UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE GRADO

Título
Álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena
Autor/es
Iván Pérez-Aradros Martínez
Director/es
María del Pilar Benito Clavijo
Facultad
Facultad de Ciencia y Tecnología
Titulación
Grado en Matemáticas
Departamento
Curso Académico
2015-2016

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena

Alumno:

Iván Pérez-Aradros Martínez

Tutores:

María del Pilar Benito Clavijo

Logroño, Junio, 2016

Universidad de La Rioja

Facultad de Ciencia y Tecnología

Álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena

Autor: Iván Pérez-Aradros Martínez

Tutora: María del Pilar Benito Clavijo

Grado en Matemáticas

Logroño - Junio 2016

Agradecimientos

Este Trabajo Fin de Grado esconde muchas horas de dedicación e intensos momentos de dicha y emoción que he sentido ante cada escollo superado y ante cada descubrimiento por insignificante que fuera. También oculta la capacidad de trabajo y el entusiasmo que contagia en todo lo que se implica Pilar Benito, mi tutora de esta memoria.

"Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo."
Benjamin Franklin

Gracias Pilar

Resumen

En este trabajo nos centramos en álgebras de Lie que tienen un número finito de ideales. Usando teoría de representación del álgebra de Lie simple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ hemos desarrollado un algoritmo computacional que nos permite construir álgebras de Lie no resolubles cuyo retículo de ideales es una n cadena con $n = 3, 4, 5$. El algoritmo está basado en resultados de estructura de álgebras de Lie cuyo retículo forma una cadena incluidos en [6] y en resultados clásicos de teoría de representación del álgebra de Lie simple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ de dimensión 3 descrita en [3].

Abstract

In this paper we focus on Lie algebras in which the number of ideals is finite. Using representation theory of the simple classical Lie algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ we develop a computer algorithm which let us to construct nonsolvable Lie algebras in which its lattice is a chain of length 3, 4 or 5. The algorithm is based on preliminary structure results of Lie algebras in which its lattice is a chain, included in [6] and on classical results of representation theory of the simple Lie algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ of dimension 3 described in [3].

Índice general

Introducción

Las álgebras de Lie se originan con el objetivo de comprender aspectos desconocidos tanto del estudio y análisis de objetos dentro de la geometría, como de los grupos de Lie o las variedades diferenciales. El matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) concibió una idea muy original: debiera haber para las ecuaciones diferenciales algo análogo a la teoría de Galois de las ecuaciones algebraicas.

Será en Alemania donde Wilhelm Killing (1847-1923) desarrolle el siguiente trabajo realmente sustancial. En 1888 este matemático alemán sentó las bases de una teoría de estructuras para álgebras de Lie, y dio la clasificación de todas las álbebras de Lie simples de dimensión finita.

La culminación a estos estudios la aportó Ellie Cartan (1869-1951), que tras ordenar y clasificar el trabajo previo de Friedrich Engel (1861-1941) y Killing, dio la clasificación definitiva de las álgebras de Lie simples, identificando las cuatro familias principales y los cinco casos excepcionales.

La siguiente contribución para conseguir clasificar las álgebras de Lie es la de un matemático italiano, Eugenio Elia Levi(1883-1917) que en 1905 desarrolla lo que hoy conocemos como Teorema de Levi. Según este, toda álgebra finito dimensional L puede ser descompuesta como suma directa de una subálgebra de Lie semisimple $S \subseteq L$ y el radical resoluble R de L. Puesto que en los trabajos de Engel y Killing se clasifican las álgebras simples, también quedarán clasificadas las álgebras de Lie semisimples (que descomponen como suma directa de álgebras de Lie simples). No obstante, resta así el enorme trabajo de dar una clasificación para el resto de álgebras de Lie.

Figura 1: De izquierda a derecha: Sophius Lie, Wilhelm Killing, Ellie Cartan, Friedrich Engel y Eugenio Elia Levi.

En este Trabajo Fin de Grado analizaremos un tipo concreto de álgebras, las álgebras de Lie cuyo retículo de ideales forma una cadena. La estructura general de las álgebras de Lie cuyo retículo de ideales es una n-cadena (n arbitrario) se estudia en [6]. En este trabajo se caracterizan este tipo de álgebras consiguiendo la clasificación completa de las resolubles sobre cuerpos algebraicamente cerrados [6, Theorem 3.4]. En el caso no resoluble, en [7] se muestran construcciones explícitas de álgebras de este tipo de álgebras. Las construcciones dadas permiten clasificar las álgebras de Lie con factor de Levi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y cuyo retículo es una 4-cadena. El objetivo central de esta memoria es, tomando como punto de partida los resultados en [7], dar un paso más estudiando las posibles construcciones de las álgebras de este tipo cuyo retículo sea una 5-cadena.

Para abordar el objetivo, introduciremos las herramientas básicas tanto de estructura de álgebras de Lie (subestructuras, cocientes y homomorfismos) como de teoría de representación de álgebras simples. En las construcciones jugarán un papel importante la identidad de Jacobi que define un álgebra de Lie y la teoría de representación de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. La forma clásica de introducir el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ es mediante matrices 2×2 de traza 0. En esta memoria la presentaremos como subálgebra de derivaciones del anillo de polinomios en dos variables $\mathbb{F}[x, y]$. Esta presentación permite describir los $\mathfrak{sl}_2$-módulos irreducibles mediante polinomios homogéneos y establecer productos binarios $\mathfrak{sl}_2$-invariantes entre módulos irreducibles usando las llamadas transvecciones. La verificación de la identidad de Jacobi en las construcciones que proponemos y que más de un quebradero de cabeza nos ha dado, descansa fuertemente en las llamadas identidades de Gordan. Todos estos conceptos integran el Capítulo 1 de esta memoria.

En el Capítulo 2 de la memoria nos centraremos en el análisis de los resultados de estructura de [6] y en las construcciones derivadas para el caso de álgebras no resolubles con cadenas de $3, 4$ y 5 ideales. Las álgebras de Lie con 3 ideales son extensiones escindidas nulas de un álgebra de Lie o bien 1-dimensional (caso resoluble) o bien simple (caso no resoluble) y un módulo irreducible. El problema de construcción tiene fácil solución. En la construcción de las que tienen 4 ideales en cadena la verificación de la identidad de Jacobi es trivial. El problema fundamental está en la construcción de álgebras no resolubles con 5 ideales. Por tanto, dedicaremos todo nuestro esfuerzo a la construcción explícita de álgebras no resolubles con cadenas de 5-ideales y factor de Levi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. La construcción de diversos ejemplos mediante un programa implementado en Mathematica e incluido en el anexo de esta memoria, fue el punto de partida para la obtención de una serie de lemas incluidos en la Sección 2.3 sobre condiciones de existencia de álgebras este tipo. Finalmente, el Cuadro 2.1 muestra una clasificación completa de aquellas que cumplen que $\dim(N/N^2) \leq 7$ con N radical del álgebra de Lie. Los resultados de este capítulo, explican y amplían las construcciones dadas en [7] e ilustran que el problema de clasificación de álgebras de Lie no resolubles con n ideales para $n \geq 5$ es difícil de abordar.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

Como en cualquier área de las matemáticas lo primero que necesitamos para poder comprender el funcionamiento de una estructura es estudiar sus definiciones y analizar las principales características de sus ejemplos. Los ejemplos en una estructura, si están bien elegidos, suelen motivar de forma natural, la necesidad de algunos resultados. Con este objetivo nos adentraremos en el Capítulo 1, en el cual se recogen las definiciones, los teoremas de estructura básicos y las herramientas de teoría de representación que nos van a permitir adentrarnos en el problema de la clasificación de álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena en el que se centra este trabajo.

1.1. Conceptos y teoremas básicos.

En esta sección vamos a introducir las definiciones y resultados que utilizaremos para el desarrollo del Trabajo Fin de Grado. Los contenidos básicos incluidos aparecen en los capítulos 1, 2, 3, 4, 7 y 8 de [1] y han sido ampliados mediante [2] y [4].

Definición 1.1.1. Un *álgebra de Lie* L sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial junto con un producto, que llamaremos *corchete de Lie*,

$$[-,-] : L \times L \to L$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

1) $[-,-]$ es bilineal.

2) $[x,x] = 0$ para todo $x \in L$.

3) Identidad de Jacobi. Para todo $x, y, z \in L$ se cumple:

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0 \tag{1.1}$$

La propiedad 2) implica que $[x,y] = -[y,x]$ para todo $x, y \in L$, es decir, el producto en L es antisimétrico. Si además la característica de $\mathbb{F}$ es distinta de 2, se tiene la implicación en el otro sentido.

Las propiedades del producto vectorial del espacio 3-dimensional real proporcionan un sencillo ejemplo de álgebra de Lie: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el corchete de Lie dado por el producto vectorial satisface 1), 2) y 3) de la Definición 1.1.1. Veamos ejemplos más generales.

Ejemplo 1.1.2. Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}V$ el $\mathbb{F}$-espacio vectorial de los endomorfismos de V, esto es, de las aplicaciones lineales $f : V \to V$. En $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}V$ definimos el corchete de Lie $[-,-]$ en la forma:

$$[x,y] = x \circ y - y \circ x,$$

donde $\circ$ es la composición de aplicaciones. El corchete $[x, y]$ satisface 1), 2) y 3) de la Definición 1.1.1, por tanto $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}} V, [x, y])$ es un álgebra de Lie que se conoce como *álgebra general lineal*[1]. La notación que habitualmente se emplea es $\mathrm{End}(V)^-$ o $\mathfrak{gl}(V)$.

A menudo es más útil trabajar con matrices que con aplicaciones lineales. De esta forma se introduce $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ como el espacio vectorial de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$. En este espacio vectorial se define el corchete de Lie como:

$$[x, y] = xy - yx$$

donde xy es el producto usual de las matrices x e y. El álgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ aparece al fijar una base en un espacio vectorial n-dimensional, y permite representar las aplicaciones de $\mathfrak{gl}(V)$ mediante su matriz coordenada. $\square$

Notación 1.1.3. En general, dados U, V subconjuntos del álgebra de Lie L, la expresión $[U, V]$ denotará:

$$[U, V] = span_{\mathbb{F}}\langle [u, v] : u \in U, v \in V\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i [u_i, v_i] : u_i \in U, v_i \in V, t_i \in \mathbb{F} \right\}.$$

El conjunto $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$. Si U y V son subespacios entonces $U + V$ también lo es y se dice *subespacio suma* de U y V. $\square$

Definición 1.1.4. Sea L un álgebra de Lie. Una *subálgebra* de L es un subespacio vectorial $M \subseteq L$ tal que $[M, M] \subseteq M$, es decir $[x, y] \in M$ para todo $x, y \in M$.

Ejemplo 1.1.5. Una forma general de construir subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ viene dada al fijar cualquier matriz $S \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$. Para una tal matriz S fija, el conjunto:

$$\mathfrak{gl}_S(n, \mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \mid x^t S + Sx = 0\}$$

es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$. En efecto, sean $x, y \in \mathfrak{gl}_S(n, \mathbb{F})$, es decir, cumplen que $x^t S + Sx = 0$, y que $y^t S + Sy = 0$. Veamos que se tiene que $[x, y]^t S + S[x, y] = 0$, así, $[x, y] \in \mathfrak{gl}_S(n, \mathbb{F})$.

$$\begin{aligned}[x, y]^t S + S[x, y] &= (xy - yx)^t S + S(xy - yx) = y^t x^t S - x^t y^t S + Sxy - Syx = \\ &= y^t x^t S - x^t y^t S - x^t Sy + y^t Sx = y^t x^t S - x^t y^t S + x^t y^t S - y^t x^t S = 0\end{aligned}$$

puesto que $x^t S = -Sx$ y que $y^t S = -Sy$. $\square$

Definición 1.1.6. Sea L un álgebra de Lie. Un *ideal* de L es un subespacio vectorial $M \subseteq L$ tal que $[L, M] \subseteq M$, es decir, $[x, y] \in M$ para todo $x \in L, y \in M$.

Los subespacios 1-dimensionales de un álgebra de Lie son subálgebras gracias a la identidad 2) de la Definición 1.1.1. Todo ideal es subálgebra, pero el recíproco no es cierto en general. Uno de los ideales más importantes de un álgebra de Lie L es su *centro*. El *centro* de un álgebra de Lie L se define como:

$$Z(L) := \{x \in L \text{ tal que } [x, y] = 0 \text{ para todo } y \in L\}.$$

Además, cualquier subespacio vectorial contenido en el centro es un ideal. Es fácil comprobar que *la suma y la intersección de ideales proporcionan nuevos ideales*, este hecho es muy importante en la Sección 1.3. La intersección de subálgebras es subálgebra, pero su suma no. Sin embargo, la suma de ideal y subálgebra proporciona una subálgebra.

Definición 1.1.7. Se dice que un álgebra de Lie L es *descomponible* si puede ser descompuesta en suma directa de dos ideales. En caso contrario se dice que L es *indescomponible*.

[1] En general una $\mathbb{F}$-álgebra A es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con un producto interno xy. Si el producto satisface la identidad $(xy)z = x(yz)$ se dice que A es un $\mathbb{F}$-álgebra asociativa. La $\mathbb{F}$-álgebra A^- con producto $[x, y] = xy - yx$ es de Lie. Los ejemplos dados en 1.1.2 se corresponden con $A = \mathrm{End}(V, V)$ o con $A = M_n(\mathbb{F})$ ya que los endomorfismos de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y las matrices de orden $n \times n$ son $\mathbb{F}$-álgebras asociativas.

Lema 1.1.8. Sea L un álgebra de Lie y sea I un ideal de L. El cociente L/I es un álgebra de Lie cuyo corchete de Lie se define de la siguiente forma

$$[x+I, y+I] = [x,y] + I.$$

Definición 1.1.9. Sean L y M álgebras de Lie. Una aplicación $\varphi : L \to M$ se dice que es un *homomorfismo de álgebras de Lie* si

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ para todo } x, y \in L.$$

Un homomorfismo biyectivo de álgebras de Lie es un *isomorfismo.*

Junto con la definición de homomorfismo de álgebras de Lie aparecen los conceptos de núcleo $Ker\,\varphi$ e imagen $Im\,\varphi$. Además se cumple que el núcleo de un homomorfismo $\varphi : L \to M$ es un ideal de L y la imagen es una subálgebra de M. Como un álgebra de Lie es un anillo, tenemos las correspondientes versiones de los llamados *Teoremas de isomorfía* para anillos.

Ejemplo 1.1.10. Sea L un álgebra de Lie. La aplicación

$$\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L), \mathrm{ad}_L x = [x, -].$$

Esto es, $\mathrm{ad}_L x(y) = [x,y]$ para todo $y \in L$. Esta aplicación es un homomorfismo de álgebras de Lie conocido como *homomorfismo adjunto.* Observamos que el núcleo de este homomorfismo, Ker $ad = \{x \in L \mid [x, L] = 0\} = Z(L)$ y el conjunto imagen de la aplicación ad, $Im\ ad = \{\mathrm{ad}_L x \mid x \in L\} = \mathrm{ad}_L L$. Aplicando el primer Teorema de isomorfía tenemos:

$$L/Z(L) \cong \mathrm{ad}_L L. \tag{1.2}$$

□

Se dice *automorfismo* a todo isomorfismo de L en L. El conjunto formado por todos los automorfismos de L se denota por $Aut\,L$ y tiene estructura de grupo con la composición. Los automorfismos de la forma $exp(ad_L x)$[2] para $ad_L x$ nilpotente[3] se dicen *automorfismos internos.*

Definición 1.1.11. Sea L un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una *derivación* de L es una aplicación $\mathbb{F}$-lineal $D : L \to L$ tal que

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \text{ para todo } a, b \in L.$$

Sea $DerL$ el conjunto de derivaciones de L. Este conjunto es cerrado por suma y por producto escalar y contiene al cero. Por tanto, es un subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}(L)$. Además para todo $d_1, d_2 \in DerL$ el producto $[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1 \in DerL$. En efecto, sean $a, b \in [d_1, d_2]$. Como se tiene que

$$d_1 d_2(a \cdot b) = d_1(ad_2(b) + d_2(a)b) = ad_1 d_2(b) + bd_1 d_2(a)$$
$$d_2 d_1(a \cdot b) = d_2(ad_1(b) + d_1(a)b) = ad_2 d_1(b) + bd_2 d_1(a),$$

deducimos que

$$[d_1, d_2](a \cdot b) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(a \cdot b) = ad_1 d_2(b) - ad_2 d_1(b) + bd_1 d_2(a) - bd_2 d_1(a) =$$

$$a[d_1, d_2](b) + b[d_1, d_2](a)$$

y así, $[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1 \in DerL$. Por tanto, $DerL$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$.

Para cualquier elemento x de un álgebra de Lie, las aplicaciones $ad_L x$ introducidas en el Ejemplo 1.1.10, son derivaciones gracias a la identidad de Jacobi. Este tipo de derivaciones se dicen *derivaciones internas.* Además, para cualquier $d \in DerL$ se cumple que $[d, ad_L x] = ad_L d(x)$. El conjunto formado por todas las derivaciones internas de L, Inner $L = \{\mathrm{ad}_L x | x \in L\}$. La igualdad $[d, \mathrm{ad}_L x] = \mathrm{ad}_L d(x)$ nos dice que Inner L es un ideal de Der L. Además, usando (1.2) tenemos que Inner $L \cong L/Z(L)$.

---

[2]La exponencial de la adjunta se define como $exp(ad_L x) = 1 + ad_L x + \frac{(ad_L x)^2}{2} + \frac{(ad_L x)^3}{3!} + \frac{(ad_L x)^4}{4!} + \ldots$

[3]Una aplicación lineal $f : A \to A$ se dice nilpotente si existe $n \geq 1$ tal que $f^n = 0$.

Definición 1.1.12. Sea L un álgebra de Lie. La *serie derivada de L* es la serie de ideales de la forma
$$L^{(1)} = L',\ L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] \text{ para } k \geq 2.$$
Además $L \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \dots$. Se dice que L es *resoluble* si $L^{(m)} = 0$ para algún $m \geq 1$. Al menor m tal que $L^{(m)} = 0$ (luego $L^{(m-1)} \neq 0$) se le dice *índice de resolubilidad de L.*

Definición 1.1.13. Sea L un álgebra de Lie. La *serie central descendente de L* es la serie de ideales de la forma
$$L^1 = L,\ L^k = [L, L^{k-1}] \text{ para } k \geq 2.$$
Además $L \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \dots$. Se dice que L es *nilpotente* si $L^m = 0$ para algún $m \geq 1$. Al menor m tal que $L^m = 0$ (luego $L^{m-1} \neq 0$) se le dice *índice de nilpotencia de L.*

Definición 1.1.14. Sea L un álgebra de Lie con centro $Z(L)$. Denotamos por $Z_1(L) = 0$ y sea $Z_i(L)$ el ideal de L tal que $Z(L/Z_{i-1}(L)) = Z_i(L)/Z_{i-1}(L)$ para $i \geq 2$. La *serie central ascendente de L* es la serie formada por los ideales anteriores. Además $Z_1(L) \subseteq Z_2(L) \subseteq Z_3(L) \subseteq \cdots \subseteq L$.

Observamos que L es nilpotente si y solo si $L = Z_m(L)$ para algún $m \geq 1$. En este caso, las series central ascendente y descendente tienen el mismo número de términos, que es igual al índice de nilpotencia de L.

Definición 1.1.15. Sea L un álgebra de Lie. Se llama *radical* de L a su ideal resoluble más grande, y se denota $R(L)$. Se llama *nilradical* de L y se denota por $N(L)$ al ideal de L que resulta de sumar todos los ideales nilpotentes de L.

Proposición 1.1.16. Sea un álgebra de Lie L con nilradical N. Se tiene que los términos N^i y $Z_i(N)$ de las series centrales descendente y ascendente de N son ideales de L.

Demostración. Veamos en primer lugar que $Z(N)$ es un ideal de L. Notar que esto es cierto si y solo si $[L, Z(N)] \subseteq Z(N)$. Es decir, bastaría con comprobar que para todo $a \in L$ y para todo $x \in Z(N)$ el producto de Lie $[a, x] \in Z(N)$. Esto es, que para todo $n \in N$ se cumpla $[[a, x], n] = 0$. Por la identidad de Jacobi
$$[[a, x], n] = -[[n, a], x] - [[x, n], a] = [[a, n], x] + [a, [x, n]] = 0,$$
puesto que $[[a, n], x] = 0$ porque $x \in Z(N)$, $[a, n] \in N$ por ser ideal y $[x, n] = 0$ ya que $x \in Z(N)$ y $n \in N$. Sea I un ideal de L tal que $I \subseteq N$. Dado que N es el ideal nilpotente más grande y que N/I es ideal del álgebra L/I, tenemos que $N(L/I) = N/I$, y consecuentemente que $Z(N/I)$ es ideal de L/I. Gracias a este hecho, y a que los ideales de L/I son de la forma B/I con B ideal de L que contiene a I, usando la definición de $Z_i(N) = \frac{Z_i(N)}{Z_{i-1}(N)} = Z(N/Z_{i-1}(N))$ por recursividad llegamos a que $Z_i(N)$ es ideal.

Veamos ahora que los términos N^i son ideales de L. Notar que $N^2 = [N, N]$ es ideal de L si y solo si $[[N, N], L] \subseteq [N, N]$. Esto es cierto gracias a la identidad de Jacobi pues $[[N, N], L] = [[N, L], N] + [[L, N], N]$ y $[N, L] \subseteq N$ por ser N ideal. Recursivamente y de forma análoga, se prueba que N^i es ideal de L utilizando en cada caso que $[N^{i-1}, N] = N^i$ y que N^{i-1} es ideal de L. □

Además, se puede probar que *todo ideal de N tiene intersección no trivial con $Z(N)$*.

Definición 1.1.17. Un álgebra de Lie no nula L, se dice que es *semisimple* si no tiene ideales resolubles distintos de cero, o equivalentemente, si $R(L) = 0$. Además se dice que L es simple si no tiene ideales propios y $L^2 \neq 0$.

Proposición 1.1.18. Toda álgebra de Lie semisimple de dimensión finita se puede expresar de forma única como suma directa de ideales que, como álgebras de Lie, son simples. De este modo, si S es semisimple y descompone en suma de n ideales, $S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, los ideales de S son de la forma $S_{i_1} \oplus \cdots \oplus S_{i_t}$ para $1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq n$. Por tanto, el número de ideales de S es 2^n.

Sobre cuerpos algebraicamente cerrados las álgebras de Lie simples [4] salvo isomorfismos se describen en el siguiente resultado.

Teorema 1.1.19. *Con cinco excepciones todo álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo* $\mathbb{F}$ *algebraicamente cerrado es isomorfa a una de las* álgebras de Lie clásicas*, que son* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$*,* $\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ *y* $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$*. Las cinco álgebras de Lie excepcionales son conocidas como* E_6, E_7, E_8, F_4 *y* G_2*.*

Veamos ahora cómo son las álgebra de Lie simples clásicas llamadas así porque se pueden modelizar de forma natural como subálgebras de $\mathfrak{gl}(n,L)$. Las excepcionales son más complicadas y exceden a los objetivos de este trabajo.

En primer lugar $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ está formada por el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ de traza 0 y se denomina *álgebra especial lineal.*

Las otras dos familias se pueden construir como subálgebras de tipo $\mathfrak{gl}_S(n,\mathbb{F})$ para alguna matriz $S \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ como vimos en el Ejemplo 1.1.5.

Las álgebras $\mathfrak{so}(n,\mathbb{F})$ se dicen *ortogonales lineales.* Para su definición distinguimos dos casos dependiendo de la paridad de n. Si $n = 2l$, la matriz que usaremos es la matriz ortogonal simétrica $S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$. Al imponer la condición $x^tS + Sx = 0$, llegamos a la siguiente descripción detallada de sus elementos:

$$\mathfrak{so}(2l,\mathbb{F}) = \{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} : A_1^T = -A_4, A_2^T = -A_2, A_3^T = -A_3\}.$$

Si $n = 2l+1$, se toma $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$. En este caso las matrices que integran el álgebra ortogonal son de la forma:

$$\mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{F}) = \{\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & A_1 & A_2 \\ \alpha_3 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} : A_1^T = -A_4, A_2^T = -A_2, A_3^T = -A_3, \alpha_3 = -\alpha_2^T, \alpha_4 = -\alpha_1^T\}.$$

Las álgebras de Lie $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{F})$ se definen solo para $n = 2l$. Se pueden modelizar usando la matriz ortogonal antisimétrica $S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$ y las matrices que la integran son de la forma:

$$\mathfrak{sp}(2l,\mathbb{F}) = \{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} : A_1^T = -A_4, A_2^T = A_2, A_3^T = A_3\}.$$

Estas álgebras de Lie se conocen como *álgebras simplécticas.*

Los dos últimos teoremas clásicos en Teoría de Lie reducen la clasificación de las álgebras de Lie a la clasificación de semisimples y resolubles y y plantean la necesidad de la teoría de representación.

Teorema 1.1.20. (Teorema de Levi) *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero. Entonces existe una subálgebra semisimple $S \subseteq L$ tal que $L = S \oplus R$, donde R es el radical de L.*

Se denomina *descomposición de Levi* a la descomposición anterior $L = S \oplus R$ y *factor de Levi de L* al álgebra semisimple S. Notar que el radical resoluble es único pero los factores de Levi no. Además dos factores de Levi de un álgebra de Lie L son isomorfos como consecuencia del Teorema 1.1.21. Más aún, para S_1 álgebra de Lie semisimple, existe f =exp (ad z) homomorfismo interno tal que $f(S_1) \subseteq S$ donde S es un factor de Levi. Este Teorema establece que cualquier álgebra de Lie semisimple de un álgebra de Lie se puede sumergir en un factor de Levi.

Teorema 1.1.21. (Malcev-Harish-Chandra) *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero con descomposición de Levi $L = S \oplus R(L)$. Para cualquier subálgebra semisimple S_1 de L, siempre existe un φ automorfismo interno de L, tal que $\varphi(S_1) \subseteq S$.*

1.2. Teoría de representación

La Teoría de representación juega un papel central en la Teoría de Lie. En un nivel de iniciación, que es el que precisamos, los métodos que se necesitan están basados en Álgebra Lineal. Los

[4] La clasificación fue dada por W. Killing a finales del S. XIX. Además de las clásicas, inicialmente Killing proporcionó 6 excepcionales, dos de ellas eran la misma álgebra con apariencia distinta.

resultados que incluimos en esta sección aparecen en el Capítulo 7 de [1] y han sido completados con [2]. En la parte final incluimos las nociones de transvección e identidad de Gordan que aparecen en [3].

Definición 1.2.1. Sea L un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una *representación de* L es un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V),$$

donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$. Si φ es una aplicación inyectiva, equivalentemente, $Ker\varphi = \{0\}$ la representación se dice que es *fiel*.

Ejemplo 1.2.2. Sea L un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Veamos algunos ejemplos de representaciones conocidas.

a) La aplicación ad: $L \to \mathfrak{gl}(L)$ es una representación de L, que se dice *representación adjunta de* L.

b) Si L es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ la aplicación inclusión $i : L \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación y se conoce como *representación natural de* L.

c) Se define la *representación trivial de* L como $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(\mathbb{F})$ donde $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in L$.

d) Las representaciones 1-dimensionales de las álgebras de Lie semisimples son triviales.

□

Las representaciones permiten construir nuevas álgebras de Lie a partir de viejas. Dada una representación $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$, en el espacio vectorial suma directa de L y V, $\mathcal{L}(L, V, \varphi) = L \oplus_\varphi V$ el producto ($s, s' \in L,\ v, w \in V$)

$$< s + v, s' + w >_\varphi = [s, s'] + \varphi(s)(w) - \varphi(s')(v)$$

define una estructura de álgebra de Lie llamada *extensión escindida nula de* L *y* V. Observamos que V es un ideal abeliano de $\mathcal{L}(L, V, \varphi)$. En el caso particular de que L sea semisimple, L es un factor de Levi y V es el radical resoluble de $\mathcal{L}(L, V, \varphi)$ que es nilpotente.

Definición 1.2.3. Sea L un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Un *L-módulo* o *módulo de* L es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V junto con una aplicación bilineal

$$L \times V \to V \qquad (x, v) \to x \cdot v$$

satisfaciendo la condición

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot y) \text{ para todo } x, y \in L \text{ y } v \in V.$$

Dado un L-módulo V se puede obtener su *representación asociada* $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ imponiendo $\varphi(x)(v) = x \cdot v$ para todo $x \in L, v \in V$. Recíprocamente, dada una representación $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ la aplicación bilineal $L \times V \to V$ con $x \cdot v = \varphi(x)(v)$ define una estructura de módulos sobre V. Por tanto, representación y L-módulo son un mismo concepto con dos presentaciones distintas.

Definición 1.2.4. Sea L un álgebra de Lie, U y V dos L-módulos. Una aplicación lineal $\theta : U \to V$ es un *homomorfismo de L-módulos* si

$$\theta(x \cdot u) = x \cdot \theta(u) \text{ para todo } u \in U \text{ y } x \in L.$$

Como cabe esperar, un homomorfismo de L-módulos biyectivo es un *isomorfismo*.

Definición 1.2.5. Sea un álgebra de Lie L y V un módulo de L. Un *submódulo* de V es un subespacio vectorial $W \subseteq V$ que es L-invariante, es decir, $x \cdot w \in W$ para todo $x \in L, w \in W$.

Usando pares de módulos o módulos y submódulos, es posible construir nuevos módulos mediante sumas, productos tensoriales y cocientes.

Definición 1.2.6. El *producto tensor*[5] de dos espacios vectoriales V y W sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, es un espacio vectorial $V \otimes W$ junto con una aplicación bilineal

$$\varphi : V \times W \to V \otimes W, \ (v, w) \to v \otimes w,$$

que es universal: para cualquier aplicación bilineal $\beta : V \times W \to U$ sobre un espacio vectorial U, existe una única aplicación lineal de $V \otimes W$ en U y que lleva $v \otimes w$ a $\beta(v, w)$.

Definición 1.2.7. La *potencia* $\Lambda^2 V$ *exterior* 2*-alternada*[6] de un espacio vectorial V viene dada por una aplicación bilineal alternante

$$\varphi : V \times V \to \Lambda^2 V, \ (v_1, v_2) \to v_1 \wedge v_2,$$

que es universal. Esto es, para cualquier $\beta : V \times V \to U$ aplicación bilineal alternante, hay una única aplicación lineal de $\Lambda^2 V$ en U que lleve $v_1 \wedge v_2$ en $\beta(v_1, v_2)$.

Dados V y W L-módulos sobre el espacio vectorial $V \otimes W$ podemos definir una estructura de L-módulo de la forma:

$$x \circ (v \otimes w) = (x \cdot v) \otimes w + v \otimes x \bullet w$$

donde $x \cdot v$ y $x \bullet w$ son las representaciones de V y W respectivamente. Si $V = W$, el espacio vectorial 2-alternado $\Lambda^2 V$ se puede ver como submódulo del producto tensor $\otimes^2 V$.

