese y Th. M. Creese, *Ladies in the Laboratory IV: Imperial Russian's Women in Science, 1800–1900: a survey of their contributions*, Rowman & Littlefield, London, 2015. 61

[62] G. Darboux, Sur l'existence de l'intégrale dans les equations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de fonctions et de variables indépendantes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **80** (1875), 101–104; Sur l'existence de l'intégrale dans les equations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, *ibid.*, 317–319. 58

[63] F. Diacu, The Solution of the n-body Problem, *The Mathematical Intelligencer* **18** 3 (1996), 66–70. 55

[64] P. Dugac, Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences* **10** (1973), 41–176. 50, 71

[65] H. M. Edwards, Kummer and Kronecker, [11], 61–70. 69

[66] G. M. Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen, *Crelle's J.* **30** (1847), 185–214. 67, 70

[67] J. Elstrodt, Die prägenden Jahre im Leben von Karl Weierstraß, [118], Capítulo 1, 11–52. 52, 54, 55

[68] E. Fontich, Kovalevskaia y el tiempo complejo en mecánica, [202], V, 99–121. 71

[69] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, F. Didot, Paris, 1822. Reimp. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1988. 53

[70] L. Fuchs, Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, *Borchardt J.* **83** (1877), 13–37. 65

[71] L. Fuchs, Über eine Klasse von Functionen mehrer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen, *Borchardt J.* **89** (1880), 151–169. 65

[72] L. Fuchs, Ueber den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln, *Berl. Ber.* 1885 (1885), 5–12 (= *Gesammelte Mathematische Werke* Band II, L. Schlesinger (ed.), 381–390, Mayer & Müller, Berlin, 1906). 70

[73] F. J. Gall y J. G. Spurzheim, *Anatomie et physiologie du système nerveux en général et du cerveau en particulier avec des observations sur la possibilité de reconnaître plusieurs dispositions intellectuelles et morales de l'homme et des animaux par la configuration de leur têtes*, 4 vols., F. Schoell, Paris, 1810. 61

[74] C. F. Gauss, *Werke Band II. Höhere Arithmetik*, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen, 1863. 53

[75] C. F. Gauss, Handschriftliche Bemerkung zu der Abhandlung "Theoria attractionis corporum spheroidicorum ellipticorum homogeneorum", *Werke Band V. Mathematische Physik*, 285–286, Göttingen, 1867. 56

[76] C. F. Geiser y L. Maurer, Elwin Bruno Christoffel, *Mathematische Annalen* **54** (1901), 329–341. 70

[77] J. W. Goethe, *La bastarda*, trad. de Rafael Cansinos-Assens, *Obras completas de J. W. Goethe* I, 683–731, Santillana, 2003 (reimp. de Aguilar, 1957). 59

[78] J. W. Goethe, *La fille naturelle*, trad. de Jacques Porchat, *Théâtre de Goethe* II, 378–465, Hachette et Cie, Paris, 1860. 59

[79] J. W. Goethe, *Ifigenia en Táuride*, trad. de Rafael Cansinos-Assens, *Obras completas de J. W. Goethe* I, 733–775, Santillana, 2003 (reimp. de Aguilar, 1957). 68

[80] A. Gómez Rodríguez, Ciencia y valores en los estudios del cerebro, *Arbor: Ciencia, pensamiento y cultura*, **181** núm. 716 (2005), 479–492. 61

[81] A. Göpel, Theoriæ transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio, *J. Reine Angew. Math.* **35** (1847), 277–312. 69

[82] É. Goursat, *Cours d'analyse mathématique. Tome II*, Gauthier-Villars, Paris, 1905. 56, 57, 65, 69

[83] T. Gowers, J. Barrow-Green e I. Leader (eds.), *The Princeton companion to mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008. 75, 78

[84] J. Gray, Carl Friedrich Gauss, [83], 755–757. 59

[85] M. Hamburger, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, *J. für Math.* **123** (1901), 343–346. 51

[86] W. R. Hamilton, *Elements of quaternions*, Longmans, Green & Co., London, 1866. 55

