Zubía 37-38 129-148 Logroño 2020-2021

TEOREMAS DE REORDENAMIENTO DE SERIES*

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ[1]
ALEJANDRO MAHILLO CAZORLA[2]

RESUMEN

La suma de una cantidad infinita de números reales puede depender del orden en el que se sumen los números. En este trabajo hacemos un recorrido por varios resultados que involucran reordenamiento de los términos de una serie, desde series en $\mathbb{R}$ hasta en espacios de Banach pasando por los euclidianos ($\mathbb{R}^n$). No incluimos demostraciones de los teoremas, solo las ideas básicas de éstas.

Primero vemos el caso de las series de números reales, donde presentamos el teorema de reordenamiento de Riemann junto con otros resultados. Continuaremos con el teorema de Lévy-Steinitz, un resultado análogo al de Riemann para series de vectores en $\mathbb{R}^n$. En particular, consideraremos la serie de Eisenstein, definida en los complejos, que tiene la propiedad de que al reordenar sus términos obtenemos un cambio en el valor de su suma; esta serie es útil al estudiar formas modulares. Por último, presentamos el teorema de Pechersky sobre reordenamiento de series en espacios de Hilbert, un resultado útil para probar la universalidad de la función ζ de Riemann.

Palabras clave: sucesiones, series, reordenamiento de series, convergencia absoluta, convergencia condicional, convergencia incondicional, sumabilidad, espacio de Banach, espacio de Hilbert.

---

* Registrado el 12 de febrero de 2020. Aprobado el 19 de enero de 2021.

1. Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, C/ Madre de Dios, 53, Edificio CCT, 26006 Logroño
Correo electrónico: `mbello@unirioja.es`

2. Universidad de La Rioja, C/ Madre de Dios, 53, Edificio CCT, 26006 Logroño
Correo electrónico: `alejandro.mahillo@alum.unirioja.es`

La investigación del primer autor ha sido subvencionada parcialmente por la 'Ministerio de Economía y Competitividad', Proyecto MTM2014-54043-P.

The sum of an infinite number of real numbers can depend on the arranging of these numbers. In this paper we will take you through several results about rearranging the terms of series; from series of real numbers to series in $\mathbb{R}^n$; even results about series in Banach spaces. We do not include proofs of theorems but only their main ideas.

First, we study the real numbers series case, in which we see the Riemann rearrangement theorem together with other results. We will continue with the Lévy-Steinitz theorem, an analogous result of Riemman's theorem for vector series in $\mathbb{R}^n$. In particular, we will consider the Eisenstein series defined in the complex field. Also, this series has the property that rearrangement in the order of summations results in a predictable change in the value of the series. This series is useful in the study of modular form. Finally, we show Pechershy's theorem on rearrangement of series in Hilbert spaces.

Key words: *sequences, series, rearrangements of series, absolutely convergence, conditional convergence, unconditional convergence, summability, Banach space, Hilbert space.*

1. INTRODUCCIÓN

La suma de números reales es conmutativa, pero esto no es válido, en general, cuando sumamos una cantidad infinita de números reales. Este hecho paradójico es el teorema de reodenamiento de Riemann que veremos en este trabajo y muestra el difícil tránsito a lo infinito del conocimiento matemático. Se debe tener en cuenta que el estudio del movimiento u otros procesos infinitos, ha llevado a cuestiones paradójicas desde los tiempos de los griegos, como atestiguan, por ejemplo, las paradojas de Zenón. Los resultados sobre reordenamiento de series permiten hacer un repaso por la evolución de las matemáticas.

Este trabajo está dedicado a presentar resultados sobre reodenamiento de series, tanto de números reales, como de vectores en espacios euclidianos de dimensión finita y en espacios de Hilbert y de Banach. No incluimos demostraciones, solo las ideas fundamentales de éstas. Buena parte del contenido de este artículo aparece en el Trabajo de fin de grado de su segundo autor (Mahillo Cazorla 2019), realizado bajo la dirección del primer autor. Recomendamos que aquel lector que quiera profundizar en el tema tratado aquí consulte dicho trabajo.

Al estudiar la convergencia de series hay que precisar el concepto de convergencia o límite, es decir, en qué consiste el proceso de sumar una cantidad infinita de números. A continuación recordamos algunos conceptos sobre series y convergencia en un espacio normado.[1]

Definición. *Sea* (a_n) *sucesión en un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$. *Ella es una* ***sucesión convergente*** *a un valor* $l \in X$ *cuando,*

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - l\| = 0.$$

En tal caso escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *o* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *y diremos que* l *es el* ***límite*** *de* (a_n). *Si consideramos ahora una función* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente, diremos que la sucesión* $(a_{\varphi(n)})$ *es una* ***subsucesión*** *de* (a_n). *La sucesión* (a_n) *es de* ***sucesión de Cauchy*** *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n, m \geq N$ *se cumple* $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$.

También para series en espacios normados consideramos los conceptos:

Definición. *Sea* (a_n) *una sucesión en un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$. *La* ***serie*** *cuyo* ***término general*** *es* a_n *se denota* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; *esta expresión representa también el límite, cuando existe, de la sucesión de sus* ***sumas parciales*** (S_N), *es decir,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Si la sucesión (S_N) *converge a* S, *entonces diremos que la serie es* ***convergente*** *y su* ***suma*** *es* S. *Si la sucesión* (S_N) *no converge, diremos que es* ***divergente***. *Diremos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* ***absolutamente convergente*** *si* $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ *converge. Dada una biyección cualquiera de los naturales* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *diremos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *es un* ***reordenamiento*** *de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Una serie es* ***condicionalmente convergente*** *si converge pero no es absolutamente convergente. Una serie es* ***incondicionalmente convergente*** *si todos sus reordenamientos convergen al mismo valor. Una* ***sub-serie*** *es aquella cuyo término general es de la forma* a_{λ_n}, *donde* (λ_n) *es una sucesión de números naturales estrictamente creciente.*

Toda sucesión convergente en un espacio normado es de Cauchy. Notemos que si una serie es absolutamente convergente en un espacio de Banach[2], entonces es convergente, ya que las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tienen norma menor

1. Un ***espacio normado*** es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X con cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y una función positiva $\|\cdot\|$, llamada ***norma***, definida en X, que cumple las tres propiedades siguientes: la ***desigualdad triangular***, o sea, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$; es ***homogénea***, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ para todo λ en el cuerpo asociado a X y $x \in X$; y $\|x\| = 0$ entonces $x = 0$.

