Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2023.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 436 (Corrección). *Propuesto por Thanasis Gakopoulos y Juan José Isach Mayo.*

Sean O, H y L, respectivamente, el circuncentro, el ortocentro y el punto simediano de un triángulo ABC de circunferencia circunscrita ω, y sean M y N, respectivamente, los puntos medios de los lados AB y AC. Además, sean $OH \cap AL = T$ y $AH \cap OL = S$. Supongamos que las rectas OH y AL son perpendiculares. Demostrar que, en este caso, se cumplen las cuatro afirmaciones siguientes:

a) $a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4$, donde $a = |BC|$, $b = |CA|$ y $c = |AB|$.

b) La recta OL es paralela al lado BC.

c) Los puntos A, M, N, O, T y S son concíclicos.

d) Si denotamos por γ la circunferencia que pasa por los puntos del apartado anterior, ω y γ son tangentes en el punto A.

Problema 441 $\star$. *Propuesto por Jules Verne, G. C. H. M., París, Francia.*

Dadas dos circunferencias ω y ω', desde cada punto A situado en ω se trazan las tangentes a ω' y se traza después la recta r_A que une los puntos de contacto de estas tangentes; se traza también la recta t_A tangente en A a la circunferencia ω; se pregunta por el lugar geométrico, al variar A, del punto de intersección de las rectas r_A y t_A.

Problema 442. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Demostrar que existen infinitos conjuntos de cuatro triángulos rectángulos distintos cuyos lados son números naturales primos entre sí dos a dos, y que tienen la misma área.

Problema 443. *Propuesto por Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Daniel Sitaru, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sea ABC un triángulo de área S y en el que las longitudes de sus lados son a, b y c. Probar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad

$$\frac{a^3}{a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x} + \frac{b^3}{b\operatorname{sen}^2 x + c\cos^2 x} + \frac{c^3}{c\operatorname{sen}^2 x + a\cos^2 x} \geq 4\sqrt{3}S.$$

Problema 444. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Juan y Luis han salido a dar un paseo alrededor de un estanque circular bordeado por un camino, también circular y de anchura w, partiendo ambos de un cierto punto A situado en el borde del estanque. Juan anda continuamente alrededor del estanque en sentido contrario a las agujas del reloj con una velocidad v_J y Luis, que camina a una velocidad v_L, con $0 < v_J < v_L$, va en línea recta desde el punto de partida hasta un cierto punto B en el borde exterior del camino y vuelve al borde del estanque caminando nuevamente en línea recta, encontrándose con Juan en un cierto punto C. Probar que existe un trayecto para Luis que minimiza el tiempo que transcurre hasta el encuentro.

Problema 445. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Si H_n denota el n-ésimo número armónico, evaluar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_{n+1}}{n(n+1)(n+2)}.$$

Problema 446. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Calcular
$$\int_0^\infty \frac{(\operatorname{sen} x - x)^3}{x^5}\, dx.$$

Problema 447. *Propuesto por Daniel Sitaru, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 \leq a \leq b$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que
$$\sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt[n]{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} + \sqrt[n]{ab + \frac{(b^2-a^2)^2}{2(a^2+b^2)}}.$$

Problema 448. *Propuesto por Óscar López Pouso, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, A Coruña.*

Entendiendo que $\prod_{j=a}^{b}$ vale 1 cuando $a > b$, demostrar que
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} \prod_{j=0}^{i-1} (k-j) = \frac{1}{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$
y
$$\sum_{i=k^*}^{k} \frac{(-1)^i}{(i-k^*)!} \prod_{j=0}^{i-1} (k-j) = 0, \qquad k, k^* = 0, 1, \ldots, \text{ y } k^* < k.$$

Soluciones

Problema 417. *Propuesto por José Luis Arregui, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Dado un número natural n fijo, vamos a seleccionar un valor natural entre 1 y n (aquí, y en lo que sigue, «entre a y b» siempre incluye a los extremos a y b) usando un proceso de varias etapas, tras el cual nos quedaremos con el valor final de una secuencia de valores naturales intermedios. Tomamos $n_0 = n$, y obtenemos n_1 con probabilidad uniforme entre 1 y n_0; entonces obtenemos n_2 entre n_0 y n_1 con probabilidad uniforme; después n_3 entre n_1 y n_2 con probabilidad uniforme; y así sucesivamente. Terminamos el proceso en cuanto $n_j = n_{j-1}$, y nos quedamos con el número n_j. Para cada k entre 1 y n, ¿cuál es la probabilidad de que el número seleccionado sea k?

