Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 25 (2022), Núm. 2, Pág. 298

Los números e y π como esperanza de variables aleatorias

El número de valores aleatorios en $(0,1)$ (cada uno independiente del resto y con distribución uniforme) que vamos tomando hasta que suman más de 1 es una variable cuya esperanza es el número e. La introdujo como un ejemplo el matemático ucraniano V. B. Gnedenko. Por su parte, el número de agujas de longitud 1 que vamos lanzando sobre un suelo de listones rectos de anchura 2, hasta que la aguja recién lanzada queda a caballo entre dos listones, tiene esperanza π. Es una versión del problema de la aguja de Buffon, que suele representarse en actividades divulgativas. Ambas variables aparecen habitualmente en textos y cursos de Probabilidad.

En esta nota presentamos otras dos variables, que se definen muy similarmente entre sí. Son más fáciles de realizar como juego, y además el cálculo de su esperanza es mucho más directo.

(a) Comenzamos con una bola negra y una blanca en una bolsa opaca. En cada paso hacemos lo mismo: sacamos una bola al azar; si es blanca terminamos, pero si es negra la devolvemos junto con otra bola blanca y damos otro paso. El valor de la variable es el número de bolas usadas.

(b) Comenzamos con una bola negra y dos blancas en una bolsa opaca. En cada paso hacemos lo mismo: sacamos una bola al azar; si es blanca terminamos, pero si es negra la devolvemos junto con otra bola blanca y otra bola negra y damos otro paso. El valor de la variable es el número de bolas negras usadas.

La esperanza de la primera variable es e (de hecho, la probabilidad de cada valor es como en la de Gnedenko), y la esperanza de la segunda variable es $\pi/2$. Para mostrar que es así, usaremos que una variable X que solo toma valores enteros no negativos tiene por esperanza

$$\mathrm{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > n)\,,$$

y entonces los valores de cada una de las esperanzas son, respectivamente,

$$\text{(a)} \qquad 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e\,, \qquad \text{y}$$

$$\text{(b)} \qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}\,.$$

José Luis Arregui, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: jose-luis.arregui@unirioja.es