Definición 1.2.8. Sea L un álgebra de Lie, y sea W un submódulo de un L-módulo V. Se puede dar estructura de L-módulo al espacio vectorial cociente V/W definiendo la operación

$$x \cdot (v + W) := (x \cdot v) + W \text{ para } x \in L \text{ y } v \in V.$$

A este L-módulo se le dice *cociente* de V por W.

Definición 1.2.9. Sea V un módulo no nulo. Se dice que V es *irreducible* si no posee submódulos propios, en caso contrario se dice que V es *reducible*. Finalmente, se dice que V es *completamente reducible* cuando puede ser descompuesto como suma directa de módulos irreducibles.

Definición 1.2.10. Se dice que un L-módulo V es indescomponible si no existen dos submódulos propios U y W tales que $V = U \oplus W$.

Teorema 1.2.11. (Teorema de Weyl) *Los módulos de un álgebra de Lie semisimple sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero son completamente reducibles. Es más, el número de módulos irreducibles de cualquier descomposición en suma de irreducibles es invariante y, salvo reordenación, los módulos que aparecen son isomorfos.*

Finalmente establecemos el primer Teorema de isomorfía para módulos y el Lema de Schur.

Lema 1.2.12. Sea $\theta : U \to V$ un homomorfismo de L-módulos para un álgebra de Lie L.

a) $Ker\ \theta$ es un submódulo de U y $Im\ \theta$ es un submódulo de V.

b) $V/Ker\ \theta$ es isomorfo a $Im\ \theta$.

Teorema 1.2.13. (Lema de Schur) *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ algebraicamente cerrado. Sean U y V L-módulos irreducibles.*

a) Un homomorfismo de L-módulos $\theta : U \to V$ que no es nulo es un isomorfismo.

b) Si el cuerpo es algebraicamente cerrado, una aplicación lineal $\theta : V \to V$ es un homomorfismo de L-módulos si y solo si $\theta = \lambda 1_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$.

[5]El *producto tensor* de n espacios vectoriales $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ se puede definir para cualquier $n \geq 2$ de forma universal, análogamente a lo hecho para el caso $n = 2$.

[6]La *potencia exterior n-alternada* $\Lambda^n V$ de un espacio vectorial V se puede definir para cualquier $n \geq 2$ de forma universal, análogamente a lo hecho para el caso $n = 2$.

1.2.1. Representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

El álgebra simple clásica de menor tamaño es el álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ [7] especial lineal de matrices 2×2. Una base para este álgebra es la formada por las matrices e, f, h :

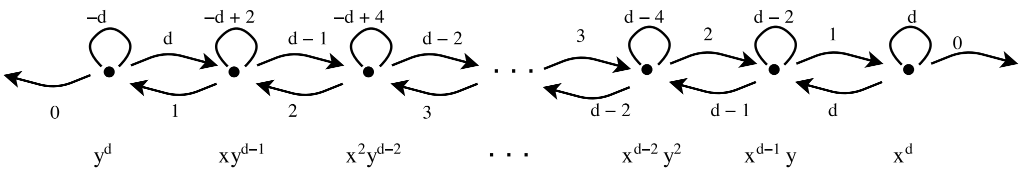
$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El corchete de Lie queda determinado entonces por $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$.

Considerando el espacio vectorial $\mathbb{F}[x, y]$ de polinomios en dos indeterminadas x, y con coeficientes en $\mathbb{F}$, se denota por V_d al subespacio de polinomios homogéneos de grado d. Notar que entonces V_0 es el espacio vectorial de polinomios constantes, esto es $V_0 = \mathbb{F} \cdot 1$. Para $d \geq 1$, V_d tiene como base $\{x^d, x^{d-1}y, \ldots, xy^{d-1}, y^d\}$ y, por tanto, la dimensión de V_d es $d + 1$. Además, la aplicación lineal $\varphi_d : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \to \mathfrak{gl}(V_d)$ definida como

$$\varphi_d(e) = x\frac{\partial}{\partial y},\ \varphi_d(f) = y\frac{\partial}{\partial x},\ \varphi_d(h) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

es una representación de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Mediante esta representación, los subespacios V_d pueden ser vistos como $\mathfrak{sl}_2$-módulos. Además V_d es un $\mathfrak{sl}_2$-módulo irreducible para todo $d \geq 0$. Una forma eficaz de presentar la representación φ_d de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ sobre el modulo V_d la proporciona el diagrama inferior. En este diagrama las flechas a derecha se refieren a $\varphi_d(e)$, esto es, el efecto sobre los distintos $x^i y^j$ de la base V_d. Las flechas que van a izquierda se refieren a $\varphi_d(f)$, y las flechas que salen y entran al mismo nodo hacen referencia a $\varphi_d(h)$.



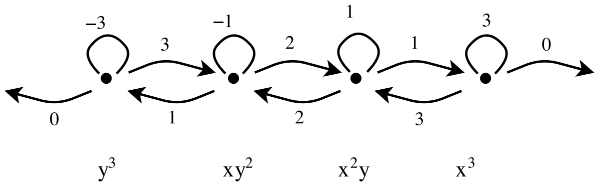
Ejemplo 1.2.14. El $\mathfrak{sl}_2$-módulo V_3 tiene base $\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$. Veamos cómo actúa la representación $\varphi_3 : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \to \mathfrak{gl}(V_3)$ descrita con cada uno de los elementos de la base. Para ello se deben usar $\varphi_d(e)$, $\varphi_d(f)$ y $\varphi_d(h)$, notando que $\varphi_d(x)(v) = x \cdot v$:

$$e \cdot x^3 = x\frac{\partial(x^3)}{\partial y} = 0,\ e \cdot x^2y = x^3,\ e \cdot xy^2 = 2x^2y,\ e \cdot y^3 = 3xy^2$$

$$f \cdot x^3 = y\frac{\partial(x^3)}{\partial x} = 3x^2y,\ f \cdot x^2Y = 2xy^2,\ f \cdot xy^2 = y^3,\ f \cdot y^3 = 0$$

$$h \cdot x^3 = x\frac{\partial(x^3)}{\partial x} - y\frac{\partial(x^3)}{\partial y} = 3x^3,\ h \cdot x^2y = x^2y,\ h \cdot xy^2 = -xy^2,\ h \cdot y^3 = -3y^3$$

Lo que nos lleva al diagrama:



[7] El espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto corchete $[u, v] = u \wedge v$ es un $\mathbb{R}$-álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, el apartado *b)* del Lema 1.2.13 sigue siendo válido si $\mathbb{F}$ arbitrario.

Lema 1.2.15. Sea V un $\mathfrak{sl}_2$-módulo finito-dimensional e irreducible sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ arbitrario de característica 0. Una aplicación $\theta : V \to V$ es un *homomorfismo de* $\mathfrak{sl}_2$*-módulos* si y solo si θ es un múltiplo escalar de la transformación identidad; esto es, $\theta = \lambda 1_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$.

El siguiente resultado nos permite descomponer el módulo producto tensor de dos $\mathfrak{sl}_2$-módulos en suma de irreducibles.

Lema 1.2.16. Sea $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ álgebra de Lie simple. Sean V_n y V_m $\mathfrak{sl}_2$-módulos irreducibles con $m \leq n$. Se conoce como *fórmula de Clebsch-Gordan* a la descomposición

$$V_n \otimes_{\mathbb{F}} V_m \cong V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus \ldots \oplus V_{n-m}.$$

La 2-potencia alternada descompone en la forma: $\Lambda^2 V_n = \oplus V_{2n-2k}$ para $k \leq n$ impar.

Notación 1.2.17. Para un $\mathfrak{sl}_2$-módulo irreducible V_d consideraremos como base el conjunto $\mathcal{B}(V_d) := \{v_0 := x^d, v_1 := x^{d-1}y, \ldots, v_d := y^d\}$. □

El conjunto formado por todos los homomorfismos de S-módulos es un espacio vectorial con las operaciones naturales de suma de aplicaciones lineales y producto por un escalar. El Lema 1.2.13 garantiza que para dos S-módulos irreducibles V y W sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{F}$ se tiene que

$$dim\ Hom_S(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \cong W \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo cuando se trata de representaciones de $S = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ la restricción de que el cuerpo sea algebraicamente cerrado no es necesaria como asegura el Lema 1.2.15. Con este resultado, la definición de producto tensor, y la descomposición del mismo dada en el Lema 1.2.16 se concluye que $Hom_S(V_n \otimes_{\mathbb{F}} V_m, V_{n+m-2q})$ es un espacio vectorial de dimensión 1. Por tanto, para describir este subespacio en estos casos solamente será necesario encontrar un homomorfismo no nulo, puesto que los demás serán múltiplos de este por un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$. Para determinar homomorfismos no nulos disponemos de unas aplicaciones lineales llamadas transvecciones que son introducidas en la Definición 1.2.18.

Definición 1.2.18. La *k-transvección* es una aplicación $(\cdot\ ,\ \cdot)_k : V_n \times V_m \to V_{n+m-2k}$ que se describe mediante la expresión:

$$(f, g)_k = \frac{(m-k)!}{m!} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \frac{\partial^k g}{\partial x^i \partial y^{k-i}},$$

donde $0 \leq k \leq n$, con $n \leq m$. Conviene remarcar que en el caso $k = 0$, $(f, g)_0$ es el producto usual de polinomios.

Las transvecciones son bilineales gracias a la linealidad de las derivadas parciales. Por tanto, usando la propiedad universal del producto tensor podemos, sin pérdida de generalidad, considerar $(\cdot\ ,\ \cdot)_k : V_n \otimes V_m \to V_{n+m-2k}$. Usando la acción por derivación de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ sobre V_n, V_m y V_{n+m-2k}, tenemos que dado $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, $f \in V_n$ y $g \in V_m$ se cumple la identidad $x \bullet (f, g)_k = (x \cdot f, g)_k + (f, x \cdot g)_k$. Esto implica que $(\cdot\ ,\ \cdot)_k$ es un homomorfismo de $\mathfrak{sl}_2$-módulos de $V_n \otimes V_m$ en V_{m+n-2k} usando la Definición 1.2.6 de módulo producto tensor y da una demostración del apartado *a)* del Lema 1.2.19. A continuación enunciamos dicho Lema, que contiene además otras propiedades de las transvecciones, probadas en [3], que nos serán de gran utilidad más adelante.

Lema 1.2.19. Sea $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ álgebra de Lie simple. Sean V_n y V_m $\mathfrak{sl}_2$-módulos irreducibles con $m \leq n$, de polinomios homogéneos de grados n y m,

a) Para cada $0 \leq k \leq m$, la k-ésima transvección $(\cdot\ ,\ \cdot)_k : V_n \otimes_{\mathbb{F}} V_m \to V_{n+m-2k}$ es un homomorfismo de $\mathfrak{sl}_2$-módulos.

b) En el caso $n = m$, la k-ésima transvección proporciona un homomorfismo simétrico si k es par y antisimétrico en el caso k impar, es decir $(a, b)_k = (-1)^k (b, a)$.

c) El conjunto $\mathcal{H}_{n,m,s} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})}(V_n \otimes V_m, V_s)$ tiene dimensión ≤ 1. Más aún,

$$\mathcal{H}_{n,m,s} = \begin{cases} \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\langle(\cdot\ ,\ \cdot)_k\rangle & \text{si } s = n+m-2k, 0 \leq k \leq m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tan importante como las transvecciones, la segunda herramienta que será de utilidad en el Capítulo 2 de la memoria nos la proporciona la siguiente definición.

Definición 1.2.20. Sean $f \in V_n$, $g \in V_m$ y $h \in V_p$, y sean α_1, α_2 y α_3 enteros no negativos que verifican que $\alpha_1 + \alpha_2 \leq p$, $\alpha_2 + \alpha_3 \leq m$, $\alpha_3 + \alpha_1 \leq n$, con $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_2 + \alpha_3 = m$. Entonces se cumple que:

$$\sum_{i \geq 0} \frac{\binom{n-\alpha_1-\alpha_3}{i}\binom{\alpha_2}{i}}{\binom{m+n-2\alpha_3-i+1}{i}}((f,g)_{\alpha_3+i}, h)_{\alpha_1+\alpha_2-i} = (-1)^{\alpha_1} \sum_{i \geq 0} \frac{\binom{p-\alpha_1-\alpha_2}{i}\binom{\alpha_3}{i}}{\binom{m+p-2\alpha_2-i+1}{i}}((f,h)_{\alpha_2+i}, h)_{\alpha_1+\alpha_3-i}.$$

La identidad que aparece en 1.2.20 aparece en la Introducción de [3], se conoce en la literatura como *identidad de Gordan* y se denota tradicionalmente en la forma:

$$\begin{pmatrix} f & g & h \\ m & n & p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Sean V_n y V_m dos módulos irreducibles del álgebra de Lie simple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ con $m \leq n$. Recordamos que una k-transvección tendrá sentido si k es un entero tal que $0 \leq k \leq m$. Para $f \in V_n$ y $g \in V_m$, el Cuadro 1.1 recoge la fórmula para las k-transvecciones con $0 \leq k \leq 6$ que utilizaremos en el Capítulo 2. En el Cuadro 1.2 se recogen algunas de las identidades de Gordan que también se utilizarán en el Capítulo 2. En dichas identidades se consideran $f, g, h \in V_n$ para algún $n \geq 0$.

Cuadro 1.1: Fórmulas de las k-transvecciones con $0 \leq k \leq 6$

Fórmula de la k-transvección
$(f,g)_0 = fg$
$(f,g)_1 = \frac{1}{m}\frac{1}{n}(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x})$
$(f,g)_2 = \frac{1}{m(m-1)}\frac{1}{n(n-1)}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2})$
$(f,g)_3 = \frac{(m-3)!}{m!}\frac{(n-3)!}{n!}(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^3 g}{\partial y^3} - 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial^3 g}{\partial x\partial y^2} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial^3 g}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial^3 g}{\partial x^3})$
$(f,g)_4 = \frac{(m-4)!}{m!}\frac{(n-4)!}{n!}(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\frac{\partial^4 g}{\partial y^4} - 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\frac{\partial^4 g}{\partial x\partial y^3} + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2} - 4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\frac{\partial^4 g}{\partial x^3\partial y} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\frac{\partial^4 g}{\partial x^4})$
$(f,g)_5 = \frac{(m-5)!}{m!}\frac{(n-5)!}{n!}(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\frac{\partial^5 g}{\partial y^5} - 5\frac{\partial^5 f}{\partial x^4\partial y}\frac{\partial^5 g}{\partial x\partial y^4} + 10\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}\frac{\partial^5 g}{\partial x^2\partial y^3} - 10\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}\frac{\partial^5 g}{\partial x^3\partial y^2} +$ $+5\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}\frac{\partial^5 g}{\partial x^4\partial y} - \frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\frac{\partial^5 g}{\partial x^5})$
$(f,g)_6 = \frac{(m-6)!}{m!}\frac{(n-6)!}{n!}(\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\frac{\partial^6 g}{\partial y^6} - 6\frac{\partial^6 f}{\partial x^5\partial y}\frac{\partial^6 g}{\partial x\partial y^5} + 15\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}\frac{\partial^6 g}{\partial x^2\partial y^4} - 20\frac{\partial^6 f}{\partial x^3\partial y^3}\frac{\partial^6 g}{\partial x^3\partial y^3} +$ $+15\frac{\partial^6 f}{\partial x^2\partial y^4}\frac{\partial^6 g}{\partial x^4\partial y^2} - 6\frac{\partial^6 f}{\partial x\partial y^5}\frac{\partial^6 g}{\partial x^5\partial y} + \frac{\partial^6 f}{\partial y^6}\frac{\partial^6 g}{\partial x^6})$

Cuadro 1.2: Algunas identidades de Gordan

Identidad de Gordan
$\begin{pmatrix} f & g & h \\ n & n & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $((f,g)_1,h)_0 = \frac{1}{2}((f,h)_1,g)_0 + ((f,h)_0,g)_1$ para $n \geq 1$
$\begin{pmatrix} f & g & h \\ n & n & n \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $\frac{1}{2}((f,g)_2,h)_0 + ((f,g)_1,h)_1 = \frac{1}{2}((f,h)_2,g)_0 + ((f,h)_1,g)_1$ para $n \geq 2$
$\begin{pmatrix} f & g & h \\ n & n & n \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$: $((f,g)_2,h)_2 + ((f,g)_3,h)_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{(2n-5)(2n-6)}((f,g)_4,h)_0 = ((f,h)_1,g)_1 + ((f,h)_3,g)_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{(2n-5)(2n-6)}((f,h)_4,g)_0,$ para $n \geq 4$
$\begin{pmatrix} f & g & h \\ n & n & n \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$: $((f,g)_3,h)_1 + \frac{1}{2}((f,g)_4,h)_0 = ((f,h)_1,g)_3 + \frac{3}{2}((f,h)_2,g)_2 + \frac{3(n-1)}{2(2n-3)}((f,h)_3,g)_1 + \frac{(n-1)}{4(2n-5)}((f,h)_4,g)_0,$ para $n \geq 4$
$\begin{pmatrix} f & g & h \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: $((f,g)_2,h)_2 = -\frac{1}{2}((f,h)_2,g)_2 + ((f,h)_1,g)_3$
$\begin{pmatrix} f & g & h \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$: $((f,g)_3,h)_4 = \frac{1}{2}((f,h)_3,g)_4 + ((f,h)_2,g)_5$
$\begin{pmatrix} f & g & h \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$: $((f,g)_4,h)_4 = \frac{2}{7}((f,h)_4,g)_4 + ((f,h)_3,g)_5 + ((f,h)_2,g)_6$

1.3. Retículos de ideales de álgebras de Lie

El último ingrediente que necesitamos para abordar el problema objeto del trabajo es la noción de *retículo de ideales* en álgebras de Lie.

En teoría de conjuntos, un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ en el cual, para cada par de elementos, existen un supremo[8] y un ínfimo[9]. Si denotamos por $\mathcal{L}(L)$ el conjunto de ideales de un álgebra de Lie L, observamos que este conjunto es parcialmente ordenado mediante la inclusión. Además, como la suma e intersección de ideales es un ideal, para cada par de ideales I y J, el ideal suma $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ es un supremo y el ideal intersección un ínfimo. Por tanto, el conjunto de ideales de cualquier álgebra de Lie tiene estructura de retículo.

Cuando el álgebra de Lie tiene un número finito de ideales, el conjunto $\mathcal{L}(L)$ tiene asociado un *Diagrama de Hasse*, que es una representación gráfica simplificada de $\mathcal{L}(L)$ mediante aristas y nodos. Los ideales se representan mediante nodos y se dibuja una arista ascendente entre dos ideales solo si uno de los ideales está contenido en el otro, sin haber otros ideales intermedios.

En general, el retículo de ideales de un álgebra de Lie no tiene por qué ser finito. Si consideramos un álgebra de Lie abeliana 2-dimensional, $L_{x,y} = \mathbb{F}{\cdot}x \oplus \mathbb{F}{\cdot}y$, los ideales son los subespacios vectoriales y, si el cuerpo base es infinito, la familia uniparamétrica de subespacios $I(\lambda) = \mathbb{F} < x + \lambda y >$ proporciona una familia infinita de ideales. Por tanto, $\mathcal{L}(L_{x,y})$, no es finito.

Ejemplo 1.3.1. El retículo de ideales del álgebra de Lie trivial $L = 0$ es el que aparece en el apartado I del Cuadro 1.3. El álgebra de Lie 1-dimensional $L = \mathbb{F} \cdot x$ tiene como ideales a 0 y L. Por tanto, su retículo de ideales es la 2-cadena del apartado II del Cuadro 1.3. Las álgebras simples tienen el mismo retículo de ideales que la abeliana 1-dimensional. Las álgebras de Lie semisimples que descomponen como suma de dos ideales simples tienen exactamente $2^2 = 4$ ideales conforme a la Proposición 1.1.18. Por tanto, su retículo de ideales coincide con IV(b) del Cuadro 1.3. Las álgebras suma directa de ideal abeliano 1-dimensional e ideal simple también tiene como retículo IV(b). □

Los comentarios y ejemplos previos nos dicen que los retículos de ideales no son finitos y que determinan parcialmente la estructura del álgebra. Ahora bien, ¿qué restricciones hay que imponer

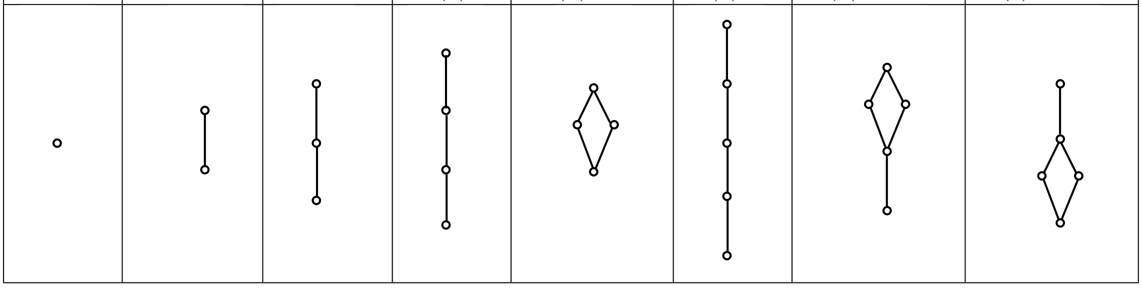
[8]Para cada dos a y b elementos de L existe un único elemento c de L que cumple que $c \geq a$ y $c \geq b$ siendo el más pequeño que cumple esta condición.

[9]Para cada dos a y b elementos de L existe un único elemento c de L que cumple que $c \leq a$ y $c \leq b$ siendo el más grande que cumple esta condición.

a un álgebra de Lie L para que su retículo de ideales sea finito? Y, en tal caso, ¿qué posibles diagramas de Hasse $\mathcal{L}$ de $n \geq 3$ nodos pueden aparecer como retículos de ideales para un álgebra de Lie L? La segunda pregunta para $n \leq 5$ se responde en el siguiente lema, de sencilla demostración, que aparece en [8, Lemma 2.1].

Lema 1.3.2. Sea L un álgebra de Lie tal que $\mathcal{L}(L)$ es un retículos de n elementos con $1 \leq n \leq 5$. Entonces, $\mathcal{L}(L)$ es uno de los retículos mostrados en el Cuadro 1.3.

I	II	III	IV(a)	IV(b)	V(a)	V(b)	V(c)



$\{0\}$	$\diamond\mathbb{F}\cdot x$ $\diamond S$ simple			$\diamond\mathbb{F}\cdot x \oplus S_1$ $\diamond S_2 \oplus S_3$ S_i simples		$L = A \oplus V$; $A = \mathbb{F}\cdot x \oplus S_1$ o $A = S_2 \oplus S_3$ y V ideal abeliano A-irreducible	$L = B \oplus V$; $B = \mathbb{F}\cdot x$ o $B = S$ y V 2-irreducible ideal abeliano
Álgebras de Lie asociadas							

Cuadro 1.3: Retículos de ideales para álgebras de Lie con hasta 5 ideales y álgebras asociadas.

En [8, Theorem 2.3], se describe además la estructura de todas las álgebras de Lie con, a lo más, 5 ideales y se trabaja el problema de su existencia mediante construcciones explícitas. Si exclúimos los retículos de ideales de tipo I, II, III, IV(a) y V(a), tenemos que:

- Las álgebras de Lie que tienen retículo de ideales de tipo IV(b) son suma directa de dos ideales simples ó suma directa de un ideal de dimensión 1 y un ideal simple.
- Las álgebras de Lie que tienen retículo de ideales de tipo V(b) descomponen en la forma $L = V \oplus S$ donde V es un ideal abeliano no nulo, S es un álgebra de Lie como descrita en el botón anterior y V, como subespacio $ad_L S$-invariante que es, tiene estructura de S-módulo y debe ser irreducible y fiel.
- Las álgebras de Lie que tienen retículo de ideales de tipo V(c) descomponen en la forma $L = V \oplus S$ donde V es un ideal abeliano no nulo, S es un álgebra de Lie simple o de dimensión 1. Como subespacio $ad_L S$-invariante que es, V tiene estructura de S-módulo y debe descomponer en suma directa de dos submódulos irreducibles, fieles y no isomorfos.

Las álgebras con retículos de tipo V(b) y V(c) son extensiones escindidas nulas de un álgebra de Lie por un módulo. Las extensiones escindidas nulas son las ejemplos más naturales de álgebras de Lie no resolubles y no semisimples.

Cuando un retículo de ideales $\mathcal{L}$ está completamente ordenado mediante la inclusión, se dice que es una *cadena de ideales* (n-cadena si el número de ideales es exactamente n). Los retículos de ideales de tipo I, II, III, IV(a) y V(a) son n-cadenas con $1 \leq n \leq 5$. En [6] se estudia el problema de determinar la estructura de un álgebra de Lie cuyo retículo de ideales es una cadena y se clasifican las álgebras resolubles de este tipo sobre cuerpos algebraicamente cerrados mediante bases y tablas de multiplicar. En el Capítulo 2 trabajaremos las construcciones explícitas de álgebras no resolubles cuyos ideales son n-cadenas con $n = 3, 4, 5$.

Capítulo 2

Álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena

En este capítulo nos centraremos en el análisis de la estructura y en construcciones derivadas de la misma para el caso de álgebras no resolubles con cadenas de $3, 4$ y 5 ideales. Este es el objetivo de la sección 2.1. Los ejemplos de la sección 2.2, nos conducen a la sección 2.3 donde se trabajan las construcciones explícitas de álgebras con cadenas de 5-ideales y factor de Levi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Mediante el uso de las transvecciones y las identidades de Gordan introducidas en la subsección 1.2.1 del Capítulo 1, hemos implementado un programa (ver anexo) en Mathematica que permite definir productos binarios comprobando si la identidad de Jacobi es satisfecha o no. Mediante el programa hemos construído múltiples ejemplos de álgebras de Lie con 5-ideales. El estudio de las características de los distintos ejemplos nos ha llevado a la demostración de una serie de lemas generales sobre condiciones de existencia de álgebras con 5 ideales en cadena, que aparecen en la subsección 2.3.1, y a partir de ellos a la clasificación de las álgebras de Lie no resolubles con 5-ideales en cadena, con nilradical N tal que $\dim(N/N^2) \leq 7$ y factor de Levi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

2.1. Resultados genéricos.

Empezamos esta sección enunciando y probando un Teorema que describe el caso más pequeño, la clasificación de las álgebras de Lie no resolubles con 3 ideales.

Teorema 2.1.1. *Toda álgebra de Lie no resoluble con 3 ideales es una extensión escindida nula de un álgebra de Lie simple S con producto ss' y un S-módulo irreducible no trivial V. Esto es, si $\rho : S \to \mathfrak{gl}(V)$ es la representación de V, $L = S \oplus V$ con producto*

$$\langle s+v, s'+v'\rangle = ss' + \rho(s)(v') - \rho(s')(v), \text{ donde } s, s' \in S \text{ y } v, v' \in V.$$

En este caso, los ideales de L forman la cadena $0 < V < L$.

Demostración. Sea L álgebra de Lie con 3 ideales.

(1) Por el Teorema de Levi se puede descomponer L como $L = S \oplus R(L)$ donde $R(L)$ es el radical resoluble de L. Veamos entonces que R es un álgebra de Lie no nula y abeliana, es decir, $R(L) \neq 0$ y $R(L)^2 = 0$. Por comodidad denotaremos $R(L) = R$. Si $R = 0$, entonces o R es simple en cuyo caso tiene solo dos ideales, o R es semisimple con más de 3 ideales por 1.1.18.

Para ver que R es abeliana basta tener en cuenta que $R^2 \subseteq R$ y que R^2 es un ideal de L ya que, utilizando la identidad de Jacobi, se tiene:

$$[R^2, L] = [[R, R], L] = [[R, L], R] + [[L, R], R] \subseteq R^2.$$

Como los ideales de L son exactamente 3 con $R \neq 0$ y $R \neq L$, entonces o bien $R^2 = R$ o bien $R^2 = 0$. No se puede dar $R^2 = R$ puesto que R es el radical resoluble de L, consecuentemente $R^2 = 0$. Así queda probado que R es abeliana.

(2) Como R es un ideal de L, para cada $x \in L$ se tiene que $adx(a) = [x, a] \in R$ para todo $a \in R$. De esta forma, R es un S-módulo usando la representación adjunta de L restringida a R

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) &\to \mathfrak{gl}(R) \\ x &\longrightarrow ad_R x \end{aligned}$$

Veamos ahora que R es un S-módulo irreducible. Supongamos para ello que R es reducible, es decir, $R = V \oplus U$ con V y U submódulos propios. Se tiene que $[S, U] \subseteq U$ y que $[S, V] \subseteq V$. Luego U es ideal de L ya que $[L, U] = [S \oplus R, U] = [S, U] \oplus [R, U] \subseteq U$, pues $[R, U] \subseteq R^2 = 0$ y $[S, U] \subseteq U$ por ser submódulo. De forma análoga se prueba que V también es un ideal de L. Como $V \neq U$ se obtiene una contradicción puesto que en L tendríamos al menos 5 ideales $(0, L, U, V, R)$. Así, queda probado que R es un S-módulo, y es irreducible.

Veamos que R es no trivial. Si lo fuera S sería ideal de L ya que

$$[L, S] = [S \oplus R, S] = [S, S] \oplus [R, S] \subseteq S.$$

Pero este no puede ocurrir porque en L aparecen $\{0\}$, L, R y S como ideales lo que supone una contradicción. De este modo L es una extensión escindida nula de S y su radical R.

Finalmente si tomamos $L = S \oplus V$ extensión escindida nula de S y V irreducible, el álgebra tiene exactamente 3 ideales: $\{0\}$, V y L. En efecto, tomamos $0 \neq I$ ideal de L. Si $I \subseteq V$, por ser V irreducible, como I es S-submódulo, se tiene $I = V$. Si $I \nsubseteq V$ entonces o bien $I \cap V = V$ o bien $I \cap V = 0$ por irreducibilidad de V.

Si $I \cap V = V$, entonces V está contenido propiamente en I. De $V \subset I$, tenemos:

$$I = I \cap L = (I \cap V) \oplus (I \cap S) = V \oplus (I \cap S) = V \oplus S = L,$$

donde hemos tenido en cuenta que $0 \neq I \cap S = S$ porque $I \cap S$ es ideal de S y S es simple.

Si $I \cap V = 0$, entonces $I \oplus V \subseteq L$, luego $(I \oplus V) \cap S$ es ideal de S. Ahora, o bien $(I \oplus V) \cap S = 0$, en cuyo caso $I \oplus V \oplus S \subseteq L$, que es absurdo, o bien $(I \oplus V) \cap S = S$. En este caso $S \subseteq I \oplus V$ y consecuentemente $S \oplus V \subseteq I \oplus V \subseteq L$ que implica $L = I \oplus V$. Pero como $L = L^2 = I^2 \oplus [I, V] \oplus V^2 = I^2 \subseteq I$ se llega a una contradicción.

