Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2023.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 457. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Sean D, E y F, respectivamente, puntos interiores de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC. Si las circunferencias inscritas en los triángulos AFE, BDF y CED son iguales, de radio ϱ, y si r y r' son, respectivamente, los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y DEF, demostrar que se cumple la relación $r = r' + \varrho$.

Problema 458. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

En un triángulo ABC, sean R, r y s, respectivamente, su circunradio, su inradio y su semiperímetro. Probar que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \le \left(\frac{4R+r}{2s}\right)^3.$$

PROBLEMA 459. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*
Sean a y b números reales positivos verificando

$$a^2 + ab + a = 1 \qquad \text{y} \qquad b^2 + ab + a + b = 1.$$

Determinar un valor real c tal que $a + b = 8abc^3$.

PROBLEMA 460. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*
Sea f una función positiva de clase $\mathcal{C}^1((0,\infty))$. Si $0 < a \leq b$, probar que

$$4\int_a^b \int_a^b f'(x)f'(y)\sqrt[3]{f(x)+f(y)}\,dx\,dy$$
$$\geq 3\sqrt[3]{2}\big(f(b)-f(a)\big)\big(f(b)\sqrt[3]{f(b)} - f(b)\sqrt[3]{f(b)}\big).$$

PROBLEMA 461. *Propuesto por Óscar Ciaurri, Universidad de La Rioja, Logroño.*
Dados k y ℓ enteros no negativos tales que $\ell \geq k$, evaluar

$$\sum_{j=0}^{\ell-k} \binom{\ell-k}{j} (1+(-1)^j) \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{2}+k+1\right)}.$$

PROBLEMA 462. *Propuesto por Seán M. Stewart, King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Arabia Saudita.*
Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(H_{\frac{n}{2}-\frac{3}{4}} - H_{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}\right) = 2\pi\log 2 - 4G,$$

donde

$$H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$$

es la extensión de los números armónicos para $x \in \mathbb{R}$, con $x > -1$, y

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

es la constante de Catalan.

Problema 463. *Propuesto por George Stoica, Saint John, Canadá, y Didier Pinchon, Toulouse, Francia.*

Dados dos números primos p y q, ¿cuántas raíces cuadradas de 1 módulo pq existen?

Problema 464. *Propuesto por Marian Ursărescu, "Roman-Vodă" National College, Roman, Rumanía.*

Determinar todas las funciones continuas $f : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ tales que

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}, \qquad x, y \geq 0.$$

Soluciones

Problema 433 ⋆. *Propuesto por Pedro A. Pizá, San Juan, Puerto Rico.*

Los números $P(r,c)$, con $1 \leq c \leq r$, están dados por la relación de recurrencia

$$P(r,c) = cP(r-1,c) + (r+1-c)P(r-1,c-1), \qquad r, c \geq 1,$$

con $P(1,1) = 1$ y las condiciones $P(r,0) = P(r,r+1) = 0$ para todo $r \geq 1$. Probar o refutar la siguiente proposición: Si p es primo, se verifica que $P(p,c) \equiv 1 \pmod{p}$ para todo c tal que $1 \leq c \leq p$.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Probaremos que la proposición es cierta.

Para $r > 1$ tenemos $P(r,1) = P(r-1,1)$ que, junto con $P(1,1) = 1$, implica $P(r,1) = 1$ para todo $r \geq 1$. Supongamos $s > 1$ y pongamos, de manera auxiliar,

$$P^*(r,s) := c^{1-r}P(r,s).$$

La ecuación funcional se escribe entonces como

$$P^*(r,c) = P^*(r-1,c) + \frac{1}{c}(r+1-c)P^*(r-1,c-1),$$

con $P^*(r,0) = P^*(r,r+1) = 0$. Usando sumación telescópica sobre el primer argumento, se obtiene

$$\begin{aligned} P^*(r,c) &= P^*(1,c) + \sum_{j=2}^{r}\big(P^*(j,c) - P^*(j-1,c)\big) \\ &= \sum_{j=2}^{r}\Big(\frac{1}{c}(j+1-c)P^*(j-1,c-1)\Big) = \sum_{j=1}^{r-1}\Big(\frac{1}{c}(j+2-c)P^*(j,c-1)\Big), \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$P(r,c) = c^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}(j+2-c)c^{-j}P(j,c-1). \tag{1}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{r-1}\binom{j}{k}x^j &= \frac{x^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1-x^r}{1-x}\right) = \frac{x^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}(1-x^r)\\
&= \frac{x^k(1-x^r)}{(1-x)^{k+1}} - x^k\sum_{i=0}^{k-1}\binom{r}{k-i}\frac{x^{r-k+i}}{(1-x)^{i+1}}\\
&= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} - \sum_{i=0}^{k}\binom{r}{k-i}\frac{x^{r+i}}{(1-x)^{i+1}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Aplicando (1) y (2), resulta

$$P(r,2) = 2^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}(j+2-2)2^{-j}P(j,1) = 2^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j}{1}2^{-j} = 2^r-(r+1)$$

y

$$\begin{aligned}
P(r,3) &= 3^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}(j+2-3)3^{-j}P(j,2) = 3^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}(j-1)3^{-j}(2^j-j-1)\\
&= 3^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}\left(\binom{j}{1}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^j - 3^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}\left(2\binom{j}{2}+\binom{j}{1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^j\\
&= 3^{r-1}\left(3-3\left(\frac{2}{3}\right)^r(r+1)\right) - 3^{r-1}\left(-\frac{1}{2}3^{1-r}(r^2+r)\right)\\
&= 3^r - \binom{r+1}{1}2^r + \binom{r+1}{2}.
\end{aligned}$$