[87] U. Hashagen, Peter Gustav Lejeune Dirichlet, [83], 764–765. 59, 69

[88] W. B. Heard, *Rigid Body Mechanics. Mathematics, Physics and Applications*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2006. 71

[89] Ch. Hermite, Note sur la théorie des fonctions elliptiques, [134], 365–491. 66

[90] Ch. Hermite, Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874–1883), *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1^{re} série* **5** (1984), 49–285. Disponible en: http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1984__5__49_0 66

[91] Ch. Hermite, Notice sur Weierstrass, *C. R. Acad. Sci. Paris* **124** (1897), 430–433. 72

[92] G. Hettner, *Ueber die Reduction der Integrale einer besonderen Classe von algebraischen Differentialen auf die hyperelliptischen Integrale*, 40 pp., G. Schade, Berlin, 1877. 53, 60

[93] E. Hewitt y R. E. Hewitt, The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis, *Archive for History of Exact Sciences* **21** (2) (1979), 129–160. 71

[94] D. Hilbert, Zum Gedächtnis an Karl Weierstrass, *Nachrichten v. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen* **1897**, 60–69 (= *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, 330–338, Springer, Berlin, 1935, 2. Aufl. 1970). 52

[95] D. Hilbert, Über das Dirichletsche Prinzip, *Mathem. Annalen* **59** (1904), 161–186 (= *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, 15–37, Springer, Berlin, 1935, 2. Aufl. 1970). 60

[96] O. Hölder, Über eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Funktion durch die Fouriersche Reihe, *Berl. Ber.* 1885 (1885), 419–434. 70

[97] C. G. J. Jacobi, De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur, *Journal reine angew. Math.* **13** (1835), 55–78. 69

[98] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, 7 vols., G. Reimer, Berlin, 1881–1891. 64

[99] M. del C. Jorge y Jorge, El andar matemático de Sofía Kovalevskaia, [202], II, 15–55. 53

[100] L. Keen (ed.), *The legacy of Sonya Kovalevskaya*, Contemporary Mathematics, vol. 64, Amer. Math. Soc., 1987, Proceedings of a Symposium sponsored by the Association for women in mathematics and the Mary Ingraham Bunting Institute held October 25–28, 1985. 72, 74, 76

[101] D. H. KENNEDY, *Little sparrow, a portrait of Sophia Kowalevsky*, Ohio Univ. Press, Athens, 1983. 51, 61, 74

[102] L. KIEPERT, Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen, *Borchardt J.* **76** (1873), 21–33. 58

[103] W. KILLING, Ueber zwei Raumformen mit constanter Krümmung, *Borchardt J.* **86** (1878), 72–83. 51

[104] W. KILLING, *Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Teubner, Leipzig, 1885. 51

[105] W. KILLING, Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen, *Kronecker J.* **98** (1885), 1–49. 51

[106] F. KLEIN, Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich, *Klein Ann.* **19** (1881), 565–568; **20** (1882), 49–52. 65

[107] F. KLEIN, *Über Riemann's Theorie der Algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882. 65

[108] F. KLEIN, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* Teil I, Für den Druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Band 24, J. Springer, Berlin, 1926. Ausgabe in einem Band, III–XIII, 1–385, Reprint Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979. 60, 69

[109] A. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1900. 51

[110] A. H. KOBLITZ, *A convergence of lives. Sofia Kovalevskaia: scientist, writer, revolutionary*, Birkhäuser, Boston, 1983. 72

[111] A. H. KOBLITZ, Sofia Kovalevskaia – a biographical sketch, [100], 3–16. 72

[112] A. H. KOBLITZ, Changing views of Sofia Kovalevskaia, [100], 53–76. 72

[113] P. YA. KOCHINA, *Briefe von Karl Weierstrass an Sofie Kowalewskaja, 1871–1891*, Nauka, Moscow, 1973 (en ruso y alemán). 51

[114] P. YA. POLUBARINOVA-KOCHINA, On the Scientific Work of Sofya Kovalevskaya (translated from the Russian by Neal Koblitz), *Sofya Kovalevskaya. A Russian Childhood* (translated, edited and introduced by Beatrice Stillman), 231–250, Springer Science+Business Media, New York, 1978. 54, 71