2. Un ***espacio de Banach*** es un espacio normado en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ por la desigualdad triangular. También podría suceder que una serie convergiese, pero que no fuese absolutamente convergente. Estos casos son los que nos interesan y es donde tendrá vital importancia el orden en el que se sume, es decir, el reordenamiento que se escoja.

En la siguiente sección presentamos el teorema de reordenamiento de Riemann para series de números reales y hacemos un recorrido histórico por diferentes resultados sobre reodenamiento de series de números reales. En la sección 3 incluimos resultados sobre reordenamiento de series de vectores en espacios euclidianos, en particular enunciamos el teorema de Lévy-Steinitz. La sección 4 contiene resultados sobre la serie de Eisenstein G_2 y un teorema de Romik-Scherer que se refiere a los efectos de reordenamientos en la serie de Eisenstein. La última sección está dedicada a series en espacios de Hilbert y de Banach. En este contexto se sitúa el teorema de Dvoretzky-Rogers de dicha sección, que conecta las características algebraicas de un espacio de Banach (su dimensión) con la convergencia incondicional de las serie en dicho espacio. En esa última sección también estudiamos el teorema de Pechersky sobre convergencia condicional de series en espacios de Hilbert.

2. TEOREMA DE REORDENAMIENTO DE RIEMANN

En esta sección consideramos series de números reales, $\mathbb{R}$. En 1833 Augustin Louis Cauchy observó (Cauchy 1833) que una serie convergente de números reales cuyos términos no son todos positivos podía contener una subserie divergente. En 1837 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet presentó (Dirichlet 1837) las siguientes series

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

y

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots,$$

el primer caso corresponde a la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ y la segunda contiene los mismos términos, pero primero se suman 2 positivos y luego uno negativo, es decir, la segunda es un reordenamiento de la primera. Además, el valor al que convergen ambas series es distinto, el valor de la primera serie es $\log 2$, mientras que el valor de la segunda es $\frac{3}{2} \log 2$. Para calcular la primera serie presentamos un argumento que no hace uso del desarrollo de MacLaurin de $\log(1 + x)$.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

Por inducción, es fácil probar la primera de las siguientes identidades

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\log 2,$$

mientras que la tercera expresión es una suma de Riemann[3] de la integral elemental $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx=\log 2$.

Para sumar la segunda serie calculamos sus sumas parciales S_n. La suma parcial S_{3m} tiene $2m$ valores positivos y m negativos y viene dada por la siguiente expresión,

$$S_{3m}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}=\left(\sum_{k=1}^{4m}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}.$$

Si en cada una de las tres últimas sumas utilizamos la siguiente relación

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\log n+\gamma+o(1) \text{ cuando } n\to\infty,$$

donde γ representa la constante de Euler,[4] obtenemos $\lim_{m\to\infty} S_{3m}=\frac{3}{2}\log 2$. Como además $S_{3m+1}=S_{3m}+\frac{1}{4m+1}$ y $S_{3m-1}=S_{3m}-\frac{1}{2m}$, tenemos que S_{3m+1} y S_{3m-1} tienen el mismo límite que S_{3m} cuando $m\to\infty$. Por tanto, concluimos que el valor de nuestra serie es $\frac{3}{2}\log 2$. Para ver más detalles consultar (Apostol 1967) y para otra demostración (Cowen *et al.* 1980).

Dirichlet además probó que si una serie es absolutamente convergente, entonces cualquier reordenamiento de ésta converge al mismo valor.

En 1854 Georg Friedrich Bernhard Riemann demostró que la suma de las series de números reales condicionalmente convergentes depende del orden en el que se sumen sus términos (Riemann 1854)[5]. Más precisamente:

3. Si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ es una función y $x_{0,n}<x_{1,n}<\ldots<x_{n,n}$ es una partición del intervalo $[a,b]$; es decir, $x_{0,n}=a$ y $x_{n,n}=b$, si para cada $j=1,2,\ldots,n$ elegimos $\zeta_{j,n}\in[x_{j-1,n},x_{j,n}]$, entonces $\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_{j,n})(x_{j,n}-x_{j-1,n})$ es una suma de Riemann correspondiente a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Se sabe que f es Riemann-integrable en $[a,b]$ si el límite de las sumas de Riemann convergen cuando la norma de la partición converge a cero, esto es, $\max\{|x_{j,n}-x_{j-1,n}| : 1\le j\le n\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

4. No confundir con el número de Euler, e. La sucesión $(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n)$ es monótona decreciente y acotada inferiormente; su límite define a la constante de Euler, γ. No se sabe si este número es racional o irracional.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

TEOREMA (Riemann). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales condicionalmente convergente.*

i) *Dado un número real c, hay un reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuya suma es c.*
ii) *Existen reordenamientos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\beta(n)} = -\infty$.*

La demostración de este resultado depende del hecho que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente, entonces sus correspondientes series de términos positivos y negativos divergen; de modo que tomando alternativamente grupos de sumandos de una y de otra podemos ir superando o quedándonos por debajo de un valor previamente fijado. Otra forma alternativa de presentar el teorema de reordenamiento de series de Riemann es la siguiente: *el conjunto de las sumas de todos los reordenamientos convergentes de una serie de números reales es el conjunto vacío, un único punto o toda la recta real*. En (Apostol 1974, p. 197) se puede ver una demostración detallada de este teorema.