De manera similar se obtiene

$$P(r,4) = 4^r - \binom{r+1}{1}3^r + \binom{r+1}{2}2^r - \binom{r+1}{3}$$

y

$$P(r,5) = 5^r - \binom{r+1}{1}4^r + \binom{r+1}{2}3^r - \binom{r+1}{3}2^r + \binom{r+1}{4},$$

emergiendo el patrón que se expresa en la fórmula general

$$P(r,c) = \sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\binom{r+1}{j}(c-j)^r. \tag{3}$$

Dado $r > 1$ fijo, (3) se va a demostrar por inducción sobre c, para $1 \leq c \leq r$. Ya se ha visto que es cierta para $c = 1, 2, 3, 4, 5$. Para el paso inductivo probaremos, utilizando (1), que para $c \geq 2$ se tiene

$$\sum_{j=0}^{c-1}(-1)^j\binom{r+1}{j}(c-j)^r = c^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}(j+2-c)c^{-j}\left(\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\binom{j+1}{k}(c-1-k)^j\right).$$

En efecto, usando la relación $(j+2)\binom{j+1}{k} = (k+1)\binom{j+2}{k+1}$, se verifica que

$$\begin{aligned}
&c^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}(j+2-c)c^{-j}\left(\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\binom{j+1}{k}(c-1-k)^j\right)\\
&\qquad = c^{r-1}\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k(k+1)\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+2}{k+1}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad\quad - c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+1}{k}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad = c^{r-1}\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k(k+1-c+c)\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+2}{k+1}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad\quad - c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+1}{k}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad = -c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+2}{k+1}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^{j+1}\\
&\qquad\quad + c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+2}{k+1}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad\quad - c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+1}{k}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad = -c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\sum_{j=2}^{r}\binom{j+1}{k+1}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad\quad + c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+2}{k+1}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad\quad - c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j+1}{k}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^j\\
&\qquad = -c^r\sum_{k=0}^{c-2}(-1)^k\left(\binom{r+1}{k+1}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)^r - \binom{2}{k+1}\left(1-\frac{k+1}{c}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ c^r \sum_{k=0}^{c-2} (-1)^k \sum_{j=1}^{r-1} \binom{j+2}{k+1} \Big(1 - \frac{k+1}{c}\Big)^j \\
&- c^r \sum_{k=0}^{c-2} (-1)^k \sum_{j=1}^{r-1} \left(\binom{j+1}{k} + \binom{j+1}{k+1} \right) \Big(1 - \frac{k+1}{c}\Big)^j \\
= &\sum_{k=0}^{c-2} (-1)^{k+1} \binom{r+1}{k+1} (c-k-1)^r + 2c^r \Big(1 - \frac{1}{c}\Big) - c^r \Big(1 - \frac{2}{c}\Big) \\
= &\sum_{j=1}^{c-1} (-1)^j \binom{r+1}{j} (c-j)^r + c^r = \sum_{j=0}^{c-1} (-1)^j \binom{r+1}{j} (c-j)^r.
\end{aligned}
$$

Finalmente, para calcular $P(p,c) \pmod{p}$ notemos que, si p es primo, entonces $\binom{p+1}{j}$ es divisible por p para $j = 2, 3, \dots, p-1$. Además, por el pequeño teorema de Fermat, $a^p \equiv a \pmod{p}$ para todo entero a. Por consiguiente, usando la expresión (3),

$$
P(p,c) = \sum_{j=0}^{c-1} (-1)^j \binom{p+1}{j} (c-j)^p \equiv c^p - (p+1)(c-1)^p \equiv c - (c-1) \equiv 1 \pmod{p},
$$

y la proposición queda probada.

También resuelto por Yoo Hyunbin.

NOTA. Para una noticia completa acerca del proponente de este problema, Pedro A. Pizá, remitimos al lector a nuestra Nota a la solución del Problema 410 de esta sección de LA GACETA (vol. 25 (2022), n.º 1, pág. 119). El año 1948, en [1, pág. 57], acerca de los números $P(r,c)$ que, como ya indicamos, él denotaba $[t|c]_{\mathsf{B}}$ y formaban su denominada «Tabla B», Pizá escribía (traducimos del inglés original):

> Algunas notables propiedades observadas son:
>
> $$
> \begin{aligned}
> [2r+1|r+1]_{\mathsf{B}} &= 2(r+1)[2r|r+1]_{\mathsf{B}}, \\
> [t|2]_{\mathsf{B}} &= 2^t - (t+1), \\
> [t|c]_{\mathsf{B}} &= [t|t-c+1]_{\mathsf{B}}.
> \end{aligned}
> $$
>
> Además que, *cuando t es primo, cada término de la fila t-ésima de la tabla* B *es un múltiplo de t más una unidad.* Sería muy interesante que esta propiedad se pudiese probar en su completa generalidad.

Al término de la solución que nos envía, Yoo Hyunbin prueba también, por inducción en r (y con c satisfaciendo $1 \le c \le r$), la propiedad $P(r,c) = P(r, r-c+1)$, la tercera de las observadas por Pizá. La segunda, la expresión de $[t|2]_{\mathsf{B}}$, queda probada y generalizada en las dos soluciones recibidas. Y, por otra parte, la primera propiedad se obtendrá de manera inmediata si se usa la fórmula de recurrencia del enunciado y la tercera propiedad.

Para terminar dejamos abierta una pregunta que plantea Manuel Benito Muñoz: ¿Es cierta la propiedad recíproca de la que enuncia el problema? Es decir, si se verifica que $P(p,c) \equiv 1 \pmod{p}$ para todo c tal que $1 \leq c \leq p$, ¿es p un número primo?