En efecto $L = L^2$ ya que

$$L^2 = [S \oplus V, S \oplus V] = [S, S] \oplus [S, V] \oplus [V, S] \oplus [V, V] = S \oplus V.$$

En la última igualdad basta tener en cuenta que $S^2 = S$ y $[S, V] = V$ por ser $[S, V]$ S-submódulo de V que es irreducible y $[S, V] \neq 0$. $\square$

Comentarios 2.1.2. De acuerdo con [8], las álgebras de Lie resolubles con exactamente 3-ideales son extensiones escindidas nulas $L = V \oplus \mathbb{F} \cdot x$ de un espacio vectorial V y un álgebra de Lie 1-dimensional $\mathbb{F} \cdot x$. El espacio vectorial V es un ideal abeliano, luego los productos no nulos de L están determinados por $ad_L\ x : V \to V$, que como transformación lineal, debe ser inyectiva y tal que V sea un subespacio $ad_L\ x$-irreducible. Esta última condición equivale a que el polinomio mínimo y el característico de $ad_L\ x$ coincidan y sea un irreducible en el anillo de polinomios $\mathbb{F}[X]$. Como $f = ad_L\ x \in \text{End}\ (V)$, el producto en estas álgebras está definido en la forma general ($\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ y $v, w \in V$):

$$< v + \lambda f, w + \mu f >= \lambda f(w) - \mu f(v).$$

acorde con la expansión del producto del caso no resoluble que aparece en el Teorema 2.1.1 si identificamos $\mathbb{F} \cdot x$ con la subálgebra (abeliana) $S = \mathbb{F} \cdot f$ de $\text{End}(V)^-$ y la acción $\rho : S \to \mathfrak{gl}(V)$ donde ρ es la inclusión. $\square$

De acuerdo con [6, Teorema 2.2], las álgebras de Lie no resolubles cuyo retículo de ideales es una cadena se pueden caracterizar de la siguiente forma general:

Teorema 2.1.3. *Sea L un álgebra de Lie no resoluble sobre un cuerpo de característica cero. Los ideales de L forman una cadena de ideales si y solo si L es un álgebra simple o es la suma semidirecta de un ideal nilpotente N distinto de cero y un álgebra simple S tal que N/N^2 es un S-módulo fiel y $Z_i(N)/Z_{i-1}(N)$ son S-módulos irreducibles a través de la representación adjunta. Además, en este caso, los términos de la serie central descendente de N coinciden con los términos de la serie central ascendente y, si $t+1$ es el índice de nilpotencia de N, los ideales de L son los $t+2$ ideales siguientes:*

$$0 < N^t < \ldots < N^i < \ldots < N < L.$$

A la vista de este resultado, las álgebras de Lie no resolubles con ideales en cadena tienen radical resoluble nilpotente y su descomposición de Levi $L = S \oplus N$ es no trivial, esto es, $[S, N] \neq 0$. Sobre estas descomposiciones en [5] se prueba lo siguiente:

Teorema 2.1.4. *Sea L un álgebra de Lie con producto $[x, y]$, radical resoluble nilpotente N con índice de nilpotencia $(t+1)$ y descomposición de Levi no trivial $L = S \oplus N$ para algún álgebra de Lie semisimple S. Entonces, existe una descomposición no trivial de N en suma directa de S-módulos:*

$$N = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus \cdots \oplus m_t,$$

donde $N^j = m_j \oplus N^{j+1}$, $m_j \subseteq [m_{j-1}, m_1]$ tal que m_1 es un S-módulo fiel y para $2 \leq j \leq t$, el submódulo m_j descompone como suma directa de un conjunto de componentes irreducibles de la representación del producto tensor $m_1 \otimes m_{j-1}$. Además m_2 es un submódulo del módulo 2-alternado $\Lambda^2 m_1$.

De los dos teoremas previos extraemos las siguientes conclusiones:

Conclusiones 2.1.5. Sea L es un álgebra de Lie no resoluble con producto $[a, b]$ y factor de Levi S simple. Si L tiene exactamente $t+2$ ideales, y estos forman una cadena entonces:

(C1) El radical resoluble de L coincide con el nilradical N y su índice de nilpotencia es $t+1$. Así, $N^{t+1} = 0$ y $N^t \neq 0$.

(C2) Podemos encontrar una descomposición de N como suma directa de módulos irreducibles para la subálgebra S que tiene exactamente t módulos $m_1, m_2, \ldots, m_t$, esto es:

$$N = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus \cdots \oplus m_t,$$

Estos módulos deben satisfacer:

(1) $N^j = m_j \oplus N^{j+1}$ y $N^{t+2-j} = Z_j(N)$.

(2) $m_{j+1} \subseteq \operatorname{span}\langle [a, b] : a \in m_1, b \in m_j \rangle$ para $j \geq 1$.

(3) El S-módulo m_1 es fiel.

(4) Los módulos m_j para $j \geq 2$ son módulos irreducibles de entre los que aparecen en la representación del producto tensor $m_1 \otimes m_{j-1}$. Además m_2 debe estar entre los submódulos del módulo 2-alternado $\Lambda^2 m_1 \subseteq m_1 \otimes m_1$.

(C3) El producto de Lie en N está completamente determinado, usando linealidad, por los productos $[a_i, a_j] \in N^{i+j}$ con $a_i \in m_i, a_j \in m_j$ para $i, j = 1, \ldots t$. De hecho,

$$[a_i, a_j] = [a_i, a_j]_{i+j} + \cdots + [a_i, a_j]_t,$$

donde $[a_i, a_j]_k \in m_k$ representa la proyección del producto $[a_i, a_j]$ de L sobre cada componente irreducible m_k de N. Estas proyecciones determinan una familia de aplicaciones p_{ijk}, con $1 \leq i, j \leq t$ y $k \geq i+j$. Esto es:

$$\begin{aligned} p_{ijk} : m_i \otimes m_j &\to \quad L \quad \to m_k \\ a_i \otimes a_j &\to [a_i, a_j] \to [a_i, a_j]_k \end{aligned}$$

Estas aplicaciones son homomorfismos de S-módulos ya que

$$[s,[a_i,a_j]] = \sum_{k\geq i+j}[s,[a_i,a_j]_k] = \sum_{k\geq i+j}([[s,a_i]_i,a_j]_k + [a_i,[s,a_j]_j]_k) = [[s,a_i],a_j] + [a_i,[s,a_j]].$$

Además, $p_{ijk} = -p_{jik}$, es decir, son antisimétricas. Observamos también que las aplicaciones $p_{1jj+1} : m_1 \otimes m_j \to m_{j+1}$ deben ser no nulas.

(C4) Sean $a_i \in m_i$, $a_j \in m_j$ y $a_k \in m_k$, la relación que define la identidad de Jacobi es

$$[[a_i,a_j],a_k] + [[a_j,a_k],a_i] + [[a_k,a_i],a_j] = 0$$

que teniendo en cuenta la expresión de los productos, es equivalente a

$$\sum_{l=s+k}^{t}\sum_{s=i+j}^{t} p_{skl}(p_{ijs}(a_i,a_j),a_k) + \sum_{m=n+i}^{t}\sum_{n=j+k}^{t} p_{nim}(p_{jkn}(a_j,a_k),a_i) + \\ + \sum_{b=c+j}^{t}\sum_{c=k+i}^{t} p_{cjb}(p_{kic}(a_k,a_i),a_j) = 0.$$

□

Las conclusiones previas derivadas de los resultados de estructura nos llevan a una simple caracterización de las álgebras de Lie cuyos ideales forman una 4-cadena y una 5-cadena.

Teorema 2.1.6. *Sean S un álgebra de Lie simple con producto $[s,s']$. Sean m_1 y m_2 S-módulos irreducibles con representaciones $\rho_i : S \to \mathfrak{gl}(m_i)$ para $i = 1,2$ con ρ_1 fiel.*

Para cualquier aplicación antisimétrica y no nula $p : m_1 \otimes m_1 \to m_2$ que sea homomorfismo de S-módulos, el espacio vectorial $\mathfrak{L}_S(m_1,m_2,p) = S \oplus m_1 \oplus m_2$ con el producto

$$\langle s+v+w, s'+v'+w'\rangle = [s,s'] + \rho_1(s)(v') + \rho_2(s)(w') + p(v,v') - \rho_1(s')(v) - \rho_2(s')(w), \quad (2.1)$$

para $s,s' \in S$, $v,v' \in m_1$ y $w,w' \in m_2$, proporciona un álgebra de Lie con 4 ideales dispuestos en la cadena:

$$0 < m_2 < m_1 \oplus m_2 < L.$$

Además, toda álgebra de Lie no resoluble con 4 ideales en cadena coincide con una de las descritas anteriormente.

Demostración. Por comodidad escribiremos $\rho_1(s)(v) = s \cdot v$, y $\rho_2(s)(v) = s \odot v$. Observamos que el hecho de que ρ_1 sea representación equivale a que $[s,s'] \cdot v = s \cdot (s' \cdot v) - s' \cdot (s \cdot v)$ para $s,s' \in S$ y $v \in m_1$. Notar que lo mismo ocurre con ρ_2. Además, $m_1 \otimes m_1$ es S-módulo mediante la representación $s \bullet v \otimes w = (s \cdot v) \otimes w + v \otimes s \cdot w$ para $v,w \in m_1$ y $s \in S$ de acuerdo con 1.2.1. También observamos que decir que $p : m_1 \otimes m_1 \to m_2$ sea homomorfismo equivale a que $s \odot p(v \otimes w) = p(s \bullet v \otimes w) = p((s \cdot v) \otimes w) + p(v \otimes s \cdot w)$.

Veamos ahora que L es álgebra de Lie. Para ello, bastaría con comprobar la identidad de Jacobi para ternas de elementos $(a,b,c) \in S \cup m_1 \cup m_2$, pues la antisimetría está garantizada desde la definición del producto. En efecto:

$$\langle s+v+w, s'+v'+w'\rangle = [s,s'] + \rho_1(s)(v') + \rho_2(s)(w') + p(v,v') - \rho_1(s')(v) - \rho_2(s')(w) = \\ = -[s',s] - \rho_1(s')(v) - \rho_2(s')(w) - p(v',v) + \rho_1(s)(v') + \rho_2(s)(w') = -\langle s'+v'+w', s+v+w\rangle. \quad (2.2)$$

Para comprobar la identidad de Jacobi analizamos los diferentes casos:

1) Sean $s,s',s'' \in S$. Se cumple trivialmente puesto que S es un álgebra de Lie, introducida como subálgebra de L: $\langle\langle s,s'\rangle,s''\rangle = [[s,s'],s'']$.

2) Sean $s, s' \in S$ y $v \in m_1$. Como m_1 es un S-módulo la identidad es inmediata:

$$\langle\langle s, s'\rangle, v\rangle + \langle\langle v, s\rangle, s'\rangle + \langle\langle s', v\rangle, s\rangle = [s, s'] \cdot v + s' \cdot (s \cdot v) - s \cdot (s' \cdot v) = 0.$$

De igual forma se verifica la identidad si $v \in m_2$ por ser m_2 un S-módulo.

3) Sean $s \in S$ y $v, v' \in m_1$.

$$\langle\langle s, v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v, v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v', s\rangle, v\rangle = p(s \cdot v \otimes v') - s \odot p(v \otimes v') - p(s \cdot v' \otimes v) = 0,$$

por ser p homomorfismo de S-módulos antisimétrico. En este caso la antisimetría se utiliza para $p(v \otimes s \cdot v') = -p(s \cdot v' \otimes v)$.

3.1) Sean $s \in S$, $v \in m_1$ y $v' \in m_2$.

$$\langle\langle s, v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v, v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v', s\rangle, v\rangle = 0,$$

puesto que cada sumando es 0 por ser productos de un elemento de m_1 y otro de m_2, $(\langle\langle s, v\rangle, v'\rangle = \langle\langle v', s\rangle, v\rangle = 0)$, o anidarlo $\langle v, v'\rangle = 0$.

3.2) Sean $s \in S$, y $v, v' \in m_2$.

$$\langle\langle s, v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v, v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v', s\rangle, v\rangle = 0,$$

puesto que cada sumando es cero por ser productos de dos elementos de m_2, o anidarlo.

4) Sean $v, v', v'' \in m_1$.

$$\langle\langle v, v'\rangle, v''\rangle + \langle\langle v', v''\rangle, v\rangle + \langle\langle v'', v\rangle, v'\rangle = \langle p(v, v'), v''\rangle + \langle p(v', v''), v\rangle + \langle p(v'', v), v'\rangle = 0,$$

puesto que en cada sumando se está haciendo el producto de un elemento de m_2 y otro de m_1.

4.1) Si en el caso anterior al menos uno de los elementos está en m_2, se verifica trivialmente puesto que el producto de un elemento de m_2 por otro de m_2 o de m_1 es nulo.

Observamos que L verifica las siguientes propiedades.

a) Se tiene que $L^2 = L$. En efecto,

$$L^2 = \langle S, S\rangle + \langle S, m_1\rangle + \langle S, m_2\rangle + \langle m_1, m_1\rangle = S^2 \oplus m_1 \oplus m_2 = L,$$

donde se ha utilizado que $S^2 = S$ por ser S simple. También se ha tenido en cuenta que $\langle S, m_1\rangle = m_1$. En efecto, $\langle S, m_1\rangle \subseteq m_1$ y es no nulo por ser m_1 fiel. Luego como $\langle S, m_1\rangle$ es un submódulo de m_1 irreducible, $\langle S, m_1\rangle = m_1$. En efecto, $\langle S, m_1\rangle$ es submódulo de m_1 puesto que $s' \cdot (s \cdot v) = [s', s] \cdot v + s \cdot (s' \cdot v)$ se garantiza al cumplirse la identidad de Jacobi. Además, $\langle m_1, m_1\rangle = m_2$, pues $p : m_1 \otimes m_1 \to m_2$ es homomorfismo de S-módulos, no nulo, y tanto $Ker\ p$, como $Im\ p$ son submódulos. Así, como p es no nula, $0 \neq Im\ p \subseteq m_2$ y como m_2 es irreducible, $Im\ p = \langle m_1, m_1\rangle = m_2$.

b) Ocurre que $m_1 \oplus m_2 = N$ es ideal 3 nilpotente de L. En primer lugar veamos que es ideal de L:

$$\langle L, m_1 \oplus m_2\rangle = \langle S, m_1\rangle + \langle m_1, m_1\rangle + \langle S, m_2\rangle = m_1 \oplus m_2 = N.$$

Además N es 3-nilpotente puesto que $N^2 = \langle m_1, m_1\rangle = m_2$ y $N^3 = \langle N, N^2\rangle = \langle m_1 \oplus m_2, m_2\rangle = 0$. Como N es el mayor ideal resoluble (y nilpotente) de L entonces $N = R(L) = N(L)$ es el radical resoluble de L.

Luego $L = S \oplus N$ con S simple y N nilpotente ($N^3 = 0$). Veamos cual es la cadena central ascendente de N. Se tiene que $Z_2(N) = Z(N)$ y como $m_2 \subseteq Z_2(N) = Z(N)$, entonces $Z(N) = m_2 \oplus Z(N) \cap m_1$. Ahora $Z(N) \cap m_1$ es un S-módulo de L por ser $Z(N)$ un ideal de L.

Como m_1 es irreducible y $0 \subseteq Z(N) \cap m_1 \subseteq m_1$, entonces o bien $Z(N) \cap m_1 = m_1$ o bien $Z(N) \cap m_1 = 0$.

Si $Z(N) \cap m_1 = m_1$, entonces $Z(N) = m_1 \oplus m_2 = N$. En este caso $N^2 = 0$, lo que es absurdo. Luego $Z(N) \cap m_1 = 0$ y en ese caso $Z(N) = Z_2(N) = m_2 = N^2 \neq N$. Así, $\frac{Z_3(N)}{Z_2(N)} = Z(N/Z_2(N))$ y $Z_3(N)$ debe coincidir con N pues las series centrales descendentes y ascendentes tienen el mismo número de términos, en este caso un total de 3. Por tanto, $N/N^2 = Z_3(N)/Z_2(N) = \frac{m_1 \oplus m_2}{m_2} \cong m_1$ que es S-módulo irreducible y fiel y $Z_2(N)/Z_1(N) \cong m_2$. Por el Teorema 2.1.3 el resultado es cierto.

Veamos ahora que toda álgebra de Lie no resoluble con 4 ideales en cadena coincide con una de las anteriores. Sea L con 4 ideales en cadena y producto $[a, b]$. Aplicando el Teorema 2.1.3 tenemos que $L = S \oplus N$, donde $N = R(L)$ el radical resoluble de L es nilpotente, y S es un álgebra de Lie simple y $N^3 = 0$. El nilradical N es S-módulo mediante la representación adjunta restringida a N:

$$\rho = \mathrm{ad} : S \to \mathfrak{gl}(N), \mathrm{ad}_N s(n) = [s, n],$$

por ser N un ideal. Como $N^2 \subseteq N$ y N^2 es ideal de L, N^2 es S-submódulo de N. Por el Teorema de Weyl, ρ es una representación completamente reducible, luego existe un S-submódulo m_1 tal que $N = m_1 \oplus N^2$. Así para todo $a \in m_1$ y para todo $s \in S$, $\rho(s)(a) = [s, a] \in m_1$. Luego del Teorema 2.1.3 tenemos que la representación

$$\rho_1 : S \to \mathfrak{gl}(m_1)$$

dada como $\rho_1(s)(a) = [s, a]$ es irreducible y fiel, y la representación

$$\rho_2 : S \to \mathfrak{gl}(m_2)$$

dada por $\rho_2(s)(b) = [s, b]$ es irreducible. Por otro lado, la aplicación

$$\begin{aligned} p : m_1 \otimes m_1 &\to m_2 = N^2 \\ (a, b) &\to \quad [a, b] \end{aligned}$$

está bien definida, es no nula pues $0 \neq N^2 = [m_1, m_1]$ y es antisimétrica pues $[a, b] = -[b, a]$. Además p es un homomorfismo de S-módulos gracias a que se cumple la identidad de Jacobi en L. En efecto:

$$s \cdot p(a, b) = p(s \cdot a, b) + p(a, s \cdot b) = [s \cdot a, b] + [a, s \cdot b],$$

que equivale a

$$[[s, a], b] + [a, [s, b]] = [s, [a, b]],$$

que es cierto por la identidad de Jacobi. Así observamos que $L = \mathfrak{L}_S(m_1, N^2 = m_2, p)$ donde S es un factor de Levi de L, m_1 y m_2 submódulos de la representación adjunta de L tales que $N = m_1 \oplus m_2$ y $m_2 = N^2$, p el producto de Lie restringido a $m_1 \otimes m_1$, lo que prueba la afirmación final. $\square$

Teorema 2.1.7. *Sea S un álgebra de Lie simple con producto $[s, s']$. Sean m_1, m_2 y m_3 S-módulos irreducibles con representaciones $\rho_i : S \to \mathfrak{gl}(m_i)$ para $i = 1, 2, 3$ con ρ_1 fiel.*

Sean cualesquiera homomorfismos de S-módulos $p_{112} : m_1 \otimes m_1 \to m_2$ antisimétrico y no nulo, $p_{113} : m_1 \otimes m_1 \to m_3$ antisimétrico, y $p_{123} : m_1 \otimes m_2 \to m_3$ no nulo, que además verifican para toda terna de elementos $v, v', v'' \in m_1$ la identidad:

$$p_{123}(v'', p_{112}(v, v')) + p_{123}(v, p_{112}(v', v'')) + p_{123}(v', p_{112}(v'', v)) = 0. \tag{2.3}$$

El espacio vectorial $\mathfrak{L}_S(m_1, m_2, m_3, p_{112}, p_{113}, p_{123}) = S \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3$ con el producto

$$\begin{aligned} \langle s + v + w + u, s' + v' + w' + u' \rangle = [s, s'] + \rho_1(s)(v') + \rho_2(s)(w') + \rho_3(s)(u') + p_{112}(v, v') + \\ + p_{113}(v, v') + p_{123}(v, w') - p_{123}(v', w) - \rho_1(s')(v) - \rho_2(s')(w) - \rho_3(s')(u), \end{aligned}$$

para $s, s' \in S$, $v, v' \in m_1$, $w, w' \in m_2$ y $u, u' \in m_3$, proporciona un álgebra de Lie con 5 ideales dispuestos en la cadena:

$$0 < m_3 < m_2 \oplus m_3 < m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 < L.$$

Además, toda álgebra de Lie no resoluble con 5 ideales en cadena coincide con una de las descritas anteriormente.

Demostración. Por comodidad escribiremos $\rho_1(s)(v) = s \cdot v$, $\rho_2(s)(v) = s \odot v$ y $\rho_3(s)(v) = s \circ v$. Observamos que el hecho de que ρ_1 sea representación equivale a que $[s, s'] \cdot v = s \cdot (s' \cdot v) - s' \cdot (s \cdot v)$ para $s, s' \in S$ y $v \in m_1$. Notar que lo mismo ocurre con ρ_2 y con ρ_3. Además, $m_1 \otimes m_1$ es S-módulo mediante la representación $s \bullet v \otimes w = (s \cdot v) \otimes w + v \otimes s \cdot w$ para $v, w \in m_1$ y $s \in S$. También observamos que decir que $p_{112} : m_1 \otimes m_1 \to m_2$ sea homomorfismo equivale a que $s \odot p_{112}(v \otimes w) = p_{112}(s \bullet v \otimes w) = p_{112}((s \cdot v) \otimes w) + p_{112}(v \otimes s \odot w)$. De forma análoga, observamos que $m_1 \otimes m_2$ es S-modulo mediante la representación $s \bullet v \otimes u = (s \cdot v) \otimes u + v \otimes s \odot u$ para $v \in m_1$, $u \in m_2$ y $s \in S$. Como $p_{123} : m_1 \otimes m_2 \to m_3$ es homomorfismo de S-módulos $s \circ p_{123}(v \otimes w) = p_{123}(s \bullet v \otimes w) = p_{123}((s \cdot v) \otimes w) + p_{123}(v \otimes s \odot w)$.

Veamos ahora que L es álgebra de Lie. Para ello, bastaría con comprobar la identidad de Jacobi para ternas de elementos $(a, b, c) \in S \cup m_1 \cup m_2 \cup m_3$, pues la antisimetría está garantizada desde la definición del producto. En efecto:

$$\begin{aligned}\langle s + v + w + u, s' + v' + w' + u' \rangle &= [s, s'] + \rho_1(s)(v') + \rho_2(s)(w') + \rho_3(s)(u') + p_{112}(v, v') + \\ &+ p_{123}(v, w') - p_{123}(v', w) - \rho_1(s')(v) - \rho_2(s')(w) - \rho_3(s')(u) = \\ &= -[s', s] - \rho_1(s')(v) - \rho_2(s')(w) - \rho_3(s')(u) - p_{112}(v', v) - p_{123}(v', w) + p_{123}(v, w') + \\ &+ \rho_1(s)(v') + \rho_2(s)(w') + \rho_3(s)(u') = -\langle s' + v' + w' + u', s + v + w + u \rangle. \quad (2.4)\end{aligned}$$

Para comprobar la identidad de Jacobi analizamos los diferentes casos:

1) Sean $s, s', s'' \in S$. Se cumple trivialmente puesto que S es un álgebra de Lie, introducida como subálgebra de L: $\langle \langle s, s' \rangle, s'' \rangle = [[s, s'], s'']$.

2) Sean $s, s' \in S$ y $v \in m_1$. Como m_1 es un S-módulo la identidad es inmediata:

$$\langle \langle s, s' \rangle, v \rangle + \langle \langle v, s \rangle, s' \rangle + \langle \langle s', v \rangle, s \rangle = [s, s'] \cdot v + s' \cdot (s \cdot v) - s \cdot (s' \cdot v) = 0.$$

De igual forma se verifica la identidad si $v \in m_2$ o si $v \in m_3$ por ser m_2 y m_3 S-módulos.

3) Sean $s \in S$ y $v, v' \in m_1$.

$$\begin{aligned}\langle \langle s, v \rangle, v' \rangle + \langle \langle v, v' \rangle, s \rangle + \langle \langle v', s \rangle, v \rangle &= p_{112}(s \cdot v \otimes v') - s \odot p_{112}(v \otimes v') - p_{112}(s \cdot v' \otimes v) + \\ &+ p_{113}(s \cdot v \otimes v') - s \circ p_{113}(v \otimes v') - p_{113}(s \cdot v' \otimes v) = 0, \quad (2.5)\end{aligned}$$

por ser p_{112} y p_{113} homomorfismos de S-módulos antisimétricos. En este caso la antisimetría se utiliza para $p_{112}(v \otimes s \cdot v') = -p_{112}(s \cdot v' \otimes v)$ y análogamente con p_{113}.

3.1) Sean $s \in S$ $v \in m_1$ y $v' \in m_2$.

$$\langle \langle s, v \rangle, v' \rangle + \langle \langle v, v' \rangle, s \rangle + \langle \langle v', s \rangle, v \rangle = p_{123}(s \cdot v \otimes v') - s \circ p_{123}(v \otimes v') + p_{123}(v \otimes s \odot v') = 0,$$

por ser p_{123} homomorfismo de S-módulos.

3.2) Sean $s \in S$, $v \in m_1$ y $v' \in m_3$.

$$\langle \langle s, v \rangle, v' \rangle + \langle \langle v, v' \rangle, s \rangle + \langle \langle v', s \rangle, v \rangle = 0,$$

puesto que cada sumando es 0 por ser productos de un elemento de m_1 y otro de m_3, ($\langle \langle s, v \rangle, v' \rangle = \langle \langle v', s \rangle, v \rangle = 0$), o anidarlo ($\langle v, v' \rangle = 0$).

3.3) Sean $s \in S$ y $v, v' \in m_2$.

$$\langle \langle s, v \rangle, v' \rangle + \langle \langle v, v' \rangle, s \rangle + \langle \langle v', s \rangle, v \rangle = 0,$$

puesto que cada sumando es 0 por ser productos de dos elementos de m_2 o anidarlo.

3.4) Sean $s \in S$, $v \in m_2$ y $v' \in m_3$.

$$\langle \langle s, v \rangle, v' \rangle + \langle \langle v, v' \rangle, s \rangle + \langle \langle v', s \rangle, v \rangle = 0,$$

puesto que cada sumando es 0 por ser productos de un elemento de m_2 y otro de m_3 o anidarlo.

3.5) Sean $s \in S$, $v, v' \in m_3$.

$$\langle\langle s, v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v, v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v', s\rangle, v\rangle = 0,$$

puesto que cada sumando es 0 por ser productos de dos elementos de m_3 o anidarlo.

4) Sean $v, v', v'' \in m_1$.

$$\begin{aligned}\langle\langle v, v'\rangle, v''\rangle + \langle\langle v', v''\rangle, v\rangle + \langle\langle v'', v\rangle, v'\rangle = \langle p_{112}(v, v'), v''\rangle + \langle p_{112}(v', v''), v\rangle + \\ + \langle p_{112}(v'', v), v'\rangle + \langle p_{113}(v, v'), v''\rangle + \langle p_{113}(v', v''), v\rangle + \langle p_{113}(v'', v), v'\rangle = \\ = -p_{123}(v'', p_{112}(v, v')) - p_{123}(v, p_{112}(v', v'')) - p_{123}(v', p_{112}(v'', v)) = 0,\end{aligned}$$

por la condición (2.3) que se exige en el enunciado.

4.1) Sean $v, v' \in m_1$ y $v'' \in m_2$.

$$\begin{aligned}\langle\langle v, v'\rangle, v''\rangle + \langle\langle v', v''\rangle, v\rangle + \langle\langle v'', v\rangle, v'\rangle = \langle p_{112}(v, v'), v''\rangle + \langle p_{113}(v, v'), v''\rangle + \\ + \langle p_{123}(v', v''), v\rangle - \langle p_{123}(v, v''), v'\rangle = 0,\end{aligned}$$

puesto que en cada sumando se está haciendo el producto de un elemento de m_3 y otro de m_1, un elemento de m_3 y otro de m_2, o de dos elementos de m_2.

4.2) Si en el caso anterior al menos uno de los elementos está en m_3, se verifica trivialmente puesto que el producto de un elemento de m_3 por otro de m_1, de m_2 o de m_3 es nulo. Si se toman dos o más elementos de m_2 el producto de esos tres elementos también sería necesariamente nulo.

Observamos que L verifica las siguientes propiedades.

a) Se tiene que $L^2 = L$. En efecto,

$$L^2 = \langle S, S\rangle + \langle S, m_1\rangle + \langle S, m_2\rangle + \langle S, m_3\rangle + \langle m_1, m_1\rangle + \langle m_1, m_2\rangle = S^2 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 = L,$$

donde se ha utilizado que $S^2 = S$ por ser S simple. También se ha tenido en cuenta que $\langle S, m_1\rangle = m_1$. En efecto, $\langle S, m_1\rangle \subseteq m_1$ y es no nulo por ser m_1 fiel. Luego como $\langle S, m_1\rangle$ es un submódulo de m_1 irreducible, $\langle S, m_1\rangle = m_1$. Además, $\langle m_1, m_1\rangle = m_2$, pues $p_{112} : m_1 \otimes m_1 \to m_2$ es homomorfismo de S-módulos, no nulo, y $Ker\ p_{112}$, $Im\ p_{112}$ son submódulos. Por tanto, $0 \neq Im\ p_{112} \subseteq m_2$ y como m_2 es irreducible y $Im\ p_{112} = \langle m_1, m_1\rangle = m_2$. De forma similar, $\langle m_1, m_2\rangle = m_3$ por ser $p_{123} : m_1 \otimes m_2 \to m_3$ homomorfismo de S-módulos no nulo.

b) Ocurre que $m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 = N$ es ideal 4 nilpotente de L tal que $N^2 = m_2 \oplus m_3$ y $N^3 = m_3$. En primer lugar veamos que es ideal de L:

$$\langle L, m_1 \oplus m_2 \oplus m_3\rangle = \langle S, m_1\rangle + \langle S, m_2\rangle + \langle S, m_3\rangle + \langle m_1, m_1\rangle + \langle m_1, m_2\rangle = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 = N.$$

Además N es 4-nilpotente puesto que $N^2 = \langle N, N\rangle = \langle m_1, m_1\rangle + \langle m_1, m_2\rangle = m_2 \oplus m_3$. Además $N^3 = \langle N, N^2\rangle = \langle m_1, m_2\rangle + \langle m_2, m_1\rangle = m_3$. Finalmente $N^4 = \langle N, N^3\rangle = 0$. Como N es el mayor ideal resoluble (y nilpotente) de L entonces $N = R(L) = N(L)$ es el radical resoluble de L.

Luego $L = S \oplus N$ con S simple y N nilpotente ($N^4 = 0$). Veamos cuál es la cadena central ascendente de N. Se tiene que $Z_2(N) = Z(N)$ y que $m_3 \subseteq Z_2(N)$. Además, $Z_2(N)$ y $Z_3(N)$ son ideales de N. Por tanto, son S-submódulos de N y cumplen que $0 \neq Z_2(N) \neq Z_3(N) \neq Z_4(N) = N$ pues la serie central descendente y la serie central ascendente tienen el mismo número de términos, en este caso un total de 4. Por el Teorema de Weyl existen $\mathfrak{a}_1$ y $\mathfrak{a}_2$ submódulos tal que $N = Z_4(N) = Z_3(N) \oplus \mathfrak{a}_1 = Z_2(N) \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_1$. Como N tiene exactamente 3 componentes irreducibles $Z_2(N) = N^3$, $\mathfrak{a}_1$ y $\mathfrak{a}_2$ deben ser irreducibles y por tanto $m_3 = Z_2(N)$.

