Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2021.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 401. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\log\left(x^4+6x^2+1\right)}{1+x^2}\,dx = \pi\log\left(2+2\sqrt{2}\right).$$

Problema 402. *Propuesto por Ángel Plaza de la Hoz, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas.*

Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los números de Pell, que satisfacen la relación de recurrencia $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, con $n \geq 1$, y valores iniciales $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$. Probar que

$$P_n^2 + \sum_{k=0}^{n} P_k^2 = \frac{P_{2n+2} + P_{2n-1} - 3(-1)^n}{8}, \qquad n \geq 1.$$

PROBLEMA 403. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Evaluar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\left(\zeta(5)-1-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3^5}-\cdots-\frac{1}{n^5}\right)-\frac{1}{4n}\right).$$

PROBLEMA 404. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean α, β, γ y δ números reales no negativos tales que $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$. Probar que

$$\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+5\alpha\beta\gamma\delta}{9} \geq \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2\delta^2+\gamma^2\delta^2\alpha^2+\delta^2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

PROBLEMA 405. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En el triángulo escaleno ABC, la circunferencia inscrita es tangente al lado BC en el punto D y al lado AC en el punto E. Sea M el punto medio de BC y supongamos que AD es paralelo a EM. Probar que la recta DE corta a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en dos puntos, uno de ellos situado en la mediatriz del segmento AC y el otro en la mediatriz de BC.

PROBLEMA 406. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

En el triángulo ABC, los puntos D, E y F están en los lados BC, AC y AB, respectivamente, y son tales que las cevianas AD, BE y CF concurren en un punto M. Las áreas de los triángulos AME, BMF y CMD son iguales, respectivamente, a 70, 56 y 30.

(a) Encontrar las áreas de los triángulos BMD, CME y AMF.

(b)$\star$ ¿Quedan determinadas las longitudes de las cevianas AD, BE y CF por los datos del enunciado? ¿Queda determinado el triángulo ABC por los datos del enunciado?

PROBLEMA 407. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Probar que en cualquier triángulo ABC se cumple la desigualdad

$$\frac{\tan^2(1^\circ)\tan^2(2^\circ)\tan^2(3^\circ)}{h_a}+\frac{\tan^2(2^\circ)}{h_b}+\frac{\tan^2(1^\circ)}{h_c} > \frac{(2\sqrt{2}+1)\tan^2(3^\circ)}{7s},$$

siendo h_a, h_b, h_c las longitudes de las tres alturas y s el semiperímetro del triángulo.

Problema 408. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioclescu School, Găeşti, Rumanía.*

Sea $f \in C^1([0,1])$ verificando que $|f'(x)| \leq 1$, para $x \in [0,1]$, y

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Probar que

$$\left| \int_0^1 x^n f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{n+2}, \qquad n \geq 1.$$

Soluciones

Problema 377. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sea ABC un triángulo de área S. Sobre cada uno de sus lados y hacia el exterior levantamos los triángulos equiláteros $A'BC$, $B'CA$ y $C'AB$. Probar que área$(A'B'C') \geq 4S$.

Primera solución, enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

La configuración visual del problema puede corresponder a uno de los cuatro casos siguientes, según que los ángulos del triángulo ABC sean: i) dos de ellos menores que $\pi/3$; ii) dos de ellos mayores que $\pi/3$; iii) uno de ellos igual a $\pi/3$, y los otros, uno mayor y otro menor que $\pi/3$; iv) los tres ángulos de $\pi/3$.

En el caso i), supongamos que son $A = \angle CAB$ y $B = \angle ABC$ los ángulos menores que $\pi/3$ y, por tanto, $C = \angle BCA > \pi/3$. Se tiene

$$\angle C'AB' = \frac{2\pi}{3} + A < \pi, \qquad \angle A'BC' = \frac{2\pi}{3} + B < \pi \qquad \text{y} \qquad C + \frac{2\pi}{3} > \pi,$$

de donde se sigue que las rectas $B'C'$ y $C'A'$ atraviesan el triángulo ABC, mientras que la recta $A'B'$ es exterior al mismo (ver la figura 1). Entonces (poniendo $[XY \cdots W]$ para el área del polígono $XY \cdots W$),

$$\begin{aligned}
[A'B'C'] &= [A'B'AC'B] - [B'C'A] - [A'C'B] \\
&= [ABC] + [ABC'] + [ACB'] + [CBA'] + [A'B'C] - [B'C'A] - [A'C'B] \\
&= S + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(ab \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - C\right) - bc \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + A\right) - ac \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + B\right)\right) \\
&= S + \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}\left(ab\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} C - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)\right.
\end{aligned}$$

