UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

# Las paradojas como herramienta para la enseñanza de la probabilidad

Autor/es

DANIEL JOSÉ RODRÍGUEZ LUIS

Director/es

LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

## Trabajo de Fin de Máster

# Las paradojas como herramienta para la enseñanza de la probabilidad


**Autor**

*Daniel José Rodríguez Luis*

**Tutor**: Luis Español González


**MÁSTER:**
**Máster en Profesorado, Matemáticas (M06A)**


**Escuela de Máster y Doctorado**

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA


**AÑO ACADÉMICO: 2017/2018**

# Resumen

El objetivo de este Trabajo de Fin de Máster es mejorar la comprensión y el aprendizaje de conceptos relacionados con la probabilidad, así como incrementar la motivación de los estudiantes en relación a estos contenidos. Nuestro Proyecto de Innovación Docente está pensado para alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales y consiste en motivar algunos conceptos de la unidad didáctica de Probabilidad (como por ejemplo sucesos equiprobables, regla de Laplace e independencia de sucesos) mediante el uso de situaciones que son contrarias a la intuición. Para ello, hemos hecho una selección de paradojas que admiten una resolución empírica por medio de simuladores. La parte experimental sirve para despertar la curiosidad en situaciones en las que interviene el azar, así como para introducir nuevos contenidos que serán útiles para resolver las paradojas desde un punto de vista teórico. Con todo ello se pretende que los alumnos, partiendo de un experimento real, puedan extraer conclusiones y hacer sus propias conjeturas sobre las posibles soluciones al problema planteado.

**Palabras clave**: Motivación en el aula, Paradojas, Probabilidad.

# Summary

The aim of this Master's Thesis is to improve the understanding and learning of notions corresponding to probability, as well as to increase students' motivation concerning this subject. The Teaching Project is aimed at students enrolled in the upper courses of high school of Social Sciences consisting in a better understanding of some concepts of probability, such as equiprobable events, Laplace's rule and independent events, by using probabilistic paradoxes. To this aim, we have made a selection of some paradoxes which admit an empirical resolution using random experiments simulators. The experimental point of view is helpful to motivate the learning of new contents that will be used to solve the paradoxes from a theoretical point of view.

**Keywords**: Motivation in the classroom, Paradoxes, Probability.

# Índice general


**Introducción** **7**

**1. Marco Teórico** **11**

1.1. Adolescencia . . . 11

1.2. Teorías del aprendizaje . . . 13

1.2.1. Conductivismo . . . 14

1.2.2. Cognitivismo . . . 16

1.2.3. Constructivismo . . . 17

1.3. Procesos de Enseñanza y Aprendizaje . . . 18

1.3.1. Aprendizaje por descubrimiento . . . 19

1.3.2. Aprendizaje basado en problemas . . . 21

**2. Estado de la cuestión** **23**

**3. Unidad Didáctica. Propuesta de Innovación Docente** **27**

3.1. Introducción . . . 27

3.2. Descripción del Proyecto . . . 30

3.3. Objetivos . . . 33

3.4. Competencias . . . 34

3.5. Contenidos . . . 35

3.6. Estrategias de intervención y adaptación curricular . . . 36

3.7. Metodología . . . 37

3.8. Recursos . . . 38

3.9. Actividades . . . 38

3.10. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje . . . 39

3.11. Instrumentos de evaluación . . . 39

**4. Aplicación de la Propuesta** 41
4.1. Actividades en el aula . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
4.2. La paradoja del cumpleaños . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
4.3. Resolución empírica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
4.4. Explicación de los contenidos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
4.5. Resolución teórica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
4.6. Actividades adicionales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

**5. Conclusiones y Reflexiones Finales** 49

**Bibliografía** 51

**A. Capturas de pantalla de la aplicación Paradoxes** 55

**B. Unidad didáctica** 57

**C. Galileo y el duque de Toscana** 59

**D. La paradoja de la suma 7** 63

**E. La paradoja de Méré** 65

**F. El problema de Monty Hall** 69

**G. La paradoja de la transitividad** 77

**H. Paradojas adicionales** 81

# Introducción

El Máster de Profesorado tiene como objetivos fundamentales la capacitación para futuros profesores de secundaria, así como la formación integral para podamos ejercer como docentes de Matemáticas a niveles de Secundaria Obligatoria, Bachillerato o en centros donde se imparta la Formación Profesional. A lo largo del año académico, hemos cursado varias asignaturas diseñadas para la adquisición de habilidades desde diferentes puntos de vista, entre los que destacamos:

1. Matemático, aprendiendo nuevas técnicas de enseñanza y herramientas para llevar al aula que favorezcan al aprendizaje de los contenidos.

2. Psicológico, entendiendo las etapas por las que atraviesan los estudiantes durante su adolescencia y cómo estos cambios pueden afectar a su rendimiento académico.

3. Social, observando la evolución de la sociedad en los últimos años, y cómo aspectos relacionados con la inmigración y las distintas culturas requieren una adaptación del modelo educativo.

4. Educativo, aprendiendo el funcionamiento organizativo de los centros educativos, así como información de la que dispone un docente en relación a las adaptaciones curriculares en función del alumnado.

En mi opinión, el Máster de Profesorado está dividido en tres etapas claramente diferenciadas:

1. Una primera etapa destinada a la adquisición de conocimientos, tantos genéricos (comunes a las distintas modalidades del Máster) como específicos (particulares de cada modalidad, siendo mi caso Matemáticas), con el objetivo de proporcionarnos herramientas y conceptos teóricos que serán de gran utilidad para la siguiente etapa.

2. Una segunda etapa dedicada en exclusiva a la realización de las prácticas en los institutos, y en la que se pone de manifiesto el uso de todas las técnicas aprendidas en las clases teóricas (generales y específicas).

3. Por último, una tercera parte dedicada a la elaboración de un Proyecto de Innovación Docente enfocado a mejorar el aprendizaje de una unidad didáctica en concreto, que bien puede ser de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, como de Bachillerato o incluso de Formación Profesional.

En el presente Trabajo de Fin de Máster hemos intentado plasmar y unificar todas las competencias adquiridas durante este año académico, teniendo en cuenta desde el desarrollo psicológico del alumnado y las distintas teorías del aprendizaje como lo relativo a las metodologías de enseñanza más adecuadas para el aprendizaje de la probabilidad. Por ello, el presenta trabajo está organizado de la siguiente manera:

1. Un primer bloque dedicado al Marco Teórico donde se recogen las características de nuestro alumnado, los aspectos relacionados con la adolescencia y las teorías del aprendizaje más importantes, así como las metodologías del aprendizaje por descubrimiento y el aprendizaje basado en problemas, fundamentales para el desarrollo de nuestro Proyecto de Innovación Docente.

2. Un segundo bloque dedicado al Estado de la cuestión donde se recoge la bibliografía más relevante en lo relacionado al uso de las paradojas en el aula, concretamente para el aprendizaje de la probabilidad y la estadística.

3. Un tercer bloque dedicado a la Propuesta de Innovación Docente y donde se hace una breve descripción del proyecto, los objetivos, las competencias que buscamos con su aplicación en el aula y las distintas estrategias de intervención curricular, así como los recursos y las actividades a desarrollar para el cumplimiento de los objetivos planteados inicialmente.

4. Un cuarto y último bloque dedicado a la Aplicación de la Propuesta donde se detalla, en un caso concreto, los pasos a seguir con cada una de las paradojas que se vayan a utilizar en el aula, partiendo de las soluciones obtenidas empíricamente para, posteriormente, introducir los conceptos necesarios para la resolución desde un punto de vista teórico.

Capítulo 1

# Marco Teórico

En esta sección del trabajo vamos a describir y analizar algunos aspectos psicológicos y sociales de los estudiantes de secundaria. En primer lugar, hablaremos brevemente sobre la etapa del desarrollo que comprende la adolescencia, así como sus principales características. En segundo lugar, expondremos las teorías del aprendizaje más importantes y que están involucradas en nuestro Proyecto de Innovación Docente. Finalmente, comentaremos brevemente dos de las metodologías de aprendizaje en las que se fundamente nuestro proyecto docente, como son el aprendizaje por descubrimiento y el aprendizaje basado en problemas.

## 1.1. Adolescencia

Durante el Máster de Profesorado hemos adquirido conocimientos, tanto generales como específicos de cada titulación, para poder formar parte de un cuerpo docente en un centro educativo. Por lo tanto, los alumnos con los que vamos a trabajar en un futuro son adolescentes y con los que debemos tener especial cuidado ya que atraviesan una etapa difícil en su desarrollo marcado por cambios que definen su personalidad. Este y otros temas relacionados se engloban en la asignatura del Máster titulada "Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad".

Es importante empezar definiendo la adolescencia como el periodo en el desarrollo de un individuo que comienza con la pubertad y que está comprendido entre la niñez y la adultez. Según la Organización Mundial de la Salud, la adolescencia está compuesta por tres subetapas que son:

- **Adolescencia temprana**: con edades comprendidas entre los 10 y los 13 años.

- **Adolescencia media**: con edades comprendidas entre los 14 y los 16 años.
- **Adolescencia tardía**: con edades comprendidas entre los 17 y los 19 años.

Durante la adolescencia ocurren diversos cambios a nivel físico que son comunes a ambos sexos, como por ejemplo el aumento de estatura, en algunos casos el aumento de peso, aparición de vello corporal (púbico y axilar) entre otros. Sin embargo, existen transformaciones a nivel corporal que son propias de cada género. Así, los individuos de género femenino experimentan un crecimiento de los senos y aumento de la grasa subcutánea, así como la aparición de la primera menstruación conocida con el nombre de menarquia. Este último hecho marcará de manera indudable una nueva etapa en sus vidas.

Por otro lado, los individuos del género masculino experimentan una aparición del vello facial (bigote, barba, etc.), un aumento de la grasa subcutánea y un crecimiento de los testículos, así como la primera producción de espermatozoides conocida con el nombre de espermarquia.

Desde el punto de vista psicológico, existe una evolución del pensamiento que viene acompañado de cambios en el comportamiento del adolescente. Por ejemplo, en la adolescencia temprana y media los individuos llegan a desarrollar la capacidad para pensar en términos abstractos, empiezan a experimentar la necesidad de relacionarse con los demás y comienzan la búsqueda de un referente fuera del ámbito familiar (deportistas, cantantes, famosos, etc.). Asimismo, los adolescentes en estado temprano comienzan a construir y moldear su autoestima y su autoconcepto, pudiendo valorar positiva o negativamente la idea que tienen de sí mismos. Finalmente, en esta etapa se examinan distintos elementos que componen la identidad del individuo, como puede ser la estética, los gustos musicales y los intereses que les lleva a identificarse con las tribus urbanas.

Ahora bien, en la adolescencia tardía es donde ocurre un desarrollo de la conciencia social acompañado de un pleno pensamiento abstracto, así como un reconocimiento en la capacidad para valorar las consecuencias de sus actos. La adolescencia tardía es una de las etapas del desarrollo más estable caracterizada por un pensamiento madurativo, más responsable, abandonando la idea del presente inmediato y centrado más en eventos a futuro. En esta etapa la identidad del adolescente está prácticamente consolidada (con sus valores, gustos y creencias), mostrando interés por ámbitos en los que no son el centro de atención (como la política, la comunidad, la desigualdad, etc.) y pudiendo manifestarse por medio de una fuerte sensación de idealismo.

En líneas generales, los aspectos más relevantes en el desarrollo de pensamiento del adolescente son:

- **Idealismo**: Capacidad de concebir el mundo real como una más dentro de las posibilidades que pueden concebir. Los adolescentes suelen responsabilizar a los adultos al descubrir que el mundo real está muy lejos de la imagen ideal que se han creado.

- **Tendencia a la discusión y a la indecisión**: Manifestación en la búsqueda constante de poner a examen sus capacidades de argumentación frente a otros individuos.

- **Egocentrismo**: Valoración excesiva de la propia personalidad, donde destacamos los rasgos de:

    1. **Audiencia imaginaria**: El adolescente se considera el centro de atención y considera que existe una audiencia que le observa, generando un estado de preocupación por la opinión que tienen los demás de ellos.
    2. **Fábula personal**: El adolescente se considera un ser único, excepcional, irrepetible. Es por ello que experimentan un fuerte sentimiento de incomprensión por parte del resto de la sociedad.
    3. **Fábula de invencibilidad**: El adolescente asume todo tipo de riesgos (sin pensar en las posibles consecuencias) al considerarse exento de todo peligro.

Es nuestra labor como docentes conocer las características, situaciones, inquietudes y necesidades por las que atraviesan nuestros alumnos con el fin de ofrecer las soluciones adecuadas a cada uno de sus problemas, haciendo que su paso por la secundaria sea lo más agradable posible.

## 1.2. Teorías del aprendizaje

Se entiende por aprendizaje a toda aquella tasnformación mediante la cual se adquieren o se modifican ciertas habilidades, destrezas, conocimientos, actitudes y/o conductas y que son la consecuencia de procesos tales como el estudio, la experiencia o la observación.

De la interacción entre el cerebro y los procesos de aprendizaje se encarga la **neuroeducación**, un campo emergente que combina tres disciplinas como son la neurología, la psicología y la educación con el fin de mejorar el aprendizaje. Por un lado, la neuroeducación utiliza la información que se tiene tanto del funcionamiento del cerebro como de los procesos educativos y la asimilación de conocimientos, todo ello respaldado por la psicología educativa. Normalmente, la neuroeducación se centra en ámbitos escolares y académicos.

Una de las principales ideas de la neuroeducación es que para aprender nuestro cerebro necesita emocionarse. Y no sólo se trata de potenciar las emociones en el aula, sino en enseñar con pasión y contagiar ese sentimiento a los estudiantes. En esta línea, el Prof. Francisco Mora [35] (divulgador científico y Catedrático de Fisiología Humana de la Facultad de Medicina de la Universidad Complutense de Madrid) afirma que el aprendizaje significativo va acompañado de estímulos que despiertan la atención y posteriormente generan emoción. Es decir, que para aprender es necesario emocinarse. Por ello, el Prof. Mora señala que la emoción en un alumno es el punto de partida más importante sobre el que se fundamenta todos los procesos de aprendizaje, y es en este hecho hacia lo que debe encaminarse la formación de los futuros docentes.

Existen diversas teorías que explican los procesos a través de los cuales se produce el aprendizaje, entre las que destacamos el conductivismo, el congnitivismo y el constructivismo.

### 1.2.1. Conductivismo

Esta teoría del aprendizaje fue fundada por John B. Watson y afirma que el sujeto es esencialmente pasivo, respondiendo únicamente a los incentivos que le proporciona el ambiente que le rodea. Esta teoría llevada al sistema educativa se traduce en que el alumno emite respuestas a los estímulos que le envía el profesor, moldeando su conducta mediante refuerzos positivos o negativos. En este contexto, la palabra “positivo.$^{es}$tá relacionada con la presencia de un incentivo para el alumno mientras que “negativo”hace referencia a la ausencia de dicho incentivo.

Por ello, en la teoría conductivista se define el aprendizaje como una alteración en la conducta del sujeto condicionada por estímulos, tanto positivos como negativos. Asimismo, su aplicación en el aula implica que el conocimiento no se consigue como la consecuencia de un proceso de asimilación y comprensión, sino más bien mediante un proceso de automatización de los contenidos (como por ejemplo, la memorización, la repetición de ejercicios, etc.) y que está condicionado por los refuerzos positivos en el aula.

Una de los puntos débiles de esta teoría del aprendizaje es el hecho de que sólo se basa en conductas observables por parte del alumno, ignorando los procesos cognitivos fundamentales a la hora de adquirir nuevos conocimientos. Gran parte de las primeras investigaciones de esta teoría se realizaron en animales, siendo el caso más conocido el relativo al perro de Pavlov. El conductivismo, precursor de las teorías cognitivas, aportó conceptos a las teorías del aprendizaje tales como el de condicionamiento clásico (descrito por Pavlov y en que el aprendizaje se produce cuando un estímulo originalmente neutro, que no provoca una respuesta, llega a provocarla debido a la asociación de dicho estímulo con el estímulo que normalmente provoca dicha respuesta) y el condicionamiento operante (descrito por Skinner al observar que el condicionamiento clásico no abarcaba todos los tipos de aprendizaje y que se basa en el estudio de las acciones que influyen en la conducta y que contribuyen al aprendizaje).

Dentro de la teoría conductivista, concretamente en la del condicionamiento operante, el docente es considerado como un elemento que posee competencias aprendidas, y que transmite el conocimiento a una planificación sujeta a unos objetivos [20]. En la corriente conductivista no hay margen para la innovación por parte del docente, limitándose únicamente al cumplimiento de unos objetivos de enseñanza a desarrollar en cada etapa. Asimismo, el profesor es considerado un técnico de operaciones que debe establecer las condiciones óptimas para sacar el máximo provecho de la enseñanza por medio del uso de principios, procedimientos y programas conductuales [24, p. 492]. Más información relativa al conductivismo puede encontrarse en [12].