Así, $\frac{Z_3(N)}{Z_2(N)} = Z(N/Z_2(N))$ y $Z_4(N)$ debe coincidir con N. Ahora $N^2 \subseteq Z_3(N) \neq Z_4(N) = N$ y $N/N^2 = \frac{m_1 \oplus m_2 \oplus m_3}{m_2 \oplus m_3} \cong m_1$ irreducible y fiel, luego $N^2 = Z_3(N)$. Además, $Z_3(N)/Z_2(N) = \frac{m_2 \oplus m_3}{m_3} \cong m_2$ y $Z_2(N)/Z_1(N) \cong m_3$. Por el Teorema 2.1.3 el resultado es cierto.

Veamos ahora que toda álgebra de Lie no resoluble con 5 ideales en cadena coincide con una de las anteriores. Sea L con 5 ideales en cadena y producto $[a,b]$. Aplicando el Teorema 2.1.3 $L = S \oplus N$, donde $N = R(L)$ el radical resoluble de L es nilpotente, y S es un álgebra de Lie simple, $N^4 = 0$ y $N^3 \neq 0$. La cadena de ideales es además $0 < N^3 < N^2 < N < L$.

El nilradical N es S-módulo mediante la representación adjunta restringida a N:

$$\rho = \mathrm{ad} : S \to \mathfrak{gl}(N), \mathrm{ad}_N s(n) = [s,n],$$

por ser N un ideal. Como $N^2 \subseteq N$ y N^2 es ideal de L, N^2 es S-submódulo de N. Por el Teorema de Weyl, ρ es una representación completamente reducible, luego existe un S-submódulo m_1 tal que $N = m_1 \oplus N^2$. De igual forma, como N^3 es S-submódulo de N^2, pues es ideal de L y $N^3 \subseteq N^2$, por el Teorema de Weyl $N^2 = m_2 \oplus N^3$. Escribimos $N^3 = m_3$ y observamos que para todo $a \in m_1$ y para todo $s \in S$, $\rho(s)(a) = [s,a] \in m_1$; lo mismo ocurre para $b \in m_2$ y $c \in m_3$. Luego del Teorema 2.1.3 tenemos que

$$\rho_1 : S \to \mathfrak{gl}(m_1)$$

dada como $\rho_1(s)(a) = [s,a]$ es irreducible y fiel,

$$\rho_2 : S \to \mathfrak{gl}(m_2)$$

dada por $\rho_2(s)(b) = [s,b]$ es irreducible,

$$\rho_3 : S \to \mathfrak{gl}(m_3)$$

dada por $\rho_3(s)(c) = [s,c]$ es irreducible. Por otro lado $[a,b] = [a,b]_2 + [a,b]_3$ donde $[a,b]_i$ son las proyecciones del producto $[a,b]$ sobre m_i para $i = 2,3$. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} p_{112} : m_1 \otimes m_1 & \to & m_2 \subseteq N^2 \\ (a,b) & \to & [a,b]_2 \end{array}$$

está bien definida, es no nula pues $N^3 \neq N^2 = m_2 \oplus N^3$ y si $p_{112} = 0$ entonces $N^2 = N^3$, que supondría una contradicción. También es antisimétrica pues $[a,b] = -[b,a]$. Además p_{112} es un homomorfismo de S-módulos gracias a que se cumple la identidad de Jacobi en L aplicada a $s \in S$ y $a, b \in m_1$. En efecto:

$$s \cdot p_{112}(a,b) = p_{112}(s \cdot a, b) + p_{112}(a, s \cdot b) = [s \cdot a, b] + [a, s \cdot b].$$

Por la identidad de Jacobi sabemos que $[s,[a,b]] = [[s,a],b] + [a,[s,b]]$. Además se cumple que $[s,[a,b]] = [s,[a,b]_2] + [s,[a,b]_3]$, $[[s,a],b] = [[s,a],b]_2 + [[s,a],b]_3$ y $[a,[s,b]] = [a,[s,b]]_2 + [a,[s,b]]_3$, y que $[s,[a,b]]_i \in m_i$ para $i = 2,3$. Ahora igualando las componentes llegamos a que $[s,[a,b]]_2 = [[s,a],b]_2 + [a,[s,b]]_2$ y a que $[s,[a,b]]_3 = [[s,a],b]_3 + [a,[s,b]]_3$.

Razonando de forma análoga también deducimos que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} p_{113} : m_1 \otimes m_1 & \to & m_3 \subseteq N^2 \\ (a,b) & \to & [a,b]_3 \end{array}$$

es un homomorfismo de S-módulos, antisimétrico. Finalmente, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} p_{123} : m_1 \otimes m_2 & \to & m_3 = N^3 \\ (a,b) & \to & [a,b] \end{array}$$

está bien definida, es no nula pues $[m_1, m_2] = [N, N^2] = N^3 \neq 0$ y es homomorfismo de S-módulos gracias a la identidad de Jacobi aplicada a $s \in S$, $a \in m_1$ y $b \in m_2$ con un razonamiento análogo al realizado para p_{112}.

Así, observamos que $L = \mathfrak{L}_S(m_1, m_2 \oplus m_3, m_3, p_{112}, p_{113}, p_{123})$ donde S es un factor de Levi de L, m_1,m_2 y m_3 submódulos de la representación adjunta de L tal que $N = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3$, $N^2 = m_2 \oplus m_3$ y $N^3 = m_3$, p_{112} la proyección en m_2 del producto de Lie de L restringido a $m_1 \otimes m_1$, p_{113} la proyección en m_3 del producto de Lie de L restringido a $m_1 \otimes m_1$, y p_{123} producto de Lie restringido a $m_1 \otimes m_2$, lo que prueba la afirmación final. $\square$

Corolario 2.1.8. Sea un álgebra de Lie $\mathfrak{L}_S(m_1, m_2, m_3, p_{112}, p_{113}, p_{123})$ con S, m_i para $i = 1, 2, 3$ y $p_{ijk} : m_i \otimes m_j \to m_k$ como se definen en el Teorema 2.1.7. Entonces m_2 es un submódulo irreducible de $\Lambda^2 m_1$ y m_3 es un submódulo de $m_1 \otimes m_2$. Además, si m_3 no es submódulo de $\Lambda^2 m_1$, entonces el producto p_{113} es nulo.

Demostración. Para $i = 2, 3$ los S-homomorfismos de módulos $p_{11i} : m_1 \otimes m_1 \to m_i$ son antisimétricos. Aplicando la propiedad universal de la 2-potencia alternada $\Lambda^2 m_1$ estas aplicaciones proporcionan S-homomorfismos $p_{\hat{11}i} : \Lambda^2 m_1 \to m_i$. El primer Teorema de isomorfía de módulos nos dice que $\Lambda^2 m_1 / Ker\ p_{\hat{11}i} \cong Im\ p_{\hat{11}i} = Im\ p_{11i}$, con $Im\ p_{11i} \subseteq m_i$. Como $Im\ p_{112} \neq 0$, $m_2 = Im\ p_{112}$ por ser m_2 S-irreducible.

Ahora, por el Teorema de Weyl $\Lambda^2 m_1 = Ker\ p_{\hat{112}} \oplus M$, donde el submódulo M contiene una copia isomorfa a m_2. De la descomposición en S-módulos $\Lambda^2 m_1 = Ker\ p_{\hat{113}} \oplus M'$ obtenemos que m_3 debe aparecer entre los submódulos de $\Lambda^2 m_1$ si $Im\ p_{113} \neq 0$. Por tanto, si $m_3 \not\subseteq \Lambda^2 m_1$, p_{113} es nula. □

Observación 2.1.9. Si m_1, m_2, m_3 son S-irreducibles con m_1 fiel y $p_{112} : m_1 \otimes m_1 \to m_2$, $p_{123} : m_1 \otimes m_2 \to m_3$ satisfacen las condiciones del Teorema 2.1.7, $\mathfrak{L}_S(m_1, m_2, m_3, p_{112}, 0, p_{123})$ es un álgebra de Lie con 5 ideales en cadena. Es más, toda álgebra de Lie

$$\mathfrak{L}_S(m_1, m_2, m_3, p_{112}, p_{113}, p_{123})$$

con producto $\langle a, b\rangle'$ aparece al modificar el producto $\langle a, b\rangle$ de $\mathfrak{L}_S(m_1, m_2, m_3, p_{112}, 0, p_{123})$ en la forma

$$\langle a, b\rangle' = \begin{cases} \langle a, b\rangle + p_{113}(a, b) & \text{si } a, b \in m_1 \\ \langle a, b\rangle & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Desde los Teoremas de estructura 2.1.3 y 2.1.4 y las conclusiones 2.1.5 podemos establecer un procedimiento general de construcción de álgebras cuyos ideales forman una cadena de longitud arbitaria.

Procedimiento de construcción 2.1.10. Para construir álgebras de Lie no resolubles con $t + 2$ ideales formando una cadena, seguiremos los siguientes pasos.

PASO 1 Búsqueda de un factor de Levi S, módulos m_i y productos p_{ijk}:

a) Seleccionamos un álgebra de Lie S simple con producto $a \odot b$.

b) Fijamos un S-módulo irreducible y fiel m_1 y si $t \geq 2$ elegimos un módulo irreducible m_2 entre los irreducibles de la descomposición de $\Lambda^2 m_1$.

c) Para $t \geq 3$, y seleccionado m_j, elegimos como m_{j+1} un submódulo irreducible de $m_1 \otimes m_j$.

d) Seleccionamos una familia de aplicaciones $p_{ijk} : m_i \otimes m_j \to m_k$ que sean homomorfismos de S-módulos para las posibles ternas $(i, j, k) \in \{1, \ldots t\}$, tales que $i + j \leq k \leq t$ (entenderemos que $p_{ijk} = 0 sii + j > t$). Estas aplicaciones deben verificar $p_{ijk}(a, b) = -p_{jik}(b, a)$ y que p_{1jj+1} sean no nulas.

PASO 2 En el espacio vectorial $N = m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_t$ definiremos un producto binario $\langle a, b\rangle$ reduciéndolo, por linealidad, a sumas de productos $\langle a_i, a_j\rangle$ con $a_i \in m_i$ y $a_j \in m_j$. Es decir:

$$\langle a_i, a_j\rangle = p_{iji+j}(a_i, a_j) + p_{iji+j+1}(a_i, a_j) + \cdots + p_{ijt}(a_i, a_j).$$

Además, comprobaremos si se cumple:

$$\sum_{\substack{\text{cíclica} \\ (a_i, a_j, a_k)}} \langle\langle a_i, a_j\rangle a_k\rangle = 0.$$

PASO 3 Si el Paso 2 se ha completado, en el espacio vectorial $L = S \oplus N$ el producto $[a, b]$ queda definido en la forma

$$\begin{cases} [a,b] = \langle a,b \rangle & \text{si } a,b \in N \\ [a,b] = a \odot b & \text{si } a,b \in S \\ [s,a_k] = \rho_k(s)(a_k) = -[a_k,s] & \text{si } a_k \in m_k, s \in S \end{cases}$$

donde $\rho_k : S \to \mathfrak{gl}(m_k)$ es la representación de m_k para $k = 1, \ldots t$ es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi. Por tanto, $L = S \oplus N$ es un álgebra de Lie no resoluble con exactamente $t+2$ ideales en cadena ya que observamos que:

- Para todo $j \geq 2$ se cumple $m_j \subseteq \langle \oplus_{k=j}^{t} m_k$ gracias a que p_{1jj+1} son no nulas. En particular, $N^j = m_j \oplus \cdots \oplus m_t$ con $j \geq 1$.
- $N^t = \langle N, N^{t-1} \rangle = \langle m_1, m_{t-1} \rangle \neq 0$ y $N^{t+1} = 0$.
- N es de Lie nilpotente con índice de nilpotencia $n+1$.
- $N^j = Z_{t+2-j}$ por ser N^j/N^{j+1} irreducible y porque la serie central ascendente y descendente tienen el mismo número de términos.

2.2. Ejemplos de construcciones.

Veamos ahora algunos ejemplos que ayudarán a aclarar las explicaciones dadas en la Sección 2.1 para la construcción de álgebras de Lie con ideales en cadena.

Ejemplo 2.2.1. El álgebra de Lie

$$\mathcal{L}_{3,4} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(3) \oplus V(4) = \operatorname{span}\langle e,f,h \rangle \oplus \operatorname{span}\langle v_0, v_1 \rangle \oplus \operatorname{span}\langle w_0 \rangle$$

queda definida por los productos no nulos:

$$\begin{gathered} [e,f] = -[f,e] = h;\ [h,e] = -[e,h] = 2e;\ [h,f] = -[f,h] = -2f \\ [h,w_i] = -[w_i,h] = h \cdot w_i \text{ para } 0 \leq i \leq 4;\ [h,v_i] = -[v_i,h] = h \cdot v_i \text{ para } 0 \leq i \leq 3 \\ [e,w_i] = -[w_i,h] = e \cdot w_i \text{ para } 0 \leq i \leq 4;\ [h,v_i] = -[v_i,h] = e \cdot v_i \text{ para } 0 \leq i \leq 3 \\ [f,w_i] = -[w_i,h] = f \cdot w_i \text{ para } 0 \leq i \leq 4;\ [h,v_i] = -[v_i,h] = f \cdot v_i \text{ para } 0 \leq i \leq 3 \\ [v_0,v_1] = -[v_1,v_0] = w_0;\ [v_0,v_2] = -[v_2,v_0] = \frac{1}{2}w_1;\ [v_0,v_3] = -[v_3,v_0] = \frac{1}{6}w_2 \\ [v_1,v_2] = -[v_2,v_1] = \frac{1}{2}w_2;\ [v_1,v_3] = -[v_3,v_1] = \frac{1}{2}w_3;\ [v_2,v_3] = -[v_3,v_2] = w_4 \end{gathered}$$

Este ejemplo es un caso particular de la construcción general $\mathcal{L}_{n,k} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2k)$ con k impar tratada en [7]. En estas construcciones, el uso de la identidad de Jacobi lleva a una fórmula recursiva de los productos de los elementos de la base estándar de $V(n)$. Así se definen los productos no nulos

$$[v_0, v_i] = \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-i+1)}{m(m-1)\ldots(m-i+k+1)} w_{i-k} \text{ para } k < i \leq n.$$

El resto de productos se calculan recursivamente mediante la fórmula:

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{i}[f,[v_{i-1},v_j]] - \frac{j+1}{i}[v_{i-1},v_{j+1}] \text{ con } v_{n+1} = 0.$$

Las herramientas introducidas en la subsección 1.2.1 nos permiten realizar construcciones más regladas para el caso de 4 ideales que explican las fórmulas del producto del ejemplo previo. Las vamos a ver aplicadas al caso de 5-ideales.

Ejemplo 2.2.2. Tanteamos posibles construcciones de álgebras de Lie con 5 ideales usando el álgebra de Lie simple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ con base dada por las derivadas parciales $x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}$ y $x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ cuyos módulos irreduciles y homomorfismos de $\mathfrak{sl}_2$-módulos están descritos en la Sección 1.2.1 del Capítulo 1. Recordemos que los módulos $\mathfrak{sl}_2$-irreducibles de dimensión $d+1$ se pueden modelizar mediante polinomios homogéneos en la forma $V_d := \langle x^d, x^{d-1}y, \ldots, y^d\rangle$. Además, el Lema 1.2.19 apartado c) describe el subespacio de homomorfismos de $\mathfrak{sl}_2$-módulos como nulo, excepto en el caso $s = n+m-2k$ donde los homomorfismos $f : V_n \otimes V_m \to V_s$ son de la forma $f = \alpha(\cdot\,,\,\cdot)_k$ con $\alpha \in \mathbb{F}$ y $(\cdot\,,\,\cdot)_k$ es la k-ésima transvección.

PASO 1 . Tomamos $S = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y tomamos $m_1 = V(3) := \operatorname{span}\langle a^3, a^2b, ab^2, b^3\rangle$ como $\mathfrak{sl}_2$-módulo irreducible fiel. Desde la fórmula de Clebsch-Gordan 1.2.16 descomponemos $m_1 \otimes m_1 = V(6) \oplus V(4) \oplus V(2) \oplus V(0)$, y deducimos entonces que $\Lambda^2 m_1 = V(4) \oplus V(0)$. Ahora hay dos posibles elecciones de m_2.

a) Tomamos $m_2 = V(4) := \operatorname{span}\langle c^4, c^3d, c^2d^2, cd^3, d^4\rangle$ y desde Clebsch-Gordan, descomponemos $m_1 \otimes m_2 = V(7) \oplus V(5) \oplus V(3) \oplus V(1)$. De las distintas posibilidades de irreducibles, elegimos $m_3 = V(5) := \operatorname{span}\langle e^5, e^4f, \ldots, f^5\rangle$.

   La familia de aplicaciones que definen productos entre los distintos módulos y que deben ser $\mathfrak{sl}_2$-homomorfismos son de la forma $\alpha(\cdot\,,\,\cdot)_k$ con $\alpha \in \mathbb{F}$.

   Para utilizar las transvecciones identificaremos los distintos módulos $V(d)$ con los correspondientes submódulos isomorfos V_d. Esto es, para n, m y $p = n+m-2k$ tenemos $(\cdot\,,\,\cdot)_k : V_n \otimes V_m \to V_{n+m-2k}$ como se definió en 1.2.18. Así,

$$V(n)\otimes V(m) \longrightarrow \boxed{V_n \otimes V_m \xrightarrow{\qquad \alpha(\cdot\,,\,\cdot)_k \qquad} V_{n+m-2k}} \rightarrow V(n+m-2k)$$
$$a^ib^j \otimes c^kd^s \longrightarrow \alpha x^iy^j \otimes x^ky^s \longrightarrow \alpha(x^iy^j, x^ky^s)_k = q(x,y) \to q(e,f)$$

   donde $q(x,y)$ serán un polinomio en las variables x e y y $V(n+m-2k) = span\langle e^i, f^j\rangle$.

   Volviendo al ejemplo, el producto $V(3)\otimes V(3)$ se define de la siguiente manera

$$p_{112} : V(3)\otimes V(3) \longrightarrow \boxed{V_3 \otimes V_3 \xrightarrow{\qquad \alpha(\cdot\,,\,\cdot)_1 \qquad} V_4} \longrightarrow V(4)$$
$$a^{3-i}b^i \otimes a^{3-j}b^j \longrightarrow \alpha(x^{3-i}y^i, x^{3-j}y^j)_1 = \alpha k(i,j)x^{4-s}y^s \longrightarrow \alpha k(i,j)c^{4-s}d^s$$

   con α escalar no nulo, $s = i+j-1$ y donde $k(i,j) \in \mathbb{F}$ se obtiene del Cuadro 1.1 al introducir $f = x^{3-i}y^i$ y $g = x^{3-j}y^j$ para la 1-transvección. Por otro lado el producto $V(3)\otimes V(4)$ se define como sigue

$$p_{123} : V(3)\otimes V(4) \longrightarrow \boxed{V_3 \otimes V_4 \xrightarrow{\qquad \beta(\cdot\,,\,\cdot)_1 \qquad} V_5} \longrightarrow V(5)$$
$$a^{3-i}b^i \otimes c^{4-j}d^j \longrightarrow \beta(x^{3-i}y^i, x^{4-j}y^j)_1 = \beta k(i,j)x^{5-r}y^r \longrightarrow \beta k(i,j)e^{5-r}f^r$$

   con β escalar no nulo, $r = i+j-1$ y donde $k(i,j) \in \mathbb{F}$ se obtiene del Cuadro 1.1 al introducir $f = x^{3-i}y^i$ y $g = x^{4-j}y^j$ para la 1-transvección. Notar que como $t = 3$ estos son los únicos productos que es necesario definir pues p_{213} se define como $-p_{123}$. Además p_{112} es antisimétrico. Notar que p_{113} es nulo por el Corolario 2.1.8 ya que $V(5) \not\subseteq \Lambda^2 m_1 = V(4) \oplus V(0)$.

b) Por otro lado podemos tomar $m_2 = V(0) := \mathbb{F}\cdot c$. Se calcula sencillamente $m_1 \otimes m_2 = V(3)$. La única elección posible es $m_3 = V(3) := \operatorname{span}\langle m^3, m^2n, mn^2, n^3\rangle$. En este caso la aplicación que define el producto $V(3) \otimes V(3)$ es:

$$\begin{array}{rcl} p_{112} : V(3) \otimes V(3) \longrightarrow & \boxed{V_3 \otimes V_3 \xrightarrow{\beta(\cdot\ ,\ \cdot)_3} V_0} & \longrightarrow V(0) \\ a^{3-i}b^i \otimes a^{3-j}b^j \longrightarrow & \alpha(x^{3-i}y^i, x^{3-j}y^j)_3 = \alpha k(i,j) & \longrightarrow \alpha k(i,j)c \end{array}$$

con α no nulo y donde $k(i,j) \in \mathbb{F}$ se obtiene del Cuadro 1.1 al introducir $f = x^{3-i}y^i$ y $g = x^{3-j}y^j$ para la 3-transvección. Por otro lado el producto $V(3) \otimes V(0)$ se define como sigue

$$\begin{array}{rcl} p_{123} : V(3) \otimes V(0) \longrightarrow & \boxed{V_3 \otimes V_0 \xrightarrow{\beta(\cdot\ ,\ \cdot)_0} V_3} & \longrightarrow \overline{V(3)} \\ a^{3-i}b^i \otimes c \longrightarrow & \beta(x^{3-i}y^i, 1)_0 = \beta x^{3-i}y^i & \longrightarrow \beta m^{3-i}n^i \end{array}$$

con β no nulo. Notar que como $t = 3$ estos son los únicos productos que es necesario definir. En este caso también p_{113} es nulo puesto que $V(3) \not\subseteq \Lambda^2 m_1$ aplicando el Corolario 2.1.8.

PASO 2 En este paso comprobaremos si $\langle a, b\rangle$ en el espacio vectorial $N = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3$ definido por $\langle m_2, m_2\rangle = \langle m_1, m_3\rangle = \langle m_2, m_3\rangle = \langle m_3, m_3\rangle = 0$ y $\langle a_1, b_1\rangle = p_{112}(a_1 \otimes b_1)$, $\langle a_1, b_2\rangle = p_{123}(a_1 \otimes b_2)$ con $a_i, b_i \in m_i$. Notar que según el Teorema 2.1.7 basta con que se verifique la identidad (2.3).

a) En este caso debemos comprobar que $\forall f, g, h \in V_3$ se cumple

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(f,g,h)}} \alpha\beta((f,g)_1, h)_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{\substack{\text{cíclica}\\(f,g,h)}} ((f,g)_1, h)_1 = 0$$

puesto que $\alpha\beta \neq 0$. Utilizando ahora la identidad de Gordan $\begin{pmatrix} f & g & h \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ para f, g, h (ver Cuadro 1.2) elementos de V_3, se obtiene la siguiente identidad:

$$\frac{1}{2}((f,g)_2, h)_0 + ((f,g)_1, h)_1 = \frac{1}{2}((f,h)_2, g)_0 + ((f,h)_1, g)_1. \tag{2.6}$$

Si en la anterior expresión se cambia f por g se obtiene

$$\frac{1}{2}((g,f)_2, h)_0 + ((g,f)_1, h)_1 = \frac{1}{2}((g,h)_2, f)_0 + ((g,h)_1, f)_1. \tag{2.7}$$

Si en lugar de cambiar f por g se cambia f por h se obtiene

$$\frac{1}{2}((h,g)_2, f)_0 + ((h,g)_1, f)_1 = \frac{1}{2}((h,f)_2, g)_0 + ((h,f)_1, g)_1. \tag{2.8}$$

Cambiando de lado los dos términos de la igualdad (2.6) se tiene

$$\frac{1}{2}((f,h)_2, g)_0 + ((f,h)_1, g)_1 = \frac{1}{2}((f,g)_2, h)_0 + ((f,g)_1, h)_1. \tag{2.9}$$

Ahora teniendo en cuenta que $(a,b)_k = (-1)^k(b,a)_k$, observamos que $((a,b)_2, c)_0 = ((b,a)_2, c)_0$. Así, sumando las expresiones (2.7), (2.8) y (2.9), obtenemos:

$$((g,f)_1, h)_1 + ((h,g)_1, f)_1 + ((f,h)_1, g)_1 = ((f,g)_1, h)_1 + ((g,h)_1, f)_1 + ((h,f)_1, g)_1,$$

pero como $((a,b)_1, c)_1 = -((b,a)_1, c)_1$ puede ser reescrita como

$$0 = 2((f,g)_1, h)_1 + 2((g,h)_1, f)_1 + 2((h,f)_1, g)_1,$$

como queríamos probar.

b) En este caso, la identidad (2.3) es de la forma:

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(f,g,h)}} ((f,g)_3,h)_0 = 0, \text{ con } f,g,h \in V_3.$$

Ahora bien,

$$\sum_{\text{cíclica}} ((x^2y,xy^2)_3,y^3)_0 = ((x^2y,xy^2)_3,y^3)_0 + ((xy^2,y^3)_3,x^2y)_0 + ((y^3,x^2y)_3,xy^2)_0 =$$

$$-(\frac{1}{3},y^3)_0 + (0,x^2y)_0 + (0,xy^2)_0 = -\frac{1}{3}y^3 \neq 0.$$

Por tanto, la elección de módulos $m_1 = V(3)$, $m_2 = V(0)$ y $m_3 = V(3)$ no proporciona un álgebra de Lie.

PASO 3 Este paso solo es necesario realizarlo para el caso a).

Se tiene que $\mathfrak{L}^{\alpha,\beta}_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})}(V(3),V(4),V(5),\alpha(\cdot,\cdot)_1,0,\beta(\cdot,\cdot)_1) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(3) \oplus V(4) \oplus V(5)$ es un álgebra de Lie con 5 ideales en cadena:

$$0 < V(5) < V(4) \oplus V(5) < V(3) \oplus V(4) \oplus V(5) < L.$$

En este caso los productos quedan definidos de la siguiente forma:

$$\begin{cases} [a,b] = \alpha(a,b)_1 \in V(4) & \text{si } a,b \in V(3) \\ [a,b] = \beta(a,b)_1 \in V(5) & \text{si } a \in V(3), b \in V(4) \\ [a,b] = 0 & \text{si } a,b \in V(4) \\ [a,b] = 0 & \text{si } a \in V(5) \text{ o } b \in V(5) \\ [s_1,s_2] = s_1s_2 - s_2s_1 & \text{si } s_1,s_2 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \\ [s,a] = \rho_1(s)(a) = -[a,s] & \text{si } a \in V(3), s \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \\ [s,a] = \rho_2(s)(a) = -[a,s] & \text{si } a \in V(4), s \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \\ [s,a] = \rho_3(s)(a) = -[a,s] & \text{si } a \in V(5), s \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \end{cases}$$

donde $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ y $\rho_3(s)$ actúan como acción por derivaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ identificando $V(d)$ con V_d.

Observación 2.2.3. Las fórmulas $[a,b] = (a,b)_1 \in V(4)$ si $a,b \in V(3)$, (si tomamos $\alpha = 1$) $[s,a] = \rho_1(s)(a)$ si $a \in V(3)$, $s \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y $[s,a] = \rho_2(s)(a)$ si $a \in V(4)$, $s \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ del ejemplo previo, y el producto $[a,b] = 0$ si $a \in V(3)$, $b \in V(4)$ proporcionan el álgebra de Lie $\mathcal{L}_{3,4}$ del ejemplo inicial.

Ejemplo 2.2.4. Veamos ahora un ejemplo en el que el álgebra simple utilizada es $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{F})$, y tomaremos $t = 2$, es decir estaremos intentando construir un álgebra de Lie con 4-ideales en cadena. Usamos la forma matricial de $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{F})$ cuyo producto viene dado por el antisimetrizado del producto de matrices, esto es: $[A,B] = AB - BA$.

PASO 1 En este caso hemos elegido como álgebra de Lie simple $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{F})$. Tomamos como $\mathfrak{sp}_4$-módulo irreducible $m_1 = \mathbb{F}^4 = V(\lambda_1)$. La acción de $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{F})$ sobre $\mathbb{F}^4$ es la natural $\rho : \mathfrak{sp}_4(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{F}^4)$, esto es: $A \longrightarrow T_A : \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^4$ con $T_A(b) = Ab$. Ahora calculamos $\Lambda^2 m_1 = V(\lambda_2) \oplus V(0)$ y tomamos $m_2 = V(0) = \mathbb{F}z$ módulo trivial para $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{F})$. Debemos elegir las aplicaciones que definen el producto de los diferentes elementos de N. Notar que las aplicaciones que definen los productos $m_1 \otimes m_2$ y $m_2 \otimes m_2$ deben ser necesariamente nulas. Por lo tanto, solo necesitamos definir $m_1 \otimes m_1 \to m_2$, y lo hacemos de la siguiente forma:

$$B : \mathbb{F}^4 \otimes \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}$$
$$(a,b) \to a^T S b$$

PASO 2 La comprobación de la identidad de Jacobi es trivial ya que, al operar tres elementos de m_1, se obtiene necesariamente 0.

PASO 3 El producto quedaría entonces definido de la siguiente forma.

$$\begin{cases} [a,b] = B(a,b) = a^T S b & \text{si } a,b \in m_1 = \mathbb{F}^4 \\ [a,b] = 0 & \text{si } a \in \mathbb{F} \text{ o } b \in m_2 = \mathbb{F}z \\ [A,B] = AB - BA & \text{si } A,B \in \mathfrak{sp}_4(\mathbb{F}) \\ [A,b] = \rho(A)(b) = -[b,A] & \text{si } b \in m_1, A \in \mathfrak{sp}_4(\mathbb{F}) \\ [A,b] = 0 & \text{si } b \in m_2, A \in \mathfrak{sp}_4(\mathbb{F}) \end{cases}$$

2.3. Construcciones con $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

Tras haber introducido los Teoremas 2.1.6 y 2.1.7 para la construcción de álgebras de Lie cuyos ideales forman una 3, 4, 5-cadena con factor de Levi simple S y radical nilpotente, nos centramos en estudiar en profundidad las construcciones de 5-cadenas en el caso particular $S = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Para llevar a cabo esta construcción utilizaremos el modelo $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ dado por derivaciones parciales y los módulos irreducibles V_d como descritos en la subsección 1.2.1 y los $\mathfrak{sl}_2$-homomorfismos llamados transvecciones introducidos en la Definición 1.2.18. El Ejemplo 2.2.2 nos sirve de guía.