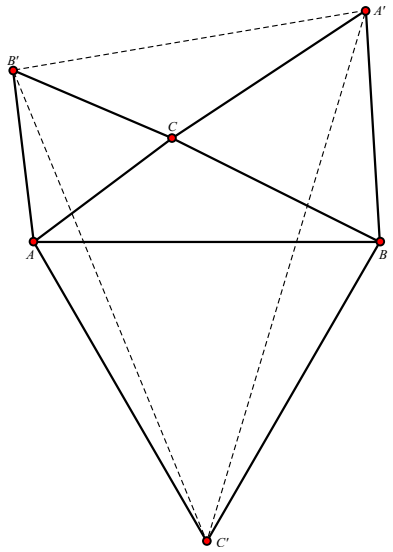

Figura 1: Esquema para la primera solución al Problema 377.

$$
\begin{aligned}
&\quad -bc\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)-ac\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)\Bigg)\\
&=\frac{5}{2}S+\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)\\
&\quad -\frac{\sqrt{3}}{8}((a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2))\\
&=\frac{5}{2}S+\frac{\sqrt{3}}{8}(a^2+b^2+c^2). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Análogas consideraciones llevan a esa misma expresión para $[A'B'C']$ en el caso ii). En el caso iii), si $C=\pi/3$, se obtiene fácilmente $[A'B'C']=(a+b)^2$, y, en el caso iv), $[A'B'C']=\sqrt{3}a^2$, resultados que también quedan englobados en la expresión (1). La desigualdad del enunciado es entonces una consecuencia inmediata de la desigualdad de Weitzenböck [1, 4.4]

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S,$$

en la que se alcanza la igualdad si y sólo si el triángulo ABC es equilátero.

Segunda solución, enviada por Cristóbal Sánchez Rubio, Penyagolosa, Castellón.

Se sabe que las rectas AA', BB' y CC' concurren en el punto de Fermat F del triángulo ABC, punto desde el que se ve cada uno de los tres lados bajo un ángulo de $2\pi/3$ (ver la figura 2).

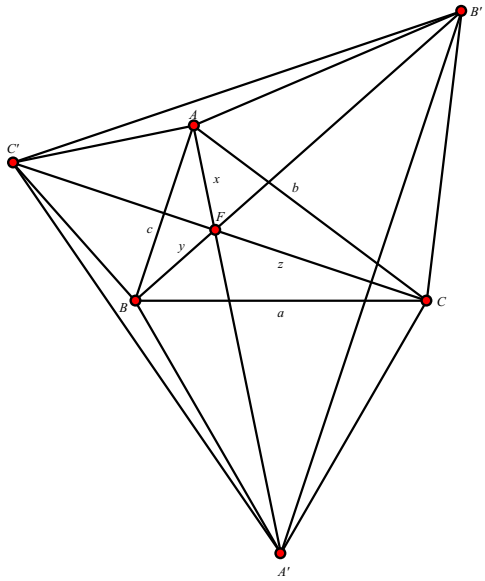

Figura 2: Esquema para la segunda solución al Problema 377.

Pongamos $FA = x$, $FB = y$ y $FC = z$. Los cuadriláteros $FBA'C$, $FCB'A$ y $FAC'B$ son cíclicos. Aplicando el teorema de Ptolomeo al primero de ellos resulta

$$ay + az = a \cdot FA',$$

es decir, $FA' = y + z$, de donde

$$AA' = x + FA' = x + y + z.$$

De modo análogo $BB' = CC' = x+y+z$ también. Entonces, usando que $\angle C'FB' = \angle B'FA' = \angle A'FC' = 2\pi/3$ se obtiene, por una parte,

$$\begin{aligned}[A'B'C'] &= [C'FB'] + [B'FA'] + [A'FC'] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left((x+y)(x+z) + (x+z)(y+z) + (x+y)(y+z)\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + xz + yz)\right). \qquad (2)\end{aligned}$$

y, por otra,

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + xz + yz). \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en la desigualdad del enunciado resulta, después de simplificar, la desigualdad equivalente $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$, válida para tres números positivos cualesquiera, ya que

