Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 25 (2022), Núm. 3, Pág. 512

Desigualdades entre medias en una parábola

Dados dos valores positivos a y b, cualquier valor intermedio entre ellos es susceptible de ser una media de ambos. Son de uso de uso común la media *armónica* $H = 2ab/(a+b)$, la *geométrica* $G = \sqrt{ab}$, la *aritmética* $A = (a+b)/2$ y la *cuadrática* $Q = \sqrt{(a^2+b^2)/2}$. En nuestro caso también nos interesan las denominadas *medias de Lehmer*, definidas, para $p \in \mathbb{R}$, como $L_p = (a^p + b^p)/(a^{p-1} + b^{p-1})$. Nótese que $H = L_0$, $G = L_{1/2}$ y $A = L_1$. En concreto, consideraremos $L = L_{3/2}$ y $C = L_2$; esta última suele denominarse media *contraarmónica*. Añadimos a nuestra lista la media *heroniana* $E = (a + \sqrt{ab} + b)/3$, que aparece ya en la fórmula para el volumen de un tronco de pirámide en el papiro de Moscú y es atribuida a Herón.

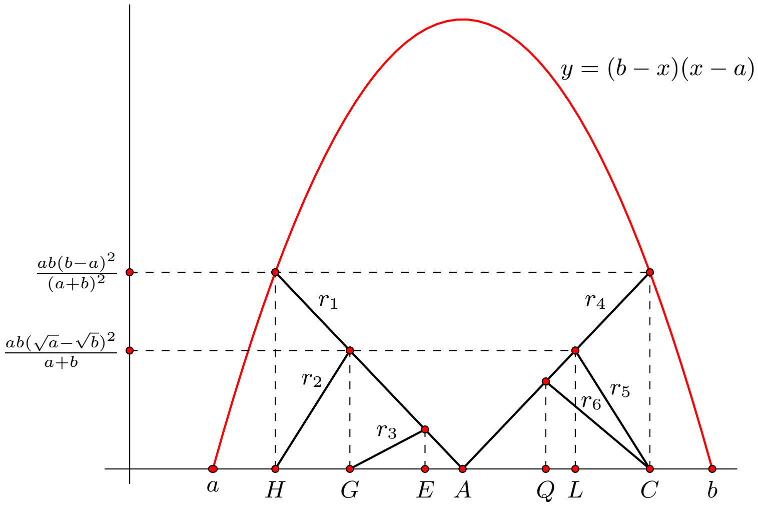
Nuestro objetivo es dar una demostración sin palabras de algunas desigualdades entre las medias descritas usando una parábola, mientras que lo habitual es usar circunferencias para representar geométricamente estas desigualdades.

Proposición. *Sean a y b números reales positivos tales que $a < b$. Entonces*

$$a < H < G < E < A < Q < L < C < b.$$

Además, se cumplen las relaciones $H - a = b - C$, $G - a = b - L$ y $G - H = C - L$.

La demostración es consecuencia inmediata de la figura siguiente, donde las rectas r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 y r_6 son, respectivamente, $y = -H(x-A)$, $y = G(x-H)$, $y = H(x-G)/2$, $y = H(x-A)$, $y = -G(x-C)$ e $y = -G^2(x-C)/Q$.



Óscar Ciaurri, Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: oscar.ciaurri@unirioja.es