Hay varios trabajos clásicos que se desarrollaron alrededor del teorema de reordenamiento de series de Riemann. Ohm y Schlömilch estudiaron el efecto de los reordenamientos en la serie armónica (2) cuando p términos positivos están seguidos por q negativos en el reordenamiento (Ohm 1839, Schlömilch 1873). Pringsheim estudió esta situación para series condicionalmente convergentes generales (Pringsheim 1883). Él probó el siguiente resultado:

TEOREMA (Pringsheim). *Sea (a_n) una sucesión de números reales decreciente con límite cero tal que*

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = g > 0. \tag{1}$$

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)}$ un reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ tal que en los primeros n términos del reordenamiento hay p_n términos positivos y m_n términos negativos. Supongamos, además, que $\nu_n = p_n - m_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$ y existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{m_n} =: k,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n + \frac{g}{2}\log k.$$

5. Este resultado aparece publicado por primera vez en la tesis de habilitación de Riemann para ser profesor auxiliar, defendida en Leipzig en 1854. En ella estudiaba las condiciones para que una función pudiera ser representada mediante su serie de Fourier.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

Las ideas centrales en la prueba de este resultado son las siguientes. Se tiene la identidad

$$\sum_{j=1}^{n} b_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{2m_n} (-1)^{j-1} a_j + a_{2m_n+1} + a_{2m_n+3} + \ldots + a_{2p_n-1}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N(\varepsilon)$

$$\frac{g-\varepsilon}{n} \leq a_n \leq \frac{g+\varepsilon}{n}$$

y $\frac{1}{2m_n+1} + \frac{1}{2m_n+3} + \ldots + \frac{1}{2p_n-1}$ es equivalente[6] a $\int_{m_n}^{p_n} \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \log \frac{p_n}{m_n}$ cuando n tiende a infinito. De donde se deduce que al hacer el reordenamiento la suma se altera una cantidad contenida entre los valores $(g \pm \varepsilon) \log k$. En el mismo artículo Pringsheim estudió los casos cuando el límite en (1) es cero o infinito.

Posteriormente, Wacław Franciszek Sierpiński probó (Sierpiński 1911) que si $s' < s$, siendo s la suma de una serie condicionalmente convergente, entonces es posible reordenar los términos positivos de dicha serie, manteniendo en su posición a los términos negativos de modo que la serie reordenada sume s'. Cuando $s'' > s$, reordenando los términos negativos, se obtiene s''. La idea fundamental para la prueba de este resultado es que una serie de términos positivos que diverge, cuyo término general converge a cero se puede reordenar de modo que sus sumas parciales no sean más rápidas que cualquier sucesión estrictamente monótona creciente de términos positivos fijada.

En los años 50, Bagemihl y Erdős estudiaron (Bagemihl y Erdős 1954) los efectos de los reodenamientos de series en la sumabilidad Cesàro. Recientemente, Dybskiy y Slutsky (2011) consideran este tipo de problema con otras formas de convergencia.

3. SERIES DE VECTORES

La extensión del teorema de Riemann a series de números complejos la realizó Paul Lévy en 1905 (Lévy 1905). En ese mismo trabajo aparece un intento de demostración en espacios euclidianos de dimensión mayor, pero en 1913, Ernst Steinitz observó (Steinitz 1913) que la demostración de Lévy estaba incompleta en los casos de dimensión mayor o igual que 3 y presentó una demostración correcta con un enfoque completamente distinto.

6. El límite del cociente de estas sucesiones es 1.

Zubía | *núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148*
ISSN 0213-4306

TEOREMA (Lévy-Steinitz). *El conjunto de sumas de los reordenamientos convergentes de una serie de vectores en un espacio euclídeo real de dimensión finita es, o bien el vacío, o bien el trasladado de un subespacio.*[7]

La demostración de Steinitz fue modificada por Wilhelm Groß (Groß 1917). La prueba de Groß es muy técnica. A continuación presentamos los tres pasos básicos de una demostración más transparente de Peter Rosenthal (Rosenthal 1987).

A lo largo de esta sección vamos a considerar la norma euclidiana. Se sabe que en un espacio euclidiano de dimensión finita todas las normas son equivalentes y las topologías asociadas a dichas normas coinciden.

Primero, se prueba el "teorema de confinamiento poligonal" de Groß (Groß 1917), que afirma que una familia arbitraria finita de vectores con longitud menor o igual que 1, que suman 0, puede ser reordenada de tal forma que la norma de las sumas parciales sea menor que cierta constante que solo depende de la dimensión del espacio; es decir,

TEOREMA (confinamiento poligonal). *Sea $\{v_i : i = 1, ..., m\}$ una familia finita de vectores en $\mathbb{R}^n$ cuya suma es 0 y $\|v_i\| \leq 1$ para todo $i = 1, ..., m$. Entonces, existen una constante C_n, que depende sólo de n, y una permutación P de $\{2, ..., m\}$ con la propiedad de que*

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} \right\| \leq C_n$$

para todo j. Además, podemos tomar $C_1 = 1$ y $C_n \leq \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$ para cada $n > 1$.

La prueba de este teorema de confinamiento se hace por inducción en la dimensión del espacio, para reducir el caso de dimensión n al de dimensión $n-1$, se considera el vector L no nulo que tiene norma máxima dentro de todos los vectores que se obtienen sumando al vector v_1 otros vectores de la familia $\mathcal{V} := \{v_i : i = 2, ..., m\}$; el espacio

$$L^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, L \rangle = 0\},$$

tiene dimensión $n-1$. Los vectores de la familia $\mathcal{V}$ se dividen en dos grupos, los (u_j) que forman con L un ángulo menor de 90° (que sumados a v_1 dan L) y los

7. Es decir, conjuntos de la forma $v + M$, donde v es un vector y M es un subespacio lineal del espacio euclidiano considerado.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

(w_j) que forman un ángulo mayor o igual que 90° con L. Denotemos por v' la proyección del vector v en $L^\perp$, en otras palabras,

$$v' = v - \frac{\langle v, L\rangle}{\|L\|^2}L \qquad \text{y} \qquad \|v'\|^2 + |\langle v, L\rangle|^2 = \|v\|^2 .$$

Es fácil observar que las proyecciones (u_j') y (w_j') cumplen las hipótesis para aplicar la inducción, en particular, la norma de dichas proyecciones tienen módulo ≤ 1. La figura 1 tiene una ilustración de la idea central de la demostración descrita anteriormente.