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + xz + yz) = \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right) \geq 0.$$

Tercera solución, enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los vértices del triángulo vienen dados por los números complejos $A = 0$, $B = 1$ y $C = z$, donde $z = x + iy$ es un número complejo del semiplano superior. Entonces

$$A' = 1 + (z-1)e^{-i\pi/3}, \qquad B' = ze^{i\pi/3} \qquad \text{y} \qquad C' = e^{-i\pi/3}.$$

Recordemos que el área Δ de un triángulo con vértices z_1, z_2, z_3 se obtiene mediante la fórmula

$$\Delta = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Claramente $S = y/2$, mientras que aplicando (4) resulta

$$[A'B'C'] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - x + x^2 + \frac{5}{\sqrt{3}}y + y^2\right).$$

Así concluimos que

$$\begin{aligned}[A'B'C'] - 4S &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - x + x^2 + \frac{5}{\sqrt{3}}y + y^2\right) - 2y \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \geq 0.\end{aligned}$$

La igualdad se cumple si y sólo si el triángulo ABC es equilátero.

REFERENCIAS

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Pub., Groningen, 1969.

También resuelto por M. Amengual, C. Beade, V. Vicario y el proponente.

NOTA. Las soluciones de M. Amengual y de V. Vicario utilizan también la desigualdad de Weitzenböck. El proponente, en su lugar, usa la desigualdad $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$. La solución de C. Beade es similar a la de A. Stadler, usando geometría analítica sin números complejos. V. Vicario propone además mejoras de la desigualdad propuesta usando, por ejemplo, la desigualdad de Finsler-Hadwiger [1, 4.7]

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

PROBLEMA 378 $\star$. *Propuesto por Manuel Benito Muñoz, Logroño, La Rioja.*

Sea $\{\ell_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de números lúdicos (para su definición véase el Problema 372 de esta sección, en el número anterior, o la sucesión `A003309` en *The On-Line Encyclopedia of Integers Sequences*, `https://oeis.org/A003309`). ¿Es divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\ell_n$?

Solución enviada por por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Los números lúdicos se generan con un proceso de criba similar a la criba de Eratóstenes que se usa para encontrar los números primos. Para explicar este proceso y encontrar los números lúdicos menores o iguales que N (un entero mayor que 2), comencemos con la lista ordenada de los enteros positivos menores o iguales que N; la criba consiste en ir eliminando elementos de esta lista ordenada.

En lo que sigue, $\lfloor x \rfloor$ denotará el mayor entero $\leq x$, mientras $\lceil x \rceil$ será el menor entero $\geq x$. Obsérvese que si a y b son números reales cuya suma es un entero n, entonces $n = a + b = \lfloor a \rfloor + \lceil b \rceil$.

El primer número lúdico es $\ell_1 = 1$. Quitamos este número de la lista, que ahora tendrá $N_1 = N - 1$ elementos. El primer número de la nueva lista es el segundo número lúdico, $\ell_2 = 2$. Comenzando con ese número, de la lista eliminamos uno de cada ℓ_2 números (incluido el propio ℓ_2); de este modo hemos quitado $\lceil \frac{N_1}{\ell_2} \rceil$ números de la lista, y quedan $N_2 = N_1 - \lceil \frac{N_1}{\ell_2} \rceil = \lfloor N_1(1 - \frac{1}{\ell_2}) \rfloor$. De los N_2 números que quedan en la lista, el primero es el tercer número lúdico, $\ell_3 = 3$, y eliminamos de la lista uno de cada ℓ_3 números (incluido el propio ℓ_3); de este modo hemos quitado $\lceil \frac{N_2}{\ell_3} \rceil$ números de la lista, y quedan $N_3 = N_2 - \lceil \frac{N_2}{\ell_3} \rceil = \lfloor N_2(1 - \frac{1}{\ell_3}) \rfloor$. Este proceso se repite un número finito de veces hasta que la lista queda vacía, y así habremos generado los números lúdicos $\ell_n \leq N$.