Solución enviada por el proponente.

Dado n fijo, llamemos $P_{k,n}$ a la probabilidad de que el número seleccionado sea k. Vamos a probar que

$$P_{k,n} = \frac{k}{T_n}, \tag{1}$$

donde $T_n = n(n+1)/2$. Este resultado general se puede conjeturar fácilmente analizando los casos $n = 2$, 3 y 4.

Para demostrar (1) usaremos que

$$S_n := \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \cdots + \frac{1}{T_n} = \frac{2n}{n+1}.$$

En efecto, puesto que

$$\frac{1}{T_k} = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

estamos ante una suma telescópica y

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}.$$

Para obtener la expresión de $P_{k,n}$ usamos la recursividad y la simetría del problema: si k está en $[j,n]$, la probabilidad de seleccionar el número k condicionada a que $n_1 = j$ es $P_{n-k+1,n-j+1}$ (quedan $n-j+1$ números, porque los menores que j ya no se pueden seleccionar y, entre ellos, k ocupa, en orden decreciente, el lugar $n-k+1$). Por tanto, es claro que

$$\begin{aligned}
P_{k,n} &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(n_1 = j)\,\mathrm{P}(\text{el número seleccionado es } k \mid n_1 = j)\\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} P_{n-k+1,n-j+1} = \frac{1}{n}\sum_{j=n-k+1}^{n} P_{n-k+1,j}.
\end{aligned}$$

Entonces, llamando k a $n-k+1$, se deduce que

$$\sum_{j=k}^{n} P_{k,j} = nP_{n-k+1,n}, \qquad k = 1,\dots,n. \tag{2}$$

Probaremos ahora (1) por doble inducción. Para $k = n = 1$ el resultado es cierto. Si (1) se cumple siempre que el segundo índice no supere n, cuando ese índice vale $n+1$, aplicando (2), tenemos que

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{k}{T_j} + P_{k,n+1} = (n+1)P_{n+2-k,n+1}, \qquad k = 1,\dots,n+1,$$

o bien, cambiando k por $n+2-k$, que

$$\sum_{j=n+2-k}^{n} \frac{n+2-k}{T_j} + P_{n+2-k,n+1} = (n+1)P_{k,n+1}, \qquad k = 1,\dots,n+1.$$

Así, eliminando $P_{n+2-k,n+1}$ entre las dos ecuaciones anteriores, resulta

$$\begin{aligned} P_{k,n+1} &= \frac{1}{n(n+2)}\left((n+1)(n+2-k)\sum_{j=n+2-k}^{n}\frac{1}{T_j} + k\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{T_j}\right) \\ &= \frac{1}{n(n+2)}\big((n+1)(n+2-k)(S_n - S_{n+1-k}) + k(S_n - S_{k-1})\big) = \frac{k}{T_{n+1}}, \end{aligned}$$

como queríamos probar.

Nota. La expresión (1) de la solución equivale a la identidad $P_{k,n} = kP_{1,n}$, pero no sabemos probar directamente este hecho.

No se han recibido otras soluciones.

Problema 418. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

En el triángulo ABC se tiene $\angle ABC = \angle BCA > \pi/3$. Sean O, I y H el circuncentro, el incentro y el ortocentro, respectivamente, del triángulo. Si $OI = 3$ y $HI = 2$, calcular el área de ABC.

Primera solución, elaborada por los editores y basada en las enviadas (independientemente) por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca (la primera de sus dos soluciones); Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba; y Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.

Sean r y R, respectivamente, los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo ABC, sea M el punto medio de la base BC y A' el segundo punto de intersección de la altura AM con la circunferencia circunscrita, simétrico del punto A respecto de O. Denotemos $\angle ABM = \angle ACM = \beta$.

Como $\pi/2 > \beta > \pi/3$, se tiene

$$\angle OBM = 2\beta - \frac{\pi}{2} > \frac{\beta}{2} = \angle IBM \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{2} > \frac{\pi}{2} - \beta = \angle HBM > 0,$$

luego los puntos O, I y H están alineados dentro de la altura en ese orden, como se ve en la figura 1.

