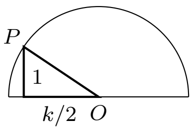
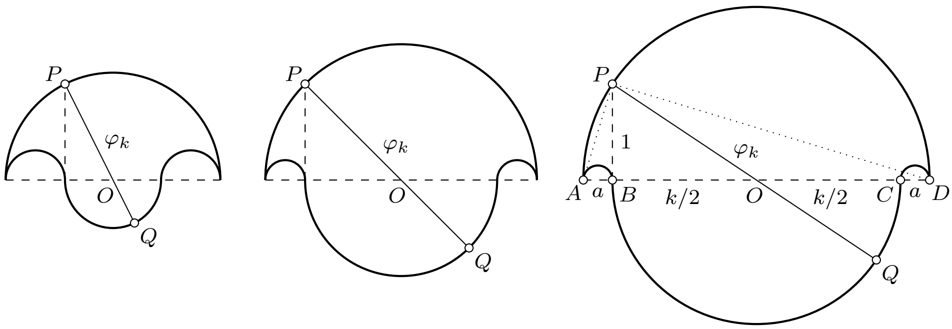
VOL. 25 (2022), NÚM. 2, PÁG. 326

# La razón áurea y las medias metálicas en el salino de Arquímedes

Para $k$ entero positivo, sea $\varphi_k = (k + \sqrt{k^2+4})/2$ la raíz positiva de la ecuación $x^2 - kx - 1 = 0$. Estas $\varphi_k$ satisfacen $\varphi_k = k + 1/\varphi_k$ y son las denominadas medias metálicas; cuando $k = 1$, $\varphi_1$ es la razón áurea.

Sobre un triángulo rectángulo de catetos 1 y $k/2$ se construye una semicircunferencia como muestra el gráfico adjunto. A partir de esa semicircunferencia construimos un salino de Arquímedes —Óscar Ciaurri nos lo presenta en su artículo «El “Libro de los lemas”: un ejercicio de visualización», *La Gaceta de la RSME* **17** (2014), 221–245— con lóbulo central de diámetro $k$, y prolongamos el radio $PO$ (hipotenusa del triángulo inicial) hasta que corta al borde del lóbulo central en el punto $Q$. En esas circunstancias, la longitud de $PQ$ es $\varphi_k$. Aquí mostramos los salinos correspondientes a $k = 1$, 2 y 3:




Comprobemos que $\mathrm{long}(PQ) = \varphi_k$ fijándonos en el salino de la derecha. Por el teorema de Pitágoras, $\mathrm{long}(PO) = \sqrt{1 + k^2/4}$; además, $\mathrm{long}(OQ) = k/2$. Entonces,

$$\mathrm{long}(PQ) = \mathrm{long}(PO) + \mathrm{long}(OQ) = \big(k + \sqrt{k^2+4}\big)/2 = \varphi_k.$$

El diámetro $a$ de los lóbulos laterales también está relacionado con las medias metálicas. El ángulo $APD$ es recto, pues abarca el diámetro de la circunferencia, con lo cual, por el teorema de la altura, $\mathrm{long}(AB)\cdot\mathrm{long}(BD) = 1^2$, es decir, $a(k+a) = 1$. Pero $k + a = \mathrm{long}(BO) + \mathrm{long}(OD) = \mathrm{long}(OQ) + \mathrm{long}(OP) = \varphi_k$, luego $a = 1/\varphi_k$.

JUAN LUIS VARONA, DPTO. DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
Correo electrónico: `jvarona@unirioja.es`
Página web: `https://www.unirioja.es/cu/jvarona/`