A medida que los investigadores descubrían problemas en los conceptos conductistas comenzaron a emerger nuevas teorías, manteniendo algunos de los conceptos del conductivismos a la par que se eliminaban otros. Los neoconductistas añadieron nuevas ideas que, más tarde, fueron asociadas con la perspectiva cognitiva del aprendizaje.

### 1.2.2. Cognitivismo

Esta teoría del aprendizaje se caracteriza por otorgar un papel más protagonista a la mente y a los procesos mentales del que disfrutaban en la teoría conductista. Además, esta teoría asegura que el estudio de la mente aportaría un mayor conocimiento acerca de cómo el cerebro interperta, almacena y procesa la información en la memoria. En definitiva, el cognitivismo se centra en estudiar las diferentes formas en las que el cerebro aprende.

Esta teoría llevada al sistema educativa se traduce en que el alumno es un procesador de información, adquiriendo y clasificando los nuevos contenidos que, una vez organizados, pueden crear nuevos conceptos o modificar los ya existentes. En ocasiones se hace el simil de la mente con un ordenador ya que la información se recibe, se procesa y finalmente se obtienen resultados en los hábitos del individuo. Por ello, en la teoría cognitivista el aprendizaje se considera un proceso de asociación y construcción de nuevos contenidos y, por consiguiente, un cambio en el esquema del alumno.

Esta nueva visión en la manera de aprender es diametralmente opuesta a la del conductivismo, ya que los humanos no son seres que responden únicamente a estímulos externos, sino que son más bien seres racionales que participan de manera activa en su aprendizaje, siendo sus acciones una consecuencia del pensamiento.

Esta teoría del procesamiento de información, cuyo fundador fue el psicólogo americano George A. Miller, tuvo gran influencia en la elaboración de teorías posteriores ya que habla sobre cómo ocurre el aprendizaje, incluyendo conceptos como la atención y la memoria.

Esta teoría se ha ampliado y desarrollado con el paso de los años. Por ejemplo, Craik y Lockhart enfatizaron que la información se procesa de varias formas (a través de la percepción, la atención, el etiquetado de conceptos y la formación de significados), que afectan a la habilidad para acceder a la información posteriormente.

Otra de las teorías relativas al aprendizaje dentro de la perspectiva cognitivista es la teoría cognitiva del aprendizaje multimedia de Mayer. Esta teoría afirma que las personas aprenden de forma más profunda y significativa a partir de palabras combinadas con imágenes que a partir de palabras únicamente. Propone tres asunciones principales respecto al aprendizaje multimedia:

Hay dos canales separados (auditivo y visual) para procesar la información. Cada canal tiene una capacidad limitada. El aprendizaje es un proceso activo de filtro, selección, organización e integración de la información basado en el conocimiento previo. Los seres humanos podemos procesar una cantidad limitada de información por un canal en un determinado momento. Damos sentido a la información que recibimos creando de forma activa representaciones mentales.

La teoría cognitiva del aprendizaje multimedia presenta la idea de que el cerebro no interpreta una presentación multimedia de palabras, imágenes e información auditiva de forma exclusiva; al contrario, estos elementos son seleccionados y organizados de forma dinámica para producir constructos mentales lógicos.

### 1.2.3. Constructivismo

Es una teoría del aprendizaje que afirma que conocimiento no es más que el resultado de un proceso mental del individuo, mediante la construcción de la realidad y que parte de la interacción del individuo con el mundo que le rodea. Por ello, los aspectos cognitivos, sociales y afectivos que caracterizan el comportamiento de cada ser humano son el resultado de la experiencia el individuo con el medio ambiente.

En ocasiones, el constructivismo se considera una rama dentro del cognitivismo. Sin embargo, una de las principales diferencias consiste en que mientras en cognitivismo la mente es una herramienta que procesa y almacena la información proveniente del entorno, en el constructivismo la mente se considera un filtro de dicha información con el objetivo de crear una realidad a partir de nuestras propias experiencias.

Uno de los considerados como padre del constructivismo es el psicólogo Jean Piaget, cuya teoría del aprendizaje está centrada en el desarrollo cognitivo de niños y adolescentes. Las ideas de Piaget van en la línea de que el desarrollo cognitivo ocurre a través de una serie de etapas de maduración y experiencia del individuo que son:

1. **Sensorio-motora**: aparece aproximadamente a los dos años de edad y se caracteriza por la obtención y el reconocimiento de la interacción física con el entorno, por lo que el desarrollo cognitivo se lleva a cabo mediante experimentación con objetos, personas y animales cercanos.

2. **Preoperacional**: aparece aproximadamente entre los dos y los siete años y es cuando aparece la capacidad de actuar y jugar siguiendo un rol determinado, así como el uso de objetos de carácter simbólico. Esta etapa debe su nombre a que todavía no se han desarrollado de operaciones mentales complejas como son el

razonamiento lógico, el razonamiento inferencial, el pensamiento creativo entre otros.

3. **Operaciones concretas**: aparece aproximadamente entre los siete y los doce años y se caracteriza por el desarrollo de operaciones lógicas para llegar a conclusiones válidas, siempre y cuando se trata de situaciones concretas y no abstractas.

4. **Operaciones formales**: aparece aproximadamente a partir de los doce años y se caractriza por la inferencia de conclusiones de situaciones abstractas que no están ligadas a casos que hayan podido experimentar en su propia persona.

Por otro lado, otros de los autores influyentes en esta teoría del aprendizaje es Lev Vygotsk, cuya teoría del desarrollo sociocultural afirma que los individuos aprenden gracias a las interacciones sociales. Esta teoría señala que el lenguaje es una herramienta clave en el desarrollo del ser humano, y ésta solo se produce cuando hay un intercambio de ideas y de conocimiento en un entorno social a través de la comunicación. Esto es, la trasmisión de información usando el lenguaje influye en el desarrollo cognitivo del individuo.

Al igual que Piaget, Vygotsk considera que los niños aprenden de forma activa mediante la experimentación de situaciones prácticas. Sin embargo, a diferencia de Piaget quien entiende que el conocimiento se genera como una actividad individual, Vygotsk considera que el aprendizaje se produce gracias a las interacciones sociales supervisadas por una figura de referencia, como puede ser un tutor o un maestro.

## 1.3. Procesos de Enseñanza y Aprendizaje

Se entiende por proceso de enseñanza y aprendizaje a toda actividad en donde el principal protagonista es el alumno, mientras que es el docente quien se encarga de proporcionar las herramientas que facilitan el proceso de aprendizaje por parte del alumno. Son los alumnos los artífices de la construcción del conocimiento por medio de la lectura, la aportación de ideas, la reflexión de situaciones o del intercambio de impresiones con sus compañeros y con el profesor.

Durante mucho tiempo el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje se entendía como un único suceso, de forma que cuando el profesor enseñaba el alumno automáticamente aprendía. Sin embargo, desde hace ya varias décadas los investigadores se han percatado de que se trata de dos procesos diferentes: uno es un proceso personal (el de aprender, donde cada alumno lo hace a su ritmo y de una forma particular) y otro es el de enseñanza (donde el profesor proporciona un ambiente adecuado para facilitar el proceso de aprendizaje).

Actualmente existen varias metodologías que se puede utilizar en el aula para fomentar el aprendizaje de los alumnos, entre las que se encuentran:

1. El aprendizaje por descubrimiento.
2. Aprendizaje basado en proyectos.
3. Aprendizaje basado en problemas.
4. Aprendizaje cooperativo y colaborativo.
5. Flipped Classroom (Aula Invertida).
6. Gamificación

El objetivo principal de nuestro proyecto es lograr un aprendizaje significativo de conceptos de probabilidad a través de las paradojas. Por ello, es fundamental la participación activa en clase, bien sea aportando ideas, formulando hipótesis acerca de las soluciones o intercambiando impresiones con el resto de compañeros. Asimismo, debemos proporcionar un ambiente de estudio que favorezca la motivación de los estudiantes para que, como comentaba el Prof. Mora, las emociones posibiliten el aprendizaje.

A continuación, y ya que la usaremos en nuestro Proyecto de Innovación Docente, hablaremos brevemente del aprendizaje por descubrimiento y el basado en problemas.

### 1.3.1. Aprendizaje por descubrimiento

Es una metodología de aprendizaje que surge en la década de los 60 y que fue desarrollada por el psicólogo y pedagogo Jerome Bruner, también conocida como aprendizaje heurístico. El aprendizaje por descubrimiento, como su nombre indica, se caracteriza por el hecho de que favorece que el alumno, como actor principal, puede alcanzar los conocimientos y los contenidos por sí mismo a través de un proceso de descubrimiento basado en la observación, la experimentación o la formulación de conjeturas y en los que se fundamenta nuestra proyecto docente.

Este tipo de metodología educativa supone una ruptura con los procedimientos de enseñanza más tradicionales, ya que los contenidos no se presentan al alumno en su forma final (analizados al detalle, desde su definición hasta las propiedades), sino que han de ser descubiertos por el alumno de manera progresiva a través de distintos razonamientos deductivos, como por ejemplo partiendo de casos particulares o reduciendo el problema a una configuración más sencilla.

En el aprendizaje por descubrimiento se considera a los estudiantes como personajes principales en el proceso de aprender quienes, motivados por la curiosidad, deben descubir tanto los conocimientos como las relaciones entre éstos. Por ello, la labor del docente no es exhibir los contenidos de forma íntegra, sino que debe proporcionar tanto un estímulo como unas herramientas básicas con las que el alumno pueda llegar a descubir el conocimiento mediante estrategias antes mencionadas (la obsevación, comparación de casos, análisis de semejanzas, etc.). Más información sobre el aprendizaje por descubrimiento puede encontrarse en [2].

El principal objetivo del aprendizaje por descubrimiento es que los alumnos lleguen a conocer cómo funcionan las cosas por sus propios medios de una forma constructiva. Algunos de los beneficios de esta metodología son:

1. Deja atrás las limitaciones del aprendizaje tradicional, basado en la memorización de los contenidos.

2. Favorece que los alumnos puedan pensar por sí mismos, pudiendo confirmar o refutar las hipótesis que plantean.

3. Permite conocer cómo aprenden los estudiantes.

4. Despierta la curiosidad por el aprendizaje.

5. Fomenta la aparación de soluciones creativas.

No obstante, el aprendizaje por descubrimiento tiene algunos detractores. Diversos autores, como el psicólogo y pedagogo David Ausubel, consideran que existe una falsa mitificación acerca de los beneficios de este tipo de metodología educativa. Dicho autor no considera totalmente cierto que el aprendizaje por descubrimiento sea necesariamente significativo, ni tampoco que el aprendizaje por recepción (el tradicional) sea obligatoriamente mecánico, sino que todo depende de cómo se almacena la información en nuestro cerebro.

### 1.3.2. Aprendizaje basado en problemas

Es un proceso de enseñanza y aprendizaje que, al igual que ocurre con el aprendizaje por descubrimiento, los protagonistas son los propios alumnos quienes adquieren los conocimientos, las habilidades y las distintas actitudes mediante la resolución de problemas de la vida real. El aprendizaje basado en problemas se apoya en la capacidad de análisis y de comunicación, así como la reflexión de los resultados que permitan al alumno llegar a la solución de un problema. Uno de los objetivos de esta metodología, además de la adquisición de conocimiento, es poner en práctica aptitudes y valores que sean de utilidad en el futuro profesional del alumno.

A diferencia de lo que ocurre en los métodos de enseñanza tradicional (donde en primer lugar se exponen los contenidos y luego se procede a la resolución de los porblemas), en el aprendizaje basado en problemas los conocimientos se adquieren a medida que se avanza en la resolución de un problema. Es decir, primero se presenta una situación a resolver, se determina la información fundamental, se identifican las necesidades de aprendizaje y finalmente se aplican los conocimientos que adquiridos para resolver el problema planteado inicialemente. Más información sobre el aprendizaje basado en problemas puede encontrarse en [8].

Diversos autores (véase [14] y [30]) señalan que el aprendizaje basado en problemas permite al alumno desarrollar y trabajar diversas competencias, entre las que se encuentran:

1. La toma de decisiones.
2. El trabajo en equipo.
3. Las habilidades comunicativas (argumentación, presentación y exposición).
4. La conciencia del propio aprendizaje.
5. El pensamiento crítico.
6. Las habilidades de autoevaluación y aprendizaje permamente.

No obstante, una de los principales inconvenientes del aprendizaje basado en problemas es el diseño y la creación de las cuestiones. Asimismo, diversos autores señalan otras dificultades, como puede ser el hecho de que los problemas deben estar en relación con los objetivos del curso y con ciertas situaciones de la vida diaria para que los alumnos puedan encontar sentido a su tarea y la implicación total de todos los integrantes del grupo para afrontar los problemas, así como el hecho de que la longitud y la complejidad del problema deben ser tales que eviten el reparto de tareas por parte de los alumnos, ignorando por completo el trabajo realizado por un compañero. Más información sobre el aprendizaje basado en problemas puede encontrarse en [29].

## Capítulo 2

# Estado de la cuestión

No cabe duda de la necesidad que tenemos los ciudadanos de una formación básica en relación a la probabilidad y la estadística, no tanto como un conocimiento científico sino como una herramienta que sirva para extraer información sobre un fenómeno concreto en una población, así como para la toma de decisiones basadas en los resultados obtenidos.

Son muchos los investigadores que han estudiado el valor didáctico de las paradojas y que apoyan el uso de las mismas en el aula, ya que permiten diseñar situaciones beneficiosas para la motivación del alumnado, descubrir conexiones entre el temario y la historia de las matemáticas, así como fomentar el pensamiento reflexivo y la autoevaluación de los estudiantes. En esta línea, en el año 1992, autores como Falk y Konold [15] destacan la relación entre las paradojas y la metacognición, haciendo hincapié en que para poder enfrentarse a una situación paradójica la persona que analiza deber ser consciente de sus propios pensamientos, un aspecto fundamental para poder desarrollar la capacidad de abstracción propia de las matemáticas.

En lo relativo a las paradojas, en [21] Konold señala el papel motivador que tiene para el estudiante la resolución de situaciones que van en contra de la intuición, ya que permiten investigar los problemas en matemáticas desde un punto de vista más formal, sometiendo a examen sus conocimientos y formular conjeturas, así como desarrollar sus propias líneas de pensamiento. Posteriormente, en [23] Lesser concibe las paradojas como una herramienta dentro de la teoría del aprendizaje constructivista, basada en la construcción por parte del estudiante en la forma de enfocar un problemas y de sus propios procedimientos de resolución, lo que puede conllevar a una reformulación de sus ideas para seguir avanzando en su aprendizaje.

La probabilidad es una rama de las matemáticas relativamente joven y, como señalan diversos autores, su desarrollo está íntimamente relacionado con la resolución de paradojas, lo que supone un análisis de sus propios errores y la introducción de nuevos conceptos (véase [7] para más información), así como de problemas en los que la intución puede conducir a engaño (véase [11] para más información).

En lo relativo a las reformas educativas, en Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, se recomienda que los contenidos correspondientes al bloque de Estadística y Probabilidad que se imparten tanto en la Educación Secundaria Obligatoria como en el Bachillerato se aborden desde situaciones intuitivas y cercanas al estudiante, dando importancia a las experiencias aleatorias, a las predicciones que puedan formular los alumnos partiendo de los datos, así como a la exposición y presentación de los resultados obtenidos.

Si bien es verdad que se recomienda el uso de la tecnología para evitar los cálculos repetitivos, no se menciona su utilizacion en el aula para mejorar la comprensión de los conceptos, como puede ser diagramas interactivos, simulaciones de experimentos aleatorios, etc.

Por otra parte, el decreto también advierte sobre la necesidad de reforzar la intuición de los estudiantes en lo relativo a la argumentación probabilística, por lo que el docente debe diseñar actividades que sirvan de motivación al estudiante y que permitan enfrentarse con situaciones donde su intuición les lleve a equícovo. No solo el uso de las paradojas es beneficioso para el alumno sino también para el profesor, ya que aporta información sobre las posibles dificultades a las que se enfrentan los estudiantes.

A pesar de que existe una larga tradición en lo que respecta a la enseñanza de la probabilidad y la estadística en la secundaria, como bien señala Stohl en ([33]) son pocos los profesores que se atreven a adoptar metodologías más innovadoras, metodologías menos formales y más basadas en la experimentación y en la realización de simulación por ordenadores. La idea de usar las paradojas en el ámbito educativo no es algo nuevo y son varios los investigadores que han estudiado el efecto que tiene emplear elementos no convencionales en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, en el ámbito de las relaciones personales, Flores [18] propone el uso de chistes como herramienta para facilitar la comunicación entre profesores y alumnos, así como entre los propios profesores. En el contexto de la formación del profesorado, en [25] los investigadores Movshovitz-

Hadar y Hadass estudian el potencial de las paradojas como medio para crear conciencia en los profesores acerca del papel edificante del razonamiento falaz, teniendo relevancia en aspectos relacionados con la motivación, los conceptos erróneos y el aprendizaje constructivo. Asimismo, León [22] apunta a que la historia de la probabilidad está plagada de situaciones atractivas al estudiante, donde se combina la cotidianidad de la vida diaria y el azar.