Referencias

[1] P. A. Pizá, *Arithmetical essays: numerical adventures of a devotee of arithmetic, undertaken in solitude for his own spiritual recreation*, Imprenta Soltero, Santurce, Puerto Rico, 1948.

Problema 434. *Propuesto por Dorin Marghidanu, Colegio Nacional "A. I. Cuza", Corabia, Rumanía.*

Sean a, b y c números reales positivos. Probar las desigualdades

$$9 \leq \frac{(2a+b)^2}{b(2a+c)} + \frac{(2b+c)^2}{c(2b+a)} + \frac{(2c+a)^2}{a(2c+b)} \leq 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).$$

Solución elaborada por los editores a partir de todas las recibidas.

En primer lugar debemos señalar la desigualdad

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} \geq \frac{(a_1+a_2)^2}{x_1+x_2},$$

válida para $a_1, a_2, x_1, x_2 > 0$. Esta desigualdad es de prueba elemental, ya que es equivalente a $(a_1x_2 - a_2x_1)^2 \geq 0$. Además, por un proceso de inducción, es claro que, para $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_i^2}{x_i} \geq \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{x_1+\cdots+x_n}. \tag{1}$$

En varias de las soluciones, a este último resultado se le denomina desigualdad de Andreescu o desigualdad de Bergström, y puede obtenerse directamente como una consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (de hecho, en varias soluciones se da una prueba usando esta desigualdad).

De este modo, para probar la primera desigualdad el enfoque utilizado en casi todas las soluciones ha sido aplicar la bien conocida desigualdad $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ y (1) con $a_1 = 2a+b$, $a_2 = 2b+c$, $a_3 = 2c+a$, $x_1 = b(2a+c)$, $x_2 = c(2b+1)$ y $x_3 = a(2c+b)$. En efecto,

$$\frac{(2a+b)^2}{b(2a+c)} + \frac{(2b+c)^2}{c(2b+a)} + \frac{(2c+a)^2}{a(2c+b)} \geq \frac{9(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 9.$$

La segunda de las desigualdades propuestas ha sido obtenida mediante tres procedimientos distintos. En primer lugar, como una aplicación de (1) con $a_1 = 2a$, $a_2 = b$, $x_1 = 2ab$ y $x_2 = cb$, se tiene que

$$\frac{(2a+b)^2}{b(2a+c)} \leq \frac{2a}{b} + \frac{b}{c}$$

y, análogamente,

$$\frac{(2b+c)^2}{c(2b+a)} \leq \frac{2b}{c} + \frac{c}{a} \qquad \text{y} \qquad \frac{(2c+a)^2}{a(2c+b)} \leq \frac{2c}{a} + \frac{a}{b},$$

lo que implica el resultado.

En un segundo procedimiento, algunos proponentes, partiendo de la identidad

$$\frac{3a}{b} - \frac{(2a+b)^2}{b(2a+c)} = \frac{a}{b} - 2 + \frac{c}{b} - \frac{(b-c)^2}{b(2a+c)},$$

que puede probarse usando que $(2a+b)^2 - (b-c)^2 = (2a+c)(2a+2b-c)$, llegan a

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cíclica}} \left(\frac{3a}{b} - \frac{(2a+b)^2}{b(2a+c)} \right) &= \sum_{\text{cíclica}} \left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{c}{b} - \frac{(b-c)^2}{b(2a+c)} \right) \\ &= \sum_{\text{cíclica}} \left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} - \frac{(a-b)^2}{a(2c+b)} \right) \\ &= \sum_{\text{cíclica}} \frac{(a-b)^2}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2c+b} \right) = \sum_{\text{cíclica}} \frac{(a-b)^2 2c}{ab(2c+b)} \geq 0. \end{aligned}$$

La última forma de obtener la desigualdad comienza transformándola, eliminando denominadores, en

$$18a^2b^2c^2 + 3 \sum_{\text{cíclica}} a^2b^3c \leq 3 \sum_{\text{cíclica}} a^3b^3 + 2 \sum_{\text{cíclica}} a^2b^4 + 4 \sum_{\text{cíclica}} a^3b^2c. \tag{2}$$

Ahora, aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica, deducimos que

$$3 \sum_{\text{cíclica}} a^3b^3 = 3 \sum_{\text{cíclica}} \left(\frac{2}{3}a^3b^3 + \frac{1}{3}b^3c^3 \right) \geq 3 \sum_{\text{cíclica}} a^2b^3c,$$

$$2 \sum_{\text{cíclica}} a^2b^4 = 2(a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4) \geq 6a^2b^2c^2$$

y

$$4 \sum_{\text{cíclica}} a^3b^2c = 4(a^3b^2c + b^3c^2a + c^3a^2b) \geq 12a^2b^2c^2.$$

Así, la suma de las tres desigualdades anteriores prueba (2).

Resuelto por F. D. Aranda, M. Fernández, A. García de Francia, M. Gómez, R. Dozalov, Y. Hyunbin, N. Mammadli, J. Nadal, P. Perfetti, C. Sacristán, A. Stadler, M. Ursărescu, T. Zvonaru y el proponente.

NOTA. Hay dos soluciones recibidas que no quedan cubiertas en la presentada; se refieren a la prueba de la primera de las desigualdades y son las enviadas por A. Stadler y D. Aranda. Stadler transforma la desigualdad eliminando denominadores y aplica adecuadamente la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica. Por su parte, Aranda, tras aplicar esta misma desigualdad, obtiene que

$$\sqrt[3]{\frac{(2a+b)^2}{a(a+2b)}\frac{(2b+c)^2}{b(b+2c)}\frac{(2c+a)^2}{c(c+2a)}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{(2a+b)^2}{b(2a+c)}+\frac{(2b+c)^2}{c(2b+a)}+\frac{(2c+a)^2}{a(2c+b)}\right),$$

y concluye observando que $(2a+b)^2/(a(a+2b)) \geq 3$ y lo análogo para las otras fracciones en la raíz.