[115] P. YA. KOCHINA, *Love and Mathematics: Sofya Kovalevskaya*, Mir Publishers, Moscow, 1985. 71, 72

[116] L. KOENIGSBERGER, *Mein Leben* (Heidelberg, 1919). Digitale Ausgabe erstellt von Gabriele Dörflinger, Heidelberg Texte zur Mathematikgeschichte, Universitätsbibliothek, Heidelberg, 2015. 60

[117] A. N. KOLMOGOROV Y A. P. YUSHKEVICH (eds.), *Mathematics of the 19th Century: Geometry, Analytic Function Theory* (translated from the Russian by Roger Cooke), Birkhäuser, Basel, 1996. 77

[118] W. KÖNIG Y J. SPREKELS (eds.), *Karl Weierstraß (1815-1897) Aspekte seines Lebens und Werkes - Aspects of his Life and Work*, Springer Spektrum, 2016. 70, 73, 74, 75, 79

[119] S. KOWALEVSKY, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der Philosophischen Facultät zu Göttingen von Sophie v. Kowalevsky (geb. v. Corvin-Krukovskoy), Berlin, Druck von Georg Reimer, 1874. En *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **80** (1875), 1–32. 53, 54

[120] S. KOWALEVSKY, Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe, *Astronomische Nachrichten* **111** (1885), 37–48. 54, 56

[121] S. KOWALEVSKY, Über die Reduction einer bestimmten Klasse abel'scher Integrale dritten Ranges auf elliptische Integrale, *Acta Mathematica* **4** (1884), 393–414. 54, 60

[122] S. KOWALEVSKY, Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé, *C. R. Acad. Sci. Paris* **98** (1884), 356–357. 62

[123] S. KOWALEVSKY, Über die Brechung des Lichtes in christallinischen Mitteln, *Acta Mathematica* **6** (1885), 249–304. 62, 69

[124] S. KOWALEVSKY, Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Math.* **12** (1889), 177–232. 48, 55, 71

[125] S. KOWALEVSKY, Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Math.* **14** (1890), 81–93. 71

[126] S. KOWALEVSKY, Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'éffectue à l'aide de fonctions ultraélliptiques du temps, *Mémoires Presentées par Divers Savants a l'académie des sciences de l'institut national de France* **31** (1890), 1–62. 71

[127] S. KOWALEVSKY, Sur un théorème de M. Bruns, *Acta Math.* **15** (1891), 45–52. 71

[128] S. KOWALEVSKY, *Sofia Kovalevskaïa (1890): Souvenirs d'enfance, suivis d'une biographie par Mme. A. Ch. Leffler* (traductor anónimo), Librairie Hachette et Cie, Paris, 1895. Disponible en `http://bibliotheque-russe-et-slave.com/Livres`. Una edición reciente de esta obra, con capítulos inéditos, prefacio y notas de Michèle Audin, que se puede leer en línea: Spartacus Classique, Vies de mathématiciens, Spartacus IDH, París, 2019. 11, 51, 69

[129] L. KRONECKER, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, *Kronecker J.* **92** (1882), 1–122. 64

[130] L. KRONECKER, Zur Theorie der elliptischen Functionen, *Berl. Ber.* 1883 (1883), 497-506, 525-530; 1885 (1885), 761-784; 1886 (1886), 701-780; 1889 (1889), 53-63, 123-135, 199-220, 255-275, 309-317; 1890 (1890), 99-120, 123-130, 219-241, 307-318, 1025-1029. En [132]: IV (1929), 345–496; V (1930), 1–132. 70

[131] L. KRONECKER, Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, *Berl. Ber.* 1884 (1884), 1179–1193, 1271–1299. En [132]: III (Erster Halbband) (1899), 47–109. 69

[132] L. KRONECKER, *Leopold Kronecker's Werke. Bände I–V*, Hrsg. auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel, B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1895–1931. 71, 76, 77