Sea ℓ_k el mayor número lúdico $\leq N$. Entonces el número de elementos que quedaban en la lista después de $k-1$ pasos de eliminación tuvo que ser $N_{k-1} = 1$, ya que en el paso k-ésimo solo se eliminó ℓ_k y en la lista no quedaron elementos para poder seguir encontrando números lúdicos en pasos sucesivos. Así concluimos que

$$\begin{aligned} 1 = N_{k-1} &= \left\lfloor N_{k-2}\left(1 - \frac{1}{\ell_{k-1}}\right)\right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor N_{k-3}\left(1 - \frac{1}{\ell_{k-2}}\right)\right\rfloor \left(1 - \frac{1}{\ell_{k-1}}\right)\right\rfloor = \cdots \\ &= \left\lfloor \cdots \left\lfloor \left\lfloor (N-1)\left(1 - \frac{1}{\ell_2}\right)\right\rfloor \left(1 - \frac{1}{\ell_3}\right)\right\rfloor \cdots \left(1 - \frac{1}{\ell_{k-1}}\right)\right\rfloor. \end{aligned}$$

Entonces,

$$1 \geq (N-1)\left(1 - \frac{1}{\ell_2}\right)\left(1 - \frac{1}{\ell_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\ell_{k-1}}\right) - (k-2)$$

ya que $\lfloor x \rfloor \geq x - 1$. En particular, si $N = \ell_k$ se tiene

$$k - 1 \geq (\ell_k - 1)\left(1 - \frac{1}{\ell_2}\right)\left(1 - \frac{1}{\ell_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\ell_{k-1}}\right). \tag{1}$$

A partir de esa desigualdad, vamos a probar que $\sum_k 1/\ell_k = \infty$ por reducción al absurdo. Supongamos que

$$\sum_k \frac{1}{\ell_k} < \infty. \tag{2}$$

Esto implica que $\prod_{k\geq 2}(1 - 1/\ell_k)$ también converge (a un número positivo), puesto que

$$\frac{1}{\ell_k} \leq -\log\left(1 - \frac{1}{\ell_k}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(\ell_k)^j} \leq \frac{1}{\ell_k} + \frac{1}{2(\ell_k)^2(1 - \frac{1}{\ell_k})} \leq \frac{3}{2\ell_k}, \quad k \geq 2.$$

Sea ahora $c := \prod_{k\geq 2}(1 - 1/\ell_k) > 0$. De (1) se sigue que

$$\ell_k \leq 1 + \frac{1}{c}(k-1).$$

Pero esto es contradictorio con (2), ya que entonces

$$\sum_k \frac{1}{\ell_k} \geq \sum_k \frac{1}{1 + \frac{1}{c}(k-1)} = \infty,$$

luego $\sum_k 1/\ell_k$ diverge.

No se han recibido otras soluciones.

PROBLEMA 379. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioclescu School, Găeşti, Rumanía.*

Sea $f \in C^2([a,b])$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{4} f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Probar que

$$\left| f(a)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx - f(b)\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx \right| \leq M\frac{(b-a)^2}{24}\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

con $M = \text{máx}\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$.

Solución enviada Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Para cada s y t tal que $a \leq s < t \leq b$, consideramos las integrales

$$I(s,t) = \int_s^t f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad J(s,t) = \int_s^t (x-s)(x-t)f''(x)\,dx.$$

Ahora, definimos $I_1 = I(a,(a+b)/2)$, $I_2 = I((a+b)/2,b)$, $J_1 = J(a,(a+b)/2)$, $J_2 = J((a+b)/2,b)$ y $g(a,b) = f(a)I_1 - f(b)I_2$. De este modo, la desigualdad propuesta se seguirá probando que

$$g(a,b) = \frac{2}{b-a}(I_2J_2 - I_1J_1) \tag{1}$$

y

$$|I_2J_2 - I_1J_1| \leq \frac{M(b-a)^3}{48}\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

Comencemos probando (2). En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned}|J_1| &\leq \int_a^{(a+b)/2} (x-a)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)|f''(x)|\,dx \\ &\leq M\int_a^{(a+b)/2} (x-a)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)dx = \frac{M(b-a)^3}{48}\end{aligned}$$

y, de manera similar, $|J_2| \leq \frac{M(b-a)^3}{48}$. Entonces, como

$$|I_1|+|I_2| \leq \int_a^{(a+b)/2} |f(x)|\,dx + \int_{(a+b)/2}^b |f(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

deducimos que

$$|I_2J_2 - I_1J_1| \leq |I_2||J_2| + |I_1||J_1| \leq \frac{M(b-a)^3}{48}(|I_1|+|I_2|) \leq \frac{M(b-a)^3}{48}\int_a^b |f(x)|\,dx$$

y la prueba de (2) está concluida.