Por el teorema del ángulo inscrito en una circunferencia se tiene $\angle HBM = \angle A'BM$, de modo que $HM = MA'$ y $OA' = R = 5+2(r-2) = 1+2r$. Sustituyendo esta relación en la identidad de Euler $R(R-2r) = OI^2 = 9$ se obtienen, en este caso, los valores $R = 9$ y $r = 4$. De modo que $MA' = r-2 = 2$, y el teorema de la altura en el triángulo rectángulo ABA' da $BM = \sqrt{AM \cdot MA'} = 4\sqrt{2}$. Entonces, el área de ABC es $BM \cdot AM = 64\sqrt{2}$.

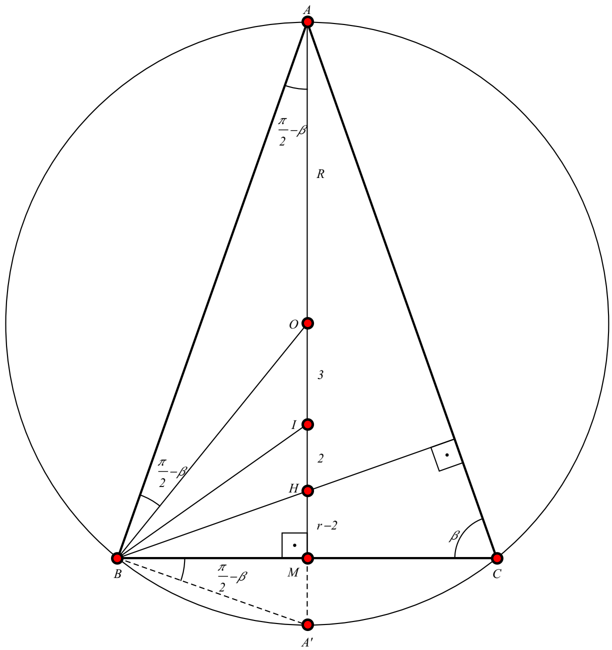

Figura 1: Esquema para la primera solución al Problema 418.

Segunda solución, enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Sean M el punto medio de la base BC, N el punto medio de la altura AM y P el punto medio del lado BC, y denotemos $\angle ABM = \angle ACM = \beta$ y las longitudes $HM = t$, $BM = u$ y $AM = h$.

Los triángulos rectángulos ACM y PON son semejantes al BHM (ver la figura 2). De ahí se obtienen, respectivamente, las relaciones

$$u^2 = ht \qquad \text{y} \qquad ON = \frac{t}{2}. \tag{1}$$

Usando la segunda igualdad en (1), resulta

$$h = 2NM = 2\left(t + 5 + \frac{t}{2}\right) = 3t + 10. \tag{2}$$

Por otra parte, $\tan\beta = h/u$ y $\tan(\beta/2) = (t+2)/u$, y de la relación $\tan(2x) = 2\tan x/(1-\tan^2 x)$ se sigue

$$2u^2(t+2) = h\big(u^2 - (t+2)^2\big),$$

de donde, usando la primera igualdad en (1) y (2), se obtiene inmediatamente $t = 2$, $h = 16$. Con ello, $u^2 = 32$, luego $u = 4\sqrt{2}$ y, finalmente, el área del triángulo ABC es $uh = 64\sqrt{2}$.

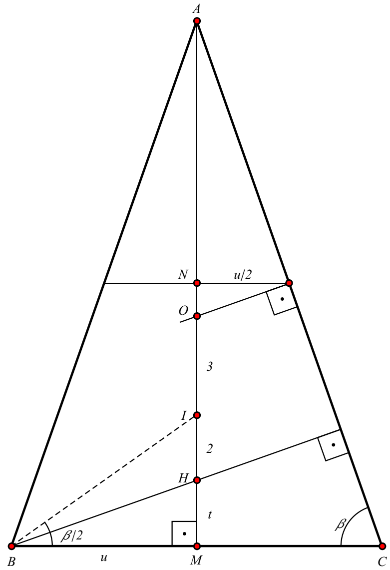

Figura 2: Esquema para la segunda solución al Problema 418.

También resuelto por M. Amengual (otra solución), R. Barroso, K.-W. Lau, C. Sacristán, B. Salgueiro, A. Stadler, V. Vicario y el proponente.