Aplicando el procedimiento de Aranda para la estimación inferior y utilizando, por ejemplo, el primero de los procedimientos descritos en la solución publicada, se puede deducir de manera sencilla la siguiente generalización:

$$3n \leq \sum_{\text{cíclica}} \frac{(2x_i+x_{i+1})^2}{x_{i+1}(2x_i+x_{i+2})} \leq 3\sum_{\text{cíclica}} \frac{x_i}{x_{i+1}},$$

donde $x_1, \ldots, x_n > 0$.

PROBLEMA 435. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Si n es un entero no negativo, probar

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^{2n}(\pi x)\log\Gamma(x)\,dx = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n+1}}\left(\log(2\pi)+H_n-H_{2n}\right),$$

donde Γ es la función Gamma de Euler y H_m denota el m-ésimo número armónico.

Solución enviada por Ashley Herbig, Eli Lutz, Morgan Orr (estudiantes) y Brian Bradie, Christopher Newport University, Newport News, EE.UU.

Denotando por I la integral a evaluar, con el cambio de variable $x = 1-t$ se tiene

$$I = \int_0^1 \operatorname{sen}^{2n}(\pi t)\log\Gamma(1-t)\,dt$$

y

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^1 \operatorname{sen}^{2n}(\pi x)\log(\Gamma(x)\Gamma(1-x))\,dx \\ &= \int_0^1 \operatorname{sen}^{2n}(\pi x)\log\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}\right)dx = \log\pi I_1(n) - I_2(n), \end{aligned}$$

siendo, para $\alpha \geq 0$,

$$I_1(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sen}^{2\alpha}(\pi x)\, dx \qquad \text{e} \qquad I_2(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sen}^{2\alpha}(\pi x) \log \operatorname{sen}(\pi x)\, dx.$$

Usando que

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}^{2\alpha} t\, dt = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2\alpha} t\, dt,$$

el cambio de variable $\pi x = t$ implica

$$I_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2\alpha} t\, dt = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Así, aplicando la identidad

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

llegamos a

$$I_1(n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}.$$

Para evaluar I_2 comenzamos observando que

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} I_1(\alpha)$$

y que, por derivación logarítmica,

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\alpha+1)}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\psi_0(\alpha+1/2) - \psi_0(\alpha+1)\right),$$

donde $\psi_0(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ es la función digamma. Ahora, a partir de la identidades (véanse (26) y (27) en `https://mathworld.wolfram.com/DigammaFunction.html`)

$$\psi_0\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \qquad \text{y} \qquad \psi_0(n+1) = -\gamma + H_n,$$

deducimos que

$$\psi_0\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi_0(n+1) = 2(-\log 2 - H_n + H_{2n})$$

e

$$I_2(n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} (-\log 2 - H_n + H_{2n}).$$

De este modo,

$$I = \frac{1}{2}(\log \pi I_1(n) - I_2(n)) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n+1}} (\log(2\pi) + H_n - H_{2n})$$

y hemos concluido.

También resuelto por A. Stadler y el proponente.

Problema 436 (Corrección). *Propuesto por Thanasis Gakopoulos y Juan José Isach Mayo.*

Sean O, H y L, respectivamente, el circuncentro, el ortocentro y el punto simediano de un triángulo ABC de circunferencia circunscrita ω, y sean M y N, respectivamente, los puntos medios de los lados AB y AC. Además, sean $OH \cap AL = T$ y $AH \cap OL = S$. Supongamos que las rectas OH y AL son perpendiculares. Demostrar que, en este caso, se cumplen las cuatro afirmaciones siguientes:

a) $a^2(b^2+c^2) = b^4 + c^4$, donde $a = |BC|$, $b = |CA|$ y $c = |AB|$.

b) La recta OL es paralela al lado BC.

c) Los puntos A, M, N, O, T y S son concíclicos.

d) Si denotamos por γ la circunferencia que pasa por los puntos del apartado anterior, probar que ω y γ son tangentes en el punto A.

Solución enviada por Miguel Ángel Pérez García-Ortega, I. E. S. "Bartolomé José Gallardo", Campanario, Badajoz.

La figura 1 muestra la situación geométrica descrita en el enunciado del problema.

a) Usaremos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC. Con la notación de Conway (véase [1, 3.4]), tomaremos $S_A = (-a^2+b^2+c^2)/2$ y expresiones análogas para S_B y S_C. Además, son bien conocidas las coordenadas de los centros O, H y L (punto simediano o de Lemoine)

$$O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C), \quad H = (S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B) \quad \text{y} \quad L = (a^2 : b^2 : c^2).$$

La ecuación de la recta OH es

$$OH \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \\ S_BS_C & S_CS_A & S_AS_B \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$OH \equiv (b^2-c^2)S_Ax + (c^2-a^2)S_By + (a^2-b^2)S_Cz = 0.$$