En la actualidad, en el Decreto 19/2015, de 12 de junio [9], por el que se regulan aspectos relacionados con la organización, los contenidos y la evaluación de los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria en La Rioja, el bloque de Estadistíctica y Probabilidad está presente en todos los curso, desde 1º de la ESO (donde se presentan las nociones de población y muestra, se establecen las diferencias entre variable cuantitativa y cualitativa, los diagramas de barras, los diagramas de sectores, así como las medidas de posicionamientos central y las medidas de dispersión) hasta 2º de Bachillerato, tanto de Ciencias (donde se imparten las nociones de probabilidad condicionada, sucesos independientes y variables aleatorias entre otros) como en los de Ciencias Sociales (donde aparece la teoría del muestreo, los intervalos de confianza y el constrate de hipótesis).

En España, desde hace más de veinte años el bloque de Estadística y Probabilidad ha estado presente en los currículos tanto en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria como en la etapa postobligatoria, tomando especial en los últimos años tras si incorporación como temario de evaluación en las pruebas de Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad (EBAU). En los últimos decretos que regulan las enseñanzas en secundaria se proponen cambios en la metodología con el fin de mejorar tanto la intuición en el campo de la probabilidad, una habilidad que no está del todo desarrollado en esta etapa.

Es en este punto donde, en mi opinión, el uso de las paradojas en el aula pueden marcar un punto de inflexión en lo relativo al aprendizaje de la probabilidad. En esta línea, en los últimos años se han llevado a cabo varias investigaciones sobre la aplicación de diversas paradojas en el aula, argumentando el interés y los beneficios de su uso y las dificultades que pueden aparecer durante su aplicación en clase y los componentes de idoneidad didácticos, así como variantes de una misma paradoja con el fin de analizar si resultan más asequibles a los estudiantes (véase [3], [4], [5] y [6] para más información).

En lo que respecta a la etapa de enseñanza postobligatoria, el Decreto 21/2015, de 26 de junio [10], establece que para el aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad es importante buscar conexión de dicha rama de las matemáticas con la vida cotidiana, a través del estudio y la interpretación de datos. Asimismo, Se indica, que abordando contextos funcionales se producirá en el alumno un aprendizaje progresivo hacia conceptos más complejos partiendo de sus experiencias y conocimientos previos.

Capítulo 3

# Unidad Didáctica. Propuesta de Innovación Docente

## 3.1. Introducción

Tal y como aparece en la guía del Máster de Profesorado [19], uno de los objetivos fundamentales de esta especialización es la incorporación de conocimientos, (de carácter tanto académico como personales) que permitan desarrollar de manera adecuada la labor docente, así como herramientas que faciliten los procesos de aprendizaje por parte de los estudiantes. En este sentido, una de las tareas más importantes como futuros profesores de secundaria es buscar y diseñar recursos didácticos que sean viables en el aula y que vayan dirigidos a incentivar y mejorar el grado de motivación de los estudiantes, factor clave que favorece la asimilación de aquellos contenidos que presentan un componente de abstracción.

Dentro de la gran variedad de recursos didácticos que pueden llevarse a cabo en el aula, uno de los menos utilizados son las paradojas como herramienta de revisión de los conceptos por parte de los estudiantes. Además, el empleo de las paradojas no solo es beneficioso para el alumnado sino también para los profesores, ya que puede inducir en el docente un cambio sobre la metodología de enseñanza, así como en la forma en la que se presentan los contenidos de un tema en concreto.

Como complemento de nuestra formación, durante el periodo de prácticas en el instituto es muy importante conocer e identificar las distintas formas en las que los estudiantes piensan, perciben y aprenden los contenidos que reciben en el aula, lo que varios autores han denominado *conocimiento matemático para la enseñanza* (véase [1]).

Esta información permite al docente adoptar estrategias que potencien la comprensión de los contenidos curriculares. Tal y como se recoge en el currículo de Secundaria (véase [9] y [10]), el bloque de Estadística y Probabilidad está presente en la enseñanza tanto obligatoria (3º y 4º de la ESO) como en la postobligatoria (Bachillerato de Ciencias y Bachillerato de Ciencias Sociales) y, pese a que se imparte a finales del curso académico, recientemente ha adquirido un papel protagonista debido a que forma parte del temario de evaluación de las pruebas de EBAU.

Dentro del aprendizaje, la motivación juega un papel fundamental ya que es un medidor del grado de interés que tiene un alumno en su propio desarrollo intelectual y en las actividades que conllevan la adqusición de nuevos conocimientos. La motivación no se trata de algo intrínseco al estudiante sino que es un elemento que puede conseguirse y desarrollarse a lo largo del curso, manteniedo el grado de atención del alumno por un tema en concreto. Tanto los profesores como los teóricos del aprendizaje en el aula coinciden en el hecho de que los estudiantes que presentan altos grados de motivación aprenden con mayor rapidez que el resto, y además de forma más eficiente.

En primer lugar, entendemos por paradoja todo aquel resultado que, en apariencia, es opuesta a la experiencia y que lleva de forma implícita una contradicción lógica que no es percepcible a primera vista. Son muchos los investigadores que han estudiado el valor didáctico de las paradojas y que apoyan el uso de las mismas en el aula, ya que permiten tanto diseñar situaciones beneficiosas para la motivación del alumnado, descubrir conexiones entre los contenidos y la historia de las matemáticas, así como desarrollar la metacognición de los estudiantes.

Analizando la literatura existente, uno descubre que es habitual la presencia situaciones paradójicas relacionadas con el bloque de Probabilidad y Estadística. Esto se debe a que, como se ha comentado en el capítulo anterior, la probabilidad es una rama de las matemáticas relativamente joven donde el desarrollo de sus conceptos formales está íntimamente relacioandos con la resolución de situaciones contraintuitivas (véase [11] para más información). Una colección de paradojas de probabilidad y estadística puede encontrarse en [34].

Hoy en día, las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC) son una realidad evidente en nuestra sociedad y donde el sistema educativo no debería permanecer al margen de sus avances. El uso de los ordenadores y el acceso a Internet, así como las herramientas de elaboración de trabajos (Word, Powerpoint, etc.), son actividades generalizadas en la mayoría de los centros educativos. En los últimos años se han introducido de forma paulatina algunos recursos tencológicos en el aula, como poor ejemplo los proyectores, las pizarras digitales e incluso las tablets con el objetivo de hacer que el aprendizaje sea más entretenido y ameno para los estudiantes, facilitando así la asimilación de los contenidos.

No obstante, el informe denominado "*Estudiantes, Ordenadores y Aprendizaje: realizando la conexión*" [27] revela que una apuesta fuerte en el uso TIC no es garantía de mejora en los resultados del informe PISA. Esto se debe a que los centros docentes, a pesar de contar con una infraestructura adecuada en materia tecnológica, no han sabido aprovechar el potencial de las mismas. Asimismo, el informe PISA del año 2015 (véase [28]) revela que el uso excesivo de los recursos tecnológicos en el aula (como los ordenadores, por ejemplo) tienen un efecto contraproducente, ya que se suele caer en el engaño de que toda innovación tecnológica tiene como consecuencia inmediata una mejora en el aprendizaje. Las nuevas tecnologías no deben ser utilizadas como un mero sustituto de una clase magistral, sino que hay que estudiar cómo éstas pueden ser un complemento de la enseñanza tradicional con el fin de alcanzar un aprendizaje significativo. Por último, la comunidad educativa deber ser consciente que la inclusión de las nuevas tecnologías en el aula no es simple capricho sino una necesidad para adaptar a los estudiantes a su futuro profesional y académico.

En los útlimos años han surgido nuevas metodologías de enseñanza y aprendizaje basadas en los dispositivos que utilizamos en la vida diaria. En este contexto, existe una corriente llamada "*Mobile Learning*" y que hace referencia a los distintos sistemas de aprendizaje que mejoran el rendimiento académico de las personas mientras éstas interactuan con la información a través de dispositivos conectados a Internet.

En la actualidad, estas formas de aprendizaje menos tradicionales son demandadas en los centros educativos hasta tal punto que existen aplicaciones móviles con contenido exclusivo de matemáticas para distintos niveles, entre las que se encuentran:

1. **PhotoMath**: Pensada para realizar operaciones algebraicas en una ecuación que ha sido fotografiada con el móvil.

2. **Fórmulas Free**: Destinada a facilitar al alumno todo tipo de fórmulas de física

y matemáticas. Además, posee un modo de resolución de fórmulas partiendo de algunos de sus datos (por ejemplo, obtener el radio de la circunferencia de la que se conoce su área).

3. **Sangaku Maths**: Aplicación que almacena un extenso temario de Secundaria y Bachillerato, desde fracciones, pasando por funciones hasta llegar al cálculo de probabilidades asociadas a una variable aleatoria.

Por todo lo anteriormente descrito, nuestro Proyecto de Innovación Docente se basa principalmente en el uso de paradojas para introducir y motivar a los estudiantes de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales en conceptos fundamentales relacionados con la probabilidad y la estadística.

## 3.2. Descripción del Proyecto

Como se ha comentado en secciones anteriores, nuestro proyecto de innovación esta orientado a mejorar la motivación de los estudiantes por los temas relacionados con la estadística y la probabilidad mediante el uso de paradojas famosas que han surgido a lo largo de la historia. En líneas generales, el proyecto de innovación está compuesto por los siguientes elementos:

1. **Introducción de la paradoja:** Comenzaremos planteando una situación al estudiante relacionada con alguna de las paradojas que hemos considerado.A continuación, se proponen una serie de actividades a desarrollar en clase que involucran los simuladores y la los razonamientos intuitivos de los propios alumnos.

2. **Uso de simuladores de GeoGebra:** Como se ha comentado en la introducción de este capítulo, por sí solo el uso de las nuevas tecnologías en el aula no es garantía de éxito en el proceso de aprendizaje, sino que deben introducirse a modo de complemento y no como un sustituto de las clases magistrales. Para ello, será necesario hacer tanto la selección como el diseño de las actividades que queremos trabajar con ayuda de estos recursos tecnológicos, sin perder de vista cúales son los objetivos que queramos conseguir dentro de nuestra unidad didáctica.

   Dentro de las aplicaciones más utilizada en el aula se encuentra GeoGebra, un software gratuito a través de Internet y que está destinado al aprendizaje de las matemáticas con el que se trabaja principalmente la geometría, pero que también resultad de gran utilidad para el estudio de temas relacionados con el álgebra, el cálculo e incluso las probabilidades. En este proyecto de innovación combinaremos la herramienta GeoGebra con el cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios, en particular, aquellas paradojas de probabilidad y estadística que admiten un enfoque basado en la experimentación (por ejemplo, el lanzamiento de tres dados y calculando la probabilidad asociada a los distintos resultados posibles).

Usaremos las características de los distintos softwares para la repetición de los experimentos en los que están involucrados las paradojas. El objetivo de esta fase empírica es presentar al alumno el experimento involucrado en la paradoja de manera que el estudiante pueda, partiendo de los datos ofrecidos por el simulador, formular sus propias hipótesis y rebatir conjeturas. Una vez utilizado el simulador es cuando el profesor procede a resolver la paradoja desde un punto de vista teórico, introduciendo en cada momento las herramientas necesarias (resultados, propiedades, etc.). Con ello lo que se consigue es que, en ocasiones, el aprendizaje sea en un primer momento por descubrimiento y luego pase a ser un aprendizaje basado en problemas.

Por último, mencionar que los simuladores no han sido desarrollados por mí mismo sino que están disponibles en Internet o en la librería gratuita de GeoGebra.

3. **Resolución teórica de las paradojas:** El proyecto está diseñado de forma que las paradojas puedan enfocarse desde un aprendizaje por descubrimiento y posteriormente desde un aprendizaje basado en problemas.

   Todas las paradojas presentadas en este trabajo van acompañadas de una resolución teórica, donde las herramientas necesarias para llegar a la solución se presentan en el momento de afrontar el problema, a medida que el alumno las demande y no previamente. De esta manera se consigue que las paradojas sean problemas motivadores para los alumnos, ya que la resolución de las mismas lleva consigo la adquisición de nuevos conocimientos, habilidades y aptitudes.

4. **Aplicación móvil - Paradoxes:** Como segundo instrumento tecnológico hemos desarrollado una aplicación de móvil donde se recogen aspectos relacionados con el temario del Bloque de Estadística y Probabilidad (definiciones, ejemplos, ejercicios adicionales, etc). Por otro lado, dentro de la aplicación móvil habrá un aparatado

dedicado exclusivamente a las paradojas trabajadas en clases, así como algunas variante que resulten atractivas para los estudiantes y que puedan ser utilizadas como herramienta de autoevaluación. Con el uso de Paradoxes se pretende que los estudiantes utilicen herramientas destinadas principalmente para el ocio como algo habitual en su proceso de aprendizaje y evaluación. Algunas capturas de pantalla de nuestra aplicación pueden verse en la Figura 3.1 y en el Apéndice A.

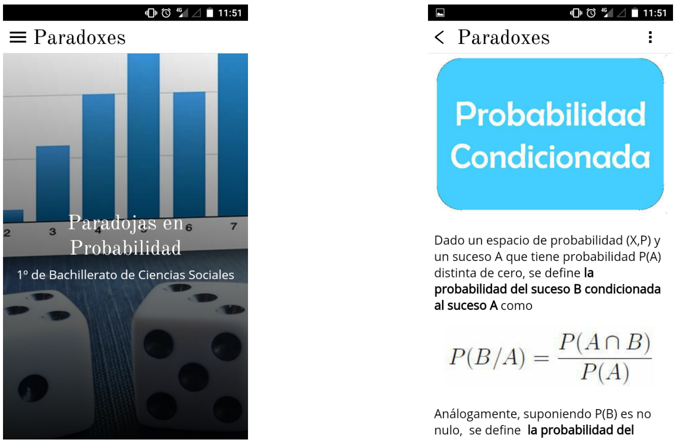



Figura 3.1. Aplicación Paradoxes de nuestro proyecto de innovación.

La aplicación móvil Paradoxes ha sido diseñada utilizando una plataforma gratuita a nivel usuario llamado Goodbarber y que se encuentra en

`https://es.goodbarber.com/`

Esta página web permite confeccionar nuestra propia aplicación a la carta, pudiendo elegir los contenidos, las secciones y la disposición de éstos, así como todo lo relacionado con la estética. Si bien existe una versión web de pago que ofrece mayor posibilidad de difusión, la versión gratuita es más que suficiente para nuestro propósito ya que trabajaremos con el grupo de clase (no superior a 30 estudiantes).

En esta aplicación móvil podemos incluir ficheros, ejercicios, vídeos divulgativos y foros de discusión en el que se pueden hacer consultas tanto al profesor como al resto de los compañeros de clase. Una de las principales ventajas de la aplicación móvil es que permite mantener informados a los alumnos mediante una sección de novedades, donde podemos comunicar a los estudiantes actividades adicionales, recordatorios de exámenes parciales, notas de las actividades, etc.

Con el uso de esta aplicación se busca fomentar el trabajo de autoevaluación, lo que se consigue con la realización de los ejercicios adicionales que estarán disponibles en las secciones correspondientes y que suponen un complemento de aquellos problemas que se realicen en el aula.

En un primer momento, nuestro proyecto de innovación estaba enfocado a estudiantes de 2º de Bachillerato de Ciencias, ya que los contenidos eran los idóneos para trabajar las paradojas. Sin embargo, este grupo fue descartado debido a la falta de tiempo y lo ajustado que resulta el calendario académico, condicionado por las pruebas de la EBAU que se realizan a principios del mes de junio.

No obstante, revisando el currículo de Bachillerato, hemos podido comprobar que los contenidos necesarios para la implementación de este proyecto de innovación docente se imparten en el curso de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales (véase [10]). Tal y como figura el currículo para esta etapa, el Bloque de Estadística y Probabilidad se imparte en el tramo final del curso, con lo que es posible que los estudiantes no le presten la atención necesaria o que consideren que no es un contenido importante para su futuro. Es por ello que este proyecto puede ser de gran utilidad, ya que está orientado a que el último bloque del curso sea más ameno para los estudiantes, despertando en ellos la curiosidad en cuestiones relacionadas con la estadística y la probabilidad, así como dar a conocer a los estudiantes la utilidad de los conocimientos adquiridos en la resolución de situaciones que pueden surgir en la vida cotidiana.

## 3.3. Objetivos

La idea fundamental del proyecto de innovación se basa en el uso algunas paradojas de probabilidad y estadística en el aula de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales como elemento motivador para el aprendizaje de los contenidos, así como herramienta de autoevaluación de los conceptos del tema. Es por ello que, en líneas generales, la aplicación del proyecto de innovación tiene como objetivos:

1. Incrementar el grado de motivación de los estudiantes.
2. Inculcar en los alumnos un espíritu crítico y de autoevaluaicón de los conocimientos adquiridos.
3. Promover el uso de las nuevas tecnologías en el aprendizaje significativo.