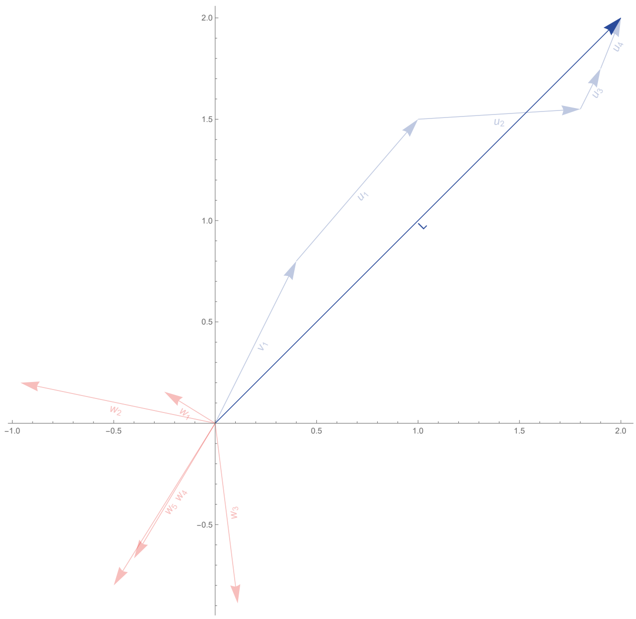

Figura 1: En azul oscuro tendríamos el vector L. En azul más claro tenemos los vectores $\{u_i\}$ dispuestos uno tras otro y en rojo más claro tenemos los vectores $\{w_i\}$.

El segundo paso en la prueba del teorema de Lévy-Steinitz es la prueba del "teorema de reordenamiento":

Teorema (reordenamiento). *Si una subsucesión de una sucesión de sumas parciales de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ converge a S, y el término general de la serie converge a 0, entonces existe un reordenamiento de ella cuya suma es S.*

Si (v_k) es una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$ que converge al vector nulo y $S_m = \sum_{k=1}^m v_k$ es la suma parcial de orden m, entonces de las hipótesis del teorema existe una subsucesión (S_{m_k}) tal que $\lim_{k\to\infty} S_{m_k} = S$. La idea fundamental para

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

la prueba del teorema de reordenamiento es reordenar las "lagunas" de vectores $(v_{m_k+1}, \ldots, v_{m_{k+1}-1})$ que quedan entre dos sumas parciales convergentes a S, que no son muy grandes en norma por la convergencia a cero de los vectores, utilizando el teorema de confinamiento poligonal.

El tercer paso de la prueba del teorema de Lévy-Steinitz es probar que el conjunto de las sumas es una variedad afín. Denotemos por $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sumas de reordenamientos convergentes de la serie considerada. Se considera la situación no trivial $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y también que $0 \in \mathcal{S}$ porque el caso general $(0 \notin \mathcal{S})$ se reduce trivialmente al anterior. El guión que se sigue para probar que si $0, s_1$ y s_2 están en $\mathcal{S}$, entonces $s_1 + s_2 \in \mathcal{S}$ es el siguiente. Se toma una sucesión (ε_m) de números positivos que converge a 0. Se selecciona una suma parcial de $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, en cierto orden, para que esté a una distancia ε_1 de s_1. Después construimos una suma parcial que contenga todos los vectores ya usados (siempre las sumas parciales seleccionadas incluirán a los términos ya utilizados) y que esté a una distancia ε_1 de 0 y después otra suma parcial con los vectores ya usados cuyo valor esté a una distancia ε_1 de s_2. Después formamos otra suma parcial que esté a distancia ε_2 de s_1, otra que esté a una distancia ε_2 de 0 y otra a una distancia ε_2 de s_2 y así sucesivamente. Los vectores usados entre una suma cercana al 0 y la siguiente suma cercana a s_2 sumarán aproximadamente s_2. Adicionándolos con los vectores cuya suma estaba cercana a s_1 y cercana a 0 tendremos sumas parciales cercanas a $s_1 + s_2$. Utilizando el teorema de reordenamiento se finaliza la prueba.

Para probar que si $s \in \mathcal{S}$, entonces $ts \in \mathcal{S}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, se reduce la prueba al caso $t \in (0, 1)$, $t = -1$ y después se utiliza el teorema de confinamiento poligonal para completar la prueba.

4. SERIE DE EISENSTEIN G_2

Por lo general, los ejemplos para ver el efecto del reordenamiento en series que no son absolutamente convergentes parecen casos muy concretos, que no nos encontraríamos en la práctica matemática. Aquí estudiaremos la serie de Eisenstein G_2 que aparece en el estudio de formas modulares (Apostol 2012). La función G_2 es la función holomorfa en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \ : \operatorname{Im}(\tau) > 0\}$ definida de la siguiente forma:

$$G_2(\tau) := \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n + m\tau)^2} \right), \tag{2}$$

con $(m, n) \in \mathbb{Z}$, excepto para $(m, n) = (0, 0)$. Esta serie se debe entender de la siguiente forma,

$$G_2(\tau) := 2\zeta(2) + \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{0<|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{(n + m\tau)^2}, \tag{3}$$

donde $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ representa el valor de la función zeta de Riemann en 2. La serie (2) no converge absolutamente ya que la integral

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{(x + ys)^2 + (yt)^2}\, dx\, dy$$

diverge para cualquiera sean $t > 0$ y $s \in \mathbb{R}$.