De la misma manera se obtienen las ecuaciones

$$AL \equiv c^2y - b^2z = 0, \qquad AH \equiv S_By - S_Cz = 0$$

y

$$OL \equiv b^2c^2(b^2-c^2)x + c^2a^2(c^2-a^2)y + a^2b^2(a^2-b^2)z = 0.$$

De donde

$$S = AH \cap OL = \big(a^2(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2) : -2b^2c^2S_C : -2b^2c^2S_B\big),$$

y

$$T = OH \cap AL = (b^2c^2 - a^2S_A : b^2S_A : c^2S_A).$$

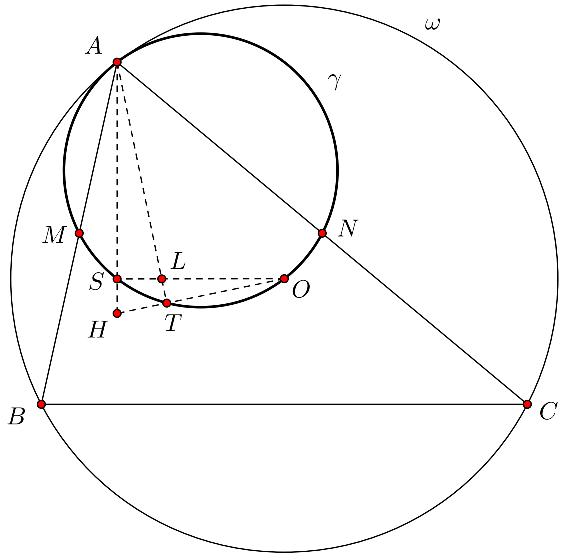

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 436.

El punto del infinito de una recta genérica $PQ \equiv px + qy + rz = 0$ es el punto $PQ_\infty = (q - r\colon r - p\colon p - q)$ [1, 4.2.1]. Entonces tenemos

$$OH_\infty = \big((a^2 - b^2)S_C - (c^2 - a^2)S_B \\ \colon (b^2 - c^2)S_A - (a^2 - b^2)S_C \colon (c^2 - a^2)S_B - (b^2 - c^2)S_A\big),$$

y

$$AL_\infty = (b^2 + c^2\colon -b^2\colon -c^2).$$

Dos rectas con puntos del infinito $(f\colon g\colon h)$ y $(f'\colon g'\colon h')$ son perpendiculares [1, 4.5] si y solo si

$$S_A ff' + S_B gg' + S_C hh' = 0.$$

Como se supone que las rectas OH y AL son perpendiculares, entonces se cumplirá

$$S_A\big((a^2 - b^2)S_C - (c^2 - a^2)S_B\big)(b^2 + c^2) - S_B\big((b^2 - c^2)S_A - (a^2 - b^2)S_C\big)b^2 \\ - S_C\big((c^2 - a^2)S_B - (b^2 - c^2)S_A\big)c^2 = 2S^2\big(a^2(b^2 + c^2) - (b^4 + c^4)\big) = 0$$

(aquí S es el doble del área del triángulo ABC y se verifica $S^2 = S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A$). Por tanto,

$$a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4,$$

como se requería probar.

b) Utilizando la relación obtenida en el apartado anterior, se tiene

$$OL_\infty = \Big(a^2\big(b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)\big)\colon$$

$$b^2\big(a^4+c^4-b^2(a^2+c^2)\big)\colon c^2\big(a^4+b^4-c^2(a^2+b^2)\big)\Big)$$
$$=(0\colon 1\colon -1)=BC_\infty,$$

luego las rectas OL y BC son paralelas [1, 4.2.2].

c) La ecuación general de una circunferencia en coordenadas baricéntricas es [1, 5.5]

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy+(x+y+z)(px+qy+rz)=0,$$

donde p, q y r son ciertos parámetros a determinar. Así, la ecuación de la circunferencia γ circunscrita al triángulo AMN ($A=(1\colon 0\colon 0)$, $M=(1\colon 1\colon 0)$ y $N=(1\colon 0\colon 1)$) es

$$2(c^2xy+b^2xz+a^2yz)-(c^2y+b^2z)(x+y+z)=0. \tag{1}$$

Se puede comprobar por una simple sustitución de sus coordenadas que el circuncentro O es un punto de γ, y esto independientemente de que las rectas OH y AL sean o no perpendiculares. También pertenecen a γ los puntos S y T cuando las rectas OH y AL son perpendiculares, ya que la sustitución de sus coordenadas baricéntricas en (1) da, respectivamente,

$$4b^2c^2S_A\big(a^2(b^2+c^2)-(b^4+c^4)\big)=0 \quad \text{y} \quad -4a^2b^2c^2S^2\big(a^2(b^2+c^2)-(b^4+c^4)\big)=0.$$

d) Se tiene entonces [1, 5.2]

$$\begin{cases}\omega\equiv c^2xy+b^2xz+a^2yz=0,\\ \gamma\equiv 2(c^2xy+b^2xz+a^2yz)-(c^2y+b^2z)(x+y+z)=0,\end{cases}$$

y de este sistema de ecuaciones se deduce $y=z=0$. De modo que estas dos circunferencias se cortan únicamente en el punto $A=(1\colon 0\colon 0)$, por lo que son tangentes en dicho punto. Y esto también es independiente de que las rectas OH y AL sean o no perpendiculares.

Referencias

[1] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Department of Mathematics, Florida Atlantic University, 2001 (versión revisada de 2012), `http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry121226.pdf`

También resuelto por F. D. Aranda y los proponentes.

Problema 437. *Propuesto por Marian Ursărescu, "Roman-Vodă" National College, Roman, Rumanía.*

Se considera un triángulo cualquiera ABC. Sea A' el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita que no contiene al punto A y sean B' y C' los puntos definidos análogamente por permutación cíclica de las letras. Probar que se cumple la desigualdad

$$\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{A'B'\cdot B'C'\cdot C'A'}\le\sqrt{\cos\Big(\frac{A-B}{2}\Big)\cos\Big(\frac{B-C}{2}\Big)\cos\Big(\frac{C-A}{2}\Big)}.$$

Solución enviada por Titu Zvonaru, Comăneşti, Rumanía.