Veamos ahora la demostración de (1). Usando la identidad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{4} f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

es claro que

$$I_1 + I_2 = \frac{b-a}{4} f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{3}$$

Ahora, integrando por partes dos veces, resulta sencillo comprobar la identidad

$$J(s,t) = 2I(s,t) - (t-s)(f(s)+f(t)). \tag{4}$$

Así, tomando $s=a$ y $t=(a+b)/2$ en (4) y usando (3) para eliminar I_1, obtenemos

$$J_1 = 2I_1 - \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = -\frac{b-a}{2}f(a) - 2I_2.$$

De manera análoga, aplicando (4) con $s=(a+b)/2$ y $t=b$ y utilizando (3) para cancelar el término I_2, llegamos a que

$$J_2 = 2I_2 - \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = -\frac{b-a}{2}f(b) - 2I_1.$$

Y, finalmente,

$$I_2J_2 - I_1J_1 = -I_2\left(\frac{b-a}{2}f(b) + 2I_1\right) + I_1\left(\frac{b-a}{2}f(a) + 2I_2\right) = \frac{b-a}{2}g(a,b),$$

lo que concluye la prueba de (1).

También resuelto por el proponente.

PROBLEMA 380. *Propuesto por Pedro H. O. Pantoja, Universidade Federal de Campina Grande, Paraiba, Brasil.*

Probar las identidades

$$\cos^2\frac{\pi}{21}+\cos^2\frac{4\pi}{21}+\cos^2\frac{5\pi}{21}=\frac{13+\sqrt{21}}{8}$$

y

$$\cos^3\frac{2\pi}{21}+\cos^3\frac{8\pi}{21}+\cos^3\frac{10\pi}{21}=\frac{1+3\sqrt{21}}{16}.$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Sea $\alpha=e^{2\pi i/21}$. Usando que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad distintas de 1 es -1, deducimos

$$\sum_{k=1}^{20}\alpha^k=-1,\qquad \sum_{k=1}^{6}\alpha^{3k}=-1\qquad \text{y}\qquad \sum_{k=1}^{2}\alpha^{7k}=-1.$$

Tomemos

$$A=\alpha+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^{16}+\alpha^{17}+\alpha^{20}=2\left(\cos\frac{2\pi}{21}+\cos\frac{8\pi}{21}+\cos\frac{10\pi}{21}\right)$$

y

$$B=\alpha^2+\alpha^8+\alpha^{10}+\alpha^{11}+\alpha^{13}+\alpha^{21}=2\left(\cos\frac{4\pi}{21}+\cos\frac{16\pi}{21}+\cos\frac{20\pi}{21}\right).$$

Es obvio que $A>0$ y $B<0$. Además, por cálculo directo elemental, se tiene

$$A+B=\sum_{k=1}^{20}\alpha^k-\sum_{k=1}^{6}\alpha^{3k}-\sum_{k=1}^{2}\alpha^{7k}=1$$

y

$$A\cdot B=\sum_{k=1}^{20}\alpha^k+2\sum_{k=1}^{6}\alpha^{3k}+2\sum_{k=1}^{2}\alpha^{7k}=-5.$$

De este modo, A es la raíz positiva de la ecuación $x^2-x-5=0$; es decir, $A=(1+\sqrt{21})/2$, y

$$\cos\frac{2\pi}{21}+\cos\frac{8\pi}{21}+\cos\frac{10\pi}{21}=\frac{1+\sqrt{21}}{4}.$$

Ahora, usando las identidades

$$2\cos^2 x=\cos(2x)+1\qquad \text{y}\qquad 4\cos^3 x=\cos(3x)+3\cos x,$$

concluimos que

$$\cos^2\frac{\pi}{21}+\cos^2\frac{4\pi}{21}+\cos^2\frac{5\pi}{21}=\frac{3+A}{2}=\frac{13+\sqrt{21}}{8}$$

y

$$\cos^3\frac{2\pi}{21}+\cos^3\frac{8\pi}{21}+\cos^3\frac{10\pi}{21}=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}\right)+\frac{3}{4}A=\frac{1+3\sqrt{21}}{16},$$

donde hemos usado que

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}=\frac{-1}{2},$$

puesto que se trata de la mitad de la parte real de la suma de las raíces séptimas de la unidad distintas de 1.