Nota. En su solución, Vicente Vicario calcula R, r y el semiperímetro s del triángulo resolviendo el sistema formado por la ecuación de Euler y las ecuaciones

$$OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2s^2 \qquad \text{y} \qquad IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - s^2$$

que, como nos indica, pueden encontrarse probadas en su trabajo «Caracterización del triángulo HIO», disponible (desde el año 2007) en `https://personal.us.es/rbarroso/rbarroso/trianguloscabri/400vicHIO.htm`.

Problema 419. *Propuesto por George Stoica, Saint John, New Brunswick, Canadá.*

Sea f una función convexa perteneciente a la clase $C^1(\mathbb{R})$. Si existen dos valores fijos $x_1, x_2 \in [0,1]$ para los que $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(x_2)$, probar que $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Primera solución, enviada por Manuel Fernández López, AMTEGA-Servizos centrais (Consellería de Educación), Santiago de Compostela, A Coruña.

Usaremos que una función convexa en $[0,1]$ cumple, por definición, que

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b), \qquad a, b, t \in [0,1],$$

y, además,

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a), \qquad a, x \in [0,1].$$

Así, para $x_1, x_2 \in [0,1]$ distintos y tales que $f(x_1) - f(x_2) = f'(x_2)(x_1 - x_2)$ (el resultado para $x_1 = x_2$ es evidente), se cumple que

$$\begin{aligned} tf(x_1) + (1-t)f(x_2) &\geq f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq f(x_2) + tf'(x_2)(x_1 - x_2) \\ &= f(x_2) + t(f(x_1) - f(x_2)) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2);$$

es decir, en el intervalo $[x_1, x_2]$ la gráfica de la función f es una recta de pendiente $(f(x_1) - f(x_2))/(x_1 - x_2)$ y se verifica que $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Segunda solución, enviada por K.-W. Lau, Hong Kong, China.

Para cada $x \in [0,1]$, consideramos la función $g(x) = f'(x) - f'(x_2)$. Puesto que f es una función convexa y derivable, f' es una función no decreciente. Además, como $f \in C^1(\mathbb{R})$, se tiene que g es continua, no positiva en $[0, x_2]$ y no negativa en $[x_2, 1]$. De esta forma, como

$$-\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx = \int_{x_2}^{x_1} g(x)\,dx = f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2)f'(x_2) = 0,$$

podemos deducir que $g(x) = 0$ para $x \in [x_1, x_2]$, si $x_1 \leq x_2$, y para $x \in [x_2, x_1]$, si $x_2 \leq x_1$. Así es claro que $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Además, es elemental deducir que $f(x) = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$.

Tercera solución, enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Supongamos que, por ejemplo, $f'(x_1) < f'(x_2)$ (de manera análoga se razonaría si supusiésemos $f'(x_1) > f'(x_2)$). Como la derivada de una función convexa es no decreciente, por la continuidad de f' tendremos que existirá $\varepsilon > 0$ tal que $f'(x) < f'(x_2)$ para $x \in [x_1, x_1 + \varepsilon]$. Por tanto,

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx < \int_{x_1}^{x_2} f'(x_2)\,dx = f'(x_2)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$

lo que es absurdo.

También resulto por S. Alzate, J. Vinuesa y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 420. *Propuesto por Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Se denotan por h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas del triángulo ABC y por s su semiperímetro. Probar la desigualdad

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{h_a}{h_b h_c (h_b + h_c)} \geq \frac{9}{2s^2}.$$

Primera solución, enviada por K.-W. Lau, Hong Kong, China.

Sean también, respectivamente, r y F el radio del círculo inscrito y el área del triángulo ABC. Como $2F = ah_a = bh_b = ch_c = 2rs$, se tiene

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{h_a}{h_b h_c (h_b + h_c)} = \frac{1}{4F^2} \sum_{\text{cíclica}} \frac{(bc)^2}{a(b+c)},$$

y la desigualdad del problema es equivalente a

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{(bc)^2}{a(b+c)} \geq 18r^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (en la forma de Bergström) se tiene

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{(bc)^2}{a(b+c)} \geq \left(\sum_{\text{cíclica}} bc \right)^2 \left(\sum_{\text{cíclica}} a(b+c) \right)^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{\text{cíclica}} bc.$$

Y ahora, utilizando sucesivamente las desigualdades

$$\sum_{\text{cíclica}} bc \geq 4\sqrt{3}F \qquad \text{y} \qquad s \geq 3\sqrt{3}r,$$

que se corresponden, respectivamente, con las desigualdades 4.5 y 5.11 en [1], se tiene

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{cíclica}} bc \geq 2\sqrt{3}F = 2\sqrt{3}rs \geq 18r^2,$$

lo que completa la solución.