Al cambiar el orden de sumación en (2) se tiene el siguiente resultado.

Lema. *Se cumple que,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n + m\tau)^2} \right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n + m\tau)^2} \right) - \frac{2\pi i}{\tau}, \tag{4}$$

donde en ambas series se excluye el término $(m, n) = (0, 0)$, *donde* $\sum'$ *significa que la suma se hace para valores distintos de cero en el índice.*

Esto es, el cambio en el orden de sumación (2) da lugar a un cambio en el valor de la serie dado por el “término residual” $-\frac{2\pi i}{\tau}$. La identidad (4) aparece de forma natural cuando uno considera la serie de Eisenstein bajo la transformación $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ ya que ella es equivalente a

$$\tau^{-2} G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = G_2(\tau) - \frac{2\pi i}{\tau}.$$

Para la prueba de (4) se utilizan las siguientes fórmulas de descomposición en fracciones simples de $\cot(\cdot)$ y $\frac{1}{\operatorname{sen}(\cdot)}$,

$$\frac{1}{u} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{1}{u + k} - \frac{1}{k} \right) = \pi \cot(\pi u), \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(u + k)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi u)},$$

conocidas de los cursos básicos de Análisis complejo, que se obtienen con técnicas de teoría de residuos, o del Análisis real y funcional, donde se utilizan desarrollos de Fourier. Estas fórmulas son válidas para $u \in \mathbb{H}$ y permiten obtener

$$\begin{aligned}\varphi(z,\tau) &:= \frac{1}{z} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z + m\tau + n} - \frac{1}{m\tau + n} + \frac{z}{(m\tau + n)^2} \right) \\ &= \frac{z\pi^2}{3} + \pi \cot(\pi z) + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ m\neq 0}} \left(\pi \cot(\pi(m\tau + z)) - \pi \cot(\pi m\tau) + \frac{\pi^2 z}{\operatorname{sen}^2(\pi m\tau)} \right),\end{aligned}$$

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

donde $\tau \in \mathbb{H}$ y $z \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$, con $\Lambda := \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Es fácil deducir que

$$\wp_1(\tau) := \frac{i}{2\pi}\wp\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = \frac{\pi i}{12} + \frac{\pi i}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi m\tau)},$$

y

$$\frac{1}{\tau^2}\wp_1\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \wp_1(\tau) + \frac{1}{2\tau},$$

que equivale a (4).

Si nos fijamos en (3), para hallar G_2 sumamos considerando los (m, n) contenidos en un rectángulo centrado en el 0 y de lados M y N, de alto infinito y ancho "cero", que después se va "ensanchando". ¿Podríamos sumar pensando en los pares contenidos dentro de un círculo? ¿Y dentro de cualquier figura?

Denotemos por $\mathcal{K}$ la clase de conjuntos compactos $K \subset \mathbb{R}^2$ que son convexos, con interior distinto del vacío y simétricos respecto a x e y. Comenzamos dando varias definiciones clave. Para cada $K \in \mathcal{K}$, definimos h_K como la función real cuya gráfica es el contorno superior del conjunto K; es decir, h_K es

$$h_K : [-A, A] \to \mathbb{R}, \quad h_K(x) := \text{máx}\{y \in \mathbb{R} \colon (x, y) \in K\},$$

donde $A = \text{máx}\{x \in \mathbb{R} \colon \exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in K\}$. Notemos, además, que h_K es de soporte compacto $[-A, A]$; es par, por ser K simétrico respecto al eje y y su reflexión $-h_K$ es el contorno inferior de K, ya que K es simétrico respecto al eje x. La siguiente definición generaliza la de serie de Eisenstein G_2.

Definición. *Si $K \in \mathcal{K}$, denotamos por $G_2(K, \tau)$ la K-suma de la serie de Eisenstein de orden 2, es decir,*

$$G_2(K, \tau) := \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{(m,n)\in((\lambda K)\cap\mathbb{Z}^2)}{}' \frac{1}{(m\tau + n)^2}, \quad \tau \in \mathbb{H}, \tag{5}$$

asumiendo que el límite existe.

Para escribir menos, escribimos $\sum_K a_{m,n}$ para una serie en dos índices que se suma según el método seguido en (5). En (Romik y Scherer *preprint*) se obtiene el siguiente resultado que generaliza (4).

Teorema (Romik-Scherer). *Dado $\tau \in \mathbb{H}$ y $K \in \mathcal{K}$, se tiene que $G_2(K, \tau)$ existe. Además,*

$$G_2(K, \tau) - G_2(\tau) = 4\int_0^A \frac{h_K(x)}{\tau^2 x^2 - h_K^2(x)}\, dx, \tag{6}$$

donde, como antes, A denota el número para el cual h_K está soportado en $[-A, A]$.

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

Para dar las ideas básicas de la prueba del resultado anterior, sea

$$E(K,\tau) := G_2(K,\tau) - G_2(\tau),$$

la *función residual* asociada a K. Observar que si consideramos el caso más sencillo, es decir, cuando K es el rectángulo $[-c,c]\times[-1,1]$ con $c>0$, entonces h_K es la función indicadora $h_K(x)=\chi_{[-c,c]}(x)$. Evaluando la integral de (6) obtenemos que,

$$\begin{aligned} E(K,\tau) &= 4\int_0^c \frac{\chi_{[-c,c]}(x)}{\tau^2x^2-(\chi_{[-c,c]}(x))^2}\,dx = 4\int_0^c \frac{1}{\tau^2x^2-1}\,dx \\ &= \frac{4}{\tau^2}\int_0^c \frac{1}{x^2-\frac{1}{\tau^2}}\,dx = \frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right), \end{aligned}$$

donde $\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right)$ representa la rama analítica del logaritmo tal que $\log\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -i\frac{\pi}{2}$.