4. Desarrollar el rigor matemático y mejorar las habilidades de exposición de ideas por parte de los estudiantes.

## 3.4. Competencias

Desde hace un tiempo la Unión Europea viene señalando la necesidad de que los estudiantes adquieran ciertas competencias claves orientadas a que los individuos puedan lograr un pleno desarrollo desde el punto de vista personal, social y profesional, ajustándose a las nuevas demandas de un mundo globalizado. Por lo tanto, las competencias pueden entenderse como la capacidad de "saber hacer" aplicable a numerosos ámbitos, como por ejemplo el académico, el social y, por supuesto, el profesional.

Algunas de las características principales del aprendizaje basado en competencias son su dinamismo, su tranversalidad y su condición de desarrollo integral. Es importante señalar que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las competencias debe hacerse desde todas las ramas del conocimiento (literatura, matemáticas, tecnología, etc.) y donde resulta fundamental la implicación de toda la comunidad educativa, desde el núcleo familiar hasta el centro educativo y el cuerpo docente.

Dentro de las competencias que describe el Sistema Educativo Español, tal y como son enumeradas en [26] se encuentran:

C1. Comunicación Lingüistica.

C2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

C3. Competencia digital.

C4. Aprender a aprender.

C5. Competencias sociales y cívicas.

C6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

C7. Conciencia y expresiones culturales.

Durante el desarrollo del Proyecto de Innovación Docente, los estudiantes estarán preparados para alcanzar las siguientes competencias:

1. El estudiante reconoce y describe los espacios muestrales asociados a experimentos en los que interviene el azar (C2).

2. El estudiante calcula propabilidad asociadas a sucesos aleatorios mediante la regla de Laplace, tanto para experimentos simples como compuestos (C2).

3. El estudiante es capaz de trabajar en grupo, desarrollando sus habilidades de comunicación en procesos matemáticos y científicos (C1, C5).

4. El estudiante modeliza experimentos en los que interviene el azar. (C2)

5. El estudiante mantiene una actitud positiva relativa al aprendizaje significativo de las matemáticas. (C2, C4, C6)

6. El estudiante asocia los contenidos de clase a situaciones de la vida real en la que interviene el azar. (C2, C4)

7. El estudiante utiliza las herramientas tecnológicas (GeoGebra, Youtube, Internet, etc.) para la realización de ejercicios de probabilidad (C2, C3).

## 3.5. Contenidos

Atendiendo al currículo de Matemáticas de La Rioja correspondiente a 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales, en esta unidad didáctica atenderemos a los conceptos:

1. Sucesos Aleatorios.

2. Operaciones con sucesos. Álgebra de sucesos.

3. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.

4. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.

5. Experimentos simples y compuestos.

6. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.

## 3.6. Estrategias de intervención y adaptación curricular

Como se ha comentado anteriormente, buscamos que las clases sean participativas y que los alumnos puedan plantear las dudas que haya podido surgir durante la resolución de los ejercicios adicionales que estarán publicados en la aplicación móvil. Por ello, durante las sesiones preguntaremos a los estudiantes los posibles dificultades que se hayan encontrado a la hora de resolver los ejercicios, que deberán ser expuestas en alto para toda la clase. Aquellos estudiantes que crean saber cómo se resuelve la duda planteada por el compañero, pasarán a la pizarra a exponer sus ideas. En el caso de dos o más ideas contrapuestas, preguntaremos al resto de la clase cuál de éstas considera correcta y por qué. En cualquier caso, si la duda no ha quedado resuelta o el razonamiento es erróneo, será el profesor el que tenga la última palabra a la hora de resolverlo de manera correcta, haciendo notar al alumno de los errores a los que pueden conducir afirmaciones mal fundamentadas.

En este proyecto de innovación la aplicación móvil Paradoxes juega un papel fundamental en relación a los distintos ritmos de aprendizaje. En dicha aplicación móvil podremos subir ejercicios con diferentes niveles de dificultad, representándolos por la escala de colores que van desde verde (fácil), pasando por el amarillo (medio) hasta llegar al rojo (difícil). De esta manera, los alumnos podrán trabajar los ejericios de diferente nivel de exigencia, destinados reforzar y ampliar los conocimientos vistos en clase y que pueden ser utilizados como actividades de autoevaluación. Algunos de los ejercicios han sido extraídos de [16].

Asimismo, para los alumnos que demuestren un mayor dominio de los contenidos estarán disponibles ejercicios de una dificultad superior los cuales, utilizando el jerga de los estudiantes, hemos denominado "*Ejercicios Nivel Dios*", cuyo color asociado será el negro y que provienen de pruebas de Olimpiadas Matemáticas. Algunos de estos ejercicios pueden encontrarse en [17] y [37]. Con este tipo de ejercicios de mayor dificultad conseguimos que los alumnos más aventajados puedan poner a prueba sus capacidades, encontrando una fuente de motivación y fomentando su espíritu de superación, así como su curiosidad por las pruebas matemáticas que son desconocidas para gran parte de la sociedad.

## 3.7. Metodología

Con el objetivo de que el aprendizaje de las matemáticas sea significativo, hemos diseñado las clases de forma que sean lo más participativas posibles. De esta manera conseguimos cierta interacción entre el profesor y el alumno, pudiendo reconocer las carencias que presentan los estudiantes, así como las dificultades de cara a los ejercicios planteados. Para ello, será necesaria una conversación continua con el alumno a quien se le preguntarán cuestiones relacionadas con los pasos que se pueden seguir en los ejercicios (como por ejemplo: ¿son sucesos equiprobables? ¿se puede aplicar la regla de Laplace? ¿se trata de sucesos independientes?) y aspectos relacionados con la forma de abordar el problema, así como si han quedado claros los razonamiento.

Asimismo, y en la medida de lo posible, el profesor resolverá algunos ejercicios siguiendo algún razonamiento erróneo, como puede ser aplicar la regla de Laplace en un experimento en el que los sucesos no son equiprobables, preguntando al final del ejercicio si los estudiantes están de acuerdos con la resolución del mismo. Esta forma de proceder en clase nos permite conocer el nivel de atención de los estudiantes, así como saber si los alumnos han captado correctamente los contenidos y si saben reconocer bajo qué condiciones se pueden aplicar los resultados vistos en la clase magistral.

Por otro lado, las sesiones están diseñadas de tal manera que podamos combinar la clase magistral (donde se imparten los conceptos necesarios para el desarrollo de la unidad didáctica) con la clase práctica de ordenador (donde se trabajará con los simuladores de ciertos experimentos aleatorios conjuntamente con las paradojas de probabilidad).

Esta mezcla entre clases teóricas y prácticas es beneficiosa para los estudiante, no solo por el hecho de que trabajan la competencia digital mediante el uso del ordenador sino también porque supone una novedad en la forma de aprendizaje, pudiendo percibirlas como una vía de escape a la rutina de clases magistrales a la que ellos están acostumbrados y que, en ocasiones, suele ser el origen de su baja motivación en el aula.

Tal y como están pensadas las actividades con las paradojas, las principales metodologías empleadas serán el aprendizaje por descubrimiento y el aprendizaje basado en problemas. En muchas ocasiones, las paradojas admiten una simulación con ordenador a partir de la que los alumnos pueden extraer sus propias conclusiones, hacer sus propias conjeturas y al mismo tiempo pueden refutar las de otros. Los descubrimientos llevados a cabo por los estudiantes se hacen de forma gradual con ayuda de las simulaciones con el ordenador para deducir cúal sería la respuesta correcta desde el punto de vista teórico, solución que finalmente se obtiene con las herramientas introducidas durante la clase. Con este tipo de metodología se consigue que los estudiantes puedan desarrollar la competencia de aprender a aprender, ya que son ellos los protagonistas de su propio aprendizaje. Del mismo modo, al exponer sus ideas acerca de las posibles soluciones y argumentándolas al resto de compañeros conseguimos un desarrollo de capacidad de comunicación tanto lingüística como matemática.

## 3.8. Recursos

Para el desarrollo de la unidad didáctica utilizaremos los recursos disponibles en el aula (pizarra, tizas, etc.), así como los recursos tecnológicos que se encuentran en la sala de ordenadores con acceso a Internet. En el caso de no existir una sala de ordenadores, será necesario un proyector y un ordenador en al aula para llevar a cabo la parte práctica con los simuladores mencionada en la sección anterior.

Adicionalmente, para reforzar los conocimientos de los alumnos con respecto a los contenidos, podremos encontrar en la aplicación móvil Paradoxes contenido teórico, ejemplos y problemas de distintos niveles, así como las distintas paradojas trabajadas en clase explicadas con todo detalle.

## 3.9. Actividades

Un ejemplo de las actividades a desarrollar se encuentra en el Capítulo 4 donde se recoge la aplicación de la propuesta para el caso particular de la paradoja del cumpleaños. Dicha sesión combina una parte práctica con los ordenadores por medio de una serie de preguntas y una parte teórica en la que se introducen los conceptos necesarios para resolverla, así como actividades adicionales que pueden ser utilizadas como actividades evaluables. Adicionalmente, y dependiendo de cómo evolucione la clase, podemos usar los ejercicios presentes en la correspondiente sección de la aplicación Paradoxes tanto en clase como actividades de autoevaluación.

Asimismo, aquellas paradojas que requieran nociones similares a las trabajadas en clase pueden ser utilizadas como actividades evaluables de la aplicación móvil que figuran en el apartado relativo a los instrumentos de evaluación del Apéndice B.

## 3.10. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

Una parte fundamental en la planificación de una unidad didáctica es lo relativo a la evaluación de los contenidos, esto es, la forma en la que el profesor determina si la metodología seguida ha sido beneficiosa para los alumnos, así como para el propio profesor. Toda la información de esta unidad didáctica puede verse en el Anexo B.

Según lo que figura en el currículo de 1º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales (véase [10]), los criterios de evaluación específicos para este Bloque 5 concretos para la parte de Probabilidad son:

1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace.
2. Utilizar los distintos métodos de recuento para el cálculo de probabilidades.
3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios condicionados mediante el Teorema de la probabilidad total y el Teorema de Bayes.

En lo relativo a los estándares de evaluación, el currículo de 1º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales sugiere los siguientes:

1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos usando la regla de Laplace y distintos métodos de conteo.
2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.
3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

## 3.11. Instrumentos de evaluación

En relación a los objetivos, los contenidos y criterios de evaluación, los instrumentos propuestos para evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes para esta unidad será la realización de una prueba escrita que supondrá el 80 % de la nota del bloque de probabilidad. Asimismo, el resto del porcentaje de la nota se divide en un 10 % correspondiente a actividades entregables de aquellas paradojas que no se trabajen en clase, y un 10 % correspondiente a ejercicios evaluables de la aplicación móvil Paradoxes.

Capítulo 4

# Aplicación de la Propuesta

Como hemos descrito en el capítulo anterior, el proyecto de Innovación Docente está basado en el uso de paradojas como elemento motivador para el aprendizaje de la probabilidad. El sistema de trabajo que hemos adoptado es el siguiente:

1. Formulamos la pregunta que está relacionada con la paradoja. Como material complementario, hemos diseñado una sección dedicada a los antecedentes históricos de algunas paradojas para poder motivarlas siempre que fuese necesario.

2. Planteamos una serie de actividades.

3. Explicamos cómo llevar a cabo la resolución empírica de las paradojas.

4. Introducimos las herramientas necesarias para poder afrontar el problema.

5. Resolvemos las paradojas desde un punto de vista teórico usando las herramientas que acabamos de introducir.

6. Planteamos actividades adicionales.

La idea es presentar la paradoja de probabilidad y que por medio de los simuladores los alumnos puedan entender qué ocurre y puedan intuir cuál debe ser la solución del problema. Posteriormente, se introducen las herramientas teóricas necesarias y se procede a resolver el problema con dichas herramientas. De esta manera, conseguimos que las paradojas sean, en efecto, problemas motivadores y no sean solo problemas diferentes a los presentes en el libro de texto [36].

A continuación, veamos la aplicación de la propuesta de innovación en un caso concreto. Cabe mencionar que seguiríamos los mismos pasos con el resto de paradojas, adaptando los contenidos y las actividades a cada caso en particular.

## 4.1. Actividades en el aula

**Introducción al problema**

Supongamos que en una habitación hay una población de $N$ personas elegidas al azar. A continuación, seleccionamos una muestra de dicha población y nos preguntamos:

*¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra para asegurar de que al menos dos personas cumplen años el mismo día con un 50 % de probabilidad?*

**Actividades en Grupo (2 ó 3 personas)**

1. Basado en la intuición, discute con tus compañeros sobre el tamaño de la muestra.
2. Escribe el tamaño mínimo de la muestra que consideráis correcto: ____________.
3. Accede al simulador que se encuentra en la siguiente dirección

   `https://betterexplained.com/examples/birthday/birthday.html`

4. Comprueba la veracidad para el tamaño consierado en el apartado 2.
5. Analiza la probabilidad para otros tamaños de la muestra.
6. Accede al simulador que se encuentra en la siguiente dirección

   `https://www.geogebra.org/m/S48Hw9SD`

7. ¿Cuál es la probabilidad de coincidencia para 20 personas? ¿y para 30 personas?
8. A la vista de los resultados, ¿Cuál crees que debe ser el tamaño exacto?
9. Tomando como muestra nuestra propia clase, comprueba si al menos dos personas cumplen años el mismo día. En caso negativo, ¿A qué puede deberse?

**Actividades Adicionales**

1. Analiza (teórica y empíricamente) qué ocurre para una muestra de 60 personas.
2. ¿Cuál sería la respuesta a la paradoja del cumpleaños si la fiesta se celebrase en el planeta Venus?
3. ¿Cuál es el tamaño de la muestra (sin contarse a uno mismo) para asegurar que otra persona cumple años el mismo día que tú con una certeza del 50 %?

## 4.2. La paradoja del cumpleaños

Aunque resulte sorprendente, la probabilidad de que en un grupo de 23 personas hayan al menos dos que cumplan el mismo día es superior al 50 %.

## 4.3. Resolución empírica

En primer lugar, la idea es crear grupos equilibrados (donde al menos uno de los miembros del equipo muestre cierto dominio de la materia) y heterogéneos. Con ello se pretende que los alumnos más aplicados puedan ayudar a aquellos compañeros del grupo con dificultades en la asimilación de los contenidos.

A continuación, se les plantea a los estudiantes la paradoja del cumpleaños y se les propone que debatan entre ellos acerca de cúal creen que debe ser el tamaño de la muestra. Este debate está pensado para que no haya una voz predominante en el gurpo, sino que cada integrante pueda exponer sus ideas y se sienta parte activa del equipo. Una vez hayan debatido se hace una porra por equipos, esto es, uno de los miembros de cada grupo debe exponer al resto de la clase cúal es la apuesta de su grupo y argumentando el por qué de la misma.

Llegados a este punto, sería conveniente que el profesor participe también de la porra haciendo propia propuesta. Por ejemplo, el profesor podría sugerir el tamaño de la muestra debe ser próxima a 183 personas y para argumentarlo podría recurrir a una hipotética ley de proporcionalidad:

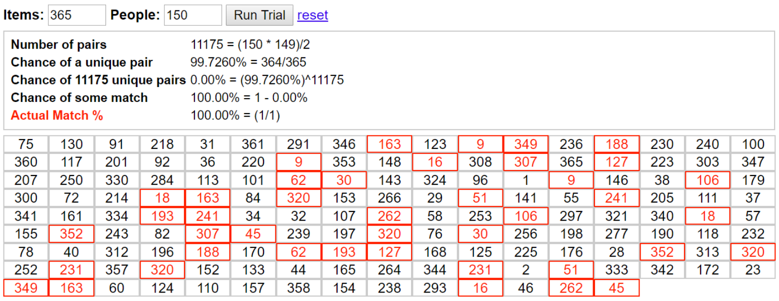
*Sabemos que para 366 personas hay un 100 % de acierto. Por lo tanto, para un 50 % (la mitad de 100 %) necesitaremos aproximadamente 183 personas (la mitad de 366).*

La idea es que los alumnos, mediante la participación del docente en la porra, perciban al profesor no como una figura de autoridad superior sino como un semejante que contribuye al descubrimiento del conocimiento. En otras palabras, el profesor se conviente en un alumno más, formulando hipótesis y participando activamente en el proceso de aprendizaje.

Ya que es probable que los tamaños de la muestra propuestos sean altos (superiores a 50 personas), el siguiente paso es acceder al siguiente simulador

`https://betterexplained.com/examples/birthday/birthday.html`.