Segunda solución, enviada por Nandan Sai Dasireddy, Hyderabad, Telangana, India.

Usaremos las mismas notaciones que en la solución anterior. En primer lugar, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (en la forma de Bergström) se tiene

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{h_a}{h_b h_c (h_b + h_c)} = \frac{1}{h_a h_b h_c} \sum_{\text{cíclica}} \frac{h_a^2}{h_b + h_c} \geq \frac{h_a + h_b + h_c}{2h_a h_b h_c}.$$

A continuación se utiliza, primero, la desigualdad $h_a + h_b + h_c \geq 9r$, que se corresponde con la desigualdad 6.8 de [1], y las diversas expresiones del área F, incluida $F = abc/(4R)$, siendo R el radio del círculo circunscrito. Y se acaba usando la desigualdad de Euler $R \geq 2r$. En efecto,

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{2h_a h_b h_c} \geq \frac{9r}{2h_a h_b h_c} = \frac{9rabc}{16F^3} = \frac{9rR}{4F^2} = \frac{9R}{4rs^2} \geq \frac{18r}{4rs^2} = \frac{9}{2s^2}.$$

Tercera solución, enviada por Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba.

Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica se tiene

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{h_a}{h_b h_c (h_b + h_c)} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{h_a h_b h_c (h_b + h_c)(h_c + h_a)(h_a + h_b)}}$$

y, también,

$$\sqrt[3]{h_a h_b h_c} \leq \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c) \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{(h_b + h_c)(h_c + h_a)(h_a + h_b)} \leq \frac{2}{3}(h_a + h_b + h_c),$$

por lo que

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{h_a}{h_b h_c (h_b + h_c)} \geq \frac{27}{2(h_a + h_b + h_c)^2}.$$

Basta ahora probar la desigualdad

$$\frac{27}{2(h_a + h_b + h_c)^2} \geq \frac{9}{2s^2},$$

o bien, equivalentemente,

$$h_a + h_b + h_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

Pero esta es la desigualdad 6.1 en [1] (el autor proporciona una prueba de este hecho que omitimos, por brevedad).

También resuelto por C. Beade, B. Bradie, I. V. Codreanu (dos soluciones), J. Nadal, A. Stadler y los proponentes. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. Todas las desigualdades que se usan en las soluciones seleccionadas son igualdades solamente cuando el triángulo es equilátero. Las soluciones de Codreanu son versiones de las soluciones segunda y tercera presentadas que al final usan la desigualdad de Gerretsen $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (desigualdad 5.8 en [1]). Las soluciones de Beade y de Stadler utilizan el *teorema de Muirhead*. Stadler aporta la fuente `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_triangle_inequalities`

Referencias

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

Problema 421. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathcal{H}_n F_{2n}}{4^n} = \frac{2}{29} \log\left(\frac{16}{5}\right) - \frac{44}{29\sqrt{5}} \log \varphi,$$

donde $\mathcal{H}_n$ es el n-ésimo número armónico alternado, definido por

$$\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

$\{F_n\}_{n\geq 0}$ son los números de Fibonacci, dados por la relación de recurrencia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 2$, con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, y $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es la razón áurea.

Solución enviada por Michael L. Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, EE. UU.

Usando que

$$\int_0^{\infty} e^{-ts}\, ds = \frac{1}{t}, \qquad t > 0,$$

se deduce que

$$\int_0^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-ns}}{e^s+1}\, ds = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_0^{\infty} e^{-(j+1)s}\, ds = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \mathcal{H}_n.$$

De este modo, denotando por S la suma a evaluar, deducimos la identidad

$$S = \int_0^{\infty} \frac{S_1 - S_2}{e^s+1}\, ds,$$

donde

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} F_{2n} \qquad \text{y} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{4^n} F_{2n}.$$