Sea R el circunradio del triángulo ABC. Como A' es el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita que no contiene al punto A, la recta AA' es la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$. Por el teorema del seno (aplicado al triángulo $CA'B'$, véase la figura 2) se obtiene

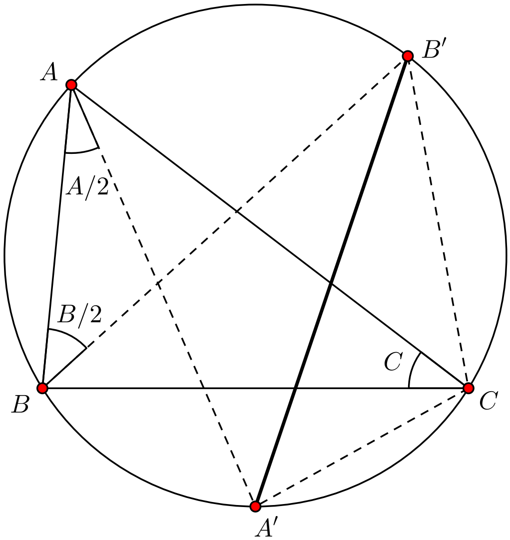

Figura 2: Esquema para la solución del Problema 437.

$$\begin{aligned} A'B' &= 2R \operatorname{sen}(\angle A'CB') = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2} + C + \frac{B}{2}\right) \\ &= 2R \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}\right) = 2R \cos\left(\frac{C}{2}\right), \end{aligned}$$

siguiéndose que

$$\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A'B' \cdot B'C' \cdot C'A'} = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)} = 8 \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right).$$

Así, solo queda probar

$$8 \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) \leq \sqrt{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}. \quad (1)$$

Siguen cuatro demostraciones de esta desigualdad.

Primera prueba de (1). Sean r y s, respectivamente, el inradio y el semiperímetro de ABC. Usando las identidades (ver [1, 2.12] para la primera y [4, IV.2, fórmula

(40)] para la segunda)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{r}{4R},$$

y

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)=\frac{s^2+r^2+2Rr}{8R^2},$$

se trata de probar

$$\frac{4r^2}{R^2}\leq\frac{s^2+r^2+2Rr}{8R^2},$$

una desigualdad que, usando la desigualdad de Gerretsen $s^2 \geq 16Rr-5r^2$ (véase [1, 5.8] o [4, III.4, pág. 45]), se reduce a la conocida desigualdad de Euler $2r \leq R$ [1, 5.1].

Segunda prueba de (1). A partir de

$$\begin{aligned}
&\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-8\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\\
&\quad=\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-4\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)\\
&\quad=\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\right)^2\geq 0
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left(8\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\right)^3\\
&\qquad\leq\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Ahora, como obviamente

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)\right)^{2/3}\\
&\qquad\leq\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

tenemos el resultado.

Tercera prueba de (1). Esta desigualdad es equivalente a

$$\prod_{\text{cíclico}}\left(4\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\right)\leq\prod_{\text{cíclico}}\left(\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\right).$$

Denotando $x = \cot(A/2)$, $y = \cot(B/2)$, $z = \cot(C/2)$, se tiene $x, y, z > 0$ y $xyz = x + y + z$ (ver [1, 2.43, 2.44]). La desigualdad se convierte en

$$64 \leq (xy + 1)(yz + 1)(zx + 1),$$

que resulta ser equivalente a

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 5(xy + yz + zx) \geq 63.$$

Ya que se cumple la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (Cauchy-Schwarz, por ejemplo), bastaría probar $xy + yz + zx \geq 9$ o, equivalentemente,

$$xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

En este caso, esta desigualdad se puede escribir en la forma

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

que se reconoce de inmediato como la desigualdad que verifican las medias armónica y aritmética de los tres números positivos x, y y z.

Cuarta prueba de (1). Como también se verifica

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right) \leq \left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)\right)^{1/2},$$

basta probar

$$8\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) \leq \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right). \quad (2)$$

Multiplicando uno y otro lado de (2), respectivamente, por

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{C+A}{2}\right),$$

la desigualdad (2) resulta ser equivalente a

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \leq \frac{1}{8}(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)(\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)(\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} A),$$

o bien, a

$$8abc \leq (a + b)(b + c)(c + a),$$

donde a, b y c son, respectivamente, las longitudes de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. Pero esta última desigualdad se cumple para tres números positivos cualesquiera, ya que se puede obtener aplicando tres veces la desigualdad $2\sqrt{xy} \leq (x + y)$ que se cumple entre las medias geométrica y aritmética de dos números positivos x e y.

También resuelto por F. D. Aranda, N. S. Dasireddy, J. Nadal, M. A. Pérez, B. Salgueiro, D. Văcaru, V. Vicario y el proponente.

Nota. Las soluciones enviadas por Dasireddy, Văcaru, Vicario y el proponente son del tipo de la primera de las pruebas que da Zvonaru. Văcaru aporta la referencia (en rumano) [2]. Nadal utiliza cálculo diferencial. Las elaboraciones de Aranda y Pérez son más próximas a la cuarta de las pruebas publicadas. La solución de Salgueiro es exactamente esa misma cuarta prueba. Salgueiro, además, reconoce la desigualdad (2) como una de las desigualdades del Problema 585 de *Crux Mathematicorum*, propuesto en 1980 por J. Garfunkel (Flushing, NY). La prueba que publicó la revista en 1981 [3] se debía a M. S. Klamkin (University of Alberta). Le agradecemos a Salgueiro esta información.