Para verificar si la conjetura de los alumnos es correcta, recurrimos al primero de los simuladores, ya que permite hacer el experimento con una muestra de personas de cualquier tamaño (claramente, consideraremos conjuntos formados por menos de 365 personas). El primer simulador es visualmente muy llamativo y fácil de utilizar, ya que podemos elegir el tamaño de la muestra. A la hora de hacer la simulación, el programa destaca en color rojo tanto las coincidencias de fechas como la probabilidad (apartado *Actual Match %*) tal y como puede verse en la Figura 4.1.



Items: 365 People: 150 Run Trial reset

| | |
|---|---|
| **Number of pairs** | 11175 = (150 * 149)/2 |
| **Chance of a unique pair** | 99.7260% = 364/365 |
| **Chance of 11175 unique pairs** | 0.00% = (99.7260%)^11175 |
| **Chance of some match** | 100.00% = 1 - 0.00% |
| **Actual Match %** | 100.00% = (1/1) |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 130 | 91 | 218 | 31 | 361 | 291 | 346 | 163 | 123 | 9 | 349 | 236 | 188 | 230 | 240 | 100 |
| 360 | 117 | 201 | 92 | 36 | 220 | 9 | 353 | 148 | 16 | 308 | 307 | 365 | 127 | 223 | 303 | 347 |
| 207 | 250 | 330 | 284 | 113 | 101 | 62 | 30 | 143 | 324 | 96 | 1 | 9 | 146 | 38 | 106 | 179 |
| 300 | 72 | 214 | 18 | 163 | 84 | 320 | 153 | 266 | 29 | 51 | 141 | 55 | 241 | 205 | 111 | 37 |
| 341 | 161 | 334 | 193 | 241 | 34 | 32 | 107 | 262 | 58 | 253 | 106 | 297 | 321 | 340 | 18 | 57 |
| 155 | 352 | 243 | 82 | 307 | 45 | 239 | 197 | 320 | 76 | 30 | 256 | 198 | 277 | 190 | 118 | 232 |
| 78 | 40 | 312 | 196 | 188 | 170 | 62 | 193 | 127 | 168 | 125 | 225 | 176 | 28 | 352 | 313 | 320 |
| 252 | 231 | 357 | 320 | 152 | 133 | 44 | 165 | 264 | 344 | 231 | 2 | 51 | 333 | 342 | 172 | 23 |
| 349 | 163 | 60 | 124 | 110 | 157 | 358 | 154 | 238 | 293 | 16 | 46 | 262 | 45 | | | |

Figura 4.1. Simulación para una muestra de 160 personas.

A la vista de los resultados, los estudiantes pueden conjeturar que el número puede que no sea necesariamente alto como pensaban en un principio. Para poder verlo de una forma más dinámica, accedemos al segundo de los simuladores desarrollado en GeoGebra

`https://www.geogebra.org/m/S48Hw9SD`.

Repetimos el experimento con una muestra más reducida de 50 personas. Con este simulador, se puede ver en tiempo real cómo evoluciona la probabilidad, señalando en cada repetición las fechas que coinciden tal y como aparece en la Figura 4.2.

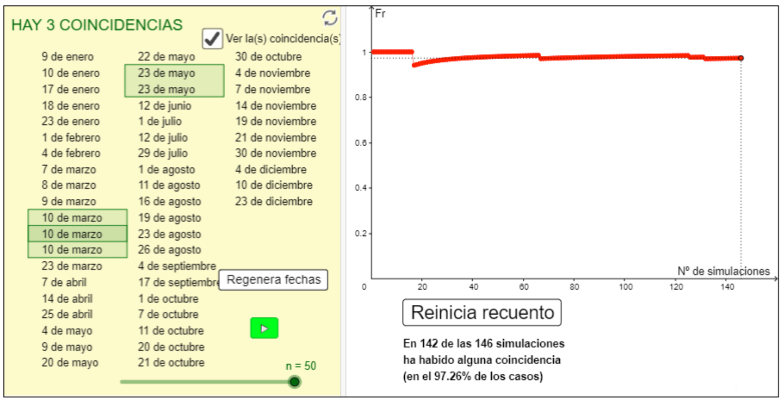



Figura 4.2. Simulación para una muestra de 50 personas.

A continuación, podemos probar con dos muestras: una de 20 personas y otra de 30 personas. A la vista de los resultados, los estudiantes deberían intuir que la solución al problema debe estar comprendida entre esos dos valores, pudiendo hacer sucesivas acotaciones hasta llegar a que el número buscado es cercano a 23.

## 4.4. Explicación de los contenidos

Esta paradoja puede ser útil para introducir algunos de los siguientes conceptos:

- Espacio muestral.
- Propiedades del álgebra de sucesos.
- Regla de Laplace.

También, y ya que será de utilidad en la resolución teórica del problema, está sesión puede emplearse para introducir la probabilidad condicionada de sucesos que no son independientes y cuya fórmula para tres sucesos viene dada por

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2).$$

## 4.5. Resolución teórica

La forma de afrontar el problema será de manera gradual, estudiando cuál es la probabilidad para una muestra reducida de personas para, posteriormente, deducir una fórmula general para poder aplicarla a una muestra de mayor tamaño. Por ello, comenzamos con los siguientes casos:

1. **Para una muestra de 4 personas**: En este caso, resulta bastante complicado abordar el problema directamente ya que debemos tener en cuenta todas las posibilidades de que en un grupo de cuatro personas hayan al menos dos que cumplan el mismo día. Sin embargo, podemos utilizar el álgebra de sucesos para formular una situación equivalente y considerablemente más sencilla. Si condieramos un año formado por 365 días, denotemos por $\Omega_4$ el espacio muestral asociado al experimentado dado por

$$\Omega_4 = \{\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\,, i = 1, 2, 3, 4\} \quad , \quad \#\Omega_4 = (365)^4.$$

Si denotamos por

$$A \equiv \text{Al menos dos personas cumplen el mismo día},$$

usando el suceso complementario a $A$ resulta

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(\text{no hay dos personas que cumplan el mismo día}).$$

Ahora bien, la primera persona tiene 365 opciones para su fecha de cumpleaños; el segundo tiene 364 opciones; el tercero tiene 363 opciones y el último tiene 362 opciones. Por lo tanto, considerando que las fechas de cumpleaños de cada persona es independiente a la del resto, usando la regla de Laplace se sigue que

$$P(\text{no hay dos personas cumplen el mismo día}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365},$$

con lo que $P(A) = 1 - (365\,.\,364\,.\,363\,.\,362)/365^4 \approx 0{,}0164$.

2. **Para una muestra de 10 personas**: En este caso, denotemos por $\Omega_{10}$ el espacio muestral asociado al experimentado dado por

$$\Omega_{10} = \{\,(x_1, \ldots, x_{10})\,:\, x_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\,,\, i = 1, \ldots, 10\} \quad , \quad \#\Omega_{10} = (365)^{10}.$$

Denotanto por $A$ al mismo conjunto que en el caso anterior, para el caso complementario $A^c$ tenemos la primera persona tiene 365 opciones para su fecha de cumpleaños; el segundo tiene 364 opciones y así sucesivamente. Por lo tanto, la probabilidad del suceso complementario $A^c$ viene dado por

$$P(\text{no hay dos personas cumplen el mismo día}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{356}{365},$$

con lo que $P(A) = 1 - (365\,.\,364\,.\,\ldots\,.\,356)/365^{10} \approx 0{,}1169$.

3. **Para una muestra de $N$ personas**: De forma general, el espacio muestral $\Omega_N$ viene dado por

$$\Omega_N = \{\,(x_1, \ldots, x_N)\,:\, x_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\,,\, i = 1, \ldots, N\} \quad , \quad \#\Omega_N = (365)^N.$$

siguiendo un razonamiento parecido al anterior se tiene que la probabilidad del suceso complementario $A^c$ viene dado por

$$P(\text{no hay dos personas cumplen el mismo día}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - N + 1}{365},$$

y por tanto, la probabilidad para una muestra de tamaño $N$ se escribe como

$$P(A) = 1 - \left(\frac{365\,.\,364\,.\,\ldots\,.\,(365 - N + 1)}{365^N}\right) = 1 - \frac{365!}{365^N\,(365 - N)!}.$$

Finalmente, podemos comprobar que para una muestra de 22 personas la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan el mismo día es aproximadamente 0,4757, mientras que para 23 personas dicha probabilidad se sitúa alrededor de 0,5073, es decir, superior al 50 % porcentaje de éxito para uan muestra de 23 personas.

## 4.6. Actividades adicionales

Estas actividades adicionales pueden enviarse como deberes que tiene que ser entregados al profesor y suponen un 10 % de la nota final del bloque, tal y como figura en los instrumentos de evaluación de la unidad didáctica (véase Anexo B). Asimismo, como actividades de autoevalución, pueden recomendarse a los alumnos la realización de los ejercicios relacionados con los conceptos trabajados en esta paradoja y que se encuentran en las distintas secciones de la aplicación Paradoxes.

Capítulo 5

# Conclusiones y Reflexiones Finales

En este Trabajo de Fin de Máster hemos presentado una serie de paradojas como elemento motivador para el aprendizaje de la probabilidad. Asimismo, hemos querido mostrar la riqueza formativa que supone el uso de las paradojas en la formación del estudiante, teniendo que hacer una reflexión de sus conocimientos previos, someterlos a examen e incluso hacer posibles conjeturas acerca de su solución.

Adicionalmente, algo que he aprendido tanto con este proyecto como con el trabajo realizado en el periodo de prácticas, es que innovar en el aula es una tarea bastante compleja y que requiere un esfuerzo para combinar de manera correcta herramientas que sean llamativas al alumno, que sean útiles en el aprendizaje y que les ayuden a afianzar sus conocimientos sobre un tema en particular.

Con la realización de este trabajo nos hemos dado cuenta de que las paradojas no solo son beneficiosas para el alumno, sino también para el profesor, ya que mejora la formación del docente para poder llevar a cabo el tipo de análisis que requieren este los problemas contrarios a la intuición.

El uso de paradojas y la metodología seguida para la aplicación del proyecto permiten evaluar en tiempo real si los estudiantes han comprendido correctamente los conceptos implicados en la resolución de los problemas (como por ejemplo, el álgebra de sucesos, la regla de Laplace, etc.), bien a tráves del desarrollo de teórico del problema o bien con argumentos falsos y que requieran una reflexión por parte del alumno. Asimismo, permiten al docente identificar los fallos que suelen cometer los alumnos a la hora de afrontar un problema, como por ejemplo suponer que los sucesos son equiprobables cuando no lo son.

Por último, y no menos importante, creo que el uso de paradojas permiten al docente diseñar una secuenciación que favorece al aprendizaje significativo, en nuestro caso basado en el aprendizaje por descubrimiento y el aprendizaje basado en problemas llevado a cabo de la siguiente manera:

1. Una breve introducción histórica.
2. El planteamiento del problema.
3. La conjetura de la solución por parte del alumno.
4. El uso de los simuladores para reproducir un experimento.
5. Una reformulación de las hipótesis a la vista de los resultados obtenidos por los simuladores.
6. El alcanzar la solución al problema desde el punto de vista teórico.

En mi opinión, los simuladores son una herramienta verdaderamente útil para el alumno que yo resumiría en una frase: “La potencia sin control no sirve de nada”. Con ello me refiero a que el profesor debe ser capaz de inducir en los alumnos un carácter investigador que les permita, con ayuda del ordenador, constrastar las hipótesis que puedan plantear los alumnos y entender cómo se comporta un experimento cuando éste se repite un número elevado de ocasiones.

# Bibliografía


[1] Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S., *Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge*. Handbook of research on teaching, (2001), 433–456.

[2] Baro, A. (marzo de 2011). *Métodologías activas y aprendizaje por descubrimiento*. Innovación y experiencias educativas, 40, 1–11 . Recuperado de `https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_40/ALEJANDRA_BARO_1.pdf`

[3] Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2014). *La paradoja del niño o niña: aplicaciones para la clase de probabilidad*. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 14 (1), 1–13.

[4] Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). *La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas*. Epsilon 78, 28 (2), 7–17.

[5] Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J. M. y Gea, M. M. (2012). *Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad.* Novedades Educativas, 261 (1), 78–84.

[6] Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J. M. y Gea, M. M. (2012). *La paradoja de Simpson*. Suma, 71, 19–26.

[7] Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching an learning*, (pp. 15–37). Nueva York: Springer.

[8] Bernabeu, M. D. y Cònsul, M. Aprendizaje basado en problemas: El Método ABP. Recuperado de `https://educrea.cl/aprendizaje-basado-en-problemas-el-metodo-abp/`

[9] Boletín Oficial de La Rioja. (2015). *Decreto 19/2015, de 12 de junio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*. Recuperado de `https://www.larioja.org/normativa-autonomica/es?modelo=NA&norma=2141`

[10] Boletín Oficial de La Rioja. (2015). *Decreto 21/2015, de 26 de junio, por el que se establece el currículo de Bachillerato*. Recuperado de `https://www.larioja.org/normativa-autonomica/es?modelo=NA&norma=2145`

[11] Borovcnik, M., Bentz, H. J., y Kapadia, R. (1991), *A probabilistic perspective.* Chance Encounters: Probability in Education,, 27–73.

[12] Chávez, A. D. (16 de junio de 2011). Paradigmas de Aprendizaje. Aporte Grupal. Recuperado de `https://educarparaaprender.wordpress.com/tag/como-se-aplica-el-conductismo/`

[13] Crockett, Z. (2 de agosto de 2016). The Time Everyone "Corrected" the World's Smartest Woman. Recuperado de `https://priceonomics.com/the-time-everyone-corrected-the-worlds-smartest/`

[14] De Miguel, M. (coord). (2006). *Metodologías de enseñanza para el desarrollo de competencias. Orientaciones para el profesorado universitario ante el Espacio Europeo de Educación Superior*. Madrid. España: Alianza.

[15] Falk, R. y Konold, C., *The psychology of learning probability*, F. Gordon y S. Gordon (eds.), Statistics for the twenty-first century, MAA Notes 26. Washington, DC: Mathematical Association of America, 151–164.

[16] Fernández, S., Montero Olide, J. y Alayo, F. (1994).*Revista Sigma. El mundo de azar y la probabilidad*, nº 16. Servicio Central de Publicaciones del Gobierno Vasco. Bilbao.

[17] Fernández Rodríguez, M. (2017). *Problemas de olimpiadas matemáticas sobre probabilidad* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada. España. Recuperado de `www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2017/Probabilidad.pdf`

[18] Flores, P. (1996). *El chiste como contraste de representaciones en educación matemática*, Actas de las VII Jorrnadas de la SAEM Thales, (pp. 535–544). Córdoba: Saem Thales y Universidad de Córdoba.

[19] Guía del Máster Universitario de Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. `http://www.unirioja.es/estudios/master/M0nA/`

[20] Hernández Rojas, G. (2010). Paradigmas en psicología de la educación. Primera edición, (pp. 79-245). México. D.F. México: Paidós.

[21] Konold, C. (1994). *Teaching probability through modeling real problems.* The Mathematics Teacher, 87 (7), 232–235.

[22] León, N. (2009). La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida. Sapiens: Revista Universitaria de Investigación, 1, 69–88.

[23] Lesser, L. (1998). *Countering indifferences - Using counterintuitive examples.* Teaching Statistics, 2 (1), 10–12.

[24] Lizano, N., Rojas, M. y Campos, N. (2002). La administración escolar. Para el cambio y el mejoramiento de las instituciones educativas. San José de Costa Rica. Universidad de Costa Rica.

[25] Movshovitz-Hadar, N. y Hadass, R. (1990). *Preservice education of math teacher using paradoxes.* Educational Studies in Mathematics, 21 (3), 265–287.

[26] Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachilleratoEnlace externo. Recuperado de `http://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2015-738`

[27] Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2015). Students, Computers and Learning: Making the Connection. Recuperado de `http://www.oecd.org/fr/education/students-computers-and-learning-9789264239555-en.htm`

[28] Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2015). PISA 2015: Programa para la Evaluación Internacional de los

Alumnos. Recuperado de `https://www.mecd.gob.es/inee/dam/jcr:e4224d22-f7ac-41ff-a0cf-876ee5d9114f/pisa2015preliminarok.pdf`

[29] Poot-Delgado, C. (2013). *Retos del aprendizaje basado en problemas.* Enseñanza e Investigación en Psicología, 18 (2), 307–314.

[30] Prieto, L. (2006). *Aprendizaje activo en el aula universitaria: el caso del aprendizaje basado en problemas*, Miscelánea Comillas. Revista de Ciencias Humanas y Sociales, 64 (124), 173–196.

[31] Selvin, S. (1975 a). *A problem in probability.* American Statistician, 29 (1), 67.

[32] Selvin, S. (1975 b).*On the Monty Hall problem.* American Statistician, 29 (3), 134.

[33] Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning, (pp. 345-366). Nueva York: Springer.