Como, por la fórmula de Binet para los números de Fibonacci, para $|x| < \varphi^2$ se tiene la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{2n} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-2n} x^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\varphi^2 x} - \frac{1}{1-\varphi^{-2} x} \right),$$

llegamos a que

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 + (\varphi/2)^2} - \frac{1}{1 + (2\varphi)^{-2}} \right)$$

y

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{e^s}{e^s - (\varphi/2)^2} - \frac{e^s}{e^s - (2\varphi)^{-2}} \right).$$

Así, usando que, para $w < 1$,

$$\int_0^\infty \frac{e^s}{(e^s+1)(e^s-w)}\, ds = \int_1^\infty \frac{dt}{(t+1)(t-w)} = \frac{-1}{w+1} \log\left(\frac{1-w}{2}\right),$$

tenemos

$$\int_0^\infty \frac{S_1}{e^s+1}\, ds = \frac{\log 2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 + (\varphi/2)^2} - \frac{1}{1 + (2\varphi)^{-2}} \right)$$

y

$$\int_0^\infty \frac{S_2}{e^s+1}\, ds = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{\log\left(\frac{1-(\varphi/2)^2}{2}\right)}{1 + (\varphi/2)^2} + \frac{\log\left(\frac{1-(2\varphi)^{-2}}{2}\right)}{1 + (2\varphi)^{-2}} \right).$$

De este modo,

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\log\left(1 - (\varphi/2)^2\right)}{1 + (\varphi/2)^2} - \frac{\log\left(1 - (2\varphi)^{-2}\right)}{1 + (2\varphi)^{-2}} \right).$$

Finalmente, como

$$1 - \frac{\varphi^2}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}\frac{1}{\varphi}, \qquad 1 - \frac{1}{4\varphi^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}\varphi,$$

$$\frac{1}{1 + (\varphi/2)^2} - \frac{1}{1 + (2\varphi)^{-2}} = -\frac{4\sqrt{5}}{29} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1 + (\varphi/2)^2} + \frac{1}{1 + (2\varphi)^{-2}} = \frac{44}{29},$$

se obtiene el resultado buscado.

También resuelto por N. Bhandari, B. Bradie, N. D. Dasireddy, J. Nadal, A. Stadler y el proponente.

NOTA. La mayoría de las soluciones recibidas se basan en la aplicación de la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n x^n = \frac{\log(1+x)}{1-x}, \qquad |x| < 1,$$

que puede deducirse fácilmente aplicando el producto de Cauchy de dos series, y en el uso de la fórmula de Binet para los números de Fibonacci.

Problema 422. *Propuesto por Toyesh Prakash Sharma (estudiante), St. C. F. Andrews School, Agra, India.*

Sea

$$a_n = 1 + \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} m^2 \int_0^1 (\log x)^{m-1}\, dx, \qquad n \geq 1.$$

Evaluar $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$.

Solución elaborada por los editores y basada en las enviadas (independientemente) por Alfonso Álamo Zapatero, Universidad de Valladolid, Valladolid; Narendra Bhandari, Bajaru, Nepal; Brian Bradie, Christopher Newport University, Newport News, VA; Michael L. Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York; Albert Stadler, Herrliberg, Suiza; y Seán M Stewart, King Abdullah University of Science and Technology, Arabia Saudita.

Aplicando el cambio de variable $x = e^{-t}$, tenemos que

$$\int_0^1 (\log x)^{m-1}\, dx = (-1)^{m-1} \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-t}\, dt = (-1)^{m-1}(m-1)!.$$

Así,

$$a_n = 1 + \sum_{m=1}^{n} m^2 (m-1)! = 1 + \sum_{m=1}^{n} ((m+1)! - m!) = (n+1)!.$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 = e - 2.$$

También resuelto por F. D. Aranda, P. Fernández, J. A. Fuentes, J. Nadal, C. Sacristán, J. Vinuesa y el proponente.

Nota. Todas las soluciones recibidas siguen un patrón similar al de la que hemos redactado, la única diferencia entre unas y otras es la forma de establecer el valor de a_n. En las que hemos destacado se utiliza un procedimiento telescópico para obtener a_n y en las restantes se emplea un argumento de inducción para hacerlo.