[133] L. Kronecker, Sophie von Kowalevsky, *Kronecker's J.*, **108** (1891), p. 88; [132] V, 483–486. 72

[134] S.-F. Lacroix, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, 6e éd. revue et augmentée de notes par MM. Hermite et J.-A. Serret, tome 2, Mallet-Bachelier, Paris, 1862. 75

[135] H. Le Dret y B. Lucquin, *Partial Differential Equations: Modelling, Analysis and Numerical Approximation*, International Series of Numerical Mathematics, 168, Birkhäuser, 2016. 54

[136] A. C. Leffler y S. Kovalevsky, *Sonya Kovalevsky, a Biography by Anna Carlotta Leffler Duchess of Cajanello, and Sisters Rajevsky, being an account of her life, by Sonya Kovalevsky*, A. de Furuhjelm y A. M. Clive Bayley (eds.), authorized edition, con una nota biográfica sobre Anne Ch. Leffler por Lily Wolffsohn, T. Fisher, London, 1895. Disponible en http://www.archive.org/details/sonyakovalevskyb00leffiala 11, 32, 51, 54, 61, 63, 69

[137] P. G. Lejeune-Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. Reine Angew. Math.* **4** (1829), 157–169. 70

[138] P. G. Lejeune-Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, *J. Reine Angew. Math.* **58** (1861), 181–216. 69

[139] P. G. Lejeune-Dirichlet (F. Grube ed.), *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, B. G. Teubner, Leipzig, 1876. 69

[140] F. Lindemann, Über die Ludolph'sche Zahl, *Berl. Ber.* 1882 (1882), 679–682. 67

[141] F. Lindemann, Über die Zahl π, *Klein Ann.* **20** (1882), 213–225. 67

[142] F. Lindemann, Sur le rapport de la circonférence au diamètre, et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnells algébriques, *C. R.* **95** (1882), 72–74. 67

[143] A. I. Markushevich, *The remarkable sine functions*, American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1966. 65

[144] A. I. Markushevich, *Introduction to the Classical Theory of Abelian Functions*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1992. 69

[145] A. I. Markushevich, Analytic Function, [117], Capítulo 2, 119–272. 51, 69

[146] M. R. Massa-Esteve, Weierstrass per ell mateix: alguns trets del seu pensament matemàtic, Jornada WEIERSTRASS a l'FME (25/3/2015), Barcelona, Facultat de Matemàtiques i Estadística, 2015. 50, 66, 70, 72

[147] J. C. Maxwell, *On the stability of the motion of Saturn's rings*, 71 pp., Macmillan and Co., Cambridge, 1859. 56

[148] J. M. Méndez Pérez, Sonia Kovalevskaya, *La Gaceta de la RSME*, **7**.1 (2004), 73–100. 50, 54, 62, 71

[149] Ch. Méray, Sur l'existence des intégrales d'un sistème quelconque d'équations différentielles, comprenant comme cas très-restreint, les equations dites *aux dérivées partielles*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **80** (1875), 389–393; y una rectificación del autor a dicha Nota: *ibid.*, 444. 58

[150] G. Mittag-Leffler, Sophie Kovalevsky, *Acta Math.* **16** (1892), 385–392. 69, 71

[151] G. Mittag-Leffler, Une page de la vie de Weierstrass, extrait d'une communication plus étendue, *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900* (E. Duporcq ed.), 131–153, Gauthier-Villars, Paris, 1902. 5, 54, 62, 72

[152] M. G. Mittag-Leffler, *Niels Henrik Abel* (extrait de *La Revue du Mois*, nos. 19–20, 10 juillet, 10 août 1907, t. IV, pp. 5–25, 207–229), Éditions de la Revue du Mois, 48 pp., A. Hermann, Paris, 1907. 68

[153] G. Mittag-Leffler, Zur Biographie von Weierstrass, *Acta Math.* **35** (1912) 29–65. 66

[154] G. Mittag-Leffler, Au lecteur, *Acta Math.* **38** (1921), 1–2. 65

[155] G. Mittag-Leffler (ed.), Lettres d'Henri Poincaré à L. Fuchs, *Acta Math.* **38** (1921), 175–187. 65