[34] Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics*, Budapest. Hungría: Akadémiai Kiadó

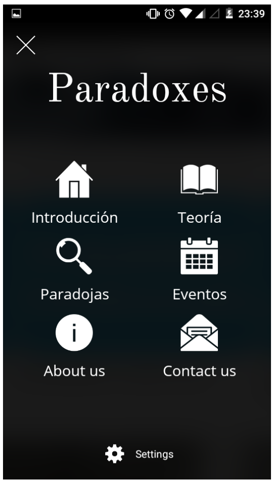
[35] Torres Menánguez, A. (20 de febrero de 2017). Francisco Mora: "Hay que acabar con el formato de clases de 50 minutos". *El País* Recuperado de `https://elpais.com/economia/2017/02/17/actualidad/1487331225_284546.html`

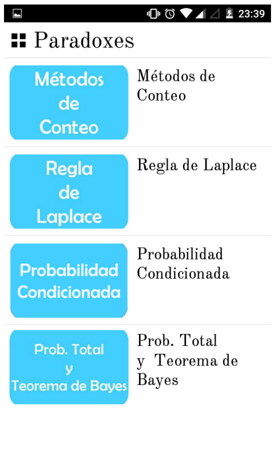
[36] Varios autores (2015). Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, 1º Bachillerato (Serie Resuelve, Proyecto: Saber Hacer). Editorial Santillana.

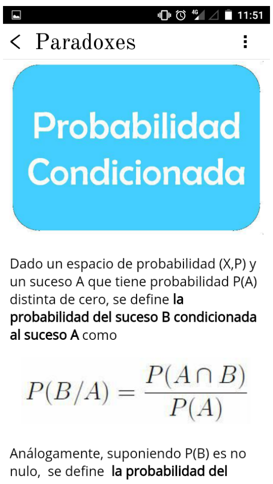
[37] Varios autores (2016). Competencias para el siglo XXI. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, 1º Bachillerato (Proyecto: Saber Hacer). Editorial Santillana.

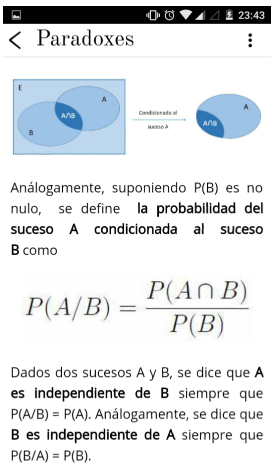
# Apéndice A

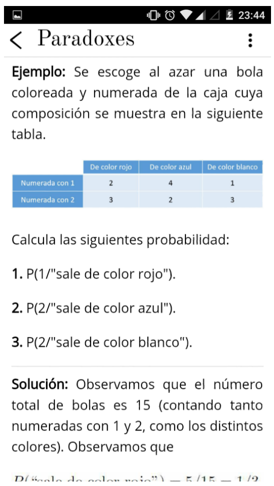
# Capturas de pantalla de la aplicación Paradoxes

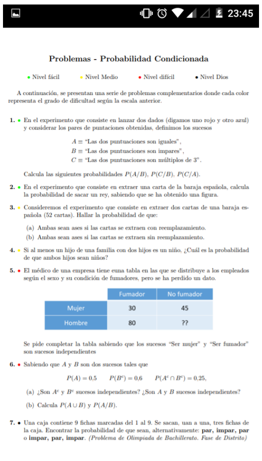



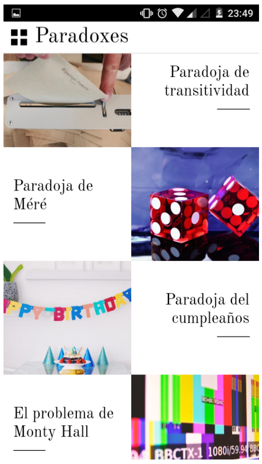



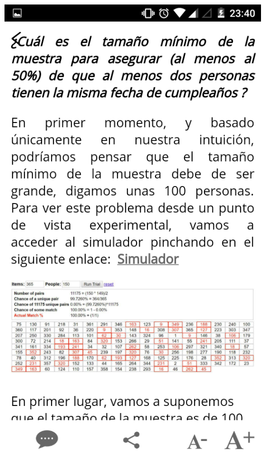



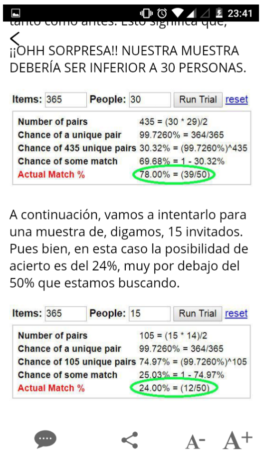



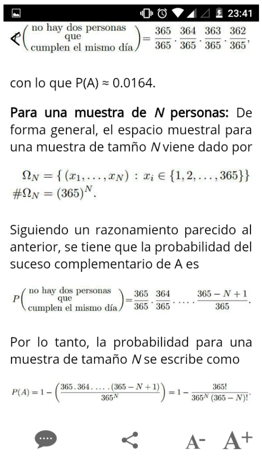



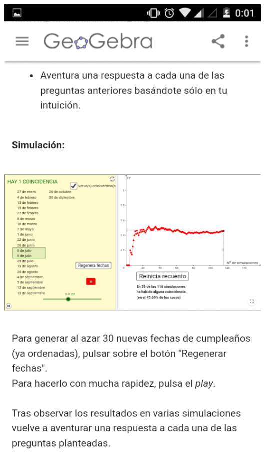

23:45
Problemas - Probabilidad Condicionada
Nivel fácil
Nivel Medio
Nivel difícil
Nivel Dios
Fumador
No fumador
Mujer
30
45
Hombre
80
??

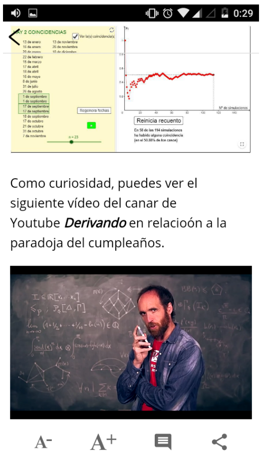

23:49
Paradoxes
Paradoja de transitividad
Paradoja de Méré
Paradoja del cumpleaños
El problema de Monty Hall


23:40
¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra para asegurar (al menos al 50%) de que al menos dos personas tienen la misma fecha de cumpleaños ?
En primer momento, y basado únicamente en nuestra intuición, podríamos pensar que el tamaño mínimo de la muestra debe de ser grande, digamos unas 100 personas. Para ver este problema desde un punto de vista experimental, vamos a acceder al simulador pinchando en el siguiente enlace: Simulador
En primer lugar, vamos a suponemos

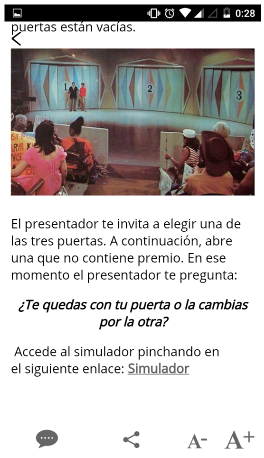

23:41
¡¡OHH SORPRESA!! NUESTRA MUESTRA DEBERÍA SER INFERIOR A 30 PERSONAS.
Items: 365 People: 30 Run Trial reset
Number of pairs 435 = (30 * 29)/2
Chance of a unique pair 99.7260% = 364/365
Chance of 435 unique pairs 30.32% = (99.7260%)^435
Chance of some match 69.68% = 1 - 30.32%
Actual Match % 78.00% = (39/50)
A continuación, vamos a intentarlo para una muestra de, digamos, 15 invitados. Pues bien, en esta caso la posibilidad de acierto es del 24%, muy por debajo del 50% que estamos buscando.
Items: 365 People: 15 Run Trial reset
Number of pairs 105 = (15 * 14)/2
Chance of a unique pair 99.7260% = 364/365
Chance of 105 unique pairs 74.97% = (99.7260%)^105
Chance of some match 25.03% = 1 - 74.97%
Actual Match % 24.00% = (12/50)
A- A+


23:41
con lo que P(A) ≈ 0.0164.
Para una muestra de N personas: De forma general, el espacio muestral para una muestra de tamño N viene dado por
$\Omega_N = \{(x_1, \ldots, x_N) : x_i \in \{1, 2, \ldots, 365\}\}$
$\#\Omega_N = (365)^N$.
Siguiendo un razonamiento parecido al anterior, se tiene que la probabilidad del suceso complementario de A es
$P\left(\text{no hay dos personas que cumplen el mismo día}\right) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-N+1}{365}$.
Por lo tanto, la probabilidad para una muestra de tamaño N se escribe como
$P(A) = 1 - \left(\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-N+1)}{365^N}\right) = 1 - \frac{365!}{365^N\,(365-N)!}$
A- A+


0:01
GeoGebra
Aventura una respuesta a cada una de las preguntas anteriores basándote sólo en tu intuición.
Simulación:
HAY 1 COINCIDENCIA
Regenera fechas
Reinicia recuento
Para generar al azar 30 nuevas fechas de cumpleaños (ya ordenadas), pulsar sobre el botón "Regenerar fechas".
Para hacerlo con mucha rapidez, pulsa el play.
Tras observar los resultados en varias simulaciones vuelve a aventurar una respuesta a cada una de las preguntas planteadas.


0:29
Reinicia recuento
Como curiosidad, puedes ver el siguiente vídeo del canar de Youtube Derivando en relacióon a la paradoja del cumpleaños.
A- A+


0:27
BBCTX-1 1080i/59.94
El problema de Monty Hall
Escrito el 18/07/2018
Supongamos que estás en un concurso de televisión que consiste en un trueque a ciegas. El juego consta de tres puertas. Detrás de una de las puertas hay un premio, mientras que las otras dos puertas están vacías.
A- A+


0:28
puertas están vacías.
El presentador te invita a elegir una de las tres puertas. A continuación, abre una que no contiene premio. En ese momento el presentador te pregunta:
¿Te quedas con tu puerta o la cambias por la otra?
Accede al simulador pinchando en el siguiente enlace: Simulador
A- A+

Apéndice B

# Unidad didáctica

A continuación, se presenta la unidad didáctica donde se encuentran tanto los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje, así como la metodología empleada, los instrumentos de evaluación y los recursos necesarios.

| Curso | Bloque de contenidos | Título de la unidad didáctica |
|---|---|---|
| 1º Bachillerato de Ciencias Sociales | Bloque 5: Estadística y Probabilidad | Probabilidades |

| **Objetivos de la etapa** |
|---|
| 1. Identificación de los espacios muestrales asociados a un experimento aleatorio.<br>2. Aplicación de métodos de conteo para el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.<br>3. Cálculo de probabilidades de sucesos condicionados así como identificación de sucesos independientes.<br>4. Aplicación del Teorema de la probabilidad total y el Teorema de Bayes en contexto de la vida real. |

| Competencias | Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de evaluación | Instrumento de evaluación |
|---|---|---|---|---|
| 1. Reconocer los espacios muestrales asociados a sucesos aleatorios.<br><br>2. Calcular probabilidades usando la regla de Laplace.<br><br>3. Calcular probabilidades de sucesos condicionados y la independencia de sucesos<br><br>4. Reconocer sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. | 1. Entender el concepto de suceso aleatorio.<br><br>2. Calcular probabilidades usando la regla de Laplace.<br><br>3. Aplicar distintos métodos de conteo al cálculo de probabilidades<br><br>4. Reconocer cuándo dos sucesos son independientes<br><br>5. Aplicar el Teorema de la probabilidad y el de Bayes. | 1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos.<br><br>2. Utilizar combinatoria para el cálculo de probabilidades.<br><br>3. Asignar probabilidades aquellos sucesos aleatorios condicionados mediante el Teorema de la probabilidad total y el Teorema de Bayes. | 1. Calcula probabilidades de sucesos aleatorios (simples y compuestos) usando combinatoria y la regla de Laplace.<br><br>2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.<br><br>3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. | Ejercicios evaluables de las paradojas ( 10% )<br><br>Actividad Evaluables de la aplicación móvil ( 10% )<br><br>Prueba escrita ( 80 % ) |
| **Metodología**<br>Las sesiones se han distribuidas según aparecen en la Sección 3.11. | | | | **Recursos**<br>Descritos en la Sección 3.8. |

| | |
|---|---|
| Objetivo 1 | Identificar los espacios muestrales para experimentos simples y compuestos así como el número de elementos que poseen. |
| Objetivo 2 | Saber aplicar la combinatoria para calcular probabilidades de sucesos usando la regla de Laplace. |
| Objetivo 3 | Reconocer experimentos donde están involucradas las probabilidades condicionadas.<br>Distinguir la independencia de sucesos. |
| Objetivo 4 | Reconocer los contextos en los que aplicar el Teorema de la probabilidad total así como la probabilidad a posteriori y el Teorema de Bayes |
| Actividades de evaluación | |

Apéndice C

# Galileo y el duque de Toscana

## Un poco de Historia

El dado era uno de los juegos de azar más populares hasta finales de la Edad Media. El origen etimológico de la palabra azar proviene del árabe “az-zahr”, cuyo significado original es flor, y que posteriormente sería utilizada como la marca que daba la suerte en el juego de la taba, el predecesor del dado. A diferencia de los juegos de cartas (famosos en Europa durante el siglo XIV), los juegos de dados estaban de moda durante la Dinastía I de Egipto (3100 a.C - 2900 a.C), posteriormente en Grecia y durante el Imperio Romano. De hecho, de acuerdo con la mitología griega, fue Palamedes (uno de los héroe de la guerra de Troya) quien inventó los juegos de dados como pasatiempo para los soldados griegos mientras esperaban luchar en la batalla de Troya. En el siglo II, el viajero e historiador Pausanias escribió acerca de un pintura de Polygnotos realizada en el siglo V a.C que mostraba a Palamedeo y Tersites jugando a los dados. En la Figura C.1 (a) puede verse un mosaico de dos romanos jugando a los dados, que se encuentra en el Museo de Bardo (Túnez), mientras que en la Figura C.1 (b) el pintor Exequias, usando la técnica de las figuras negras, escenifica a Aquiles y Ayax jugando a los dados.

Figura C.1. Representaciones artísticas de dados.

Uno de los primeros libros sobre la teoría de la probabilidad fue escrito por Gerolamo Cardano (1501–1576) en la obra titulada *De Ludo Aleae*, publicada en 1663 (un siglo después de su redacción) y dedicada en su mayoría a los juegos de dados. Posteriormente, Galilelo Galilei (1564–1642) se interesó por un problema fue sugerido por el duque de la Toscana, una paradoja relativa al lanzamiento de dados y que Galileo habría descrito en su obra *Sopra le Scoperte dei Dadi*. Más tarde, en 1718, tras una recopilación de trabajos del Galileo la obra pasaría a titularse *Consideratione sopra il Giuoco dei Dadi*. Cabe resaltar que dicho problema ya había sido resuelto en la obra de Cardano anteriormente mencionada, un hecho que el propio Galileo desconocía por completo debido a la demora en la publicación de la misma.

## La paradoja de los dados

En el lanzamiento de un dado equilibrado de seis caras, cada una de las ellas tiene la misma probabilidad de aparecer. Por otro lado, en el caso de dos dados equilibrados, la suma de los números obtenidos está comprendida entre 2 y 12. En este caso, tanto el suceso "La suma es 9" como el suceso "La suma es 10" se pueden obtener de dos maneras distintas

$$9 = 3 + 6 = 4 + 5 \qquad y \qquad 10 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Ahora bien, cuando se considera el problema con tres dados, tanto el suceso "La suma es 9" como el suceso "La suma es 10" se pueden se pueden obtener de seis maneras diferentes

$$\begin{aligned} 9 &= 1\,+\,2\,+\,6 = 1\,+\,3\,+\,5 = 1\,+\,4\,+\,4 = 2\,+\,2\,+\,5 = 2\,+\,3\,+\,4 = 3\,+\,3\,+\,3, \\ 10 &= 1\,+\,3\,+\,6 = 1\,+\,4\,+\,5 = 2\,+\,2\,+\,6 = 2\,+\,3\,+\,5 = 2\,+\,4\,+\,4 = 3\,+\,3\,+\,4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en ambos casos, la suma 9 y la suma 10 tienen el mismo número de eventos favorables. Sin embargo, el duque de Toscana había observado que al tirar dos dados la suma 9 salía con mayor frecuencia que la suma 10, mientras que con tres dados era la suma 10 la que aparecía con mayor frecuencia. ¿Cómo era eso posible?

## Explicación de los contenidos

Esta paradoja puede ser útil para introducir algunos de los siguientes conceptos:

- Espacio muestral.
- La regla de Laplace.