Tanto los módulos como los productos serán elegidos siguiendo las pautas marcadas por el Paso 1 del Procedimiento de construcción 2.1.10. De esta forma partiremos de un módulo $m_1 = V(d_1)$ y elegiremos como $m_2 = V(d_2)$ con $d_2 = 2d_1 - 2k$ para algún impar k tal que $1 \leq k \leq d_1$ y como $m_3 = V(d_3)$ donde $d_3 = 3d_1 - 2k - 2r$ para algún r tal que $|d_1 - 2k| \leq d_3$. Los productos $\mathfrak{sl}_2$-invariantes p_{ijl} vendrán dados por las transvecciones en la forma:

$$V_{d_i} \otimes V_{d_j} \to V_{d_l} = \begin{cases} 0 & \text{si } d_l \neq d_i + d_j - 2s \\ \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_s & \text{si } d_l = d_i + d_j - 2s \end{cases}$$

para algún escalar $\alpha \in \mathbb{F}$. Hay que tener en cuenta que si $i = j$ entonces s debe ser necesariamente impar. Como indica el Paso 2, en el espacio vectorial

$$N = V(d_1) \oplus V(d_2) \oplus V(d_3)$$

definiremos el producto binario determinado por $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_k$, $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_r$ con $\alpha\beta \neq 0$ y $p_{113} = \delta(\cdot\ ,\ \cdot)_l$ si $2r = d_1 - 2(k-l)$ para algún l (en otro caso, la única posibilidad es $p_{113} = 0$). Debemos comprobar el cumplimiento de la identidad de Jacobi, que nos llevará a concluir si los productos proporcionan o no un álgebra de Lie en el espacio vectorial N. En caso afirmativo, el espacio vectorial

$$L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus N$$

tendrá sus productos definidos de acuerdo con lo establecido en el Paso 3. La Observación 2.1.9 nos informa de que, en las construcciones, podemos suponer $p_{113} = 0$.

2.3.1. Lemas generales

Los lemas de esta sección verifican si las distintas elecciones de pares (k,r) y (α,β) con $\alpha\beta \neq 0$, que indican sus enunciados, proporcionan un álgebra de Lie en el espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2k) \oplus V(3n-2k-2r)$. En caso afirmativo, obtendremos el álgebra de Lie

$$L = \mathcal{L}_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})}(V(n), V(2n-2k), V(3n-2k-2r), \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_k, 0, \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_r).$$

En la demostración de cada uno de ellos, para comprobar la identidad de Jacobi sin pérdida de generalidad, supondremos que $\alpha = \beta = 1$ (ver Ejemplo 2.2.2 donde se justifica que este reescalamiento siempre se puede hacer).

Lema 2.3.1. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-2)$ es un álgebra de Lie para todo entero $n \geq 1$ usando como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_1$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_0$.

Demostración. Haciendo uso del Teorema 2.1.7 bastaría con comprobar que se verifica la identidad (2.3) para cualquier terna de elementos de $V(n)$. Para probar dicha identidad haremos uso de las transvecciones y trabajaremos con tres elementos cualesquiera $f, g, h \in V_n$. En este caso las transvecciones que definen los productos son las dadas por $k = 1$ y $r = 0$. Esto es:

$$(\cdot\ ,\ \cdot)_1 : V_n \otimes V_n \longrightarrow V_{2n-2}$$

$$(\cdot\ ,\ \cdot)_0 : V_n \otimes V_{2n-2} \longrightarrow V_{3n-2}$$

La fórmula de Gordan dada por los valores $\begin{pmatrix} f & g & h \\ n & n & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ proporciona la siguiente identidad:

$$\frac{\binom{n-1}{0}\binom{0}{0}}{\binom{2n-1}{0}}((f,g)_1,h)_0 = \frac{\binom{n}{0}\binom{1}{0}}{\binom{2n+1}{0}}((f,h)_0,g)_1 + \frac{\binom{n}{1}\binom{1}{1}}{\binom{2n}{1}}((f,h)_1,g)_0,$$

que equivale a

$$((f,g)_1,h)_0 = ((f,h)_0,g)_1 + \frac{n}{2n}((f,h)_1,g)_0,$$

y como $n \neq 0$

$$((f,g)_1,h)_0 = \frac{1}{2}((f,h)_1,g)_0 + ((f,h)_0,g)_1. \tag{2.10}$$

Si en la anterior ecuación se cambia f por h, se obtiene

$$((h,g)_1,f)_0 = \frac{1}{2}((h,f)_1,g)_0 + ((h,f)_0,g)_1. \tag{2.11}$$

Utilizando que $((f,h)_1,g)_0 = -((h,f)_1,g)_0$ por la antisimetría de la 1-transvección, la anterior ecuación se puede reescribir como

$$((f,g)_1,h)_0 = -\frac{1}{2}((h,f)_1,g)_0 + ((f,h)_0,g)_1, \tag{2.12}$$

mientras que como $((h,g)_1,f)_0 = -((g,h)_1,f)_0$ y $(f,h)_0 = (h,f)_0$, la expresión (2.11) equivale a

$$-((g,h)_1,f)_0 = \frac{1}{2}((h,f)_1,g)_0 + ((f,h)_0,g)_1. \tag{2.13}$$

Si ahora restamos (2.13)-(2.12), obtenemos

$$-((g,h)_1,f)_0 - ((f,g)_1,h)_0 = ((h,f)_1,g)_0,$$

que coincide con la identidad buscada. □

Lema 2.3.2. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-4)$ es un álgebra de Lie para todo entero $n \geq 2$ usando como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_1$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_1$.

Demostración. Haciendo uso del Teorema 2.1.7 bastaría con comprobar que se verifica la identidad (2.3) para cualquier terna elementos de $V(n)$. Para probar dicha identidad haremos uso de las transvecciones y trabajaremos con tres elementos cualesquiera $f, g, h \in V_n$. En este caso las transvecciones que definen los productos son las dadas por $k = 1$ y $r = 1$. Esto es:

$$(\cdot\ ,\ \cdot)_1 : V_n \otimes V_n \longrightarrow V_{2n-2}$$

$$(\cdot\ ,\ \cdot)_1 : V_n \otimes V_{2n-2} \longrightarrow V_{3n-4}$$

La fórmula de Gordan dada por los valores $\begin{pmatrix} f & g & h \\ n & n & n \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ proporciona la siguiente identidad:

$$\frac{\binom{n-1}{0}\binom{1}{0}}{\binom{2n-1}{0}}((f,g)_1,h)_1 + \frac{\binom{n-1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{2n-2}{1}}((f,g)_2,h)_0 = \frac{\binom{n-1}{0}\binom{1}{0}}{\binom{2n-1}{0}}((f,h)_1,g)_1 + \frac{\binom{n-1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{2n-2}{1}}((f,h)_2,g)_0,$$

que equivale a

$$((f,g)_1,h)_1 + \frac{n-1}{2n-2}((f,g)_2,h)_0 = ((f,h)_1,g)_1 + \frac{n-1}{2n-2}((f,h)_2,g)_0,$$

y como $n \geq 2$

$$\frac{1}{2}((f,g)_2,h)_0 + ((f,g)_1,h)_1 = \frac{1}{2}((f,h)_2,g)_0 + ((f,h)_1,g)_1. \tag{2.14}$$

Si en la anterior expresión se cambia f por g se obtiene

$$\frac{1}{2}((g,f)_2,h)_0 + ((g,f)_1,h)_1 = \frac{1}{2}((g,h)_2,f)_0 + ((g,h)_1,f)_1. \tag{2.15}$$

Si en lugar de cambiar f por g se cambia f por h se obtiene

$$\frac{1}{2}((h,g)_2,f)_0 + ((h,g)_1,f)_1 = \frac{1}{2}((h,f)_2,g)_0 + ((h,f)_1,g)_1. \tag{2.16}$$

Cambiando de lado los dos términos de la igualdad (2.14) se tiene

$$\frac{1}{2}((f,h)_2,g)_0 + ((f,h)_1,g)_1 = \frac{1}{2}((f,g)_2,h)_0 + ((f,g)_1,h)_1. \tag{2.17}$$

Ahora teniendo en cuenta que $(a,b)_k = (-1)^k(b,a)_k$, observamos que $((a,b)_2,c)_0 = ((b,a)_2,c)_0$ Teniendo esto en cuenta, y sumando las expresiones (2.15), (2.16) y (2.17), obtenemos:

$$((g,f)_1,h)_1 + ((h,g)_1,f)_1 + ((f,h)_1,g)_1 = ((f,g)_1,h)_1 + ((g,h)_1,f)_1 + ((h,f)_1,g)_1,$$

pero como $((a,b)_1,c)_1 = -((b,a)_1,c)_1$ puede ser reescrita como

$$0 = 2((f,g)_1,h)_1 + 2((g,h)_1,f)_1 + 2((h,f)_1,g)_1,$$

que es la identidad que buscábamos probar puesto que estamos en característica 0. □

Lema 2.3.3. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-6) \oplus V(3n-8)$ es un álgebra de Lie para todo entero $n \geq 4$ usando como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_3$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_1$.

Demostración. Haciendo uso del Teorema 2.1.7 bastaría con comprobar que se verifica la identidad (2.3) para cualquier terna elementos de $V(n)$. Para probar dicha identidad haremos uso de las transvecciones y trabajaremos con tres elementos cualesquiera $f,g,h \in V_n$. En este caso las transvecciones que definen los productos son las dadas por $k=3$ y $r=1$. Esto es:

$$(\cdot\ ,\ \cdot)_3 : V_n \otimes V_n \longrightarrow V_{2n-6}$$

$$(\cdot\ ,\ \cdot)_1 : V_n \otimes V_{2n-6} \longrightarrow V_{3n-8}$$

La fórmula de Gordan dada por los valores $\begin{pmatrix} f & g & h \\ n & n & n \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ proporciona la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n-2}{0}\binom{2}{0}}{\binom{2n-3}{0}}((f,g)_2,h)_2 + \frac{\binom{n-2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{2n-4}{1}}((f,g)_3,h)_1 + \frac{\binom{n-2}{2}\binom{2}{2}}{\binom{2n-5}{2}}((f,g)_4,h)_0 = \\ \frac{\binom{n-2}{0}\binom{2}{0}}{\binom{2n-3}{0}}((f,h)_2,g)_2 + \frac{\binom{n-2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{2n-4}{1}}((f,h)_3,g)_1 + \frac{\binom{n-2}{2}\binom{2}{2}}{\binom{2n-5}{2}}((f,h)_4,g)_0,\end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned}((f,g)_2,h)_2 + \frac{2(n-2)}{2n-4}((f,g)_3,h)_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{(2n-5)(2n-6)}((f,g)_4,h)_0 = \\ ((f,h)_2,g)_2 + \frac{2(n-2)}{2n-4}((f,h)_3,g)_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{(2n-5)(2n-6)}((f,h)_4,g)_0,\end{aligned}$$

y como $n \geq 4$ esta expresión equivale a

$$((f,g)_2,h)_2 + ((f,g)_3,h)_1 + \lambda((f,g)_4,h)_0 = ((f,h)_2,g)_2 + ((f,h)_3,g)_1 + \lambda((f,h)_4,g)_0, \quad (2.18)$$

donde $\lambda = \frac{(n-2)(n-3)}{(2n-5)(2n-6)}$. Si en la anterior expresión se intercambian f y g se obtiene

$$((g,f)_2,h)_2 + ((g,f)_3,h)_1 + \lambda((g,f)_4,h)_0 = ((g,h)_2,f)_2 + ((g,h)_3,f)_1 + \lambda((g,h)_4,f)_0, \quad (2.19)$$

Si en su lugar se intercambian f y h se tiene

$$((h,g)_2,f)_2 + ((h,g)_3,f)_1 + \lambda((h,g)_4,f)_0 = ((h,f)_2,g)_2 + ((h,f)_3,g)_1 + \lambda((h,f)_4,g)_0, \quad (2.20)$$

Finalmente si se gira (2.18) resultará más cómodo operar, obteniéndose

$$((f,h)_1,g)_1 + ((f,h)_3,g)_1 + \lambda((f,h)_4,g)_0 = ((f,g)_2,h)_2 + ((f,g)_3,h)_1 + \lambda((f,g)_4,h)_0, \quad (2.21)$$

Sumando (2.19), (2.20) y (2.21) y haciendo uso de la propiedad $(a,b)_k = (-1)^k(b,a)_k$ de las transvecciones, se obtiene

$$0 = 2((f,g)_3,h)_1 + 2((g,h)_3,f)_1 + 2((h,f)_3,g)_1$$

que es la identidad que buscábamos probar puesto que estamos en característica 0. □

Lema 2.3.4. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-8)$ es un álgebra de Lie para todo entero $n \geq 3$ usando como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_1$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_3$.

Demostración. Haciendo uso del Teorema 2.1.7 bastaría con comprobar que se verifica la identidad (2.3) para cualquier terna elementos de $V(n)$. Para probar dicha identidad haremos uso de las transvecciones y trabajaremos con tres elementos cualesquiera $f, g, h \in V_n$. En este caso las transvecciones que definen los productos son las dadas por $k = 1$ y $r = 3$. Esto es:

$$(\cdot\ ,\ \cdot)_1 : V_n \otimes V_n \longrightarrow V_{2n-2}$$

$$(\cdot\ ,\ \cdot)_3 : V_n \otimes V_{2n-2} \longrightarrow V_{3n-8}$$

Veremos que se cumple en general para todo $n \geq 4$, para el caso $n = 3$ se verá mas adelante como un caso particular. Esta distinción es necesaria puesto que la fórmula de Gordan que se ha elegido no es válida si $n = 3$ ya que incumpliría que $\alpha_2 + \alpha_3 \leq n$, ya que $1 + 3 = 4 \not> 3$.

La fórmula de Gordan dada por los valores $\begin{pmatrix} f & g & h \\ n & n & n \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ proporciona la siguiente identidad:

$$\frac{\binom{n-3}{0}\binom{1}{0}}{\binom{2n-5}{0}}((f,g)_3,h)_1 + \frac{\binom{n-3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{2n-6}{1}}((f,g)_4,h)_0 = \frac{\binom{n-1}{0}\binom{3}{0}}{\binom{2n-1}{0}}((f,h)_1,g)_3 +$$
$$+ \frac{\binom{n-1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{2n-2}{1}}((f,h)_2,g)_2 + \frac{\binom{n-1}{2}\binom{3}{2}}{\binom{2n-3}{2}}((f,h)_3,g)_1 + \frac{\binom{n-1}{3}\binom{3}{3}}{\binom{2n-4}{3}}((f,h)_4,g)_0,$$

que equivale a

$$((f,g)_3,h)_1 + \frac{n-3}{2n-6}((f,g)_4,h)_0 = ((f,h)_1,g)_3 + \frac{3(n-1)}{(2n-2)}((f,h)_2,g)_2 +$$
$$+ \frac{3(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-4)}((f,h)_3,g)_1 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-4)(2n-5)(2n-6)}((f,h)_4,g)_0,$$

y como $n \geq 4$ esta expresión es equivalente a

$$((f,g)_3,h)_1 + \frac{1}{2}((f,g)_4,h)_0 = ((f,h)_1,g)_3 + \frac{3}{2}((f,h)_2,g)_2 + \lambda_1((f,h)_3,g)_1 + \lambda_2((f,h)_4,g)_0, \quad (2.22)$$

donde $\lambda_1 = \frac{3(n-1)}{2(2n-3)}$ y $\lambda_2 = \frac{(n-1)}{4(2n-5)}$ son ambos no nulos por ser $n \geq 4$. Intercambiando f por g se tiene

$$((g,f)_3,h)_1 + \frac{1}{2}((g,f)_4,h)_0 = ((g,h)_1,f)_3 + \frac{3}{2}((g,h)_2,f)_2 + \lambda_1((g,h)_3,f)_1 + \lambda_2((g,h)_4,f)_0 \quad (2.23)$$

Si en (2.22) se intercambia f por h se obtiene

$$((h,g)_3,f)_1 + \frac{1}{2}((h,g)_4,f)_0 = ((h,f)_1,g)_3 + \frac{3}{2}((h,f)_2,g)_2 + \lambda_1((h,f)_3,g)_1 + \lambda_2((h,f)_4,g)_0 \quad (2.24)$$

Si en (2.22) se intercambia g por h se obtiene

$$((f,h)_3,g)_1 + \frac{1}{2}((f,h)_4,g)_0 = ((f,g)_1,h)_3 + \frac{3}{2}((f,g)_2,h)_2 + \lambda_1((f,g)_3,h)_1 + \lambda_2((f,g)_4,h)_0 \quad (2.25)$$

Si en (2.22) se cambia f por g, g por h y h por f se obtiene

$$((g,h)_3,f)_1 + \frac{1}{2}((g,h)_4,f)_0 = ((g,f)_1,h)_3 + \frac{3}{2}((g,f)_2,h)_2 + \lambda_1((g,f)_3,h)_1 + \lambda_2((g,f)_4,h)_0 \quad (2.26)$$

Si en (2.22) se cambia f por h, h por g y g por f se obtiene

$$((h,f)_3,g)_1 + \frac{1}{2}((h,f)_4,g)_0 = ((h,g)_1,f)_3 + \frac{3}{2}((h,g)_2,f)_2 + \lambda_1((h,g)_3,f)_1 + \lambda_2((h,g)_4,f)_0 \quad (2.27)$$

Operando las anteriores expresiones de la siguiente forma:

$$(2.23) - (2.22) + (2.24) - (2.26) + (2.25) - (2.27),$$

y haciendo uso de la propiedad $(a,b)_k = (-1)^k(b,a)_k$ de las transvecciones se llega a

$$2(\lambda_1 - 1)[((f,g)_3,h)_1 + ((g,h)_3,f)_1 + ((h,f)_3,g)_1] = 2((f,g)_1,h)_3 + 2((g,h)_1,f)_3 + 2((h,f)_1,g)_3.$$

Por el Lema 2.3.3 $((f,g)_3,h)_1 + ((g,h)_3,f)_1 + ((h,f)_3,g)_1 = 0$. Luego:

$$0 = ((f,g)_1,h)_3 + ((g,h)_1,f)_3 + ((h,f)_1,g)_3,$$

que coincide con la identidad buscada.

Veamos ahora que esta identidad también se tiene para el caso $n = 3$. La fórmula de Gordan dada por los valores $\begin{pmatrix} f & g & h \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ para $f, g, h \in V_3$ proporciona la identidad

$$((f,g)_2,h)_2 = -\frac{1}{2}((f,h)_2,g)_2 - ((f,h)_1,g)_3. \quad (2.28)$$

Intercambiando f por g se tiene

$$((g,f)_2,h)_2 = -\frac{1}{2}((g,h)_2,f)_2 - ((g,h)_1,f)_3. \quad (2.29)$$

Si en (2.28) se intercambia f por h se obtiene

$$((h,g)_2,f)_2 = -\frac{1}{2}((h,f)_2,g)_2 - ((h,f)_1,g)_3. \quad (2.30)$$

Si en (2.28) se intercambia g por h se obtiene

$$((f,h)_2,g)_2 = -\frac{1}{2}((f,g)_2,h)_2 - ((f,g)_1,h)_3. \quad (2.31)$$

Si en (2.28) se cambia f por g, g por h y h por f se obtiene

$$((g,h)_2,f)_2 = -\frac{1}{2}((g,f)_2,h)_2 - ((g,f)_1,h)_3. \quad (2.32)$$

Si en (2.28) se cambia f por h, h por g y g por f se obtiene

$$((h,f)_2,g)_2 = -\frac{1}{2}((h,g)_2,f)_2 - ((h,g)_1,f)_3. \tag{2.33}$$

Operando las anteriores expresiones de la siguiente forma:

$$(2.29) - (2.28) + (2.30) - (2.32) + (2.31) - (2.33),$$

y simplificando haciendo uso de la propiedad $(a,b)_k = (-1)^k(b,a)_k$ de las transvecciones, se obtiene

$$0 = -2((f,g)_1,h)_3 - 2((g,h)_1,f)_3 - 2((h,f)_1,g)_3,$$

que coincide con la identidad buscada. Quedando así completamente probado el Lema. □

Los anteriores resultados buscaban todos ellos encontrar diferentes espacios vectoriales que fueran álgebras de Lie con productos no nulos p_{112} y p_{123}. A continuación, mostramos una serie de lemas que buscan lo contrario, es decir, encontrar espacios vectoriales que no cumplan la identidad de Jacobi si los productos son no nulos, y por lo tanto que no sean álgebras de Lie. Pero antes, aclararemos algunas notaciones que utilizaremos en estos lemas.

Notación 2.3.5. Sea $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-2k) \oplus V(3n-2k-2r)$ espacio vectorial, con $n \geq 1$, $k \leq n$ y $3n-2k-2r \leq |n-2k|$. Las bases de los módulos irreducibles que aparecen en la descomposición de L las representaremos como sigue. Para $V(n)$ la base vendrá dada por $\mathcal{B}(V(n)) := \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, para $V(2n-2k)$ como $\mathcal{B}(V(2n-2k)) := \{w_0, w_1, \ldots, w_{2n-2k}\}$ y para $V(3n-2k-2r)$ como $\mathcal{B}(V(3n-2k-2r)) := \{u_0, u_1, \ldots, u_{3n-2k-2r}\}$.

Notación 2.3.6. Sea $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-2k) \oplus V(3n-2k-2r)$ espacio vectorial, con $n \geq 1$, $k \leq n$ y $3n-2k-2r \leq |n-2k|$. Al par de enteros (k,r) lo llamamos *par de transvecciones* de L. Esto se debe a que en este espacio vectorial el producto entre dos elementos de V_n viene dado por la k-transvección, y el producto entre un elemento de V_n y otro de V_{2n-2k} viene dado por la r-transvección.

Lema 2.3.7. Sea un entero $n \geq 2$. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-6)$ no es álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\,,\,\cdot)_1$ y $p_{123} = \beta(\cdot\,,\,\cdot)_2$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par de transvecciones es el $(1,2)$. Para $a,b,c \in V(n)$, la identidad de Jacobi vendría dada por

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(a,b,c)}} \alpha\beta((a,b)_1,c)_2 = 0.$$

Si $\alpha\beta \neq 0$ la terna de elementos $v_0, v_1, v_2 \in V(n)$ no verifica dicha identidad. En efecto:

$$((v_0,v_1)_1,v_2)_2 = (\frac{1}{n}w_0,v_2)_2 = \frac{2}{n^2(n-1)}u_0.$$

$$((v_1,v_2)_1,v_0)_2 = (\frac{1}{n}w_2,v_0)_2 = \frac{2}{n(2n-2)(2n-3)}u_0.$$

$$((v_2,v_0)_1,v_1)_2 = (\frac{-2}{n}w_1,v_1)_2 = \frac{2}{n^2(n-1)}u_0.$$

De forma que tenemos que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(v_0,v_1,v_2)}} ((v_0,v_1)_1,v_2)_2 = \frac{9n-12}{n^2(2n-3)(n-1)}u_0$$

que es distinto de cero puesto que $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ y obviamente $u_0 \neq 0$. De forma que queda así probado que para cada $n \geq 2$ el espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-6)$ no es álgebra de Lie. □

Lema 2.3.8. Sea un entero $n \geq 4$. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-10)$ no es álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_1$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_4$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par de transvecciones es el $(1,4)$. Para $a, b, c \in V(n)$, la identidad de Jacobi vendría dada por

$$\sum_{\substack{\text{cíclica} \\ (a,b,c)}} \alpha\beta((a,b)_1, c)_4 = 0.$$

Si $\alpha\beta \neq 0$ la terna de elementos $v_1, v_2, v_3 \in V(n)$ no verifica dicha identidad. En efecto:

$$((v_1,v_2)_1, v_3)_4 = (\frac{1}{n} w_2, v_3)_4 = -\frac{48}{n(n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)} u_1.$$

$$((v_2,v_3)_1, v_1)_4 = (\frac{1}{n} w_4, v_1)_4 = -\frac{24(7n-20)}{n^2(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)} u_1.$$

$$((v_3,v_1)_1, v_2)_4 = (\frac{-2}{n} w_3, v_2)_4 = -\frac{96(2n-5)}{n^2(n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)} u_1.$$

De forma que tenemos que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica} \\ (v_1,v_2,v_3)}} ((v_1,v_2)_1, v_3)_4 = -\frac{72(3n-8)(3n-5)}{n^2(n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5))} u_1$$

que es distinto de cero puesto que $n \geq 4, n \in \mathbb{Z}$ y obviamente $u_1 \neq 0$. De forma que queda así probado que para cada $n \geq 4$ el espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-10)$ no es álgebra de Lie. $\square$

Lema 2.3.9. Sea un entero $n \geq 5$. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-12)$ no es álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_1$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_5$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par de transvecciones es el $(1,5)$. Para $a, b, c \in V(n)$, la identidad de Jacobi vendría dada por

$$\sum_{\substack{\text{cíclica} \\ (a,b,c)}} \alpha\beta((a,b)_1, c)_5 = 0.$$

Si $\alpha\beta \neq 0$ la terna de elementos $v_1, v_2, v_3 \in V(n)$ no verifica dicha identidad. En efecto:

$$((v_1,v_2)_1, v_3)_5 = (\frac{1}{n} w_2, v_3)_5 = \frac{480(n-3)}{(n-1)n^2(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-6)} u_0.$$

$$((v_2,v_3)_1, v_1)_5 = (\frac{1}{n} w_4, v_1)_5 = \frac{240(n-3)}{n^2(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6)} u_0.$$

$$((v_3,v_1)_1, v_2)_5 = (\frac{-2}{n} w_3, v_2)_5 = \frac{480(n-3)}{(n-1)n^2(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-6)} u_0.$$

De forma que tenemos que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica} \\ (v_1,v_2,v_3)}} ((v_1,v_2)_1, v_3)_5 = \frac{720(3n-7)(n-3)}{(n-1)n^2(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6)} u_0,$$

que es distinto de cero puesto que $n \geq 5, n \in \mathbb{Z}$ y obviamente $u_0 \neq 0$. De forma que queda así probado que para cada $n \geq 5$ el espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-12)$ no es álgebra de Lie. $\square$

Lema 2.3.10. Sea un entero $n \geq 6$. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-14)$ no es álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_1$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_6$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par de transvecciones es el $(1,6)$. Para $a, b, c \in V(n)$, la identidad de Jacobi vendría dada por

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(a,b,c)}} ((a,b)_1, c)_6 = 0.$$

Si $\alpha\beta \neq 0$ la terna de elementos $v_1, v_3, v_5 \in V(n)$ no verifica dicha identidad. En efecto:

$$((v_1,v_3)_1, v_5)_6 = (\frac{2}{n}w_3, v_5)_6 = \frac{11520(n-7)}{(n-1)(n-2)(n-4)n^2(2n-2)(2n-4)(2n-6)}u_2.$$
$$((v_3,v_5)_1, v_1)_6 = (\frac{2}{n}w_7, v_1)_6 = \frac{-10080(5n-21)}{n^2(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6)(2n-7)}u_2.$$
$$((v_5,v_1)_1, v_3)_6 = (\frac{-4}{n}w_5, v_3)_6 = \frac{2880(13n^2-79n+126)}{(n-1)(n-2)n^2(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6)}u_2.$$

De forma que tenemos que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(v_1,v_3,v_5)}} ((v_1,v_3)_1, v_5)_6 = -\frac{540(n-7)(3n-10)(3n-8)(3n-7)}{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)(n-4)(2n-3)(2n-5)(2n-7)}u_2,$$

que es distinto de cero para $n \neq 7$ entero y $n \geq 6$ y obviamente $u_2 \neq 0$. Para el caso $n = 7$ la 3-tupla v_2, v_3, v_5 proporciona un ejemplo en el que no se cumple la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_2,v_3)_1, v_5)_6 + ((v_3,v_5)_1, v_2)_6 + ((v_5,v_2)_1, v_3)_6 = (\frac{1}{7}w_4, v_5)_6 + (\frac{2}{7}w_7, v_2)_6 +$$
$$+ (-\frac{3}{7}w_6, v_3)_6 = \frac{1}{693}u_3 + \frac{5}{1386}u_3 + \frac{5}{2156}u_3 = \frac{13}{1764}u_3 \neq 0.$$

De forma que queda así probado que para cada $n \geq 6$ el espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-14)$ no es álgebra de Lie. □

Lema 2.3.11. Sea un entero $n \geq 3$. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-6) \oplus V(3n-6)$ no es álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_3$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_0$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par de transvecciones es el $(3,0)$. Para $a, b, c \in V(n)$, la identidad de Jacobi vendría dada por

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(a,b,c)}} ((a,b)_3, c)_0 = 0.$$

Si $\alpha\beta \neq 0$ la terna de elementos $v_1, v_2, v_3 \in V(n)$ no verifica dicha identidad. En efecto:

$$((v_1,v_2)_3, v_3)_0 = (-\frac{6}{(n-1)n^2}w_0, v_3)_0 = -\frac{6}{(n-1)n^2}u_3.$$
$$((v_2,v_3)_3, v_1)_0 = (\frac{-12(n-3)}{(n-1)(n-2)n^2}w_2, v_1)_0 = \frac{-12(n-3)}{(n-1)(n-2)n^2}u_3.$$
$$((v_3,v_1)_3, v_2)_0 = (\frac{12(n-3)}{(n-1)(n-2)n^2}w_1, v_2)_0 = \frac{12(n-3)}{(n-1)(n-2)n^2}u_3.$$

De forma que tenemos que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(v_1,v_2,v_3)}} ((v_1,v_2)_3, v_0)_4 = -\frac{6}{(n-1)n^2}u_3,$$

que es distinto de cero puesto que $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ y obviamente $u_3 \neq 0$. De forma que queda así probado que para cada $n \geq 3$ el espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-6) \oplus V(3n-6)$ no es álgebra de Lie. □

Lema 2.3.12. Sea un entero $n \geq 3$. El espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-6) \oplus V(3n-10)$ no es álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_3$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_2$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par de transvecciones es el $(3, 2)$. Para $a, b, c \in V(n)$, la identidad de Jacobi vendría dada por

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(a,b,c)}} ((a, b)_3, c)_2 = 0.$$

Si $\alpha\beta \neq 0$ la terna de elementos $v_1, v_2, v_3 \in V(n)$ no verifica dicha identidad. En efecto:

$$((v_1, v_2)_3, v_3)_2 = (-\frac{6}{(n-1)n^2} w_0, v_3)_2 = -\frac{36}{(n-1)^2 n^3} u_1.$$

$$((v_2, v_3)_3, v_1)_2 = (\frac{-12(n-3)}{(n-1)(n-2)n^2} w_2, v_1)_2 = \frac{12(3n-14)}{(n-1)(n-2)n^3(2n-7)} u_1.$$

$$((v_3, v_1)_3, v_2)_2 = (\frac{12(n-3)}{(n-1)(n-2)n^2} w_1, v_2)_2 = -\frac{48}{(n-1)^2(n-2)n^3} u_1.$$

De forma que tenemos que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(v_1,v_2,v_3)}} ((v_1, v_2)_3, v_0)_2 = -\frac{12(3n-8)}{(n-2)(n-1)^2 n^2 (2n-7)} u_1,$$

que es distinto de cero puesto que $n \geq 4, n \in \mathbb{Z}$ y obviamente $u_1 \neq 0$. De forma que queda así probado que para cada $n \geq 4$ el espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-6) \oplus V(3n-10)$ no es álgebra de Lie. $\square$

Ya hemos visto multitud de lemas que prueban que distintos espacios vectoriales son o no álgebras de Lie. El álgebra de Lie de dimensión más grande para un módulo irreducible $V(n) \cong N/N^2$ es la que viene dada al tomar $V(2n-2) \cong N^2/N^3$ y $V(3n-2) \cong N^3$, luego determinada por las transvecciones asociadas al par $(k, r) = (1, 0)$. Ahora el objetivo podría ser tratar de construir las álgebras de Lie de dimensión más pequeña. Si n es impar la dimensión minimal vendría dada al tomar $V(0) \cong N^2/N^3$ y, en el caso par, al considerar $V(2) \cong N^2/N^3$. Sin embargo, los espacios vectoriales de dimensión minimal no son álgebras de Lie si $\alpha\beta \neq 0$ de forma general.