[156] G. Mittag-Leffler, Préface, *Acta Math.* **39** (1923), I–IV. 5

[157] G. Mittag-Leffler (ed.), Correspondance d'Henri Poincaré et de Felix Klein, *Acta Math.* **39** (1923), 94–132 65, 66

[158] M. B. Molero Aparicio y A. Salvador Alcaide, *Sonia Kovalévskaya (1850-1891)*, Ediciones del Orto, Madrid, 2002. 72

[159] Ph. Nabonnand, Les premières contributions de Poincaré en mécanique céleste vues à partir de sa correspondance avec Anders Lindstedt (1883-1884), (2012): https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01231461 66

[160] F. E. Neumann, *Die Mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme*, 87 pp., Reimer, Berlin, 1846. 55

[161] F. E. Neumann, *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme*, 73 pp., Reimer, Berlin, 1848. 55

[162] C. G. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, B. G. Teubner, Leipzig, 1865. Segunda edición: Teubner, Leipzig, 1884. Reimp. BiblioLife 2009. 55, 63

[163] C. G. Neumann, *Die elektrischen Kräfte* I, Teubner, Leipzig, 1873. 55

[164] E. Neuenschwander, The Casorati-Weierstrass theorem (Studies in the history of complex function theory I), *Historia Mathematica* **5** (1978), 139–166. 51

[165] E. Neuenschwander, Studies in the history of complex function theory II: Interactions among the French school, Riemann, and Weierstrass, *Bull. Am. Math. Soc.* **5**.2 (1981), 87–105. 52

[166] A. Papadopoulos, Physics in Riemann's mathematical papers, (2017), hal-01628080. 69

[167] É. Picard, Mémoire sur les fonctions entières, *Annales de l'École normale sup.* (2) **9** (1880), 147–166. 63

[168] É. Picard, Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique, *C. R. Acad. Sci. Paris* **90** (1880), 724–726; *Darboux Bull.* (2) **4** (1880), 416–432. 63

[169] É. Picard, *Notice sur les travaux scientifiques de M. Émile Picard*, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1889. 63

[170] E. Piña Garza, Caos acerca del trompo de Kovalevskaia, [202], IV, 73–97. 71

[171] H. Poincaré, Sur les fonctions fuchsiennes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), 333–336, 395–398, 859–861, 957–958, 1198–1200, 1274–1276, 1484–1487; **93** (1881), 301–303, 581–582; **94** (1882), 163–166, 1038–1040, 1166–1167. 64, 65

[172] H. Poincaré, Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **94** (1882), 1402–1405. 65

[173] H. Poincaré, Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires, *Klein Ann.* **19** (1881), 553–564; (Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein), *Klein Ann.* **20** (1882), 52–53. 64, 65

[174] H. Poincaré Sur les courbes définies par une équation différentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris* **90** (1880), 673–675; **93** (1882), 951-952. 66

[175] H. Poincaré Sur les points singuliers des équations différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **94** (1882), 416–418. 66

[176] H. Poincaré Sur l'intégration des équations différentielles par les séries, *C. R. Acad. Sci. Paris* **94** (1882), 577–578. 66

[177] H. Poincaré Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *Résal J.* (3) **7** (1881), 375–422; *Résal J.* (3) **8** (1882), 251–296. 66

[178] H. Poincaré Sur les courbes définies par les équations différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **98** (1884), 287–289. 66

[179] H. Poincaré Sur les courbes définies par les équations différentielles, *Jordan J.* (4) **1** (1885), 167–244; *Jordan J.* (4) **2** (1886), 151–211. 66

[180] H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Math.* **1** (1882), 1–62. 64, 66

[181] H. Poincaré, Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, *Acta Math.* **1** (1882), 193–294. 64

[182] H. Poincaré, Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta Math.* **3** (1883), 49–92. 64

[183] H. Poincaré, Sur les groupes des équations linéaires, *Acta Math.* **4** (1884), 201–311. 66

[184] H. Poincaré, Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, *Acta Math.* **5** (1884), 209–278; [188], 108–462. 66

[185] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.* **13** No. 1–2 (1890), 271 pp.