## Resolución Empírica

Como se ha comentado en el capítulo anterior, para la resolución empírica del problema usaremos varios simuladores que pueden encontrarse en

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_dados3_galileo.htm

https://www.geogebra.org/m/mKSj8gsR

Para empezar, proponemos a los estudiantes que ejecuten el primero de los simuladores y preguntamos cuáles son los resultados obtenidos. Puede que los resultados obtenidos con el simulador den la razón al duque de Toscana, ya que las frecuencias relativas de ambos sucesos son iguales tal y como aparece en la Figura C.2

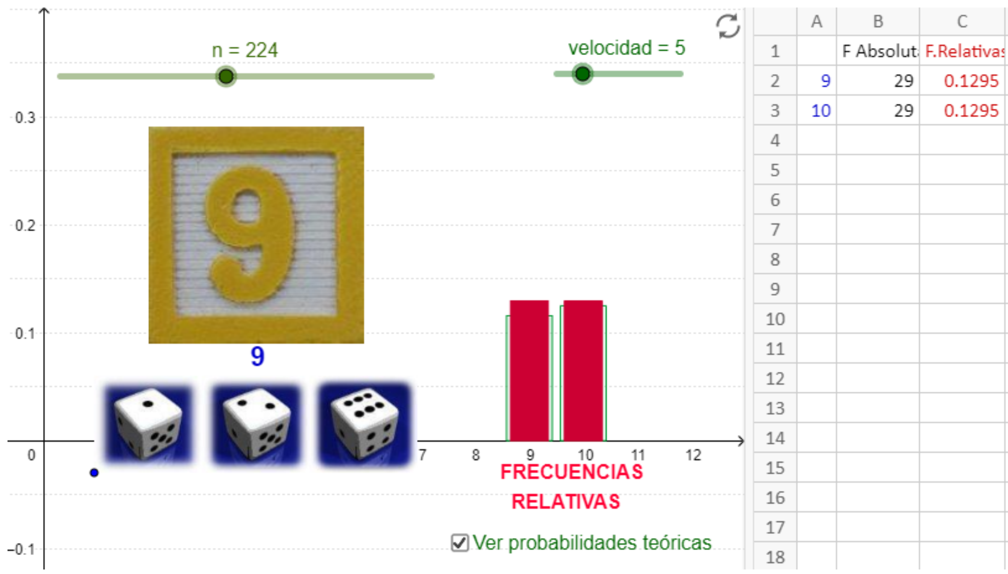



Figura C.2. Simulador para el problema del duque de Toscana.

Sin embargo, el simulador tiene la posibilidad de dibujar las probabilidades teóricas para los sucesos A = " La suma es 9 ", B = " La suma es 10 ", observando que ésta es ligeramente mayor para el suceso B que para el suceso A. La pregunta es: ¿Cúanto es exactamente la diferencia?

## Resolución Teórica

En un primer momento podemos inducir al error de manera voluntaria con la siguiente afirmación: Los sucesos A = “ La suma es 9 ”, B = “ La suma es 10 ”son igualmente probables, ya que poseen el mismo número de casos favorables.

A continuación, podemos preguntar a los alumnos quiénes están de acuerdo con dicha afirmación. Llegados a este punto, señalamos que la anterior afirmación sería válida si todos los sucesos fuesen equiprobables, algo que no ocurre en este caso ya que incluso para el suceso A, los casos $3 + 3 + 3$ y $1 + 2 + 6$ no ocurren con la misma regularidad.

Ese es el mismo error que comete el duque de Toscana, pensar que todos los sucesos son equiprobables. Para resolver el problema, Galileo construyó una tabla donde se refleja las diferentes configuraciones asociadas a cada una de los casos favorables al suceso A y al suceso B. Dicha tabla puede encontrarse en la Figura C.3.

| | 9 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|
| | Caso | Nº | Caso | Nº |
| | 1+2+6 | 6 | 1+3+6 | 6 |
| | 1+3+5 | 6 | 1+4+5 | 6 |
| | 1+4+4 | 3 | 2+2+6 | 3 |
| | 2+3+4 | 6 | 2+3+5 | 6 |
| | 2+2+5 | 3 | 2+4+4 | 3 |
| | 3+3+3 | 1 | 3+3+4 | 3 |
| Total | | 25 | | 27 |

Figura C.3. Tabla elaborada por Galileo para el problema del duque de Toscana.

El espacio muestral viene dado por $\Omega = \{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,\}$, y por lo tanto tiene $\#\Omega = 216$ resultados posibles. Ahora bien, debido a la tabla de Galileo de la Figura C.3, tenemos que $P(A) = 25/216 \approx 0{,}1157$, mientras que $P(B) = 27/216 \approx 0{,}125$ por lo que la diferencia es menor del $1\,\%$ (aproximadamente 0,009).

Apéndice D

# La paradoja de la suma 7

## La paradoja

Supongamos un experimento que consiste en el lanzamiento de dos dados, uno de color azul y otro de color rojo. Consideremos los sucesos:

A = “ La suma de los dados es 7 ” y B = “ El dado rojo es par ”.

Es fácil comprobar que los casos favorables para el suceso A son los siguientes:

$$\{ (1,6) \ , \ (2,5) \ , \ (3,4) \ , \ (4,3) \ , \ (5,2) \ , \ (6,1) \}$$

Observamos que en la mitad de los casos, el suceso A está condicionado al suceso B, por lo que podemos pensar que los sucesos A y B son dependientes. Sin embargo, en esta ocasion, nuestra intuición nos engaña pues se trata de sucesos independientes.

## Explicación de los contenidos

Esta paradoja puede ser útil para introducir algunos de los siguientes conceptos:

- Espacio muestral.
- La regla de Laplace.
- Probabilidad condicionada

## Resolución Empírica

Para esta paradoja no seguimos una resolución empírica debido a la falta de un simulador.

## Resolución Teórica

En primer lugar, debemos calcular las probabilidades del suceso A. Para ello, lo recomendable en este caso es hacer una tabla con las distintas configuraciones para la suma de los dos dados, tal y como puede verse en la Figura D.1

| | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ⚁ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ⚂ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ⚃ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ⚄ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ⚅ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Figura D.1. Tabla con las distintas resultados de los dados

El espacio muestral asociado a este experimento es $\Omega = \{(x, y) \,:\, x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, y por lo tanto tiene $\#\Omega = 36$ resultados posibles. Ahora bien, observando los casos favorables a los sucesos A, B y $A \cap B$ resulta

Sucesos favorables para A $\longrightarrow \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$,

Sucesos favorables para B $\longrightarrow \{(1, 2), \ldots, (6, 2), (1, 4), \ldots, (6, 4), (1, 6), \ldots, (6, 6)\}$,

Sucesos favorables para $A \cap B \longrightarrow \{(1, 6), (3, 4), (5, 2)\}$,

con lo que utilizando la regla de Laplace tenemos que

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Por lo tanto, ya que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, se tiene que A y B son independientes.

También, puede probarse mediante la definición formal de sucesos independientes $P(A/B) = P(A)$. Para ello, observamos que el suceso $A/B$ hace referencia a que, dentro de todos los posibles casos en los que el dado rojo es par, estamos interesados en los que la suma de ambos sea 7. Observamos que, dentro de los 18 casos favorables (los correspondientes al suceso B), solo hay 3 favorables a la suma 7 cuando el dado rojo es par, y por tanto

$$P(A/B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} = P(A).$$

Apéndice E

# La paradoja de Méré

## Historia de la paradoja

Cuenta la historia que en el siglo XVII, el conocido siglo jugador francés caballero de Méré estaba de camino a su finca en Poitou cuando conoció a uno de los científicos más famosos del momento, a matemático Blaise Pascal. Sin perder la oportunidad, de Méré le planteó dos problemas a Pascal, ambos conectados con juegos de azar. El primer problema fue la paradoja en cuestión, mientras que la otra puede encontrarse en [33, p. 9]. En una correspondencias entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat, el problema estuvo presente, destacando que entre las cartas que se conservan solo se hace una breve referencia al problema pero sin resolución alguna por ninguna de las dos partes. Este hecho puede deberse a que ambos científicos conocían perfectamente la solución y que, por tanto, no merecía la pena perder el tiempo.

Es importante mencionar que no es del todo cierto que el caballero de Méré fuera un apasionado del juego, sino que estaba interesado en paradojas más desde el punto de vista teórico que práctico. Es por ello que de Méré no estaba satisfecho con que Pascal “solo”hubiera resuelto el problema (confirmando que era correcta la respuesta que ya sabía), ya que no veía en la solución cómo se había resuelto la contradicción que planteaba.

## La paradoja de la proporcionalidad

El problema planteado por de Méré a Pascal es el siguiente: Sabemos que las probabilidades de éxito en obtener al menos un 6 en el lanzamiento de un dado en 4 tiradas es superior al 50 %. De la misma manera, las probabilidades de éxito de obtener al menos un doble 6 en el lanzamiento de dos dados en 24 tiradas también debe ser superior al 50 %.

El argumento que utilizó de Méré es el siguiente: 4 lanzamientos son a 6 (siendo 6 el número de posibles resultados al lanzar un dado) como 24 lanzamientos son a 36 (siendo 36 el número de posibles resultados al lanzar dos dados). Por lo tanto, si con 4 lanzamientos de un único dado hay ventajas a mi favor, con más razón con el lanzamiento de dos dados en 24 lanzamientos.

Sin embargo, basado en su experiencia como jugador, de Méré había notado que si apostaba por conseguir al menos un 6 con un dado en 4 lanzamientos la probabilidad de éxito era mayor al 50 %, mientras que para conseguir un doble 6 con dos dados en 24 tiradas la probabilidad de éxito era menor del 50 %. ¿Cómo era eso posible?

## Explicación de los contenidos

Esta paradoja puede ser útil para introducir algunos de los siguientes conceptos:

- Espacio muestral.
- Álgebra de sucesos.
- La regla de Laplace.
- Sucesos independientes.

## Resolución Empírica

Para la resolución empírica de esta paradoja usaremos el siguiente simulador:

`https://www.geogebra.org/m/a8gQT6CH`

A pesar de que dicho simulador está en francés, eso no es impedimento para poder identificar los casos favorables tanto para un dado y 4 lanzamientos como para dos dados y 24 lanzamientos. El la Figura E.1 podemos ver el simulador para la paradoja del caballero de Méré, donde se aprecia las cantidades n6 y n66 que representan la frecuencia absoluta del 6 en 4 lanzamientos y del doble 6 en 24 lanzamientos, respectivamente.

Asimismo, aparecen las frecuencias relativas de ambos sucesos, así como las probabilidades teórica de los mismos. Por último, la opción de *La simulació* permite acceder


Figura E.1. Simulador de la paradoja del caballero de Méré.

a la historia de la paradoja en francés.

Pediremos a los alumnos que hagan una serie de repeticiones del experimento (por ejemplo, unas 100) y que apunten los resultados obtenidos. Posteriormente, haremos la media y preguntaremos cuál de las probabilidades es mayor, si la correspondiente al 6 en un dado con cuatro lanzamientos o la de doble 6 en dos dados en 24 lanzamientos. Adicionalmente, preguntaremos si partiendo de los datos empíricos existe alguna relación de proporcionalidad entre los resultados tal y como sugiere de Méré en su carta a Pascal.

## Resolución Teórica

En este caso la resolución teórica es bastante sencilla. En primer lugar, si denotamos por $\Omega_1$ y $\Omega_2$ a los espacios muestrales asociados el experimento de lanzar 4 veces un dado y de lanzar 24 veces dos dados, respectivamente, se tiene que

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_i \in \{1, \ldots, 6\},\, i = 1, \ldots, 4\},$$
$$\Omega_2 = \{(\,(x_1, y_1), \ldots, (x_{24}, y_{24})\,) \,:\, x_i, y_j \in \{1, \ldots, 6\},\, i, j = 1, \ldots, 24\},$$

y por tanto $\#\Omega_1 = 6^4$ y $\#\Omega_2 = (36)^{24}$. Ahora bien, si definimos los sucesos

$$A \equiv \text{“Sale 6 con un dado en 4 tiradas”} \quad , \quad A_1 \equiv \text{“Sale 6 con un dado en una tirada”},$$
$$B \equiv \text{“Sale un doble 6 con dos dados en 24 tiradas”},$$
$$B_1 \equiv \text{“Sale un doble 6 con dos dados en una tirada”}.$$

utilizando los sucesos complementarios como la independencia de los dados, se tiene que

$$P(A^c) = P(\text{no sale ningún 6 en 4 tiradas}) = P(A_1)^4,$$
$$P(B^c) = P(\text{no sale ningún doble 6 en 24 tiradas}) = P(B_1)^{24}.$$

Por lo tanto, las probabilidades de éxito para un 6 y un doble 6 en 4 y 24 lanzamientos, respectivamente, son

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(A_1)^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177,$$
$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P(B_1)^{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914,$$

Los cálculos anteriores demuestran que la idea de Méré acerca de que las probabilidades de éxito satisfagan una regla de proporcionalidad para experimentos que verifican una relación de escala es errónea, en general.

Apéndice F

# El problema de Monty Hall

## Desarrollo en el aula

**Introducción al problema**

Supongamos que estás en un concurso de televisión que consiste en un trueque a ciegas. El juego consta de tres puertas. Detrás de una de las puertas hay un premio, mientras que las otras dos puertas están vacías. El presentador te invita a elegir una de las tres puertas. A continuación, abre una que no contiene premio. En ese momento el presentador te pregunta: *¿Te quedas con tu puerta o la cambias por la otra?*

**Actividades en Grupo (2 personas)**

1. Discute con tus compañeros si es más favorable mantener o cambiar de puerta.
2. Accede al simulador en la siguiente dirección

   `https://www.geogebra.org/m/SesmYKXf`

3. ¿Cuál crees que es la probabilidad de ganar el coche manteniendo la puerta elegida sin ninguna pista?
4. Con ayuda del simulador, calcula la probabilidad de éxito en este supuesto.
5. ¿Cuál crees que es la probabilidad de ganar el coche manteniendo la puerta elegida teniendo en cuenta la pista?
6. Con ayuda del simulador, calcula la probabilidad de éxito en este supuesto.
7. A la vista de los resultados del supuesto anterior, ¿Cuál es la probabilidad de éxito si cambiamos de puerta teniendo en cuenta la pista?

**Actividades adicionales**

Accede al simulador del problema de Monty-Hall que se encuentra en la página

`https://betterexplained.com/articles/understanding-the-monty-hall-problem/`

Realiza una serie de 25 repeticiones del experimento variando el número de puertas y eligiendo entre los supuestos de mantener la puerta elegida o cambiarla. A continuación, responde razonadamente a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es, de media, la probabilidad de ganar el coche que se obtiene en cada caso (cambiar y no cambiar) cuando hay 4 puertas?

2. ¿Cuál es, de media, la probabilidad de ganar el coche que se obtiene en cada caso (cambiar y no cambiar) cuando hay 10 puertas?

3. ¿Cuál es, de media, la probabilidad de ganar el coche que se obtiene en cada caso (cambiar y no cambiar) cuando hay 100 puertas?

4. Obtener de forma teórica la probabilidad de ganar el coche si decides cambiar de puerta en los supuestos anteriores. ¿Y para el caso general de $N$ puertas?

5. Plantea al menos 2 configuraciones disitnas del juego *Let's Make a Deal* variando, por ejemplo, la cantidad de puertas que contienen cabras y aquellas que contienen premio. Calcula en cada una de ellas las probabilidades de ganar el premio.

## Un poco de historia

En el año 1963, en Estados Unidos se emitía por primera vez en televisión el programa llamado *Let's Make a Deal*, dirigido y producido por Stefan Hatos y Monty Hall, siendo éste último su presentador durante muchos años.

El formato del programa consistía en seleccionar a concursantes entre la audiencia, conocidos como comerciantes, quienes intentan hacer un trato con el presentador. En la mayoría de los casos, a un comerciante se le ofrece algo de valor y se le da la opción de conservarlo o cambiarlo por un artículo diferente. El juego se basa en que el objeto de trueque está oculto para el comerciante hasta el momento de su elección final. Por lo tanto, el comerciante desconoce el valor del objeto por el que está cambiando, pudiendo salir beneficiado o perjudicado con el cambio.

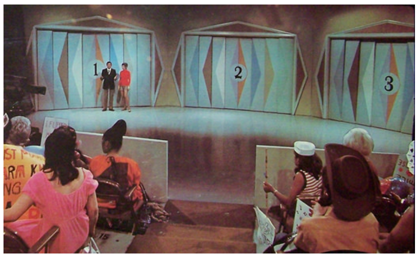




Figura F.1. El programa de televisión *Let's Make a Deal* presentado por Monty Hall.

En un momento dado del programa, el presentador Monty Hall hacía elegir a los concursante entre tres puertas. Detrás de una de las puertas hay un premio, mientras que las otras dos puertas esconden cabras o simplemente estaban vacías. En primer lugar, el concursante elige una de las tres puertas. En ese momento, el presentador abre una de las puertas restantes que no contiene premio, es decir, abre aquella que contiene una cabra. Llegados a este punto, Monty Hall pregunta al concursante:

*¿Sigues con la puerta elegida inicialmente o prefieres cambiarla por la otra?*

Basado en el famoso programa de televisión, el escenario descrito anteriormente responde al conocido como *El Problema de Monty Hall*, y es una pregunta de probabilidad que se ha hecho célebre. A pesar de su simplicidad engañosa, algunas de las mentes más brillantes del mundo (como por ejemplo profesores del MIT, matemáticos de renombre y beneficiarios de la beca de MacArthur) han tenido problemas para captar su respuesta.