En particular, notemos que podemos interpretar el caso límite $c\to 0$ como una suma respecto a un rectángulo infinitamente alto y estrecho (ver figuras 2 y 3), lo que significa, sumar primero respecto a n y después respecto a m como en la definición original (2) de $G_2(\tau)$. En este caso, tiene sentido pensar que la función residual sea igual a 0, de hecho $\lim_{c\to 0}\frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right) = 0$. También podemos considerar cuando $c\to\infty$, que se puede interpretar que sumamos en un rectángulo infinitamente ancho y bajo (ver figuras 4 y 5), es decir, primero sumar en m y a continuación sumar en n. En este caso tenemos que $\lim_{c\to\infty}\frac{2}{\tau}\log\left(\frac{1-\tau c}{1+\tau c}\right) = -\frac{2\pi i}{\tau}$ y de hecho es coherente con la relación (4).

La fórmula (6) sigue de la relación

$$\sum_K \left(\frac{1}{m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n+1}\right) = 4\int_0^A \frac{h_K(x)}{\tau^2x^2-h_K^2(x)}dx,$$

donde, en la suma de la izquierda, excluimos los sumandos tal que $m=0$. Esta igualdad se obtiene con la siguiente interpretación en términos de una suma de Riemann

$$\begin{aligned} &\sum_K \left(\frac{1}{m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n+1}\right) \\ &\quad = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\substack{-\lambda A\le m\le\lambda A \\ m\neq 0}} \ \sum_{-\lambda h_K(m/\lambda)\le n\le \lambda h_K(m/\lambda)} \left(\frac{1}{m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n+1}\right) \\ &\quad = 4\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{1\le m\le\lambda A}\left(\frac{\lambda^{-1}\left\lfloor \lambda h_K\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor}{\lambda^{-2}m^2\tau^2-\lambda^{-2}\left\lfloor\lambda h_K\left(\frac{m}{\lambda}\right)\right\rfloor^2}\right). \end{aligned}$$

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

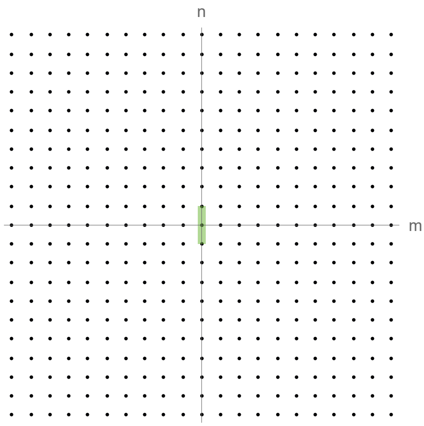

Figura 2. Primer paso, $c \to 0$.

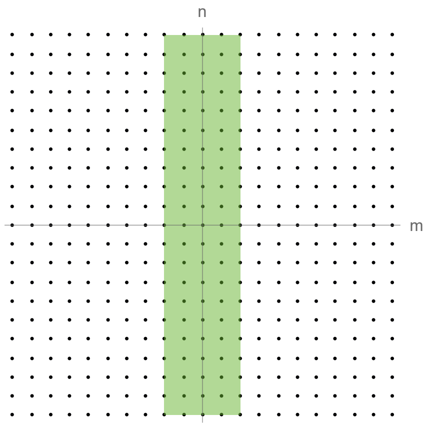

Figura 3. Siguiente paso, $\lambda \to \infty$.

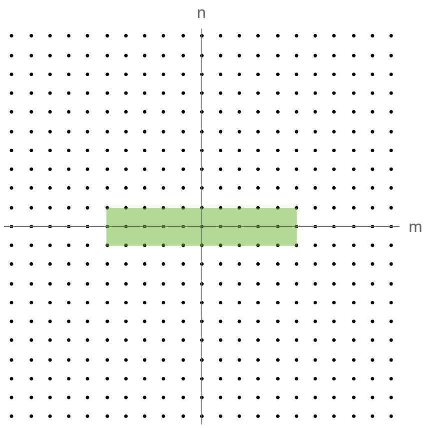

Figura 4. Primer paso, $c \to \infty$.

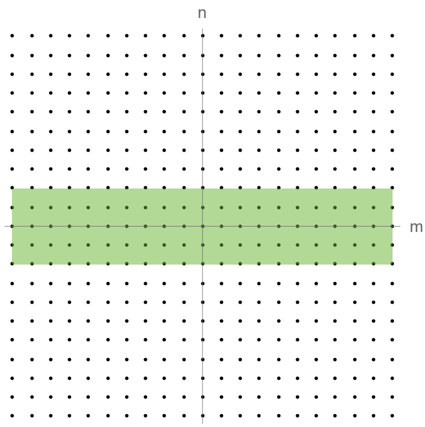

Figura 5. Siguiente paso, $\lambda \to \infty$.

5. REORDENAMIENTOS EN ESPACIOS DE HILBERT

En está sección consideramos el reordenamiento de series en espacios de Hilbert.[8] En el famoso *Cuaderno escocés* (Mauldin 1981) se formula la cuestión: ¿exis-

8. Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (que es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un ***producto escalar*** en $\mathcal{H}$ es una función de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ en el cuerpo que a cada $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ le asigna el valor $\langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ que tiene las propiedades:
   1. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}, \forall x, y \in \mathcal{H}$.
   2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \forall x, y, z \in \mathcal{H}$.
   3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
   4. $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{H}$, y la igualdad se tiene si y solo si $x = 0$.

te algún análogo al teorema de Lévy-Steinitz en espacios de Banach de dimensión infinita? Este documento tiene mucho valor histórico, fue fruto de las reuniones que algunos de los más prometedores estudiantes de matemáticas polacos mantenían en el *Café escocés* en Lwów. Entre ellos se encontraban: Ulam, Banach, Kac, Mazur, Saks o Steinhaus. Como curiosidad, este problema, el número 106, fue propuesto por Banach y como premio regalaba una botella de vino. Fue resuelto negativamente por Jósef Marcinkiewicz mediante el siguiente contraejemplo en $L^2[0,1]$.[9]