[186] H. Poincaré, L'œuvre mathématique de Weierstrass, *Acta Math.* **22** (1899), 1–18. 66, 67

[187] H. Poincaré (G. Mittag-Leffler ed.), Lettres d'Henri Poincaré à M. Mittag-Leffler concernant le mémoire couronné du Prix de S. M. le Roi Oscar II, *Acta Math.* **38** (1921), 161–173. 55, 66

[188] H. Poincaré, *Œuvres de Henri Poincaré, Tome II: Fonctions fuchsiennes*, Gauthier-Villars, Paris, 1916. 78

[189] S. D. Poisson, *Traité de Mécanique*, seconde édition, 2 vols., Bachelier, Paris, 1833. 55

[190] H. Pulte, Carl Gustav Jacob Jacobi, [83], 762–763. 59

[191] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift, 1854. Publicada póstumamente: Aus dem Bd. 13 der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 49 pp., Dieterich, Gotinga, 1867. En francés: Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, [195], 225–279. 53, 70

[192] B. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857), 115–155. En francés: Théorie des fonctions abéliennes, [195], 89–164. 52, 60, 67, 69

[193] B. Riemann, Démonstration de ce théorème qu'une fonction uniforme de n variables à plus de $2n$ périodes ne saurait exister, [195], 300–304. 67

[194] B. Riemann (K. Hattendorf ed.), *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen*, Vieweg, Brunswick, 1869. 53, 69

[195] B. Riemann, *Œuvres mathématiques de Riemann*, trad. par L. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1897. Reimp. A. Blanchard, Paris, 1968. 70, 78

[196] B. Riemann, *B. Riemann. Riemanniana selecta*, ed. de J. Ferreirós, CSIC, Madrid, 2000. 53

[197] B. Riemann y H. Weber, *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemanns Vorlesungen*, 2 vols., Vieweg, Brunswick, 1912. 69

[198] J. A. Rogers, Charles Darwin and Russian Scientists, *The Russian Review* **19** (1960), 371–383. 67

[199] J. G. Rosenhain, Auszug mehrerer Schreiben des Dr. Rosenhain an Herrn Professor Jacobi über die hyperelliptischen Transcendenten, *Crelle's J.* **40** (1850), 319–360. 68

[200] J. G. Rosenhain, Sur les fonctions de deux variables à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe, *Mémoires présentés par divers savants* (2) **11** (1851), 361–468. 68, 69

[201] J. G. Rosenhain, *Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden welche die Inverse sind der ultra-elliptischen Integrale erster Klasse*, ed. por H. Weber y trad. del francés por A. Witting, Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften no. 65, W. Engelmann, Leipzig, 1895. 68

[202] P. Saavedra (dir.), *Vida y obra matemática de Sofía Kovalevskaia*, coed. Anthropos, Rubí (Barcelona) - Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa (México D. F.), 2001. 5, 74, 75, 78

[203] N. Schappacher, Gotthold Eisenstein, [11], 55–60. 67

[204] F. Schottky, Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen, *Borchardt J.* **83** (1877), 300–351. 59

[205] E. Schröder, Ein auf die Einheitswurzeln bezügliches Theorem der Functionenlehre, *Schlömilch Zeitschrift* **22** (1877), 183–190. 63

[206] G. Schubring, An Unknown Part of Weierstrass Nachlass, *Historia Mathematica* **25** (1998), 423–430. 70

[207] L. Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Hermann & Addison-Wesley, Paris, 1966. 53

[208] H. A. Schwarz, Ueber einige Abbildungsaufgaben, *Crelle's J.* **70** (1869), 105–120. 65

[209] H. A. Schwarz, Zur integration der partiellen Differentialgleichungen, *Crelle's J.* **74** (1872), 218–253. 65

[210] H. A. Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass*, Zweite Ausgabe, Erste Abtheilung (Bogen 1–12), Julius Springer, Berlin, 1893. 51, 57, 58, 64, 66, 67

[211] C. L. Siegel, *Topics in Complex Function Theory* I, Wiley-Interscience, New York, 1969. 56