## La paradoja del cambio de puerta

El Problema de Monty Hall está dentro de las conocidas como paradojas verídicas, es decir, cuyos resultados son aparentemente absurdos a pesar de que su veracidad es demostrable.

Estadísticamente, ¿es mejor cambiar de puerta o manter la elección inicial? Y lo que es más importante ¿afecta en algo a mis posibilidades de éxito? La mayoría de la gente afirma que el cambio de elección no tiene ninguna repercusión en las posibilidades de éxito, ya que al tener dos puertas tienen un 50 % de probabilidad de elegir el premio. Este problema fue propuesto originalmente por Steve Selvin a la revista American Statistician en 1975 (véase [31] a y b) , y su fama se hizo mayor tras la aparición en la columna "Ask Marilyn" de la revista Parade, espacio periodístico dirigido por Marilyn vos Savant quien a sus 23 años figuraba en en el Libro Guinness de los Récords por tener el "Cociente intelectual más alto del mundo". Para más información se recomienda [13].

La respuesta de Marilyn era tan sencilla como sorprendente: Cambiar de puerta duplica tus probabilidades de ganar el premio.

## Explicación de los contenidos

Esta paradoja puede ser útil para introducir algunos de los siguientes conceptos:

- Espacio muestral.
- La regla de Laplace.
- Probabilidad condicionada
- Probabilidad total.

## Resolución Empírica

Para la resolución empírica del problema usaremos un simulador que se encuentra en la siguiente dirección

`https://www.geogebra.org/m/SesmYKXf`

Tal y como puede verse en la Figura F.2, el simulador que usaremos para el problema de Monty-Hall consta de los siguientes pasos:

1. **Paso 1**: Formado por el botón *Throw*, que sirve para determinar de manera aleatoria las puertas donde se situarán las dos cabras y el coche.

2. **Paso 2**: Formado por los números 1, 2 y 3, y que designan la primera elección de puerta por parte del concursante.

3. **Paso 3**: Formado por el botón *Hint*, y que descubre una de las puertas (de las no elegidas) donde se encuentra una de las cabras.

4. **Paso 4**: Formado por los números 1, 2 y 3, y que designan la elección final de la puerta, pudiendo mantener o cambiar la opción del Paso 2.

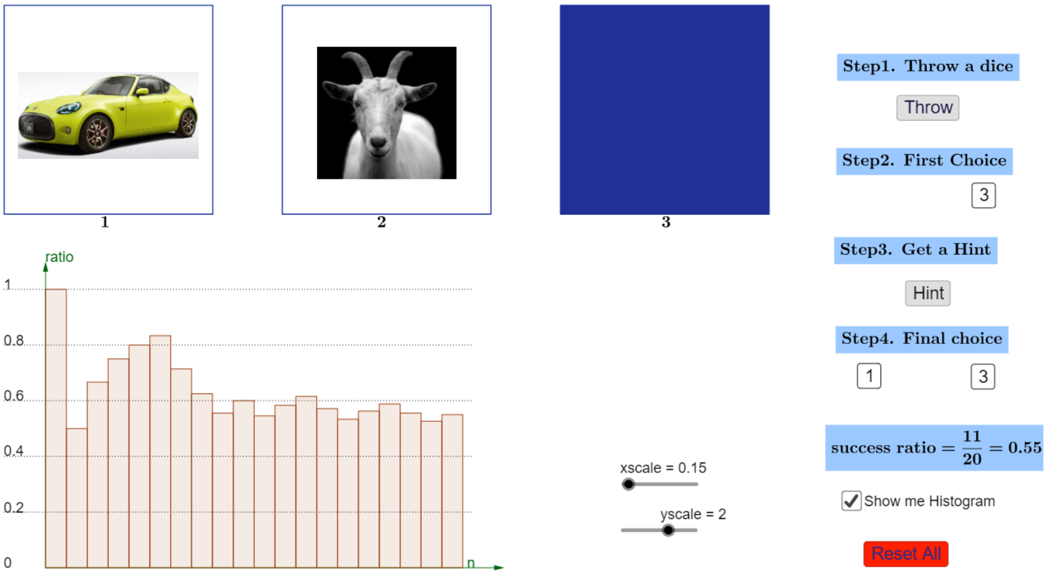



Figura F.2. Simulador del problema de Monty-Hall.

La sesión se desarrollará en la sala de ordenadores, dedicando unos minutos a los siguientes supuestos:

1. **Mantener la puerta elegida sin dar la pista**: En este supuesto invertiremos unos 5 minutos aproximadamente. En primer lugar, preguntaremos a los estudiantes cuál sería, siguiendo esta estrategia, las probabilidades de éxito. El razonamiento en este supuesto es sencillo, ya que que tenemos un evento favorable (la puerta que contiene el coche) dentro de las tres posibles puertas y por tantos la probabilidad de ganar el coche es 1/3. A continuación, vamos a constrastar dicha

información con ayuda del simulador. Para ell hacemos, por ejemplo, que cada estudiante realice 25 repeticiones del experimento y calculamos la media de los porcentajes de éxito que han obtenido, valor que debe ser cercano a 0.33.

2. **Proporcionar la pista y mantener la puerta elegida**: En este supuesto invertiremos unos 5 minutos aproximadamente. En primer lugar, realizamos el experimento una vez con el simulador, es decir, elegimos una puerta, usamos la pista y en ese momento preguntaremos a los estudiantes cuál sería las probabilidades de éxito. Es posible que muchos de ellos repondan que tenemos un 50 % de posiibilidad, ya que argumentarían que tenemos dos puertas sin abrir y sabemos que una de ellas contiene el coche. Ahora bien, podemos refutar dicha afirmación usando, nuevamente, el simulador. En este caso, al igual que sucedía siguiendo la estrategia anterior, las probabilidades de éxito son cercanas al 0.33 con independencia de si nos dan la pista o no. Por lo tanto, este supuesto pone de manifiesto que los sucesos

   A = “ Ganar sin cambiar de puerta ” y B = “ Nos dan la pista ”

   son sucesos independientes, ya que $P(A/B) = P(A)$.

3. **Proporcionar la pista y cambiar de puerta**: En primer lugar, preguntaremos a los estudiantes cuál sería las probabilidades de éxito. Para ellos, debemos notar que en los supuestos anteriores la probabilidad de éxito sin cambiar de puerta (con y sin pista) es cercano a 0.33. Por lo tanto, la probabilidad de éxito cambiando de puerta una vez nos dan la pista debe ser cercana a 0.66. Al igual que en el primer supuesto, pedimos que cada estudiante realice 25 repeticiones del experimento y calculamos la media de los porcentajes de éxito que han obtenido, valor que debe ser cercano a 0.66.

Adicionalmente podemos mostrar a los estudiantes que, una vez conocida la pista, las probablidades de ganar el coche se multiplican con el cambio de puerta. Para ello, debido al razonamiento del primer supuesto, sabesmos que la probabilidad de elegir la puerta que contiene el coche es 1/3. Ahora bien, si no me dan la pista y decido cambiar de puerta, la probabilida de éxito sigue siendo la misma. Sin embargo, si me dan la pista y decido cambiar de puerta, mis probabilidades aumentan de 0.33 a 0.66, tal y como hemos visto en el segundo supuesto. Por lo tanto, este supuesto pone de manifiesto que los sucesos

C = “ Ganar cambiando de puerta ” y B = “ Nos dan la pista ” son sucesos dependientes, ya que $P(C/B) \approx 0{,}66$ mientras que $P(C) \approx 0{,}33$.

## Resolución Teórica

En la resolución teórica de esta paradoja podemos adoptar dos variante, una más teórica y otra más visual. Empezaremos por la más visual y sencilla.

**Solución 1**: Para la solución de este problema podemos hacer un diagrama de árbol con todas las posibilidades que se puedan presentar. Para ello, empezamos los distintos casos dependiendo de lo que contiene la puerta elegida inicialmente:

- **Elegimos una puerta que contiene una cabra**: En este caso si decido mantenerla gano una cabra, mientras que si decido cambiar gano el coche.
- **Elegimos una puerta que contiene una cabra**: Estamos en la misma situación que antes.
- **Elegimos una puerta que contiene el coche**: En este caso si decido mantenerla gano un coche, mientras que si decido cambiar gano una cabra.

En la Figura F.3 puede verse el diagrama de árbol correspondiente al problema.

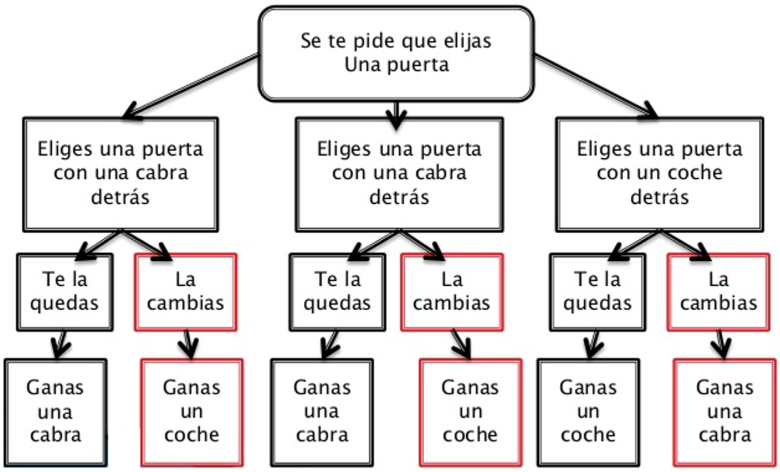



Figura F.3. Diagrama de árbol del Problema de Monty Hall

Ahora bien, utilizando la regla de Laplace observamos que:

$$P(\text{Ganar el coche/Mantengo la puerta}) = 1/3$$
$$P(\text{Ganar el coche/Cambio la puerta}) = 2/3.$$

**Solución 2**: Para la solución a este problema serán necesarias las propiedades de la probabilidad condicionada, en particular la correspondiente a la probabilidad total. En primer lugar definimos los sucesos:

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{El concursante elige inicialmente la puerta que contiene el coche.} \\ B &\equiv \text{El concursante elige inicialmente la puerta que contiene la cabra.} \\ \text{Ganar} &\equiv \text{El concursante gana el coche.} \end{aligned}$$

En este caso estamos interesados en $P(\text{Ganar})$ para dos tipos de jugadores: el que cambia de puerta y el que no cambia de puerta. Ahora bien, nos damos cuenta de que los sucesos $A$ y $B$ forman una partición del espacio muestral, esto es,

$$\text{Ganar} = A \cup B \qquad y \qquad A \cap B = \emptyset.$$

Por lo tanto, en virtud del teorema de la probabilidad total resulta

$$P(\text{Ganar}) = P(A)\, P(\text{Ganar}/A) + P(B)\, P(\text{Ganar}/B)$$

Llegados a este punto, aplicando la regla de Laplace a los sucesos $A$ y $B$ tenemos que $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 2/3$. Ahora es cuando distinguimos los dos tipos de concursantes:

- **Concursante que no cambia de puerta**: En este caso $P(\text{Ganar}/A) = 1$ mientras que $P(\text{Ganar}/B) = 0$. Por lo tanto $P(\text{Ganar}) = P(A)\, P(\text{Ganar}/A) = 1/3$.

- **Concursante que cambia de puerta**: En este caso $P(\text{Ganar}/A) = 0$ mientras que $P(\text{Ganar}/B) = 1$. Por lo tanto $P(\text{Ganar}) = P(B)\, P(\text{Ganar}/B) = 2/3$.

En definitiva, la mejor opción es cambiar de puerta, ya que se duplican las probabilidades de éxito tal y como habíamos conjeturado en la fase empírica.

## Apéndice G

# La paradoja de la transitividad

## Introducción al problema

Supongamos que disponemos de tres marcas de coche, a saber, Audi (A), BMW (B) y Citröen (C). Una encuesta realizada revela que 2 de cada 3 compradores prefieren la marca A antes que la B, mientras que 2 de cada 3 compradores prefieren al B antes que al C. En las condiciones anteriores, *¿Podemos asegurar que la mayoría de los consumidores prefiere la marca A antes que la C?*

## La paradoja

En la vida cotidiana estamos acostumbrados a experimentar situaciones en las que se cumple la ley de transitividad, como por ejemplo si Alberto es mayor que Belinda y Belinda es mayor que Carlos, entonces podemos concluir que Alberto es mayor que Carlos. Sin embargo, existen ciertas situaciones en el contexto de la probabilidad y la estadística en las que esto tipo de relaciones entre objetos no se cumplen.

## Explicación de los contenidos

Esta paradoja puede ser útil para introducir algunos de los siguientes conceptos:

- Espacio muestral.
- Álgebra de sucesos.
- La regla de Laplace.
- Sucesos independientes

## Resolución Empírica

Para esta paradoja no se emplearán simuladores en la resolución empírica.

## Resolución Teórica

Vamos a presentar un ejemplo en el que la ley de transtividad no se cumple basado en la paradoja de Blyth. Para ello, consideremos cuatro dados A,B,C y D cuyas seis caras se disponen como sigue:

$$\text{Dado A} \longrightarrow (0, 0, 4, 4, 4, 4) \quad , \quad \text{Dado B} \longrightarrow (3, 3, 3, 3, 3, 3)$$
$$\text{Dado C} \longrightarrow (2, 2, 2, 2, 7, 7) \quad , \quad \text{Dado D} \longrightarrow (1, 1, 1, 5, 5, 5)$$

Supongamos que tenemos dos jugadores, quienes eligen un dado al azar y lanzan. Gana quien obtenga la puntuación más alta, siendo imposible un empate ya que las cantidades entre dos dados cualesquiera son distintas. A continuación, vamos a analizar los siguientes casos:

1. **Se eligen los dados A y B**: Para este caso observamos que los posibles resultados tras el lanzamiento del dado A son 0 y 4, mientras que para el dado B el único resultado posible es 3. Ahora bien, observamos que si sale un 0 con el dado A, entonces es imposible que A gane a B, mientras que si sale un 4 con el dado A, entonces siempre ocurre que A gana a B. Por lo tanto, usando el hecho de que los dados son independientes resulta

$$P(\text{A gana a B}) = P(\ (A = 4) \cap (B = 3)\ ) = P(A = 4)P(B = 3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. **Se eligen dados B y C**: En este caso se tiene que B gane a C siempre que se obtenga un 2 con el dado C. Por lo tanto, usando nuevamente la independencia de los dados

$$P(\text{B gana a C}) = P(\ (B = 3) \cap (C = 2)\ ) = P(B = 3)P(C = 2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

3. **Se eligen los dados C y D**: Para este último caso, observamos que si sale un 2 con el dado C, entonces C gana a D siempre que obtengamos un 1 con el dado D, mientras que si sale un 7 con el dado C siempre ocurre que C gana a D. Por

lo tanto, usando tanto la probabilidad de la únión como la independencia de los dados se tiene que

$$\begin{aligned}
P(\text{C gana a D}) &= P(\,(C=2)\cap(D=1)\,) + P(\,(C=7)\cap(D=1 \text{ ó } 5)\,)\\
&= P(C=2)P(D=1) + P(C=7)P(D=1 \text{ ó } 5)\\
&= \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

De todo lo anterior obtenemos que 2 de cada 3 veces A gana a B, en 2 de cada 3 veces B gana a C y que en 2 de cada 3 veces C gana a D. Sin embargo, no es cierto que en la mayoría de los caso ocurra que A gana a D, ya que sucede justo lo contrario. En efecto, usando nuevamente tanto el álgebra de sucesos como la independencia de los dados resulta

$$\begin{aligned}
P(\text{D gana a A}) &= P(\,(D=1)\cap(A=0)\,) + P(\,(D=5)\cap(A=0 \text{ ó } 4)\,)\\
&= P(D=1)P(A=0) + P(D=5)P(A=0 \text{ ó } 4)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

lo que demuestra que no se cumple la ley de transitividad para el experimento anterior con las condiciones establecidas.

## Apéndice H

# Paradojas adicionales

Además de las comentadas anteriormente, existen otras paradojas interesantes que también pueden ser utilizadas en el aula como elemento motivador para el aprendizaje de la probailidad. En el libro [16, p. 32] destacamos las siguientes:

- La paradoja de los dos perritos.
- La paradoja de Simpson.
- La paradoja de San Petesburgo.
- La paradoja de las cajas de Bertrand.

Por otro lado, en [33] podemos encontrar notas históricas, explicaciones y observaciones de diversas paradojas entre las que destacamos:

- La paradoja de la independencia (página 12).
- La paradoja del puente y la lotería (página 16).
- La paradoja de San Petesburgo (página 27).
- La paradoja de sucesos casi seguros (página 54).
- La paradoja de la probabilidad condicional (página 58).