Consideremos las siguientes funciones en $L^2[0,1]$

$$f_{i,k} = \chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]} \text{ y } g_{i,k} = -f_{i,k},$$

con $0 \leq i < +\infty$ y $0 \leq k < 2^i$ enteros y donde $\chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]}$ representa la función que es igual a 1 en el intervalo $[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]$ y vale 0 en $[0,1]\backslash[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]$. Podemos ver una representación de algunas de estas funciones en las figuras 6-9. Por un lado, uno tiene,

$$(f_{0,0} + g_{0,0}) + (f_{1,0} + g_{1,0}) + (f_{1,1} + g_{1,1}) + (f_{2,0} + g_{2,0}) + \cdots = 0.$$

Por otro lado, si reordenamos como sigue, tenemos,

$$f_{0,0} + (f_{1,0} + f_{1,1} + g_{0,0}) + (f_{2,0} + f_{2,1} + g_{1,0}) + (f_{2,2} + f_{2,3} + g_{1,1}) + \cdots = 1.$$

Pero ahora, notemos que reordenando los términos siempre obtendremos funciones con valores enteros, por lo que es imposible que un reordenamiento de las $f_{i,k}$ y las $g_{i,k}$ nos dé como resultado, por ejemplo, la función $\frac{1}{2} \in L^2[0,1]$. Es decir, el conjunto de las sumas de los reordenamientos de las $f_{i,k}$ y $g_{i,k}$ no es un subespacio afín de $L^2[0,1]$.

El ejemplo anterior muestra que en los espacios de dimensión infinita son más complicados de tratar que los de dimensión finita, como corrobora el siguiente resultado (Dvoretzky y Rogers 1950).

En tal caso decimos que $\mathcal{H}$ es un ***espacio con producto escalar***; se tiene que $\|x\| = \langle x, x\rangle$ es una norma. Si $\mathcal{H}$ es un espacio con producto escalar tal que con la norma asociada es un espacio de Banach, entonces decimos que es un ***espacio de Hilbert***.

9. $L^2[0,1]$ es el espacio vectorial normado formado por las funciones f Lebesgue-medibles definidas en $[0,1]$ con valores en $\mathbb{C}$ tales que $\int_0^1 |f(x)|^2\, dx < \infty$, con la norma,

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}, \quad f \in L^2[0,1].$$

Zubía | *núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148*
ISSN 0213-4306

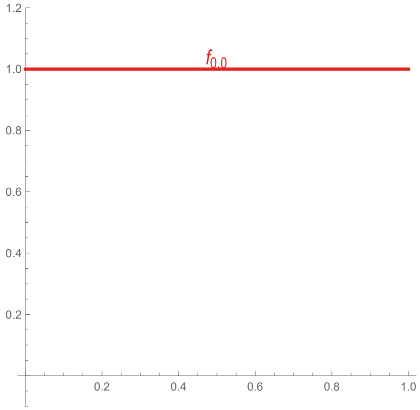

Figura 6. $f_{0,0}$ de Marcinkiewicz

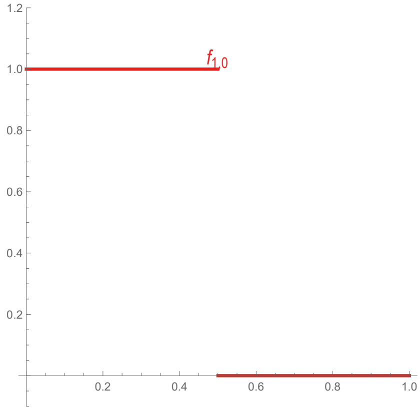

Figura 7. $f_{1,0}$ de Marcinkiewicz

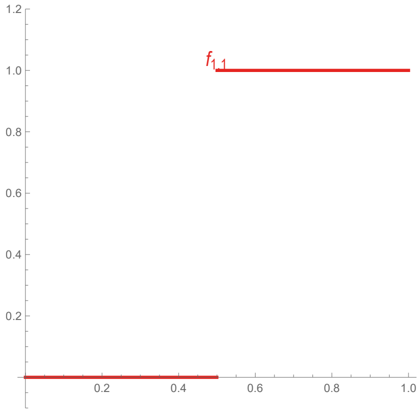

Figura 8. $f_{0,1}$ de Marcinkiewicz

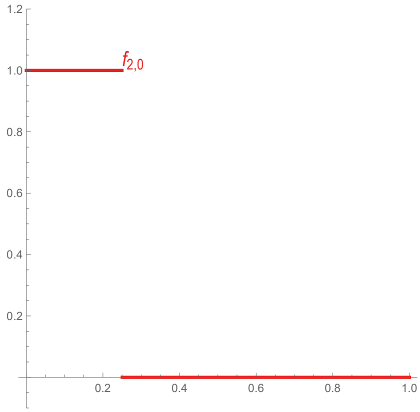

Figura 9. $f_{2,0}$ de Marcinkiewicz

TEOREMA (Dvoretzky-Rogers). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes en un espacio de Banach X:*

1. *Las series incondicionalmente convergentes en X convergen absolutamente.*
2. *X tiene dimensión finita.*

Este resultado está relacionado con los espacios nucleares. En (Pietsch 1972) se puede encontrar una demostración del teorema de Dvoretzky-Rogers.

En 1973, D. V. Pechersky da una versión del teorema de reordenamiento de Lévy-Steinitz en espacios de Hilbert.

TEOREMA (Pechersky). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real y $(u_n)_{n\geq 1}$ una sucesión*

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

de vectores tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty,$$

y que para todo vector unitario $e \in \mathcal{H}$*, la serie* $\sum_{n\geq 1} \langle u_n, e\rangle$ *converge condicionalmente. Entonces, para todo* $v \in \mathcal{H}$ *existe una permutación* σ *de* $\mathbb{N}$ *tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)} = v.$$

La prueba de este resultado tiene cuatro pasos. Primero se prueba que las combinaciones lineales con coeficientes iguales a 0 o 1 de los vectores (u_j) son densos en $\mathcal{H}$. Para demostrar este hecho se usa una versión del teorema de separación de Hahn-Banach bien conocidos de Análisis funcional, que se obtiene fácilmente del teorema de la norma mínima.