Cabe señalar que F. D. Aranda, para evaluar la integral de la propuesta, utiliza la interesante identidad $f'(x) = (\log x)^k$, donde

$$f(x) = (-1)^k k!\, x \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} (\log x)^j.$$

PROBLEMA 423. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos y p un entero positivo. Si consideramos $a_{n+1} = a_1$, probar las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(pa_k + (p-1)a_{k+1})a_k^{p+1}}{a_k^p + (p-1)a_{k+1}^p} \geq \frac{2p-1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(p^2 a_k^2 + p(p-1)a_k a_{k+1} + (p-1)^2 a_{k+1}^2)a_k^{p+1}}{a_k^p + (p-1)a_{k+1}^p} \geq \frac{3p^2 - 3p + 1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k^3.$$

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

A partir de la desigualdad

$$\frac{(px + (p-1)y)x^{p+1}}{x^p + (p-1)y^p} \geq px^2 - \frac{(p-1)^2}{p} y^2, \qquad x, y > 0, \tag{1}$$

obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(pa_k + (p-1)a_{k+1})a_k^{p+1}}{a_k^p + (p-1)a_{k+1}^p} \geq \sum_{k=1}^{n} \left(pa_k^2 - \frac{(p-1)^2}{p} a_{k+1}^2 \right) = \frac{2p-1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k^2,$$

lo que prueba la primera de las desigualdades propuestas. Para demostrar (1) basta observar que es equivalente a

$$\frac{(p-1)(px + (p-1)y)(x^p y + (p-1)y^{p+1} - pxy^p)}{p(x^p + (p-1)y^p)} \geq 0,$$

que es cierta puesto que, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\begin{aligned} x^p y + (p-1)y^{p+1} - pxy^p &= y^{p+1}\left(\frac{x^p}{y^p} + p - 1 - p\frac{x}{y} \right) \\ &= y^{p+1}\left(\frac{x^p}{y^p} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p-1 \text{ veces}} - p\frac{x}{y} \right) \\ &\geq y^{p+1}\left(p\frac{x}{y} - p\frac{x}{y} \right) = 0. \end{aligned}$$

La segunda de las desigualdades se sigue usando que

$$\frac{(p^2x^2 + p(p-1)xy + (p-1)^2y^2)x^{p+1}}{x^p + (p-1)y^p} \geq p^2x^3 - \frac{(p-1)^3}{p} y^3, \qquad x, y > 0,$$

que es cierta por ser equivalente a

$$\frac{(p-1)(p^2x^2 + p(p-1)xy + (p-1)^2y^2)(x^p y + (p-1)y^{p+1} - pxy^p)}{p(x^p + (p-1)y^p)} \geq 0.$$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(p^2a_k^2 + p(p-1)a_k a_{k+1} + (p-1)^2 a_{k+1}^2)a_k^{p+1}}{a_k^p + (p-1)a_{k+1}^p} \geq \sum_{k=1}^{n} \left(p^2 a_k^3 - \frac{(p-1)^3}{p} a_{k+1}^3 \right)$$
$$= \frac{3p^2 - 3p + 1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k^3$$

y hemos concluido.

Tambien resuelto por el proponente.

Problema 424. *Propuesto por Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean m un entero no negativo y

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2 - k + 1}\right), \qquad n \geq 1.$$

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1} - a_n^{m+1} \right).$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Si $\tan\beta_k = k$, tenemos que

$$\tan(\beta_k - \beta_{k-1}) = \frac{\tan\beta_k - \tan\beta_{k-1}}{1 + \tan\beta_k \, \tan\beta_{k-1}} = \frac{k - (k-1)}{1 + k(k-1)} = \frac{1}{k^2 - k + 1}.$$

Por tanto,

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2 - k + 1}\right) = \arctan k - \arctan(k-1)$$

y

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (\arctan k - \arctan(k-1)) = \arctan n.$$

Ahora, usando la fórmula ciclotómica

$$b^{m+1} - a^{m+1} = (b-a) \sum_{k=0}^{m} b^k a^{m-k},$$

la identidad

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad x > 0,$$

y los límites

$$\lim_{n\to\infty} n \arctan \frac{1}{n} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2},$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1} - a_n^{m+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k a_n^{m-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \arctan\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k \lim_{n\to\infty} a_n^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-k} = (m+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^m.
\end{aligned}$$

También resuelto por A. Álamo, B. Bradie, K.-W. Lau, J. Nadal, C. Sacristán, B. Salgueiro, A. Stadler, S. M. Stewart y los proponentes.