Lema 2.3.13. Para cualquier entero impar $n \geq 3$ $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(0) \oplus V(n)$ no es un álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_n$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_0$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par (k, r) correspondiente es el $(n, 0)$ y por tanto se están usando la n-transvección y la 0-transvección respectivamente. Para el caso $n = 3$, la terna de elementos de la base de $V(n)$ formada por $\{v_1, v_2, v_3\}$ nos proporciona un contraejemplo para probar que no se cumple la identidad de Jacobi y que por tanto no puede ser que $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(3) \oplus V(0) \oplus V(3)$ sea álgebra de Lie. Esta afirmación queda probada en el ejemplo 2.2.2 Si $n \geq 5$ la terna $\{v_1, v_2, v_{(n-1)}\}$ nos da un ejemplo en el que no se cumple la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_1, v_2)_n, v_{(n-1)})_0 = (0, v_{(n-1)})_0 = 0.$$

$$((v_2, v_{(n-1)})_n, v_1)_0 = (0, v_1)_0 = 0.$$

$$((v_{(n-1)}, v_1)_n, v_2)_0 = (\frac{1}{n} w_0, v_2)_0 = \frac{1}{n} u_2.$$

y sumando las tres expresiones anteriores se tiene que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(v_1,v_2,v_{(n-1)})}} ((v_1, v_2)_n, v_{(n-1)})_2 = \frac{1}{n} u_2 \neq 0.$$

De forma que queda así probado que para cada $n \geq 3$ el par $(n, 0)$ no proporciona un álgebra de Lie si $\alpha\beta \neq 0$. $\square$

Lema 2.3.14. Para cualquier entero par $2q = n \geq 4$, $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2) \oplus V(n+2)$ no es un álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_{n-1}$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_0$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par (k, r) correspondiente es el $(n-1, 0)$ y por tanto se están usando la $(n-1)$-transvección y la 0-transvección respectivamente. Veamos que la terna $\{v_0, v_3, v_n\}$ nos da un ejemplo en el que no se cumple la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_0, v_n)_{n-1}, v_3)_0 = (w_1, v_3)_0 = u_4.$$

$$((v_n, v_3)_{n-1}, v_0)_0 = (0, v_0)_0 = 0.$$

$$((v_3, v_0)_{n-1}, v_n)_0 = (0, v_n)_0 = 0.$$

y sumando las tres expresiones anteriores se tiene que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(v_0,v_n,v_3)}} ((v_0, v_n)_{n-1}, v_3)_0 = u_4 \neq 0.$$

De forma que queda así probado que para cada $n \geq 6$ el par $(n-1, 0)$ no proporciona un álgebra de Lie si $\alpha\beta \neq 0$. □

Lema 2.3.15. Para cualquier entero par $2q = n \geq 6$, $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2) \oplus V(n)$ no es un álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_{n-1}$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_1$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par (k, r) correspondiente es el $(n-1, 1)$ y por tanto se están usando la $(n-1)$-transvección y la 1-transvección respectivamente. Veamos que la terna $\{v_0, v_n, v_4\}$ nos da un ejemplo en el que no se cumple la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_0, v_n)_{n-1}, v_4)_1 = (w_1, v_4)_1 = \frac{8-n}{2n} u_4.$$

$$((v_n, v_4)_{n-1}, v_0)_1 = (0, v_0)_1 = 0.$$

$$((v_4, v_0)_{n-1}, v_n)_1 = (0, v_n)_1 = 0.$$

y sumando las tres expresiones anteriores se tiene que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(v_0,v_n,v_4)}} ((v_0, v_n)_{n-1}, v_4)_1 = \frac{8-n}{2n} u_4 \neq 0 \text{ para } n \geq 6, n \neq 8.$$

Para el caso $n = 8$ la terna de elementos $\{v_0, v_5, v_8\}$ proporciona un contraejemplo de la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_0, v_5)_7, v_8)_1 + ((v_5, v_8)_7, v_0)_1 + ((v_8, v_0)_7, v_5)_1 = (0, v_8)_1 + (0, v_0)_1 - (w_1, v_5)_1 = -\frac{1}{8} u_5 \neq 0.$$

De forma que queda así probado que para cada $n \geq 6$ el par $(n-1, 1)$ no proporciona un álgebra de Lie si $\alpha\beta \neq 0$. □

Lema 2.3.16. Para cualquier entero par $2q = n \geq 6$, $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2) \oplus V(n-2)$ no es un álgebra de Lie si usamos como productos $p_{112} = \alpha(\cdot\ ,\ \cdot)_{n-1}$ y $p_{123} = \beta(\cdot\ ,\ \cdot)_2$ salvo que $\alpha\beta = 0$.

Demostración. Notar que en este caso el par (k, r) correspondiente es el $(n-1, 2)$ y por tanto se están usando la $(n-1)$-transvección y la 2-transvección respectivamente. Veamos que la terna $\{v_0, v_n, v_4\}$ nos da un ejemplo en el que no se cumple la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_0, v_n)_{n-1}, v_4)_2 = (w_1, v_4)_2 = \frac{4(4-n)}{n(n-1)} u_3.$$

$$((v_n, v_4)_{n-1}, v_0)_2 = (0, v_0)_2 = 0.$$

$$((v_4, v_0)_{n-1}, v_n)_2 = (0, v_n)_2 = 0.$$

y sumando las tres expresiones anteriores se tiene que

$$\sum_{\substack{\text{cíclica}\\(v_0,v_n,v_4)}} ((v_0, v_n)_{n-1}, v_4)_2 = \frac{4(4-n)}{n(n-1)} u_3 \neq 0 \text{ para } n \geq 6.$$

De forma que queda así probado que para cada $n \geq 6$ el par $(n-1, 2)$ no proporciona un álgebra de Lie si $\alpha\beta \neq 0$. $\square$

Notar que el Lema 2.3.16 también se cumple para $n = 4$, pero esto es un caso particular del Lema 2.3.12.

2.3.2. Clasificación de las álgebras con dim$(N/N^2) \leq 7$

Los lemas estudiados en el apartado anterior nos sugieren la idea de estudiar en profundidad algunas álgebras de Lie. En esta sección estudiaremos cuáles son todas las álgebras de Lie no resolubles con factor de Levi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, con 5 ideales formando una cadena, y tal que $\dim(N/N^2) \leq 7$. En el [1]Cuadro 2.1 se recogen todas ellas.

Veamos ahora que, en efecto, las álgebras de Lie que aparecen en el Cuadro 2.1 lo son, y que además estas son todas. Recordar que un par de transvecciones (k, r) debe cumplir que $2n-2k \geq 0$ y que $3n-2k-2r \geq |2n-2k-n| = |n-2k|$. Estudiaremos ahora todos los pares que pueden aparecer en la tabla y decidiremos si el espacio espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(2n-2k) \oplus V(3n-2k-2r)$ es álgebra de Lie.

1. El par $(1, 0)$ proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 1$ por el Lema 2.3.1.
2. El par $(1, 1)$ proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 2$ por el Lema 2.3.2.
3. El par $(1, 2)$ no proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 2$ por el Lema 2.3.7.
4. El par $(1, 3)$ proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 3$ por el Lema 2.3.4.
5. El par $(1, 4)$ no proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 4$ por el Lema 2.3.8.
6. El par $(1, 5)$ no proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 5$ por el Lema 2.3.9.
7. El par $(1, 6)$ no proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 6$ por el Lema 2.3.10.
8. El par $(3, 0)$ no proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 3$ por el Lema 2.3.11.
9. El par $(3, 1)$ proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 4$ por el Lema 2.3.3.
10. El par $(3, 2)$ no proporciona un álgebra de Lie para todo $n \geq 4$ por el Lema 2.3.12.
11. El par $(3, 3)$ solo tiene sentido para $n \geq 5$ y en estos casos la 3-tupla v_1, v_2, v_3 proporciona un contraejemplo de la identidad de Jacobi. En efecto, para $n = 5$,

$$((v_1, v_2)_3, v_3)_3 + ((v_2, v_3)_3, v_1)_3 + ((v_3, v_1)_3, v_2)_3 = (-\frac{3}{50} w_0, v_3)_3 + (-\frac{2}{25} w_2, v_1)_3 + (\frac{2}{25} w_1, v_2)_3 = -\frac{3}{500} u_0 - \frac{1}{125} u_0 - \frac{3}{500} u_0 = -\frac{1}{50} u_0 \neq 0.$$

Mientras que para $n = 6$,

$$((v_1, v_2)_3, v_3)_3 + ((v_2, v_3)_3, v_1)_3 + ((v_3, v_1)_3, v_2)_3 = (-\frac{1}{30} w_0, v_3)_3 + (-\frac{1}{20} w_2, v_1)_3 + (\frac{1}{20} w_1, v_2)_3 = -\frac{1}{600} u_0 - \frac{1}{600} u_0 - \frac{1}{600} u_0 = -\frac{1}{200} u_0 \neq 0.$$

[1]La segunda columna etiquetada con $V(s)$ contiene en realidad uno de los módulos que aparecen en la descomposición en módulos irreducibles de $\Lambda^2 V(n)$. Para un mismo n, la suma de los módulos $V(s)$ de la segunda columna proporciona la descomposición en irreducibles de $\Lambda^2 V(n)$.

Cuadro 2.1: Álgebras de Lie con 5 ideales en cadena y $\dim(N/N^2) \leq 7$

n	$V(s)$	$\Lambda^3 V(n)$	$V(n) \otimes V(s)$	Cadena de ideales propios	(k,r)
1	$V(0)$	0	$V(1)$	$\bullet\overset{V(1)}{\text{—}}\bullet\overset{V(0)}{\text{—}}\bullet\overset{V(1)}{\text{—}}\bullet$	$(1,0)$
2	$V(2)$	$V(0)$	$V(4) \oplus V(2) \oplus V(0)$	$\bullet\overset{V(2)}{\text{—}}\bullet\overset{V(2)}{\text{—}}\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(2)}{\text{—}}\bullet\overset{V(2)}{\text{—}}\bullet\overset{V(2)}{\text{—}}\bullet$	$(1,0)$ $(1,1)$
3	$V(4)$	$V(3)$	$V(7) \oplus V(5) \oplus V(3) \oplus V(1)$	$\bullet\overset{V(3)}{\text{—}}\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(7)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(3)}{\text{—}}\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(5)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(3)}{\text{—}}\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(1)}{\text{—}}\bullet$	$(1,0)$ $(1,1)$ $(1,3)$
	$V(0)$		$V(3)$	No posible	-
4	$V(6)$	$V(2) \oplus V(6)$	$V(10) \oplus V(8) \cdots \oplus V(2)$	$\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(10)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(8)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet$	$(1,0)$ $(1,1)$ $(1,3)$
	$V(2)$		$V(6) \oplus V(4) \oplus V(2)$	$\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(2)}{\text{—}}\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet$	$(3,1)$
5	$V(8)$	$V(9) \oplus V(5) \oplus V(3)$	$V(13) \oplus V(11) \cdots \oplus V(3)$	$\bullet\overset{V(5)}{\text{—}}\bullet\overset{V(8)}{\text{—}}\bullet\overset{V(13)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(5)}{\text{—}}\bullet\overset{V(8)}{\text{—}}\bullet\overset{V(11)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(5)}{\text{—}}\bullet\overset{V(8)}{\text{—}}\bullet\overset{V(7)}{\text{—}}\bullet$	$(1,0)$ $(1,1)$ $(1,3)$
	$V(4)$		$V(9) \oplus V(7) \cdots \oplus V(1)$	$\bullet\overset{V(5)}{\text{—}}\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(7)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(5)}{\text{—}}\bullet\overset{V(4)}{\text{—}}\bullet\overset{V(1)}{\text{—}}\bullet$	$(3,1)$ $(3,4)$
	$V(0)$		$V(5)$	No posible	-
6	$V(10)$	$V(12) \oplus V(8) \oplus V(6) \oplus$ $\oplus\ V(4) \oplus V(0)$	$V(16) \oplus V(14) \cdots \oplus V(4)$	$\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(10)}{\text{—}}\bullet\overset{V(16)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(10)}{\text{—}}\bullet\overset{V(14)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(10)}{\text{—}}\bullet\overset{V(10)}{\text{—}}\bullet$	$(1,0)$ $(1,1)$ $(1,3)$
	$V(6)$		$V(12) \oplus V(10) \cdots \oplus V(0)$	$\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(10)}{\text{—}}\bullet$ $\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(6)}{\text{—}}\bullet\overset{V(2)}{\text{—}}\bullet$	$(3,1)$ $(3,5)$
	$V(2)$		$V(8) \oplus V(6) \oplus V(4)$	No posible	-

12. El par $(3,4)$ solo tiene sentido para $n \geq 5$. Para $n = 5$, se corresponde con el espacio vectorial $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(5) \oplus V(4) \oplus V(1)$, que es álgebra de Lie puesto que se verifica la identidad (2.3) como se muestra a continuación. La fórmula de Gordan dada por los valores $\begin{pmatrix} f & g & h \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ para $f, g, h \in V_5$ proporciona la siguiente identidad:

$$((f,g)_3, h)_4 = \frac{1}{2}((f,h)_3, g)_4 + ((f,h)_2, g)_5. \tag{2.34}$$

Si en la anterior expresión se intercambia f por h se obtiene

$$((h,g)_3, f)_4 = \frac{1}{2}((h,f)_3, g)_4 + ((h,f)_2, g)_5,$$

que puede ser reescrita como

$$-((g,h)_3,f)_4 = -\frac{1}{2}((f,h)_3,g)_4 + ((f,h)_2,g)_5, \tag{2.35}$$

y restando (2.34)-(2.35) se obtiene

$$((f,g)_3,h)_4 + ((g,h)_3,f)_4 = ((f,h)_3,g)_4,$$

que coincide con la identidad (2.3) buscada puesto que $((f,h)_3,g)_4 = -((h,f)_3,g)_4$.

Para el caso $n=6$ la 3-tupla v_2, v_3, v_5, proporciona un caso en el que no se cumple la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_2,v_3)_3,v_5)_4 + ((v_3,v_5)_3,v_2)_4 + ((v_5,v_2)_3,v_3)_4 = (-\frac{1}{20}w_2,v_5)_4 + (-\frac{1}{20}w_5,v_2)_4 + (0,v_3)_4 = \frac{1}{300}u_3 + \frac{1}{300}u_3 = \frac{1}{150}u_3 \neq 0.$$

13. El $(3,5)$ solo tiene sentido para $n=6$. El espacio vectorial correspondiente, $L = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(6) \oplus V(6) \oplus V(2)$, es álgebra de Lie puesto que se verifica la identidad (2.3). En efecto, la fórmula de Gordan dada por los valores $\begin{pmatrix} f & g & h \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ para $f,g,h \in V_6$ proporciona la siguiente identidad:

$$((f,g)_4,h)_4 = \frac{2}{7}((f,h)_4,g)_4 + ((f,h)_3,g)_5 + ((f,h)_2,g)_6. \tag{2.36}$$

Intercambiando f por g se tiene

$$((g,f)_4,h)_4 = \frac{2}{7}((g,h)_4,f)_4 + ((g,h)_3,f)_5 + ((g,h)_2,f)_6. \tag{2.37}$$

Si en (2.36) se intercambia f por h se obtiene

$$((h,g)_4,f)_4 = \frac{2}{7}((h,f)_4,g)_4 + ((h,f)_3,g)_5 + ((h,f)_2,g)_6. \tag{2.38}$$

Si en (2.36) se intercambia g por h se obtiene

$$((f,h)_4,g)_4 = \frac{2}{7}((f,g)_4,h)_4 + ((f,g)_3,h)_5 + ((f,g)_2,h)_6. \tag{2.39}$$

Si en (2.36) se cambia f por g, g por h y h por f se obtiene

$$((g,h)_4,f)_4 = \frac{2}{7}((g,f)_4,h)_4 + ((g,f)_3,h)_5 + ((g,f)_2,h)_6. \tag{2.40}$$

Si en (2.36) se cambia f por h, h por g y g por f se obtiene

$$((h,f)_4,g)_4 = \frac{2}{7}((h,g)_4,f)_4 + ((h,g)_3,f)_5 + ((h,g)_2,f)_6. \tag{2.41}$$

Operando las anteriores expresiones de la siguiente forma:

$$(2.37) - (2.36) + (2.38) - (2.40) + (2.39) - (2.41),$$

se llega a

$$0 = 2((f,g)_3,h)_5 + 2((g,h)_3,f)_5 + 2((h,f)_3,g)_5,$$

que coincide con la identidad (2.3).

14. El par(3,6) solo tienen sentido para $n=6$. En este caso, no proporciona un álgebra de Lie, puesto que la 3-tupla v_1, v_3, v_5 proporciona un contraejemplo de la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_1,v_3)_3,v_5)_6 + ((v_3,v_5)_3,v_1)_6 + ((v_5,v_1)_3,v_3)_6 = (-\frac{1}{20}w_1,v_5)_6 + (-\frac{1}{20}w_5,v_2)_6 + (-\frac{1}{6}w_3,v_3)_6 = \frac{1}{120}u_0 + \frac{1}{120}u_0 + \frac{1}{120}u_0 = \frac{1}{40}u_0 \neq 0.$$

15. El par $(5,0)$ solo tiene sentido para $n=5,6$. En estos casos, la 3-tupla v_1, v_4, v_5 nos proporciona un contraejemplo de la identidad. Así, para $n=5$

$$((v_1,v_4)_5,v_5)_0+((v_4,v_5)_5,v_1)_0+((v_5,v_1)_5,v_4)_0=(-\frac{1}{5}w_0,v_5)_0+(0,v_1)_0+(0,v_4)_0=-\frac{1}{5}u_0\neq 0.$$

Mientras que para $n=6$

$$((v_1,v_4)_5,v_5)_0+((v_4,v_5)_5,v_1)_0+((v_5,v_1)_5,v_4)_0=(-\frac{1}{18}w_0,v_5)_0+(0,v_1)_0+(\frac{1}{9}w_1,v_4)_0= \\ -\frac{1}{18}u_5+\frac{1}{9}u_5=\frac{1}{18}u_5\neq 0.$$

16. El par$(5,1)$ solo tienen sentido para $n=6$. En este caso, no proporciona un álgebra de Lie, puesto que la 3-tupla v_1, v_4, v_5 proporciona un contraejemplo de la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_1,v_4)_5,v_5)_1+((v_4,v_5)_5,v_1)_1+((v_5,v_1)_5,v_4)_1=(-\frac{1}{18}w_0,v_5)_1+(0,v_1)_1+(\frac{1}{9}w_1,v_4)_1= \\ -\frac{5}{108}u_4+\frac{1}{54}u_4=-\frac{1}{36}u_4\neq 0.$$

17. El par$(5,2)$ solo tienen sentido para $n=6$. En este caso, no proporciona un álgebra de Lie, puesto que la 3-tupla v_1, v_4, v_5 proporciona un contraejemplo de la identidad de Jacobi. En efecto,

$$((v_1,v_4)_5,v_5)_2+((v_4,v_5)_5,v_1)_2+((v_5,v_1)_5,v_4)_2=(-\frac{1}{18}w_0,v_5)_2+(0,v_1)_2+(\frac{1}{9}w_1,v_4)_2= \\ -\frac{1}{27}u_3-\frac{4}{135}u_3=-\frac{1}{15}u_3\neq 0.$$

De esta forma queda completamente demostrada la veracidad de la tabla.

2.3.3. Generación de tablas

En esta última sección construiremos las tablas de multiplicar de algunas álgebras de Lie cuyo factor de Levi es el álgebra simple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y cuyo estructura de nilradical aparece en el Cuadro 2.1. Es decir, álgebras de la forma $\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus N$, donde N será un suma de módulos irreducibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Las tablas de multiplicar han sido generadas mediante el programa incluido en el anexo de esta memoria. En los productos dados por las transvecciones hemos supuesto que $\alpha=\beta=1$. La introducción de múltiplos escalares no nulos de las transvecciones proporciona también álgebras de Lie.

- El álgebra de Lie

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus V(1)\oplus V(0)\oplus V(1)=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus \mathrm{span}\langle v_0,v_1\rangle\oplus \mathrm{span}\langle w_0\rangle\oplus \mathrm{span}\langle u_0,u_1\rangle$$

viene dada por la multiplicación

$$[v_0,v_1]=w_0$$
$$[v_0,w_0]=u_0$$
$$[v_1,w_0]=u_1$$

- El álgebra de Lie

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus V(2)\oplus V(2)\oplus V(2)=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus\ \mathrm{span}\langle v_0,v_1,v_2\rangle\ \oplus\ \mathrm{span}\langle w_0,w_1,w_2\rangle\ \oplus\mathrm{span}\langle u_0,u_1,u_2\rangle$$

viene dada por la multiplicación

$$[v_0,v_1]=\frac{1}{2}w_0;\ [v_0,v_2]=w_1;\ [v_1,v_2]=\frac{1}{2}w_2$$
$$[v_0,w_1]=\frac{1}{2}u_0;\ [v_0,w_2]=u_1;\ [v_1,w_0]=-\frac{1}{2}u_0$$
$$[v_1,w_2]=\frac{1}{2}u_2;\ [v_2,w_0]=-u_1;\ [v_2,w_1]=-\frac{1}{2}u_2$$

- El álgebra de Lie

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus V(3)\oplus V(4)\oplus V(7)=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus\ \operatorname{span}\langle v_0,v_1,v_2,v_3\rangle\ \oplus\ \operatorname{span}\langle w_0,w_1,w_2,w_3,w_4\rangle\ \oplus$$
$$\oplus\operatorname{span}\langle u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\rangle$$

viene dada por la multiplicación

$$[v_0,v_1]=\frac{1}{3}w_0;\ [v_0,v_2]=\frac{2}{3}w_1;\ [v_0,v_3]=w_2$$
$$[v_1,v_2]=\frac{1}{3}w_2;\ [v_1,v_3]=\frac{2}{3}w_3;\ [v_2,v_3]=\frac{1}{3}w_4$$
$$[v_0,w_0]=u_0;\ [v_0,w_1]=u_1;\ [v_0,w_2]=u_2;\ [v_0,w_3]=u_3;\ [v_0,w_4]=u_4$$
$$[v_1,w_0]=u_1;\ [v_1,w_1]=u_2;\ [v_1,w_2]=u_3;\ [v_1,w_3]=u_4;\ [v_1,w_4]=u_5$$
$$[v_2,w_0]=u_2;\ [v_2,w_1]=u_3;\ [v_2,w_2]=u_4;\ [v_2,w_3]=u_5;\ [v_2,w_4]=u_6$$
$$[v_3,w_0]=u_3;\ [v_3,w_1]=u_4;\ [v_3,w_2]=u_5;\ [v_3,w_3]=u_6;\ [v_3,w_4]=u_7$$

- El álgebra de Lie

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus V(4)\oplus V(2)\oplus V(4)=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus\ \operatorname{span}\langle v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\rangle\ \oplus\ \operatorname{span}\langle w_0,w_1,w_2\rangle\ \oplus$$
$$\oplus\operatorname{span}\langle u_0,u_1,u_2,u_3,u_4\rangle$$

viene dada por la multiplicación

$$[v_0,v_3]=\frac{1}{4}w_0;\ [v_0,v_4]=w_1;\ [v_1,v_2]=-\frac{1}{8}w_0$$
$$[v_1,v_3]=-\frac{1}{8}w_1;\ [v_1,v_4]=\frac{1}{4}w_2;\ [v_2,v_3]=-\frac{1}{8}w_2$$
$$[v_0,w_1]=\frac{1}{2}u_0;\ [v_0,w_2]=u_1;\ [v_1,w_0]=-\frac{1}{4}u_0;\ [v_1,w_1]=\frac{1}{4}u_1$$
$$[v_1,w_2]=\frac{3}{4}u_2;\ [v_2,w_0]=-\frac{1}{8}u_1;\ [v_2,w_2]=\frac{1}{2}u_3;\ [v_3,w_0]=-\frac{3}{4}u_2$$
$$[v_3,w_1]=-\frac{1}{4}u_3;\ [v_3,w_2]=\frac{1}{4}u_4;\ [v_4,w_0]=-u_3;\ [v_4,w_1]=-\frac{1}{2}u_4$$

- El álgebra de Lie

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus V(5)\oplus V(4)\oplus V(1)=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})\oplus\ \operatorname{span}\langle v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\rangle\ \oplus$$
$$\operatorname{span}\langle w_0,w_1,w_2,w_3,w_4\rangle\ \oplus\operatorname{span}\langle u_0,u_1\rangle$$

viene dada por la multiplicación

$$
\begin{gathered}
[v_0, v_3] = \frac{1}{10} w_0;\ [v_0, v_4] = \frac{2}{5} w_1;\ [v_0, v_5] = w_2 \\
[v_1, v_2] = -\frac{3}{50} w_0;\ [v_1, v_3] = -\frac{2}{25} w_1;\ [v_1, v_4] = \frac{1}{25} w_2;\ [v_1, v_5] = \frac{2}{5} w_3 \\
[v_2, v_3] = -\frac{2}{25} w_2;\ [v_2, v_4] = -\frac{2}{25} w_3;\ [v_2, v_5] = \frac{1}{10} w_4;\ [v_3, v_4] = -\frac{3}{50} w_4 \\
[v_0, w_4] = u_0;\ [v_1, w_3] = -\frac{1}{5} u_0;\ [v_2, w_3] = -\frac{1}{10} u_1;\ [v_3, w_1] = -\frac{1}{10} u_0 \\
[v_3, w_2] = \frac{1}{10} u_1;\ [v_4, w_0] = \frac{1}{5} u_0;\ [v_4, w_2] = -\frac{1}{5} u_1;\ [v_5, w_0] = u_1
\end{gathered}
$$

- El álgebra de Lie

$$
\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(6) \oplus V(10) \oplus V(10) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus \ \operatorname{span}\langle v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\rangle \oplus
$$
$$
\oplus \ \operatorname{span}\langle w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}\rangle \oplus \operatorname{span}\langle u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\rangle
$$

viene dada por la multiplicación

$$
\begin{gathered}
[v_0, v_1] = \frac{1}{6} w_0;\ [v_0, v_2] = \frac{1}{3} w_1;\ [v_0, v_3] = \frac{1}{2} w_2;\ [v_0, v_4] = \frac{2}{3} w_3 \\
[v_0, v_5] = \frac{5}{6} w_4;\ [v_0, v_6] = w_5;\ [v_1, v_2] = \frac{1}{6} w_2;\ [v_1, v_3] = \frac{1}{3} w_3 \\
[v_1, v_4] = \frac{1}{6} w_4;\ [v_1, v_5] = \frac{1}{6} w_5;\ [v_1, v_6] = \frac{5}{6} w_6;\ [v_2, v_3] = \frac{1}{6} w_4 \\
[v_2, v_4] = \frac{1}{3} w_5;\ [v_2, v_5] = \frac{1}{2} w_6;\ [v_2, v_6] = \frac{2}{3} w_7;\ [v_3, v_4] = \frac{1}{6} w_6 \\
[v_3, v_5] = \frac{1}{3} w_7;\ [v_3, v_6] = \frac{1}{2} w_8;\ [v_4, v_5] = \frac{1}{6} w_8;\ [v_4, v_6] = \frac{1}{3} w_9;\ [v_5, v_6] = \frac{1}{6} w_{10} \\
[v_0, w_3] = \frac{1}{120} u_0;\ [v_0, w_4] = \frac{1}{30} u_1;\ [v_0, w_5] = \frac{1}{12} u_2;\ [v_0, w_6] = \frac{1}{6} u_3 \\
[v_0, w_7] = \frac{7}{24} u_4;\ [v_0, w_8] = \frac{7}{15} u_5;\ [v_0, w_9] = \frac{7}{10} u_6;\ [v_0, w_{10}] = u_7 \\
[v_1, w_2] = -\frac{1}{90} u_0;\ [v_1, w_3] = -\frac{1}{40} u_1;\ [v_1, w_4] = -\frac{1}{30} u_2;\ [v_1, w_5] = -\frac{1}{36} u_3 \\
[v_1, w_7] = \frac{7}{120} u_5;\ [v_1, w_8] = \frac{7}{45} u_6;\ [v_1, w_9] = \frac{3}{10} u_7;\ [v_1, w_{10}] = \frac{1}{2} u_8 \\
[v_2, w_1] = \frac{1}{50} u_0;\ [v_2, w_2] = \frac{4}{225} u_1;\ [v_2, w_3] = \frac{1}{600} u_2;\ [v_2, w_4] = -\frac{1}{50} u_3;\ [v_2, w_5] = -\frac{7}{180} u_4 \\
[v_2, w_6] = -\frac{7}{150} u_5;\ [v_2, w_7] = -\frac{7}{200} u_6;\ [v_2, w_8] = \frac{1}{225} u_7;\ [v_2, w_9] = \frac{2}{25} u_8;\ [v_2, w_{10}] = \frac{1}{5} u_9 \\
[v_3, w_0] = -\frac{1}{20} u_0;\ [v_3, w_1] = \frac{1}{100} u_1;\ [v_3, w_2] = \frac{11}{300} u_2;\ [v_3, w_3] = \frac{23}{600} u_3;\ [v_3, w_4] = \frac{7}{300} u_4 \\
[v_3, w_6] = -\frac{7}{300} u_6;\ [v_3, w_7] = -\frac{23}{600} u_7;\ [v_3, w_8] = -\frac{11}{300} u_8;\ [v_3, w_9] = -\frac{1}{100} u_9;\ [v_3, w_{10}] = \frac{1}{20} u_{10} \\
[v_4, w_0] = -\frac{1}{5} u_1;\ [v_4, w_1] = -\frac{2}{25} u_2;\ [v_4, w_2] = -\frac{1}{225} u_3;\ [v_4, w_3] = \frac{7}{200} u_4;\ [v_4, w_4] = \frac{7}{150} u_5 \\
[v_4, w_5] = \frac{7}{180} u_6;\ [v_4, w_6] = \frac{1}{50} u_7;\ [v_4, w_7] = -\frac{1}{600} u_8;\ [v_4, w_8] = -\frac{4}{225} u_9;\ [v_4, w_9] = -\frac{1}{50} u_{10}
\end{gathered}
$$

$$[v_5, w_0] = -\frac{1}{2}u_2;\ [v_5, w_1] = -\frac{3}{10}u_3;\ [v_5, w_2] = -\frac{7}{45}u_4;\ [v_5, w_3] = -\frac{7}{120}u_5$$
$$[v_5, w_5] = \frac{1}{36}u_7;\ [v_5, w_6] = \frac{1}{30}u_8;\ [v_5, w_7] = \frac{1}{40}u_9;\ [v_5, w_8] = \frac{1}{90}u_{10}$$
$$[v_6, w_0] = -u_3;\ [v_6, w_1] = -\frac{7}{10}u_4;\ [v_6, w_2] = -\frac{7}{15}u_5;\ [v_6, w_3] = -\frac{7}{24}u_6$$
$$[v_6, w_4] = -\frac{1}{6}u_7;\ [v_6, w_5] = -\frac{1}{12}u_8;\ [v_6, w_6] = -\frac{1}{30}u_9;\ [v_6, w_7] = -\frac{1}{120}u_{10}$$

Conclusión

Al realizar este trabajo, he tenido la suerte de conocer un área de las matemáticas hasta entonces desconocida para mí, las álgebras de Lie, que me ha permitido tener una primera visón de cómo es el mundo de la investigación. Por un lado, la lectura de libros específicos de estructura básica y de teoría de representación sobre álgebras de Lie me ha mostrado que, como en grupos y anillos, el punto de aprendizaje inicial en cualquier estructura algebraica está formado por ejemplos, subestructuras, estructura cociente y homomorfismos. Por otro lado, el estudio de algunos artículos de investigación me ha ayudado a mejorar tanto mi compresión lectora como mi forma de escribir matemáticas.