Referencias

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić y D. S. Mitrinović, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Pub., Groningen, 1969.

[2] M. Chirciu, *Trigonometric inequalities. From initiation to performance*, Paralela 45 Publishing House, Piteşti, 2016.

[3] M. S. Klamkin, Solution to Problem 585, *Crux Mathematicorum* **7** (1981), no. 10, 303–304.

[4] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić y V. Volenek, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

Problema 438. *Propuesto por Manuel Bello Hernández, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \infty.$$

Solución enviada por Paolo Perfetti, Università degli studi di Tor Vergata, Roma Italia.

Dado $\varepsilon > 0$, por tratarse de una serie convergente existe N tal que

$$\sum_{k=[n/2]+1}^{n} a_k < \varepsilon, \qquad n > N,$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x. Así, por la desigualdad entre la media armónica y la aritmética,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{n^2}\sum_{k=[n/2]+1}^{n}\frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{n^2}\frac{(n-[n/2])^2}{\sum_{k=[n/2]+1}^{n} a_k} \geq \frac{1}{4\varepsilon}$$

y el resultado se sigue inmediatamente.

También resuelto por J. L. Arregui, M. Fernández, Kee-Wai Lau, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

NOTA. Como indica el proponente, la fracción $1/n^2$ no puede sustituirse por una con mayor decaimiento en n. Por ejemplo, tomando $a_n = n^{-(\gamma+1)}$ con $\gamma > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y, sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\gamma+2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{\gamma+2}.$$

Tampoco es posible cambiar $1/n^2$, por ejemplo, por $1/(n^2 \log^\gamma n)$ con $\gamma > 1$. Para comprobar este hecho tomaremos $a_n = 1/(n \log^\gamma(n+1))$. Es conocido (basta aplicar el criterio de condensación de Cauchy) que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Ahora, aplicando el criterio de Stolz y la equivalencia

$$(n+1)^2 \log^\gamma(n+1) - n^2 \log^\gamma n \sim 2n \log^\gamma n,$$

que puede probarse usando $s_n^\gamma - 1 \sim \gamma(s_n - 1)$ donde s_n es una sucesión tendiendo a uno, deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 \log^\gamma n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 439. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^2 - 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Denotando por S la suma a evaluar, probaremos que

$$S = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}(\zeta(3) - \zeta(2)),$$

donde ζ es la función zeta de Riemann.

Para obtener el resultado aplicaremos la fórmula de sumación de Abel

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1}) + \lim_{N\to\infty} A_N b_{N+1},$$

siendo $A_n = a_1 + \cdots + a_n$, con $a_n = n^2$, y

$$b_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^2 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} = (\psi'(n))^2 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3},$$

donde $\psi'(z)$ es la derivada de la función digamma, que suele conocerse como función trigamma, y se define como

$$\psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Usando la expresión asintótica dada en la fórmula (5.15.8) de `https://dlmf.nist.gov/5.15`, tenemos que, cuando x tiende a infinito,

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \tag{1}$$

y

$$(\psi'(x))^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

De este modo, como $A_n = n(n+1)(2n+1)/6$, llegamos a

$$\lim_{N\to\infty} A_N b_{N+1} = \frac{1}{3} \lim_{N\to\infty} N^3 \left((\psi'(N+1))^2 - \frac{1}{N^2} - \frac{1}{N^3}\right) = 0.$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= (\psi'(n) + \psi'(n+1))(\psi'(n) - \psi'(n+1)) - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \\ &= \frac{2}{n^2}\psi'(n) - \frac{2n^4 + 7n^3 + 7n^2 + 4n + 1}{n^4(n+1)^3}, \end{aligned}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3n}\psi'(n) - \frac{(2n+1)^2(n^3+3n^2+2n+1)}{6n^3(n+1)^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{3n} \left(\psi'(n) - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{6n^2(n+1)^2} =: S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Para S_2, usando una descomposición en fracciones simples, se verifica que

$$S_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{6} + \frac{\zeta(2)}{3}.$$

Tomando

$$S_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\psi'(n) - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right),$$

$$S_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\psi'(n) - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{y} \qquad S_{1,3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi'(n)}{n},$$

la suma S_1 podemos descomponerla como

$$S_1 = S_{1,1} + S_{1,2} + S_{1,3} - \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = S_{1,1} + S_{1,2} + S_{1,3} - \frac{5}{6}\zeta(2) - \frac{\zeta(3)}{6}.$$

De esta manera, probando que $S_{1,1} = 1/4$, $S_{1,2} = 1$ y $S_{1,3} = 2\zeta(3)$ obtendremos el valor buscado de S.

Para sumar $S_{1,1}$ aplicaremos la fórmula de sumación de Abel con $a_n = n$, lo que implica que $A_n = n(n+1)/2$, y $b_n = \psi'(n) - 1/n - 1/(2n^2)$, con lo que $b_n - b_{n+1} = 1/(2n^2(n+1)^2)$. Así,

$$S_{1,1} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty} N^2\left(\psi'(N+1) - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2(N+1)^2}\right) = \frac{1}{4},$$

donde para sumar la última serie hemos usado una descomposición en fracciones simples y para evaluar el límite hemos aplicado (1).

El valor de $S_{1,2}$ es otra vez consecuencia de la fórmula de sumación de Abel con $a_n = 1$ y $b_n = \psi'(n) - 1/n$, de donde se tiene que $A_n = n$ y $b_n - b_{n+1} = 1/(n^2(n+1))$. En efecto,

$$S_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} + \lim_{N\to\infty} N\left(\psi'(N+1) - \frac{1}{N+1}\right) = 1,$$

donde en el paso final hemos procedido como en $S_{1,1}$.