También resuelto por G. C. Greubel, Kee-Wai Lau, J. Nadal, A. J. Población, B. Salgueiro (dos soluciones), A. Stadler, S. M. Stewart y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 381. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si $1<a\le b$, probar que

$$4\int_a^b\int_a^b (x^y+y^x)\,dx\,dy\ge (b-a)^2\big(4+(b-a)^2\big).$$

Solución enviada por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.

A partir de la desigualdad de Bernoulli

$$(1+t)^r\ge 1+rt,\qquad r,t\in\mathbb{R},\qquad r\ge 1,\ t\ge -1,$$

tomando, respectivamente, $(t,r)=(x-1,y)$ y $(t,r)=(y-1,x)$, deducimos las desigualdades

$$x^y\ge 1+xy-y\qquad \text{y}\qquad y^x\ge 1+xy-x,$$

válidas ambas para $x,y\ge 1$. Así, puesto que $(x-1)(y-1)>0$ cuando $x,y>1$, llegamos a que

$$x^y+y^x\ge 1+xy+(x-1)(y-1)>1+xy,\qquad x,y>1,$$

y, por tanto,

$$\int_a^b\int_a^b (x^y+y^x)\,dx\,dy>\int_a^b\int_a^b (1+xy)\,dx\,dy=\frac{(b-a)^2}{4}(4+(b+a)^2).$$

Finalmente, la desigualdad propuesta se sigue inmediatamente usando que $b+a>b-a$.

También resuelto por Kee-Wai Lau, J. Nadal, A. Stadler y el proponente.

PROBLEMA 382. *Propuesto por Lawrence Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \cosh(t)} \operatorname{senh}\left(\pi n^2 \operatorname{senh}(t) - \frac{t}{4}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{t}{4}\right).$$

Solución enviada por Seán M. Stewart, Bomaderry, Australia.

Denotando por $S(t)$ la suma a evaluar y haciendo uso de la expresión para las funciones hiperbólicas en términos de exponenciales, es sencillo probar que

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{-t/4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi(\operatorname{senh} t - \cosh t)n^2} - e^{t/4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(\operatorname{senh} t + \cosh t)n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-t/4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi e^{-t} n^2} - e^{t/4}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi e^{t} n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-t/4}\psi(e^{-t}) - e^{t/4}\psi(e^{t})\right), \end{aligned}$$

donde hemos tomado

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2}.$$

Aplicando la fórmula de sumación de Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

a la función $f(t) = e^{-\pi x t^2}$ (recordar que $\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2/x}$), obtenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi x n^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/x}$$

que, en términos de la función ψ, puede reescribirse como

$$1 + 2\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + 2\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Ahora, tomando $x = e^t$, deducimos que

$$\psi(e^{-t}) = e^{t/2}\psi(e^t) + \frac{e^{t/2} - 1}{2}$$

y, de esta manera,

$$S(t) = \frac{e^{t/4} - e^{-t/4}}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{t}{4}\right),$$

lo que concluye la demostración.

También resuelto por G. C. Greubel, A. Stadler y el proponente.

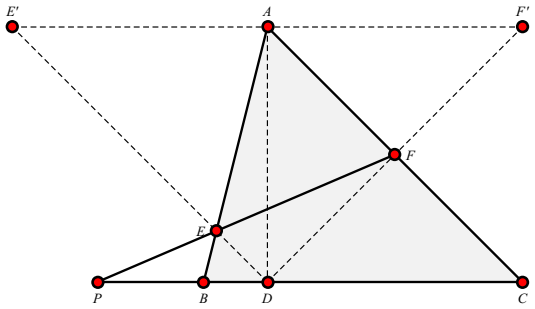

Figura 3: Esquema para la solución al Problema 383.

Problema 383. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Sea D el pie de la altura correspondiente al vértice A de un triángulo ABC y supongamos que D es un punto del segmento BC. Para cada valor del ángulo $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ sean E y F, respectivamente, los puntos pertenecientes a los lados AB y AC tales que $\angle ADE = \angle ADF = \varphi$.

(a) Probar que al variar φ las rectas EF pasan (todas) por un punto fijo.

(b) Se traza por E la recta paralela a BC y por F la perpendicular a la anterior. Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de dichas rectas.

(c) Determinar el valor de φ para el cual el área del triángulo DEF es máxima.

Solución enviada por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña.