Teorema (Elemento de norma mínima). *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $E \subset \mathcal{H}$ *un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces para todo vector* $f \in \mathcal{H}$ *existe* $x_0 \in E$ *único tal que*

$$\|f - x_0\| = \text{mín}\{\|f - x\| : x \in E\}.$$

Este elemento se caracteriza por la condición

$$\Re(\langle f - x_0, x - x_0\rangle) \leq 0, \quad \forall x \in E.$$

Corolario. *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert real, un subconjunto* $E \subset \mathcal{H}$ *no vacío, convexo y cerrado y* $f \in \mathcal{H} \setminus E$*. Existe un vector unitario* $g \in \mathcal{H}$ *tal que para todo* $x \in E$ *se cumple*

$$\langle g, x\rangle \leq \langle g, f\rangle.$$

Una vez probada la densidad de las combinaciones con coeficientes iguales a 0 o 1 de los vectores (u_j), en el segundo paso se prueba que, a partir de la conclusión anterior, se tiene que dado un vector $v \in \mathcal{H}$ existe una permutación $\sigma(k)$ de los naturales tal que alguna subsucesión de las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} u_{\sigma(k)}$ converge a v. En el tercer paso se demuestra, por inducción en la cantidad de vectores, que dado $N \in \mathbb{N}$, existe una permutación σ del conjunto $\{1, \ldots, N\}$ de modo que

$$\max_{1\leq m\leq N} \left\|\sum_{n=1}^{m} u_{\sigma(n)}\right\| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \|u_n\|^2\right)^{1/2} + 2\left\|\sum_{n=1}^{N} u_n\right\|.$$

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

En el cuarto y último paso, se utiliza el segundo para probar la convergencia de subsucesiones de reordenaciones y el paso tercero para estimar las lagunas de las sumas parciales que quedan entre las sumas parciales de las subsucesiones convergentes de reordenaciones.

El teorema de Pechersky es útil en la prueba de la universalidad de la función ζ de Riemann (ver, por ejemplo, Steuding 2005 y Voronin 1975) en la franja del plano complejo $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. M. (1967) *Calculus, Vol. I: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, 2nd ed. Blaisdell.

Apostol, T. M. (1974) *Mathematical Analysis*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.

Apostol, T. M. (2012) *Modular functions and Dirichlet series in number theory*. Graduate Texts in Mathematics 41, Springer.

Bagemihl, F. y Erdős, P. (1954) Rearrangements of C_1-summable series. *Acta Math.* **92**, 35–53.

Cauchy, A. L. (1833) *Oeuvres* (2) 10, 68–70.

Cowen, C. C., Davidson, K. R. y Kaufman, R. P. (1980) Rearranging the alternating harmonic series. *The Amer. Math. Monthly* **87**, 817–819.

Dirichlet, P. G. L. (1837) Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschlaftichen Factor sind, unendliche viele Primzahlen enthalt. *Abhand. Ak. Wiss. Berlin* **1837**, 45–81. En *Obras completas*, Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, I, 315–342.

Dvoretzky, A. y Rogers, C. A. (1950) Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **36**, 192–197.

Dybskiy, Y y Slutsky, K. (2011) Riemann Rearrangement theorem for other types of convergence. *J. Mat. Anal. Appl.* **373**, 605–613.

Groß, W. (1917) Bedingt konvergente Reihen. *Monatsh. Math. Phys.* **28**, 221–237.

Lévy, P. (1905) Sur les séries semi-convergentes. *Nouvelles annales de mathématiques: Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale* **5**, 506–511.

Mahillo Cazorla, A. (2019) Sobre un teorema de reordenamiento de series de Lévy-Steinitz. *Trabajo fin de grado*, Universidad de La Rioja. `https://investigacion.unirioja.es/documentos/5eda31d0299952715635a7ef`

Zubía | núm. 37-38 (2019-2020), pp. 129-148
ISSN 0213-4306

Mauldin, R. D. (ed.) (1981) *The Scottish book: mathematics from the Scottish Café*. Birkhauser.

Ohm, M. (1839) De nonnullis seriebus infinitis summandis. *Antritts-Programm zür Ubernahme der ordentlichen Professur*, Berlin.

Pietsch, A. (1972) *Nuclear locally convex spaces*, 2nd ed. Springer-Verlag.

Pringsheim, A. (1883) Ueber die Werthveranderungen bedingt convergenter Reihen und Producte. *Math. Ann.* **22**, 455–503.

Riemann, B. (1854) Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. *Gesammelte Mathematische Werke*, 213–253 . Publicada por Richard Dedekind póstumamente en *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13**, 1867.

Romik, D. y Scherer, R. (preprint) Alternative summation orders for the Eisenstein series G_2 and Weierstrass -function. Aparecerá en *Rocky Mountain J. Math.* `arXiv:1811.01523`

Rosenthal, P. (1987) The remarkable theorem of Lévy and Steinitz. *The Amer. Math. Monthly* **94**, 342–351.

Schlömilch, O. X. (1873) Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschlaftichen Factor sind, unendliche viele Primzahlen enthalt. *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* **18**, 520.

Sierpiński, W. F. (1911) Sur une propriété des séries qui ne sont pas absolument convergentes. *Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie* **A**, 149–158.

Steinitz, E. (1913) Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. Reine. Angew. Math.* **143**, 128–176.

Steuding, J. (2005) Universality of *L*-functions. Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen: *Seminars Winter Term* 2004/2005, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 81–92.

Voronin, S. M. (1975) Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function. *Math. USSR Izvestija* **9**, No. 3, 443-453.