En recuerdo de Srinivasa Ramanujan (1887–1920). ¿De cuántas formas podemos sumar 176 votos?

Dado un entero positivo n, una partición de n es una descomposición en enteros positivos cuya suma sea n. Teniendo en cuenta que dos particiones que solo difieren en el orden de los sumandos no se consideran distintas, el número de particiones de n se denota $p(n)$. Calcular $p(n)$ es un problema de combinatoria nada sencillo si n es grande; ¿cómo conseguirlo? Lo planteó Leibniz en una carta fechada en 1696. Euler (alrededor de 1750) probó que, para $|x| < 1$ (y tomando $p(0) = 1$), se puede escribir

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n.$$

Si además tomamos $p(n) = 0$ para $n < 0$, Euler también demostró que

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\big(p(n-g_k) + p(n-g_{-k})\big), \quad n \geq 1, \quad \text{con } g_k = k(3k-1)/2$$

(son sumas finitas). Esto da una fórmula recursiva para calcular $p(n)$.

Con ella, MacMahon calculó $p(176) = 476\,715\,857\,290$, que es el número de formas de conseguir mayoría absoluta en el Congreso español (sin restricciones sobre el número de partidos ni sobre los diputados de cada uno); de hecho, llegó hasta $p(200)$.

En el que posiblemente sea su resultado más conocido, Hardy y Ramanujan probaron, en 1917, que

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{k \leq \alpha\sqrt{n}} A_k(n)\sqrt{k}\, \frac{d}{dn}\left\{ \frac{\exp\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(n-1/24)}\right)}{\sqrt{n-1/24}} \right\} + O\big(n^{-1/4}\big),$$

con $\alpha > 0$ constante arbitraria y (usando expresiones equivalentes a las originales)

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ \mathrm{mcd}(h,k)=1}} \omega_{h,k} \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} n\right), \quad \omega_{h,k} = \exp\left(\pi i \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k} - \left\lfloor \frac{h\mu}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Esto aproximaba $p(n)$ incluso mejor de lo previsto, pero es una fórmula asintótica, no una serie convergente si hacemos $\sum_{k=1}^{\infty}$. Modificando ligeramente el método, Rademacher (1937) dio una representación de $p(n)$ por medio de una serie convergente:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\, \frac{d}{dn}\left\{ \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(n-1/24)}\right)}{\sqrt{n-1/24}} \right\},$$

que resuelve el problema iniciado por Leibniz y Euler de forma muy satisfactoria.

Juan Luis Varona, Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: jvarona@unirioja.es