(a) Consideremos el triángulo de vértices $A = (0, h)$, $B = (-p, 0)$ y $C(q, 0)$, donde h, p y q son números positivos. El pie de la altura desde el vértice A es el origen del sistema de coordenadas, $D = (0, 0)$. Poniendo $\tan\varphi = w$, sean entonces $E' = (-hw, h)$ y $F' = (hw, h)$ puntos sobre la recta paralela a BC trazada por el punto A (ver la figura 3). El punto E es el de intersección de las rectas AB y DE', y análogamente $F = AC \cap DF'$. Del cálculo correspondiente resulta

$$E = \left(-\frac{hpw}{p+hw}, \frac{hp}{p+hw}\right) \qquad \text{y} \qquad F = \left(\frac{hqw}{q+hw}, \frac{hq}{q+hw}\right).$$

Las rectas BC y EF se cortan en el punto $P = (2pq/(p-q), 0)$ (si $p = q$, caso de ABC isósceles, P es el punto del infinito de la recta BC), cuyas coordenadas son independientes del ángulo φ y es, por tanto, el punto fijo buscado. Las coordenadas de P tampoco dependen del parámetro h así que, para una base BC fija y el vértice A variando a lo largo de la perpendicular a BC por D resulta siempre, de la construcción del enunciado, un mismo punto P.

Podemos señalar además que P es el conjugado armónico del punto D respecto de los puntos B y C, porque se verifica (con segmentos orientados) $BP/BD = -CP/CD$.

(b) En el sistema coordenado que estamos considerando, las rectas del enunciado son $y = y_E = hp/(h + pw)$ y $x = x_F = hqw/(h + qw)$ y estas se pueden considerar las ecuaciones paramétricas, respecto del parámetro w, de la curva que contiene al lugar geométrico de su punto de intersección Q. Eliminando w se obtiene la ecuación cartesiana implícita $x(-hp + (p - q)y) - pq(-h + y) = 0$, o bien

$$x = \frac{pqy - pqh}{(p - q)y - ph},$$

obviamente una hipérbola de asíntotas $y = ph/(p - q)$ y $x = pq/(p - q)$ (hipérbola equilátera ya que las asíntotas son perpendiculares). El lugar geométrico de Q es el arco, comprendido entre los puntos A y C, de la rama de esa hipérbola que pasa por ambos puntos.

(c) En función de las coordenadas de los vértices, el área S del triángulo DEF es la mitad del valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{hpw}{p+hw} & \frac{hp}{p+hw} \\ 1 & \frac{hqw}{q+hw} & \frac{hq}{q+hw} \end{vmatrix},$$

es decir, $S = h^2pqw/((p+hw)(q+hw))$. El máximo valor de esta función para $w > 0$ se alcanza cuando $w = \sqrt{pq}/h$, condición que puede expresarse, para el ángulo φ del enunciado, como

$$\tan^2 \varphi = \cot B \cot C$$

en función de los ángulos del triángulo ABC.

También resuelto por F. D. Aranda, J. Nadal, C. Sánchez, A. Stadler y el proponente.

PROBLEMA 384. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma "Tor Vergata", Roma, Italia.*

Probar que

$$\int_1^\infty \frac{(x^2 + 1)\log x}{x^4 - x^2 + 1}\, dx = \frac{4}{3}\, G,$$

donde $G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ es la constante de Catalan.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Denotando por I la integral a evaluar y usando el cambio de variable $x = 1/t$, se tiene

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^1 \frac{(t^2 + 1)\log t}{t^4 - t^2 + 1}\, dt = -\int_0^1 \frac{(t^2 + 1)^2 \log t}{t^6 + 1}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{6n}(t^2 + 1)^2 \log t\, dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 (t^{6n+4} + 2t^{6n+2} + t^{6n}) \log t \, dt.$$

Aplicando integración por partes, resulta sencillo comprobar

$$\int_0^1 t^m \log t \, dt = \frac{-1}{(m+1)^2}, \qquad m \geq 0,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(6n+5)^2} + \frac{2}{(6n+3)^2} + \frac{1}{(6n+1)^2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(6n+5)^2} - \frac{1}{(6n+3)^2} + \frac{1}{(6n+1)^2} \right) + \frac{1}{3} G = \frac{4}{3} G, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(6n+5)^2} - \frac{1}{(6n+3)^2} + \frac{1}{(6n+1)^2} \right) = G,$$

cuya prueba es elemental.

También resuelto por G. C. Greubel, Kee-Wai Lau, A. Stadler, S. M. Stewart y el proponente.