Esta memoria comienza estudiando los resultados más teóricos, para abordar el problema de clasificación de álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena, y termina con la construcción de un puñado de ejemplos de baja dimensión (≤ 38) que muestran la complejidad de este problema incluso en el caso de álgebras con pocos ideales. Durante el verano estudié los conceptos básicos, y fue en septiembre cuando mi tutora, observando la teoría básica, me propuso desarrollar un programa para la construcción de álgebras de Lie con factor de Levi $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y retículo de ideales en cadena. Los ingredientes para la elaboración del programa eran polinomios homogéneos y unas aplicaciones lineales, llamadas transvecciones, que estaban definidas mediante derivaciones. Nada aparentemente complicado. La definición inicial de álgebra de Lie obligaba al programa a la verificación de la identidad de Jacobi. Al mismo tiempo, seguía esforzándome por entender los resultados básicos y algún concepto nuevo.

En enero, una vez que mi programa funcionaba, con ayuda de los ejemplos y de los resultados básicos estudiados anteriormente empezamos a desarrollar algunos de los lemas generales. Estos nos informaron de las combinaciones de transvecciones que nos permitían definir álgebras de Lie. Fue entorno al mes de abril, cuando se produjo mi primer pequeño gran triunfo, había encontrado el Lema 2.3.1. Una vez subido este primer escalón y demostrados otros lemas similares hubo que completar la memoria con otros resultados más generales y la construcción de diversos ejemplos.

Finalmente, este trabajo me ha enseñado a escribir rigurosamente y me ha hecho darme cuenta de lo importante que es tener una buena compresión lectora y una buena redacción para poder hacer que otros entiendan y comprendan nuestras ideas.

Bibliografía

[1] K. Erdmann, M.J. Wildon, *Introduction to Lie algebras*, Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London, 2006.

[2] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Text in Mathematics, vol. 9, 1972, Springer-Verlag, New York.

[3] J. Dixmier, Certaines algèbres non associatives simples définies par la transvection des formes binaires, Reine Angew Math. 346(1984), 110-128.

[4] N. Jacobson, Lie algebras, Dover Publications, Inc. New York, 1962.

[5] L. Snobl, On the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent Lie algebras, J. Phys. A: Math. Theory 43 (2) (2010) 505202 (17pp).

[6] P. Benito, Lie algebras in wich the lattice formed by the ideals is a chain, Comm. Algebra 20 (1992), no. 1, 93-108.

[7] P. Benito, Construction of nonsolvable Lie algebras whose ideals are in chain, Departamento de Matemáticas. Nonassociative Algebra and its Applications, Math. Appl. 303 (1994), 24-30, Kluwe Acad. Publications.

[8] P. Benito, Lie algebras with small numer of ideals, Linear Algebra Appl. 177 (1992)., 233-249.

Anexo. Código Mathematica para construcción de álgebras de Lie

En el siguiente anexo se incluye el código fuente de los programas utilizados para comprobar si los espacios vectoriales de la forma $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2k) \oplus V(3n-2k-2r)$ y de la forma $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(n) \oplus V(2n-2k) \oplus V(3n-2k-2r) \oplus V(4n-2k-2r-2p)$ son o no álgebras de Lie. Además los programas permiten calcular las tablas de multiplicar de los distintos espacios vectoriales. Tras el código fuente, se incluye un ejemplo que muestra que pese a que en el trabajo las tablas incluidas son pequeñas, el programa desarrollado es capaz de cálculos mucho mayores.

Programa para el cálculo de productos de álgebras de Lie y comprobación de la identidad de Jacobi

In[1]:=
```
Transveccion[f_, g_, k_, n_, m_] := (
  i = Exponent[f, y];
  j = Exponent[g, y];
  If[f == 0 || g == 0, Return[0]];
  If[k == 0 && f == g, Return[0]];
  Return[(m - k)!/m! * (n - k)!/n! *
    Sum[(-1)^a * k!/(a! * (k - a)!) * D[f, {x, k - a}, {y, a}] * D[g, {x, a}, {y, k - a}], {a, 0, k}]]);
```

In[2]:=
```
GenerarProductos3Step[n_, k_, r_] := (
  For[i = 0, i <= n, i++, For[j = 0, j <= n, j++, Print["[v" , i , ", v", j, "]= ",
     Transveccion[x^(n - i) * y^(i), x^(n - j) * y^(j), k, n, n]]]]; (*V(n)xV(n)*)
  For[i = 0, i <= n, i++, For[j = 0, j ≤ 2 * n - 2 * k, j++, Print["[v" , i , ", w", j, "]= ",
     Transveccion[x^(n - i) * y^(i), x^(2 * n - 2 * k - j) * y^(j), r, n, 2 n - 2 k]]]];
 )
```

In[3]:=
```
ComprobarIdJacobi3Step[n_, k_, r_] := (
  Ok = True;
  If[EvenQ[k], Return[False]]; (*Si la k es par devuelvo falso*)
  For[c3si = 0, c3si <= n, c3si++,
   For[c3sj = 0, c3sj <= n, c3sj++, For[c3sh = 0, c3sh <= n, c3sh++,
     If[Exponent[Transveccion[Transveccion[x^(n - c3si) * y^c3si, x^(n - c3sj) * y^c3sj,
            k, n, n], x^(n - c3sh) * y^c3sh, r, 2 n - 2 k, n] +
         Transveccion[Transveccion[x^(n - c3sj) * y^c3sj, x^(n - c3sh) * y^c3sh, k, n, n],
          x^(n - c3si) * y^c3si, r, 2 n - 2 k, n] +
         Transveccion[Transveccion[x^(n - c3sh) * y^c3sh, x^(n - c3si) * y^c3si, k, n, n],
          x^(n - c3sj) * y^c3sj, r, 2 n - 2 k, n], x] ≠ -Infinity, Ok = False; Break;]]]];
  Print[Ok];
 )
```

In[4]:=
```
GenerarProductos4Step[n_, k_, r_, p_] := (
  If[r + p - k < 0, Print["r+p-k<0. RESULTADO INVALIDO"]; Break;];
  (*V(n)xV(n)*)
  For[i = 0, i <= n, i++, For[j = 0, j <= n, j++, Print["[v" , i , ", v", j,
     "]= ", Transveccion[x^(n - i) * y^(i), x^(n - j) * y^(j), k, n, n]]]];
  (*V(n)xV(2n-2k)*)
  For[i = 0, i <= n, i++, For[j = 0, j ≤ 2 * n - 2 * k, j++, Print["[v" , i , ", w", j, "]= ",
     Transveccion[x^(n - i) * y^(i), x^(2 * n - 2 * k - j) * y^(j), r, n, 2 n - 2 k]]]];
  (*V(n)xV(3n-2k-2r)*)
  For[i = 0, i <= n, i++,
   For[j = 0, j ≤ 3 * n - 2 * k - 2 * r, j++, Print["[v" , i , ", u", j, "]= ", Transveccion[
      x^(n - i) * y^(i), x^(3 * n - 2 * k - 2 * r - j) * y^(j), p, n, 3 n - 2 k - 2 r]]]];
  (*V(2n-2k)xV(2n-2k)*)
  For[i = 0, i <= 2 * n - 2 * k, i++,
   For[j = 0, j ≤ 2 * n - 2 * k, j++, Print["[w" , i , ", w", j, "]= ", Transveccion[
      x^(2 * n - 2 * k - i) * y^(i), x^(2 * n - 2 * k - j) * y^(j), r + p - k, 2 n - 2 k, 2 n - 2 k]]]];
  (*V(2n-2k)xV(2n-2k)*)
 )
```

In[18]:=
```
ComprobarIdJacobi4Step[n_, k_, r_, p_] := (
   Ok = True;
   (*V(n)xV(n)xV(n)*)
   If[r + p - k < 0, Print["r+p-k<0. RESULTADO INVALIDO"]; Return[False]];
   Print[v "(", n, ")-->V(", 2 * n - 2 * k, ")-->V(",
    3 * n - 2 * k - 2 * r, ")-->V(", 4 * n - 2 * k - 2 * r - 2 * p, ")"];
   If[EvenQ[k], Return[False]]; (*Si la k es par devuelvo falso*)
   For[c4si = 0, c4si <= n, c4si++,
    For[c4sj = 0, c4sj <= n, c4sj++, For[c4sh = 0, c4sh <= n, c4sh++,
      If[Exponent[Transveccion[Transveccion[x^(n - c4si) * y^c4si, x^(n - c4sj) * y^c4sj,
            k, n, n], x^(n - c4sh) * y^c4sh, r, 2 n - 2 k, n] + Transveccion[Transveccion[
            x^(n - c4sj) * y^c4sj, x^(n - c4sh) * y^c4sh, k, n, n], x^(n - c4si) * y^c4si,
           r, 2 n - 2 k, n] + Transveccion[Transveccion[x^(n - c4sh) * y^c4sh,
            x^(n - c4si) * y^c4si, k, n, n], x^(n - c4sj) * y^c4sj, r, 2 n - 2 k, n], x] ≠
        -Infinity, Print["Falla en (n,n,n) ", c4si, c4sj, c4sh];
       Return[False];]]]]; (*V(n)xV(n)xV(r)*)
   For[c4si = 0, c4si <= n, c4si++, For[c4sj = 0, c4sj <= n, c4sj++,
     For[c4sh = 0, c4sh ≤ 2 * n - 2 * k, c4sh++,
      If[Exponent[Transveccion[Transveccion[x^(n - c4si) * y^c4si, x^(n - c4sj) * y^c4sj,
            k, n, n], x^(2 * n - 2 * k - c4sh) * y^c4sh, p + r - k, 2 n - 2 k, 2 n - 2 k] +
          Transveccion[Transveccion[x^(n - c4sj) * y^c4sj, x^(2 * n - 2 * k - c4sh) * y^c4sh,
            r, n, 2 n - 2 k], x^(n - c4si) * y^c4si, p, 3 n - 2 k - 2 r, n] +
          Transveccion[Transveccion[x^(2 * n - 2 * k - c4sh) * y^c4sh, x^(n - c4si) * y^c4si,
            r, 2 n - 2 k, n], x^(n - c4sj) * y^c4sj, p, 3 n - 2 k - 2 r, n], x] ≠ -Infinity,
       Print["Falla en (n,n,r) ", c4si, c4sj, c4sh]; Return[False];]]]];

   Print[Ok];
  )
```

El álgebra de Lie $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus V(17) \oplus V(32) \oplus V(47)$ viene dada por la multiplicación

$$[v_0, v_1] = \frac{1}{17}w_0;\ [v_0, v_2] = \frac{2}{17}w_1;\ [v_0, v_3] = \frac{3}{17}w_2;\ [v_0, v_4] = \frac{4}{17}w_3$$
$$[v_0, v_5] = \frac{5}{17}w_4;\ [v_0, v_6] = \frac{6}{17}w_5;\ [v_0, v_7] = \frac{7}{17}w_6;\ [v_0, v_8] = \frac{8}{17}w_7$$
$$[v_0, v_9] = \frac{9}{17}w_8;\ [v_0, v_{10}] = \frac{10}{17}w_9;\ [v_0, v_{11}] = \frac{11}{17}w_{10};\ [v_0, v_{12}] = \frac{12}{17}w_{11}$$
$$[v_0, v_{13}] = \frac{13}{17}w_{12};\ [v_0, v_{14}] = \frac{14}{17}w_{13};\ [v_0, v_{15}] = \frac{15}{17}w_{14};\ [v_0, v_{16}] = \frac{16}{17}w_{15}$$
$$[v_0, v_{17}] = w_{16};\ [v_1, v_2] = \frac{1}{17}w_2;\ [v_1, v_3] = \frac{2}{17}w_3;\ [v_1, v_4] = \frac{3}{17}w_4$$
$$[v_1, v_5] = \frac{4}{17}w_5;\ [v_1, v_6] = \frac{5}{17}w_6;\ [v_1, v_7] = \frac{6}{17}w_7;\ [v_1, v_8] = \frac{7}{17}w_8$$
$$[v_1, v_9] = \frac{8}{17}w_9;\ [v_1, v_{10}] = \frac{9}{17}w_{10};\ [v_1, v_{11}] = \frac{10}{17}w_{11};\ [v_1, v_{12}] = \frac{11}{17}w_{12}$$
$$[v_1, v_{13}] = \frac{12}{17}w_{13};\ [v_1, v_{14}] = \frac{13}{17}w_{14};\ [v_1, v_{15}] = \frac{14}{17}w_{15};\ [v_1, v_{16}] = \frac{15}{17}w_{16}$$
$$[v_1, v_{17}] = \frac{16}{17}w_{17};\ [v_2, v_3] = \frac{1}{17}w_4;\ [v_2, v_4] = \frac{2}{17}w_5;\ [v_2, v_5] = \frac{3}{17}w_6$$
$$[v_2, v_6] = \frac{4}{17}w_7;\ [v_2, v_7] = \frac{5}{17}w_8;\ [v_1, v_7] = \frac{6}{17}w_9;\ [v_1, v_8] = \frac{7}{17}w_{10}$$
$$[v_2, v_{10}] = \frac{8}{17}w_{11};\ [v_2, v_{11}] = \frac{9}{17}w_{12};\ [v_2, v_{12}] = \frac{10}{17}w_{13};\ [v_2, v_{13}] = \frac{11}{17}w_{14}$$
$$[v_2, v_{14}] = \frac{12}{17}w_{15};\ [v_2, v_{15}] = \frac{13}{17}w_{16};\ [v_2, v_{16}] = \frac{14}{17}w_{17};\ [v_2, v_{17}] = \frac{15}{17}w_{18}$$
$$[v_3, v_4] = \frac{1}{17}w_6;\ [v_3, v_5] = \frac{2}{17}w_7;\ [v_3, v_6] = \frac{3}{17}w_8;\ [v_3, v_7] = \frac{4}{17}w_9$$
$$[v_3, v_8] = \frac{5}{17}w_{10};\ [v_3, v_9] = \frac{6}{17}w_{11};\ [v_3, v_{10}] = \frac{7}{17}w_{12};\ [v_3, v_{11}] = \frac{8}{17}w_{13}$$
$$[v_3, v_{12}] = \frac{9}{17}w_{14};\ [v_3, v_{13}] = \frac{10}{17}w_{15};\ [v_3, v_{14}] = \frac{11}{17}w_{16};\ [v_3, v_{15}] = \frac{12}{17}w_{17}$$
$$[v_3, v_{16}] = \frac{13}{17}w_{18};\ [v_3, v_{17}] = \frac{14}{17}w_{19};\ [v_4, v_5] = \frac{1}{17}w_8;\ [v_4, v_6] = \frac{2}{17}w_9$$
$$[v_4, v_7] = \frac{3}{17}w_{10};\ [v_4, v_8] = \frac{4}{17}w_{11};\ [v_4, v_9] = \frac{5}{17}w_{12};\ [v_4, v_{10}] = \frac{6}{17}w_{13}$$
$$[v_4, v_{11}] = \frac{7}{17}w_{14};\ [v_4, v_{12}] = \frac{8}{17}w_{15};\ [v_4, v_{13}] = \frac{9}{17}w_{16};\ [v_4, v_{14}] = \frac{10}{17}w_{17}$$
$$[v_4, v_{15}] = \frac{11}{17}w_{18};\ [v_4, v_{16}] = \frac{12}{17}w_{19};\ [v_4, v_{17}] = \frac{13}{17}w_{20};\ [v_5, v_6] = \frac{1}{17}w_{10}$$
$$[v_5, v_7] = \frac{2}{17}w_{11};\ [v_5, v_8] = \frac{3}{17}w_{12};\ [v_5, v_9] = \frac{4}{17}w_{13};\ [v_5, v_{10}] = \frac{5}{17}w_{14}$$
$$[v_5, v_{11}] = \frac{6}{17}w_{15};\ [v_5, v_{12}] = \frac{7}{17}w_{16};\ [v_5, v_{13}] = \frac{8}{17}w_{17};\ [v_5, v_{14}] = \frac{9}{17}w_{18}$$
$$[v_5, v_{15}] = \frac{10}{17}w_{19};\ [v_5, v_{16}] = \frac{11}{17}w_{20};\ [v_5, v_{17}] = \frac{12}{17}w_{21};\ [v_6, v_7] = \frac{1}{17}w_{12}$$
$$[v_6, v_8] = \frac{2}{17}w_{13};\ [v_6, v_9] = \frac{3}{17}w_{14};\ [v_5, v_{10}] = \frac{4}{17}w_{15};\ [v_6, v_{11}] = \frac{5}{17}w_{16}$$

$$[v_6,v_{12}]=\frac{6}{17}w_{17};\ [v_6,v_{13}]=\frac{7}{17}w_{18};\ [v_5,v_{14}]=\frac{8}{17}w_{19};\ [v_6,v_{15}]=\frac{9}{17}w_{20}$$
$$[v_6,v_{16}]=\frac{10}{17}w_{21};\ [v_6,v_{17}]=\frac{11}{17}w_{22};\ [v_7,v_8]=\frac{1}{17}w_{14};\ [v_7,v_9]=\frac{2}{17}w_{15}$$
$$[v_7,v_{10}]=\frac{3}{17}w_{16};\ [v_7,v_{11}]=\frac{4}{17}w_{17};\ [v_7,v_{12}]=\frac{5}{17}w_{18};\ [v_7,v_{13}]=\frac{6}{17}w_{19}$$
$$[v_7,v_{14}]=\frac{7}{17}w_{20};\ [v_7,v_{15}]=\frac{8}{17}w_{21};\ [v_7,v_{16}]=\frac{9}{17}w_{22};\ [v_7,v_{17}]=\frac{10}{17}w_{23}$$
$$[v_8,v_9]=\frac{1}{17}w_{16};\ [v_8,v_{10}]=\frac{2}{17}w_{17};\ [v_8,v_{11}]=\frac{3}{17}w_{18};\ [v_8,v_{12}]=\frac{4}{17}w_{19}$$
$$[v_8,v_{13}]=\frac{5}{17}w_{20};\ [v_8,v_{14}]=\frac{6}{17}w_{21};\ [v_8,v_{15}]=\frac{7}{17}w_{22};\ [v_8,v_{16}]=\frac{8}{17}w_{23}$$
$$[v_8,v_{17}]=\frac{9}{17}w_{24};\ [v_9,v_{10}]=\frac{1}{17}w_{18};\ [v_9,v_{11}]=\frac{2}{17}w_{19};\ [v_9,v_{12}]=\frac{3}{17}w_{20}$$
$$[v_9,v_{13}]=\frac{4}{17}w_{21};\ [v_9,v_{14}]=\frac{5}{17}w_{22};\ [v_9,v_{15}]=\frac{6}{17}w_{23};\ [v_9,v_{16}]=\frac{7}{17}w_{24}$$
$$[v_9,v_{17}]=\frac{8}{17}w_{25};\ [v_{10},v_{11}]=\frac{1}{17}w_{20};\ [v_{10},v_{12}]=\frac{2}{17}w_{21};\ [v_{10},v_{13}]=\frac{3}{17}w_{22}$$
$$[v_{10},v_{14}]=\frac{4}{17}w_{23};\ [v_{10},v_{15}]=\frac{5}{17}w_{24};\ [v_{10},v_{16}]=\frac{6}{17}w_{25};\ [v_{10},v_{17}]=\frac{7}{17}w_{26}$$
$$[v_{11},v_{12}]=\frac{1}{17}w_{22};\ [v_{11},v_{13}]=\frac{2}{17}w_{23};\ [v_{11},v_{14}]=\frac{3}{17}w_{24};\ [v_{11},v_{15}]=\frac{4}{17}w_{25}$$
$$[v_{11},v_{16}]=\frac{5}{17}w_{26};\ [v_{11},v_{17}]=\frac{6}{17}w_{27};\ [v_{12},v_{13}]=\frac{1}{17}w_{24};\ [v_{12},v_{14}]=\frac{2}{17}w_{25}$$
$$[v_{12},v_{15}]=\frac{3}{17}w_{26};\ [v_{12},v_{16}]=\frac{4}{17}w_{27};\ [v_{12},v_{17}]=\frac{5}{17}w_{28};\ [v_{13},v_{14}]=\frac{1}{17}w_{26}$$
$$[v_{13},v_{15}]=\frac{2}{17}w_{27};\ [v_{13},v_{16}]=\frac{3}{17}w_{28};\ [v_{13},v_{17}]=\frac{4}{17}w_{29};\ [v_{14},v_{15}]=\frac{1}{17}w_{28}$$
$$[v_{14},v_{16}]=\frac{2}{17}w_{29};\ [v_{14},v_{17}]=\frac{3}{17}w_{30};\ [v_{15},v_{16}]=\frac{1}{17}w_{30};\ [v_{15},v_{17}]=\frac{2}{17}w_{31}$$
$$[v_{16},v_{17}]=\frac{1}{17}w_{32}$$
$$[v_0,w_1]=\frac{1}{32}u_0;\ [v_0,w_2]=\frac{1}{16}u_1;\ [v_0,w_3]=\frac{3}{32}u_2;\ [v_0,w_4]=\frac{1}{8}u_3$$
$$[v_0,w_5]=\frac{5}{32}u_4;\ [v_0,w_6]=\frac{3}{16}u_5;\ [v_0,w_7]=\frac{7}{32}u_6;\ [v_0,w_8]=\frac{1}{4}u_7$$
$$[v_0,w_9]=\frac{9}{32}u_8;\ [v_0,w_{10}]=\frac{5}{16}u_9;\ [v_0,w_{11}]=\frac{11}{32}u_{10};\ [v_0,w_{12}]=\frac{3}{8}u_{11}$$
$$[v_0,w_{13}]=\frac{13}{32}u_{12};\ [v_0,w_{14}]=\frac{7}{16}u_{13};\ [v_0,w_{15}]=\frac{15}{32}u_{14};\ [v_0,w_{16}]=\frac{1}{2}u_{15}$$
$$[v_0,w_{17}]=\frac{17}{32}u_{16};\ [v_0,w_{18}]=\frac{9}{16}u_{17};\ [v_0,w_{19}]=\frac{19}{32}u_{18};\ [v_0,w_{20}]=\frac{5}{8}u_{19}$$
$$[v_0,w_{21}]=\frac{21}{32}u_{20};\ [v_0,w_{22}]=\frac{11}{16}u_{21};\ [v_0,w_{23}]=\frac{23}{32}u_{22};\ [v_0,w_{24}]=\frac{3}{4}u_{23}$$
$$[v_0,w_{25}]=\frac{25}{32}u_{24};\ [v_0,w_{26}]=\frac{13}{16}u_{25};\ [v_0,w_{27}]=\frac{27}{32}u_{26};\ [v_0,w_{28}]=\frac{7}{8}u_{27}$$
$$[v_0,w_{29}]=\frac{29}{32}u_{28};\ [v_0,w_{30}]=\frac{15}{16}u_{29};\ [v_0,w_{31}]=\frac{31}{32}u_{30};\ [v_0,w_{32}]=u_{31}$$

$$[v_1,w_0]=\frac{-1}{17}u_0;\ [v_1,w_1]=\frac{-15}{544}u_0;\ [v_1,w_2]=\frac{1}{272}u_2;\ [v_1,w_3]=\frac{19}{544}u_3$$
$$[v_1,w_4]=\frac{9}{136}u_4;\ [v_1,w_5]=\frac{53}{544}u_5;\ [v_1,w_6]=\frac{35}{272}u_6;\ [v_1,w_7]=\frac{87}{544}u_7$$
$$[v_1,w_8]=\frac{13}{68}u_8;\ [v_1,w_9]=\frac{121}{544}u_9;\ [v_1,w_{10}]=\frac{69}{272}u_{10};\ [v_1,w_{11}]=\frac{155}{544}u_{11}$$
$$[v_1,w_{12}]=\frac{43}{136}u_{12};\ [v_1,w_{13}]=\frac{189}{544}u_{13};\ [v_1,w_{14}]=\frac{103}{272}u_{14};\ [v_1,w_{15}]=\frac{223}{544}u_{15}$$
$$[v_1,w_{16}]=\frac{15}{34}u_{16};\ [v_1,w_{17}]=\frac{257}{544}u_{17};\ [v_1,w_{18}]=\frac{137}{272}u_{18};\ [v_1,w_{19}]=\frac{291}{544}u_{19}$$
$$[v_1,w_{20}]=\frac{77}{136}u_{20};\ [v_1,w_{21}]=\frac{325}{544}u_{21};\ [v_1,w_{22}]=\frac{171}{272}u_{22};\ [v_1,w_{23}]=\frac{359}{544}u_{23}$$
$$[v_1,w_{24}]=\frac{47}{68}u_{24};\ [v_1,w_{25}]=\frac{393}{544}u_{25};\ [v_1,w_{26}]=\frac{205}{272}u_{26};\ [v_1,w_{27}]=\frac{427}{544}u_{27}$$
$$[v_1,w_{28}]=\frac{111}{136}u_{28};\ [v_1,w_{29}]=\frac{461}{544}u_{29};\ [v_1,w_{30}]=\frac{239}{272}u_{30};\ [v_1,w_{31}]=\frac{495}{544}u_{31};\ [v_1,w_{32}]=\frac{16}{17}u_{32}$$
$$[v_2,w_0]=\frac{-2}{17}u_1;\ [v_2,w_1]=\frac{-47}{544}u_2;\ [v_2,w_2]=\frac{-15}{272}u_3;\ [v_2,w_3]=\frac{-13}{544}u_4$$
$$[v_2,w_4]=\frac{1}{136}u_5;\ [v_2,w_5]=\frac{21}{544}u_6;\ [v_2,w_6]=\frac{19}{272}u_7;\ [v_2,w_7]=\frac{55}{544}u_8$$
$$[v_2,w_8]=\frac{9}{68}u_9;[v_2,w_9]=\frac{89}{544}u_{10};\ [v_2,w_{10}]=\frac{53}{272}u_{11};\ [v_2,w_{11}]=\frac{123}{544}u_{12}$$
$$[v_2,w_{12}]=\frac{35}{136}u_{13};\ [v_2,w_{13}]=\frac{157}{544}u_{14};\ [v_2,w_{14}]=\frac{87}{272}u_{15};\ [v_2,w_{15}]=\frac{191}{544}u_{16}$$
$$[v_2,w_{16}]=\frac{13}{34}u_{17};\ [v_2,w_{17}]=\frac{225}{544}u_{18};\ [v_2,w_{18}]=\frac{121}{272}u_{19};\ [v_2,w_{19}]=\frac{259}{544}u_{20}$$
$$[v_2,w_{20}]=\frac{69}{136}u_{21};\ [v_2,w_{21}]=\frac{293}{544}u_{22};\ [v_2,w_{22}]=\frac{155}{272}u_{23};\ [v_2,w_{23}]=\frac{327}{544}u_{24}$$
$$[v_2,w_{24}]=\frac{43}{68}u_{25};\ [v_2,w_{25}]=\frac{361}{544}u_{26};\ [v_2,w_{26}]=\frac{189}{272}u_{27};\ [v_2,w_{27}]=\frac{395}{544}u_{28}$$
$$[v_2,w_{28}]=\frac{103}{136}u_{29};\ [v_2,w_{29}]=\frac{429}{544}u_{30};\ [v_2,w_{30}]=\frac{223}{272}u_{31};\ [v_2,w_{31}]=\frac{463}{544}u_{32};\ [v_2,w_{32}]=\frac{15}{17}u_{33}$$
$$[v_3,w_0]=\frac{-3}{17}u_2;\ [v_3,w_1]=\frac{-79}{544}u_3;\ [v_3,w_2]=\frac{-31}{272}u_4;\ [v_3,w_3]=\frac{-45}{544}u_5$$
$$[v_3,w_4]=\frac{-7}{136}u_6;\ [v_3,w_5]=\frac{-11}{544}u_7;\ [v_3,w_6]=\frac{3}{272}u_8;\ [v_3,w_7]=\frac{23}{544}u_9$$
$$[v_3,w_8]=\frac{5}{68}u_{10};[v_3,w_9]=\frac{57}{544}u_{11};\ [v_3,w_{10}]=\frac{37}{272}u_{12};\ [v_3,w_{11}]=\frac{91}{544}u_{13}$$
$$[v_3,w_{12}]=\frac{27}{136}u_{14};\ [v_3,w_{13}]=\frac{125}{544}u_{15};\ [v_3,w_{14}]=\frac{71}{272}u_{16};\ [v_3,w_{15}]=\frac{159}{544}u_{17}$$
$$[v_3,w_{16}]=\frac{11}{34}u_{18};\ [v_3,w_{17}]=\frac{193}{544}u_{19};\ [v_3,w_{18}]=\frac{105}{272}u_{20};\ [v_3,w_{19}]=\frac{227}{544}u_{21}$$
$$[v_3,w_{20}]=\frac{61}{136}u_{22};\ [v_3,w_{21}]=\frac{261}{544}u_{23};\ [v_3,w_{22}]=\frac{139}{272}u_{24};\ [v_3,w_{23}]=\frac{295}{544}u_{25}$$
$$[v_3,w_{24}]=\frac{39}{68}u_{26};\ [v_3,w_{25}]=\frac{329}{544}u_{27};\ [v_3,w_{26}]=\frac{173}{272}u_{28};\ [v_3,w_{27}]=\frac{363}{544}u_{29}$$
$$[v_3,w_{28}]=\frac{95}{136}u_{30};\ [v_3,w_{29}]=\frac{397}{544}u_{31};\ [v_3,w_{30}]=\frac{207}{272}u_{32};\ [v_3,w_{31}]=\frac{431}{544}u_{33};\ [v_3,w_{32}]=\frac{14}{17}u_{34}$$