[212] R. Siegmund-Schultze, Der Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes 1885 vor dem Hintergrund der Entwicklung der Fourieranalysis, *Historia Mathematica* **15** (1988), 299–310. 48, 70, 71

[213] R. Siegmund-Schultze, Weierstraß's Approximation Theorem (1885) and his 1886 lecture course revisited, [118], Capítulo 7, 219–268. 70

[214] J. Steiner (K. Weierstrass ed.), *Jacob Steiner's Gesammelte Werke*, 2 vols., G. Reimer, Berlin, 1881–1882. 64

[215] A. Stubhaug, *Gösta Mittag-Leffler, A Man of Conviction*, translated by Tiina Nunnally, Springer, Berlin-Heidelberg, 2010. 50

[216] J. Tannery, *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jules Tannery*, Gauthier-Villars, Paris, 1901. 63

[217] W. Tuschmann y P. Hawig, *Sofia Kowalewskaja. Ein Leben für Mathematik und Emancipation*, Springer, Basel, 1993. 67

[218] F. Vera Fernández de Córdoba, Weierstrass y Sonja Kowalewski, *Veinte matemáticos célebres*, Capítulo 4, colección "Los libros del mirasol", nº 27, Compañía General Fabril Editora, Buenos Aires, 1961. 68

[219] V. Volterra, Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents, *Acta Math.* **16** (1892), 153–215. 69

[220] A. Vucinich, *Darwin in Russian Thought*, Univ. of California Press, Berkeley, 1988. 67

[221] K. Weierstrass, Über die Entwicklung der Modular-Functionen, [249] I, 1–50. 52

[222] K. Weierstrass, Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale, *Jahresber. Gymn. Braunsberg* (1848/49), 3–23; [249] I, 111–131. 52

[223] K. Weierstrass,Theorie der Abel'schen Functionen, *Crelle's Journal* **47** (1854), 289–306; [249] I, 133–152. 52, 59

[224] K. Weierstrass, Theorie der Abel'schen Functionen, *Crelle's J.* **52** (1856), p. 285–380; [249] I, 297–356. 52, 55, 56

[225] K. Weierstrass, *Theorie der Abel'schen Functionen von Karl Weierstrass*, Erstes Heft, G. Reimer, Berlin, 1856. 52

[226] K. Weierstrass, Über die Integration algebraischer Differentiale vermittelst Logarithmen, *Berl. Monatsber.* 1857 (1857), 148–154; [249] I, 227–232. 56

[227] K. Weierstrass, Über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid, *Berl. Monatsber.* 1861 (1861), 986–997; [249] I, 257–266. 56

[228] K. Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, *Berl. Monatsber.*, 1868 (1868), 310–338; [249] II, 19–44. 51

[229] K. Weierstrass, Zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, [249] I, 275–296. 69

[230] K. Weierstrass, Ueber die allgemeinsten eindeutigen und $2n$-fach periodischen Funktionen von n Veränderlichen, *Berl. Monatsber.* 1869 (1869), 853–857; [249] II, 45–48. 60

[231] K. Weierstrass, Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip (Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 14. Juli 1870), [249] II, 49–54. 60

[232] K. Weierstrass, Beweis / Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen, *Berl. Monatsber.* 1876 (1876), 680–693 / [245], 165–182; [249] II, 55–70. 60

[233] K. Weierstrass, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, *Berl. Abh.* 1876 (1876), 11–60; [245], 1–52; [249] II, 77–124. 55, 63, 64

[234] K. Weierstrass, Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes. (Traduit par E. Picard), *Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série* **8** (1879), 111-150. 55

[235] K. Weierstrass, Nachtrag zu der Abhandlung (Berl. Ber. 1858, 202–220): "Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem", *Berl. Monatsber.* 1879 (1879), 430–439; [249] III, 139–148. 62

[236] K. Weierstrass, Untersuchungen über die $2r$-fach periodische Functionen von r Veränderlichen, *Borchardt J.* **89** (1880), 1–8; [249] II, 125–134. 61, 66