Finalmente, para evaluar $S_{1,3}$ aplicamos nuevamente la fórmula de sumación de Abel con $a_n = 1/n$ y $b_n = \psi'(n)$. Como $A_n = H_n$, con H_n siendo el n-ésimo número armónico, y $b_n - b_{n+1} = 1/n^2$, usando que $H_n \sim \log n$ y (1), tenemos que

$$S_{1,3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2} + \lim_{N\to\infty} H_N\psi'(N+1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3),$$

donde la última identidad puede verse probada en la nota al Problema 288 de esta sección.

También resuelto por B. Bradie, Kee-Wai Lau, P. Perfetti y los proponentes.

PROBLEMA 440. *Propuesto por Óscar Ciaurri, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Para cada entero no negativo k, evaluar las integrales

$$C_k = \int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 t - P_k(t)}{t^{2k+1}}\right)^2 dt \qquad \text{y} \qquad O_k = \int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 t - P_k(t)}{t^{2k+2}}\right)^2 dt,$$

donde $P_0(t) = 0$ y

$$P_k(t) = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}2^{2j-1}}{(2j)!}t^{2j}.$$

Solución enviada por el proponente.

Vamos a probar que

$$C_k = \frac{4^{2k-1}\pi}{(4k+1)!}\binom{4k}{2k} \qquad \text{y} \qquad O_k = \frac{4^{2k}\pi}{(4k+3)!}\binom{4k+2}{2k+1}.$$

Si definimos la transformada de Fourier de una función f como

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}\,dx,$$

tomando las funciones

$$f_k(x) = \begin{cases} (x+2)^{2k}, & -2 \le x \le 0,\\ -(x-2)^{2k}, & 0 < x \le 2,\\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus[-2,2], \end{cases}$$

y

$$g_k(x) = \begin{cases} -(x+2)^{2k+1}, & -2 \le x \le 0,\\ (x-2)^{2k+1}, & 0 < x \le 2,\\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus[-2,2], \end{cases}$$

es fácil comprobar que

$$\widehat{f_k}(t) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}A_k(t) \qquad \text{y} \qquad \widehat{g_k}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}B_k(t),$$

donde

$$A_k(t) = \int_0^2 (x-2)^{2k}\operatorname{sen}(xt)\,dx \qquad \text{y} \qquad B_k(t) = \int_0^2 (x-2)^{2k+1}\cos(xt)\,dx.$$

Como probaremos posteriormente, se cumple que

$$A_k(t) = \frac{2(-1)^k(2k)!}{t^{2k+1}}(\operatorname{sen}^2 t - P_k(t)) \tag{1}$$

y

$$B_k(t) = \frac{2(-1)^{k+1}(2k+1)!}{t^{2k+2}}(\operatorname{sen}^2 t - P_k(t)). \tag{2}$$

A partir de las relaciones anteriores, aplicando la identidad de Plancherel,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2\,dt,$$

concluimos el resultado. En efecto, es claro que

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f_k}(t)|^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (A_k(t))^2\,dt$$

$$= \frac{8((2k)!)^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 t - P_k(t)}{t^{2k+1}} \right)^2 dt = \frac{16((2k)!)^2}{\pi} C_k$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} |f_k(x)|^2 \, dx = 2 \int_0^2 (x-2)^{4k} \, dx = \frac{4^{2k+1}}{4k+1},$$

lo que implica el resultado para C_k. Para obtener el valor de O_k usamos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g_k}(t)|^2 \, dt &= \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (B_k(t))^2 \, dt \\ &= \frac{8((2k+1)!)^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 t - P_k(t)}{t^{2k+2}} \right)^2 dt = \frac{16((2k+1)!)^2}{\pi} O_k \end{aligned}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} |g_k(x)|^2 \, dx = 2 \int_0^2 (x-2)^{4k+2} \, dx = \frac{4^{2k+2}}{4k+3},$$

lo que concluye la demostración.

Centrémonos ahora en la prueba de (1) y (2). Aplicando integración por partes una vez, deducimos que

$$B_k(t) = -\frac{2k+1}{t} A_k(t)$$

y, por tanto, (2) será una consecuencia de (1). Integrando por partes dos veces llegamos a la relación de recurrencia

$$A_k(t) = \frac{2^{2k}}{t} - \frac{2k(2k-1)}{t^2} A_{k-1}(t)$$

que es también satisfecha por las funciones $2(-1)^k(2k)!(\operatorname{sen}^2 t - P_k(t))/t^{2k+1}$ (para chequear este detalle debemos utilizar la expresión explícita para los polinomios $P_k(t)$). De este modo, usando que $A_0(t) = 2\operatorname{sen}^2 t/t$, la demostración de (1) queda concluida.

También resuelto por S. M. Stewart.

NOTA. S. M. Stewart indica que para obtener el resultado puede utilizarse la transformada de Fourier [2], de un modo análogo al de la solución presentada, o la teoría de los residuos [1]. Sin embargo, para llegar a su solución aplica el denominado método de *integración por diferenciación*, desarrollado en [3].

REFERENCIAS

[1] R. A. Gordon, Integrating the tails of two Maclaurin series, *J. Class. Anal.* **18** (2021), 83–95.

[2] S. M. Stewart, Some improper integrals involving the square of the tail of the sine and cosine functions, *J. Class. Anal.* **16** (2020), 91–99.

[3] D. Jia, E. Tang y A. Kempf, Integration by differentiation: new proofs, methods and examples, *J. Phys. A* **50** (2017), artículo 235201, 25 págs.