[237] K. Weierstrass, Zur Functionenlehre, *Berl. Monatsber.* (1880), 719–743; [245], 67–101; [249] II, 201–230. 63

[238] K. Weierstrass, Zur Functionenlehre: Nachtrag, *Berl. Monatsber.* 1881 (1881), 228–230; [245], 102–104; [249] II, 231–233. 63

[239] K. Weierstrass, Recherches sur les functions $2r$-fois périodiques de r variables. (Lettres de M. C. Weierstrass à M. C.-W. Borchardt), *Darb. Bull.* (2) **6** (1882), 111–120. 61

[240] K. Weierstrass, Bemerkungen zur Integration einer Systems linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, [249] II, 75–76. 51

[241] K. Weierstrass, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Züsatzliche Bemerkungen von Herrn H. A. Schwarz *Gött. Nachr.* 1884 (1884), Nr. 10, 395–414, 414–419 y 516–519; [249] II, 311–339. 53

[242] K. Weierstrass, Zu Lindemann's Abhandlung: "Über die Ludolph'sche Zahl", *Berl. Ber.* 1885 (1885), 1067–1086; [249] II, 341–363. 67

[243] K. Weierstrass, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, *Berl. Ber.* 1885 (1885), 633–640, 789–806; [249] III, 1–37. 53, 70, 71

[244] K. Weierstrass, Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle, *Jordan J.* (4) **2** (1886), 105–113, 115–138. 53, 70, 71

[245] K. Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, Springer, Berlin, 1886. 79

[246] K. Weierstrass, Allgemeine Untersuchungen über $2n$-fach periodische Functionen von n Veränderlichen, [249] III, 53–114. 60

[247] K. Weierstrass, Analytische Bestimmung einfach zusammenhängender Minimalflächenstücke, deren Begrenzung aus geradlinigen, ganz im Endlichen liegenden Strecken besteht, [249] III, 221–238. 52

[248] K. Weierstrass, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Mit der akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren Originalarbeiten von K. Weierstraß aus den Jahren 1870 bis 1880/86*. Herausgegeben, kommentiert und mit einem Anhang versehen von R. Siegmund-Schultze. (Teubner-Archiv zur Mathematik; 9.) Leipzig, B. G. Teubner, 1988. 70

[249] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, Hrsg. unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. Band I–VI, Mayer & Müller, Berlin; Band VII, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1894–1927). 7, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 65, 66, 71, 79, 80

[250] K. Weierstrass (G. Mittag-Leffler ed.), Briefe von K. Weierstrass an Paul du Bois-Reymond, *Acta Math.* **39** (1923), 199–225. 48, 53, 55, 59, 70

[251] K. Weierstrass (G. Mittag-Leffler ed.), Briefe von K. Weierstrass an L. Koenigsberger, *Acta Math.* **39** (1923), 226–239. 50

[252] K. Weierstrass (G. Mittag-Leffler ed.), Briefe von K. Weierstrass an L. Fuchs, *Acta Math.* **39** (1923), 246–256. 54

[253] K. Weierstrass (R. Bölling ed., present. y com.), *Briefwechsel zwischen Karl Weierstrass und Sofja Kowalewskaja*. Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von Reinhard Bölling, Akademie Verlag, Berlin, 1993. 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 69, 70, 74

[254] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, Berlin, 1999. 70

[255] M. Wentscher, Weierstrass und Sonja v. Kowalewsky, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* **18** (1909), 89–93. 54

[256] W. Windelband, Zum Gedächtniss Elwin Bruno Christoffel's, *Mathematische Annalen* **54** (1901), 341–346. 70

[257] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis*, Fifth edition edited and prepared for publication by Victor H. Moll, Cambridge University Press, 2021. 56, 64, 65

[258] G. Zolotareff, Sur la méthode d'intégration de M. Tchébychef, *Math. Annalen* **5** (1872), 560–580. 58

Índice de nombres

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Servicio de Publicaciones
Biblioteca Universitaria
C/ Piscinas, 1
26006 Logroño (La Rioja)
Teléfono: 941 299 187

http://publicaciones.unirioja.es
www.unirioja.es