$$[v_4,w_0]=\frac{-4}{17}u_3;\ [v_4,w_1]=\frac{-111}{544}u_4;\ [v_4,w_2]=\frac{-47}{272}u_5;\ [v_4,w_3]=\frac{-77}{544}u_6$$
$$[v_4,w_4]=\frac{-15}{136}u_7;\ [v_4,w_5]=\frac{-43}{544}u_8;\ [v_4,w_6]=\frac{-13}{272}u_9;\ [v_4,w_7]=\frac{-9}{544}u_{10}$$
$$[v_4,w_8]=\frac{1}{68}u_{11};[v_4,w_9]=\frac{25}{544}u_{12};\ [v_4,w_{10}]=\frac{21}{272}u_{13};\ [v_4,w_{11}]=\frac{59}{544}u_{14}$$
$$[v_4,w_{12}]=\frac{19}{136}u_{15};\ [v_4,w_{13}]=\frac{93}{544}u_{16};\ [v_4,w_{14}]=\frac{55}{272}u_{17};\ [v_4,w_{15}]=\frac{127}{544}u_{18}$$
$$[v_4,w_{16}]=\frac{9}{34}u_{19};\ [v_4,w_{17}]=\frac{161}{544}u_{20};\ [v_4,w_{18}]=\frac{89}{272}u_{21};\ [v_4,w_{19}]=\frac{195}{544}u_{22}$$
$$[v_4,w_{20}]=\frac{53}{136}u_{23};\ [v_4,w_{21}]=\frac{229}{544}u_{24};\ [v_4,w_{22}]=\frac{123}{272}u_{25};\ [v_4,w_{23}]=\frac{263}{544}u_{26}$$
$$[v_4,w_{24}]=\frac{35}{68}u_{27};\ [v_4,w_{25}]=\frac{297}{544}u_{28};\ [v_4,w_{26}]=\frac{157}{272}u_{29};\ [v_4,w_{27}]=\frac{331}{544}u_{30}$$
$$[v_4,w_{28}]=\frac{87}{136}u_{31};\ [v_4,w_{29}]=\frac{365}{544}u_{32};\ [v_4,w_{30}]=\frac{191}{272}u_{33};\ [v_4,w_{31}]=\frac{399}{544}u_{34};\ [v_4,w_{32}]=\frac{13}{17}u_{35}$$
$$[v_5,w_0]=\frac{-5}{17}u_4;\ [v_5,w_1]=\frac{-143}{544}u_5;\ [v_5,w_2]=\frac{-63}{272}u_6;\ [v_5,w_3]=\frac{-109}{544}u_7$$
$$[v_5,w_4]=\frac{-23}{136}u_8;\ [v_5,w_5]=\frac{-75}{544}u_9;\ [v_5,w_6]=\frac{-29}{272}u_{10};\ [v_5,w_7]=\frac{-41}{544}u_{11}$$
$$[v_5,w_8]=\frac{-3}{68}u_{12};[v_5,w_9]=\frac{-7}{544}u_{13};\ [v_5,w_{10}]=\frac{5}{272}u_{14};\ [v_5,w_{11}]=\frac{27}{544}u_{15}$$
$$[v_5,w_{12}]=\frac{11}{136}u_{16};\ [v_5,w_{13}]=\frac{61}{544}u_{17};\ [v_5,w_{14}]=\frac{39}{272}u_{18};\ [v_5,w_{15}]=\frac{95}{544}u_{19}$$
$$[v_5,w_{16}]=\frac{7}{34}u_{20};\ [v_5,w_{17}]=\frac{129}{544}u_{21};\ [v_5,w_{18}]=\frac{73}{272}u_{22};\ [v_5,w_{19}]=\frac{163}{544}u_{23}$$
$$[v_5,w_{20}]=\frac{45}{136}u_{24};\ [v_5,w_{21}]=\frac{197}{544}u_{25};\ [v_5,w_{22}]=\frac{107}{272}u_{26};\ [v_5,w_{23}]=\frac{231}{544}u_{27}$$
$$[v_5,w_{24}]=\frac{31}{68}u_{28};\ [v_5,w_{25}]=\frac{265}{544}u_{29};\ [v_5,w_{26}]=\frac{141}{272}u_{30};\ [v_5,w_{27}]=\frac{299}{544}u_{31}$$
$$[v_5,w_{28}]=\frac{79}{136}u_{32};\ [v_5,w_{29}]=\frac{333}{544}u_{33};\ [v_5,w_{30}]=\frac{175}{272}u_{34};\ [v_5,w_{31}]=\frac{367}{544}u_{35};\ [v_5,w_{32}]=\frac{12}{17}u_{36}$$
$$[v_6,w_0]=\frac{-6}{17}u_5;\ [v_6,w_1]=\frac{-175}{544}u_6;\ [v_6,w_2]=\frac{-79}{272}u_7;\ [v_6,w_3]=\frac{-141}{544}u_8$$
$$[v_6,w_4]=\frac{-31}{136}u_9;\ [v_6,w_5]=\frac{-107}{544}u_{10};\ [v_6,w_6]=\frac{-45}{272}u_{11};\ [v_6,w_7]=\frac{-73}{544}u_{12}$$
$$[v_6,w_8]=\frac{-7}{68}u_{13};[v_6,w_9]=\frac{-39}{544}u_{14};\ [v_6,w_{10}]=\frac{-11}{272}u_{15};\ [v_6,w_{11}]=\frac{-5}{544}u_{16}$$
$$[v_6,w_{12}]=\frac{3}{136}u_{17};\ [v_6,w_{13}]=\frac{29}{544}u_{18};\ [v_6,w_{14}]=\frac{23}{272}u_{19};\ [v_6,w_{15}]=\frac{63}{544}u_{20}$$
$$[v_6,w_{16}]=\frac{5}{34}u_{21};\ [v_6,w_{17}]=\frac{97}{544}u_{22};\ [v_6,w_{18}]=\frac{57}{272}u_{23};\ [v_6,w_{19}]=\frac{131}{544}u_{24}$$
$$[v_6,w_{20}]=\frac{37}{136}u_{25};\ [v_6,w_{21}]=\frac{165}{544}u_{26};\ [v_6,w_{22}]=\frac{91}{272}u_{27};\ [v_6,w_{23}]=\frac{199}{544}u_{28}$$
$$[v_6,w_{24}]=\frac{27}{68}u_{29};\ [v_6,w_{25}]=\frac{233}{544}u_{30};\ [v_6,w_{26}]=\frac{125}{272}u_{31};\ [v_6,w_{27}]=\frac{267}{544}u_{32}$$
$$[v_6,w_{28}]=\frac{71}{136}u_{33};\ [v_6,w_{29}]=\frac{301}{544}u_{34};\ [v_6,w_{30}]=\frac{159}{272}u_{35};\ [v_6,w_{31}]=\frac{335}{544}u_{36};\ [v_6,w_{32}]=\frac{11}{17}u_{37}$$

$$[v_7,w_0]=\frac{-7}{17}u_6;\ [v_7,w_1]=\frac{-207}{544}u_7;\ [v_7,w_2]=\frac{-95}{272}u_8;\ [v_7,w_3]=\frac{-173}{544}u_9$$
$$[v_7,w_4]=\frac{-39}{136}u_{10};\ [v_7,w_5]=\frac{-139}{544}u_{11};\ [v_7,w_6]=\frac{-61}{272}u_{12};\ [v_7,w_7]=\frac{-105}{544}u_{13}$$
$$[v_7,w_8]=\frac{-11}{68}u_{14};[v_7,w_9]=\frac{-71}{544}u_{15};\ [v_7,w_{10}]=\frac{-27}{272}u_{16};\ [v_7,w_{11}]=\frac{-37}{544}u_{17}$$
$$[v_7,w_{12}]=\frac{-5}{136}u_{18};\ [v_7,w_{13}]=\frac{-3}{544}u_{19};\ [v_7,w_{14}]=\frac{7}{272}u_{20};\ [v_7,w_{15}]=\frac{31}{544}u_{21}$$
$$[v_7,w_{16}]=\frac{3}{34}u_{22};\ [v_7,w_{17}]=\frac{65}{544}u_{23};\ [v_7,w_{18}]=\frac{41}{272}u_{24};\ [v_7,w_{19}]=\frac{99}{544}u_{25}$$
$$[v_7,w_{20}]=\frac{29}{136}u_{26};\ [v_7,w_{21}]=\frac{133}{544}u_{27};\ [v_7,w_{22}]=\frac{75}{272}u_{28};\ [v_7,w_{23}]=\frac{167}{544}u_{29}$$
$$[v_7,w_{24}]=\frac{23}{68}u_{30};\ [v_7,w_{25}]=\frac{201}{544}u_{31};\ [v_7,w_{26}]=\frac{109}{272}u_{32};\ [v_7,w_{27}]=\frac{235}{544}u_{33}$$
$$[v_7,w_{28}]=\frac{63}{136}u_{34};\ [v_7,w_{29}]=\frac{269}{544}u_{35};\ [v_7,w_{30}]=\frac{143}{272}u_{36};\ [v_7,w_{31}]=\frac{303}{544}u_{37};\ [v_7,w_{32}]=\frac{10}{17}u_{38}$$
$$[v_8,w_0]=\frac{-8}{17}u_7;\ [v_8,w_1]=\frac{-239}{544}u_8;\ [v_8,w_2]=\frac{-111}{272}u_9;\ [v_8,w_3]=\frac{-205}{544}u_{10}$$
$$[v_8,w_4]=\frac{-47}{136}u_{11};\ [v_8,w_5]=\frac{-171}{544}u_{12};\ [v_8,w_6]=\frac{-77}{272}u_{13};\ [v_8,w_7]=\frac{-137}{544}u_{14}$$
$$[v_8,w_8]=\frac{-15}{68}u_{15};[v_8,w_9]=\frac{-103}{544}u_{16};\ [v_8,w_{10}]=\frac{-43}{272}u_{17};\ [v_8,w_{11}]=\frac{-69}{544}u_{18}$$
$$[v_8,w_{12}]=\frac{-13}{136}u_{19};\ [v_8,w_{13}]=\frac{-35}{544}u_{20};\ [v_8,w_{14}]=\frac{-9}{272}u_{21};\ [v_8,w_{15}]=\frac{-1}{544}u_{22}$$
$$[v_8,w_{16}]=\frac{1}{34}u_{23};\ [v_8,w_{17}]=\frac{33}{544}u_{24};\ [v_8,w_{18}]=\frac{25}{272}u_{25};\ [v_8,w_{19}]=\frac{67}{544}u_{26}$$
$$[v_8,w_{20}]=\frac{21}{136}u_{27};\ [v_8,w_{21}]=\frac{101}{544}u_{28};\ [v_8,w_{22}]=\frac{59}{272}u_{29};\ [v_8,w_{23}]=\frac{135}{544}u_{30}$$
$$[v_8,w_{24}]=\frac{19}{68}u_{31};\ [v_8,w_{25}]=\frac{169}{544}u_{32};\ [v_8,w_{26}]=\frac{93}{272}u_{33};\ [v_8,w_{27}]=\frac{203}{544}u_{34}$$
$$[v_8,w_{28}]=\frac{55}{136}u_{35};\ [v_8,w_{29}]=\frac{237}{544}u_{36};\ [v_8,w_{30}]=\frac{127}{272}u_{37};\ [v_8,w_{31}]=\frac{271}{544}u_{38};\ [v_8,w_{32}]=\frac{9}{17}u_{39}$$
$$[v_9,w_0]=\frac{-9}{17}u_8;\ [v_9,w_1]=\frac{-271}{544}u_9;\ [v_9,w_2]=\frac{-127}{272}u_{10};\ [v_9,w_3]=\frac{-237}{544}u_{11}$$
$$[v_9,w_4]=\frac{-55}{136}u_{12};\ [v_9,w_5]=\frac{-203}{544}u_{13};\ [v_9,w_6]=\frac{-93}{272}u_{14};\ [v_9,w_7]=\frac{-169}{544}u_{15}$$
$$[v_9,w_8]=\frac{-19}{68}u_{16};[v_9,w_9]=\frac{-135}{544}u_{17};\ [v_9,w_{10}]=\frac{-59}{272}u_{18};\ [v_9,w_{11}]=\frac{-101}{544}u_{19}$$
$$[v_9,w_{12}]=\frac{-21}{136}u_{20};\ [v_9,w_{13}]=\frac{-67}{544}u_{21};\ [v_9,w_{14}]=\frac{-25}{272}u_{22};\ [v_9,w_{15}]=\frac{-33}{544}u_{23}$$
$$[v_9,w_{16}]=\frac{-1}{34}u_{24};\ [v_9,w_{17}]=\frac{1}{544}u_{25};\ [v_9,w_{18}]=\frac{9}{272}u_{26};\ [v_9,w_{19}]=\frac{35}{544}u_{27}$$
$$[v_9,w_{20}]=\frac{13}{136}u_{28};\ [v_9,w_{21}]=\frac{69}{544}u_{29};\ [v_9,w_{22}]=\frac{43}{272}u_{30};\ [v_9,w_{23}]=\frac{103}{544}u_{31}$$
$$[v_9,w_{24}]=\frac{15}{68}u_{32};\ [v_9,w_{25}]=\frac{137}{544}u_{33};\ [v_9,w_{26}]=\frac{77}{272}u_{34};\ [v_9,w_{27}]=\frac{171}{544}u_{35}$$
$$[v_9,w_{28}]=\frac{47}{136}u_{36};\ [v_9,w_{29}]=\frac{205}{544}u_{37};\ [v_9,w_{30}]=\frac{111}{272}u_{38};\ [v_9,w_{31}]=\frac{239}{544}u_{39};\ [v_9,w_{32}]=\frac{8}{17}u_{40}$$

$$[v_{10},w_0]=\frac{-10}{17}u_9;\ [v_{10},w_1]=\frac{-303}{544}u_{10};\ [v_{10},w_2]=\frac{-143}{272}u_{11};\ [v_{10},w_3]=\frac{-269}{544}u_{12}$$
$$[v_{10},w_4]=\frac{-63}{136}u_{13};\ [v_{10},w_5]=\frac{-235}{544}u_{14};\ [v_{10},w_6]=\frac{-109}{272}u_{15};\ [v_{10},w_7]=\frac{-201}{544}u_{16}$$
$$[v_{10},w_8]=\frac{-23}{68}u_{17};[v_{10},w_9]=\frac{-167}{544}u_{18};\ [v_{10},w_{10}]=\frac{-59}{272}u_{19};\ [v_{10},w_{11}]=\frac{-101}{544}u_{20}$$
$$[v_{10},w_{12}]=\frac{-21}{136}u_{21};\ [v_{10},w_{13}]=\frac{-99}{544}u_{22};\ [v_{10},w_{14}]=\frac{-41}{272}u_{23};\ [v_{10},w_{15}]=\frac{-65}{544}u_{24}$$
$$[v_{10},w_{16}]=\frac{-3}{34}u_{25};\ [v_{10},w_{17}]=\frac{-31}{544}u_{26};\ [v_{10},w_{18}]=\frac{-7}{272}u_{27};\ [v_{10},w_{19}]=\frac{3}{544}u_{28}$$
$$[v_{10},w_{20}]=\frac{5}{136}u_{29};\ [v_{10},w_{21}]=\frac{37}{544}u_{30};\ [v_{10},w_{22}]=\frac{27}{272}u_{31};\ [v_{10},w_{23}]=\frac{71}{544}u_{32}$$
$$[v_{10},w_{24}]=\frac{11}{68}u_{33};\ [v_{10},w_{25}]=\frac{105}{544}u_{34};\ [v_{10},w_{26}]=\frac{61}{272}u_{35};\ [v_{10},w_{27}]=\frac{139}{544}u_{36}$$
$$[v_{10},w_{28}]=\frac{39}{136}u_{37};\ [v_{10},w_{29}]=\frac{173}{544}u_{38};\ [v_{10},w_{30}]=\frac{95}{272}u_{39};\ [v_{10},w_{31}]=\frac{207}{544}u_{40};\ [v_{10},w_{32}]=\frac{7}{17}u_{41}$$
$$[v_{11},w_0]=\frac{-11}{17}u_{10};\ [v_{11},w_1]=\frac{-335}{544}u_{11};\ [v_{11},w_2]=\frac{-159}{272}u_{12};\ [v_{11},w_3]=\frac{-301}{544}u_{13}$$
$$[v_{11},w_4]=\frac{-71}{136}u_{14};\ [v_{11},w_5]=\frac{-267}{544}u_{15};\ [v_{11},w_6]=\frac{-125}{272}u_{16};\ [v_{11},w_7]=\frac{-233}{544}u_{17}$$
$$[v_{11},w_8]=\frac{-27}{68}u_{18};[v_{11},w_9]=\frac{-199}{544}u_{19};\ [v_{11},w_{10}]=\frac{-91}{272}u_{20};\ [v_{11},w_{11}]=\frac{-165}{544}u_{21}$$
$$[v_{11},w_{12}]=\frac{-37}{136}u_{22};\ [v_{11},w_{13}]=\frac{-131}{544}u_{23};\ [v_{11},w_{14}]=\frac{-57}{272}u_{24};\ [v_{11},w_{15}]=\frac{-97}{544}u_{25}$$
$$[v_{11},w_{16}]=\frac{-5}{34}u_{26};\ [v_{11},w_{17}]=\frac{-63}{544}u_{27};\ [v_{11},w_{18}]=\frac{-23}{272}u_{28};\ [v_{11},w_{19}]=\frac{-29}{544}u_{29}$$
$$[v_{11},w_{20}]=\frac{-3}{136}u_{30};\ [v_{11},w_{21}]=\frac{5}{544}u_{31};\ [v_{11},w_{22}]=\frac{11}{272}u_{32};\ [v_{11},w_{23}]=\frac{39}{544}u_{33}$$
$$[v_{11},w_{24}]=\frac{7}{68}u_{34};\ [v_{11},w_{25}]=\frac{73}{544}u_{35};\ [v_{11},w_{26}]=\frac{45}{272}u_{36};\ [v_{11},w_{27}]=\frac{107}{544}u_{37}$$
$$[v_{11},w_{28}]=\frac{31}{136}u_{38};\ [v_{11},w_{29}]=\frac{141}{544}u_{39};\ [v_{11},w_{30}]=\frac{79}{272}u_{40};\ [v_{11},w_{31}]=\frac{175}{544}u_{41};\ [v_{11},w_{32}]=\frac{6}{17}u_{42}$$
$$[v_{12},w_0]=\frac{-12}{17}u_{11};\ [v_{12},w_1]=\frac{-367}{544}u_{12};\ [v_{12},w_2]=\frac{-175}{272}u_{13};\ [v_{12},w_3]=\frac{-333}{544}u_{14}$$
$$[v_{12},w_4]=\frac{-79}{136}u_{15};\ [v_{12},w_5]=\frac{-299}{544}u_{16};\ [v_{12},w_6]=\frac{-141}{272}u_{17};\ [v_{12},w_7]=\frac{-265}{544}u_{18}$$
$$[v_{12},w_8]=\frac{-31}{68}u_{19};[v_{12},w_9]=\frac{-231}{544}u_{20};\ [v_{12},w_{10}]=\frac{-107}{272}u_{21};\ [v_{12},w_{11}]=\frac{-197}{544}u_{22}$$
$$[v_{12},w_{12}]=\frac{-45}{136}u_{23};\ [v_{12},w_{13}]=\frac{-163}{544}u_{24};\ [v_{12},w_{14}]=\frac{-73}{272}u_{25};\ [v_{12},w_{15}]=\frac{-129}{544}u_{26}$$
$$[v_{12},w_{16}]=\frac{-7}{34}u_{27};\ [v_{12},w_{17}]=\frac{-95}{544}u_{28};\ [v_{12},w_{18}]=\frac{-39}{272}u_{29};\ [v_{12},w_{19}]=\frac{-61}{544}u_{30}$$
$$[v_{12},w_{20}]=\frac{-11}{136}u_{31};\ [v_{12},w_{21}]=\frac{-27}{544}u_{32};\ [v_{12},w_{22}]=\frac{-5}{272}u_{33};\ [v_{12},w_{23}]=\frac{7}{544}u_{34}$$
$$[v_{12},w_{24}]=\frac{3}{68}u_{35};\ [v_{12},w_{25}]=\frac{41}{544}u_{36};\ [v_{12},w_{26}]=\frac{29}{272}u_{37};\ [v_{12},w_{27}]=\frac{75}{544}u_{38}$$
$$[v_{12},w_{28}]=\frac{23}{136}u_{39};\ [v_{12},w_{29}]=\frac{109}{544}u_{40};\ [v_{12},w_{30}]=\frac{63}{272}u_{41};\ [v_{12},w_{31}]=\frac{143}{544}u_{42};\ [v_{12},w_{32}]=\frac{5}{17}u_{43}$$

$$[v_{13},w_0]=\frac{-13}{17}u_{12};\ [v_{13},w_1]=\frac{-399}{544}u_{13};\ [v_{13},w_2]=\frac{-191}{272}u_{14};\ [v_{13},w_3]=\frac{-365}{544}u_{15}$$
$$[v_{13},w_4]=\frac{-87}{136}u_{16};\ [v_{13},w_5]=\frac{-331}{544}u_{17};\ [v_{13},w_6]=\frac{-157}{272}u_{18};\ [v_{13},w_7]=\frac{-297}{544}u_{19}$$
$$[v_{13},w_8]=\frac{-35}{68}u_{20};[v_{13},w_9]=\frac{-263}{544}u_{21};\ [v_{13},w_{10}]=\frac{-123}{272}u_{22};\ [v_{13},w_{11}]=\frac{-229}{544}u_{23}$$
$$[v_{13},w_{12}]=\frac{-53}{136}u_{24};\ [v_{13},w_{13}]=\frac{-195}{544}u_{25};\ [v_{13},w_{14}]=\frac{-89}{272}u_{26};\ [v_{13},w_{15}]=\frac{-161}{544}u_{27}$$
$$[v_{13},w_{16}]=\frac{-9}{34}u_{28};\ [v_{13},w_{17}]=\frac{-127}{544}u_{29};\ [v_{13},w_{18}]=\frac{-55}{272}u_{30};\ [v_{13},w_{19}]=\frac{-93}{544}u_{31}$$
$$[v_{13},w_{20}]=\frac{-19}{136}u_{32};\ [v_{13},w_{21}]=\frac{-59}{544}u_{33};\ [v_{13},w_{22}]=\frac{-21}{272}u_{34};\ [v_{13},w_{23}]=\frac{-25}{544}u_{35}$$
$$[v_{13},w_{24}]=\frac{-1}{68}u_{36};\ [v_{13},w_{25}]=\frac{9}{544}u_{37};\ [v_{13},w_{26}]=\frac{13}{272}u_{38};\ [v_{13},w_{27}]=\frac{43}{544}u_{39}$$
$$[v_{13},w_{28}]=\frac{15}{136}u_{40};\ [v_{13},w_{29}]=\frac{77}{544}u_{41};\ [v_{13},w_{30}]=\frac{47}{272}u_{42};\ [v_{13},w_{31}]=\frac{111}{544}u_{43};\ [v_{13},w_{32}]=\frac{4}{17}u_{44}$$
$$[v_{14},w_0]=\frac{-14}{17}u_{13};\ [v_{14},w_1]=\frac{-431}{544}u_{14};\ [v_{14},w_2]=\frac{-207}{272}u_{15};\ [v_{14},w_3]=\frac{-397}{544}u_{16}$$
$$[v_{14},w_4]=\frac{-95}{136}u_{17};\ [v_{14},w_5]=\frac{-363}{544}u_{18};\ [v_{14},w_6]=\frac{-173}{272}u_{19};\ [v_{14},w_7]=\frac{-329}{544}u_{20}$$
$$[v_{14},w_8]=\frac{-39}{68}u_{21};[v_{14},w_9]=\frac{-295}{544}u_{22};\ [v_{14},w_{10}]=\frac{-139}{272}u_{23};\ [v_{14},w_{11}]=\frac{-261}{544}u_{24}$$
$$[v_{14},w_{12}]=\frac{-61}{136}u_{25};\ [v_{14},w_{13}]=\frac{-227}{544}u_{26};\ [v_{14},w_{14}]=\frac{-105}{272}u_{27};\ [v_{14},w_{15}]=\frac{-193}{544}u_{28}$$
$$[v_{14},w_{16}]=\frac{-11}{34}u_{29};\ [v_{14},w_{17}]=\frac{-159}{544}u_{30};\ [v_{14},w_{18}]=\frac{-71}{272}u_{31};\ [v_{14},w_{19}]=\frac{-125}{544}u_{32}$$
$$[v_{14},w_{20}]=\frac{-27}{136}u_{33};\ [v_{14},w_{21}]=\frac{-91}{544}u_{34};\ [v_{14},w_{22}]=\frac{-37}{272}u_{35};\ [v_{14},w_{23}]=\frac{-57}{544}u_{36}$$
$$[v_{14},w_{24}]=\frac{-5}{68}u_{37};\ [v_{14},w_{25}]=\frac{-23}{544}u_{38};\ [v_{14},w_{26}]=\frac{-3}{272}u_{39};\ [v_{14},w_{27}]=\frac{11}{544}u_{40}$$
$$[v_{14},w_{28}]=\frac{7}{136}u_{41};\ [v_{14},w_{29}]=\frac{45}{544}u_{42};\ [v_{14},w_{30}]=\frac{31}{272}u_{43};\ [v_{14},w_{31}]=\frac{79}{544}u_{44};\ [v_{14},w_{32}]=\frac{3}{17}u_{45}$$
$$[v_{15},w_0]=\frac{-15}{17}u_{14};\ [v_{15},w_1]=\frac{-463}{544}u_{15};\ [v_{15},w_2]=\frac{-223}{272}u_{16};\ [v_{15},w_3]=\frac{-429}{544}u_{17}$$
$$[v_{15},w_4]=\frac{-103}{136}u_{18};\ [v_{15},w_5]=\frac{-395}{544}u_{19};\ [v_{15},w_6]=\frac{-189}{272}u_{20};\ [v_{15},w_7]=\frac{-361}{544}u_{21}$$
$$[v_{15},w_8]=\frac{-43}{68}u_{22};[v_{15},w_9]=\frac{-327}{544}u_{23};\ [v_{15},w_{10}]=\frac{-155}{272}u_{24};\ [v_{15},w_{11}]=\frac{-293}{544}u_{25}$$
$$[v_{15},w_{12}]=\frac{-69}{136}u_{26};\ [v_{15},w_{13}]=\frac{-259}{544}u_{27};\ [v_{15},w_{14}]=\frac{-121}{272}u_{28};\ [v_{15},w_{15}]=\frac{-225}{544}u_{29}$$
$$[v_{15},w_{16}]=\frac{-13}{34}u_{30};\ [v_{15},w_{17}]=\frac{-191}{544}u_{31};\ [v_{15},w_{18}]=\frac{-87}{272}u_{32};\ [v_{15},w_{19}]=\frac{-157}{544}u_{33}$$
$$[v_{15},w_{20}]=\frac{-35}{136}u_{34};\ [v_{15},w_{21}]=\frac{-123}{544}u_{35};\ [v_{15},w_{22}]=\frac{-53}{272}u_{36};\ [v_{15},w_{23}]=\frac{-89}{544}u_{37}$$
$$[v_{15},w_{24}]=\frac{-9}{68}u_{38};\ [v_{15},w_{25}]=\frac{-55}{544}u_{39};\ [v_{15},w_{26}]=\frac{-19}{272}u_{40};\ [v_{15},w_{27}]=\frac{-21}{544}u_{41}$$
$$[v_{15},w_{28}]=\frac{-1}{136}u_{42};\ [v_{15},w_{29}]=\frac{13}{544}u_{43};\ [v_{15},w_{30}]=\frac{15}{272}u_{44};\ [v_{15},w_{31}]=\frac{47}{544}u_{45};\ [v_{15},w_{32}]=\frac{2}{17}u_{46}$$

$$[v_{16},w_0]=\frac{-16}{17}u_{15};\ [v_{16},w_1]=\frac{-495}{544}u_{16};\ [v_{16},w_2]=\frac{-239}{272}u_{17};\ [v_{16},w_3]=\frac{-461}{544}u_{18}$$
$$[v_{16},w_4]=\frac{-111}{136}u_{19};\ [v_{16},w_5]=\frac{-427}{544}u_{20};\ [v_{16},w_6]=\frac{-205}{272}u_{21};\ [v_{16},w_7]=\frac{-393}{544}u_{22}$$
$$[v_{16},w_8]=\frac{-47}{68}u_{23};[v_{16},w_9]=\frac{-359}{544}u_{24};\ [v_{16},w_{10}]=\frac{-171}{272}u_{25};\ [v_{16},w_{11}]=\frac{-325}{544}u_{26}$$
$$[v_{16},w_{12}]=\frac{-77}{136}u_{27};\ [v_{16},w_{13}]=\frac{-291}{544}u_{28};\ [v_{16},w_{14}]=\frac{-137}{272}u_{29};\ [v_{16},w_{15}]=\frac{-257}{544}u_{30}$$
$$[v_{16},w_{16}]=\frac{-15}{34}u_{31};\ [v_{16},w_{17}]=\frac{-223}{544}u_{32};\ [v_{16},w_{18}]=\frac{-103}{272}u_{33};\ [v_{16},w_{19}]=\frac{-189}{544}u_{34}$$
$$[v_{16},w_{20}]=\frac{-43}{136}u_{35};\ [v_{16},w_{21}]=\frac{-155}{544}u_{36};\ [v_{16},w_{22}]=\frac{-69}{272}u_{37};\ [v_{16},w_{23}]=\frac{-121}{544}u_{38}$$
$$[v_{16},w_{24}]=\frac{-13}{68}u_{39};\ [v_{16},w_{25}]=\frac{-87}{544}u_{40};\ [v_{16},w_{26}]=\frac{-35}{272}u_{41};\ [v_{16},w_{27}]=\frac{-53}{544}u_{42}$$
$$[v_{16},w_{28}]=\frac{-9}{136}u_{43};\ [v_{16},w_{29}]=\frac{-19}{544}u_{44};\ [v_{16},w_{30}]=\frac{-1}{272}u_{45};\ [v_{16},w_{31}]=\frac{15}{544}u_{46};\ [v_{16},w_{32}]=\frac{1}{17}u_{47}$$
$$[v_{17},w_0]=-u_{16};\ [v_{17},w_1]=\frac{-31}{32}u_{17};\ [v_{17},w_2]=\frac{-15}{16}u_{18};\ [v_{17},w_3]=\frac{-29}{32}u_{19}$$
$$[v_{17},w_4]=\frac{-7}{8}u_{20};\ [v_{17},w_5]=\frac{-27}{32}u_{21};\ [v_{17},w_6]=\frac{-13}{16}u_{22};\ [v_{17},w_7]=\frac{-25}{32}u_{23}$$
$$[v_{17},w_8]=\frac{-3}{4}u_{24};[v_{17},w_9]=\frac{-23}{32}u_{25};\ [v_{17},w_{10}]=\frac{-11}{16}u_{26};\ [v_{17},w_{11}]=\frac{-21}{32}u_{27}$$
$$[v_{17},w_{12}]=\frac{-5}{8}u_{28};\ [v_{17},w_{13}]=\frac{-19}{32}u_{29};\ [v_{17},w_{14}]=\frac{-9}{16}u_{30};\ [v_{17},w_{15}]=\frac{-17}{32}u_{31}$$
$$[v_{17},w_{16}]=\frac{-1}{2}u_{32};\ [v_{17},w_{17}]=\frac{-15}{32}u_{33};\ [v_{17},w_{18}]=\frac{-7}{16}u_{34};\ [v_{17},w_{19}]=\frac{-13}{32}u_{35}$$
$$[v_{17},w_{20}]=\frac{-3}{8}u_{36};\ [v_{17},w_{21}]=\frac{-11}{32}u_{37};\ [v_{17},w_{22}]=\frac{-5}{16}u_{38};\ [v_{17},w_{23}]=\frac{-9}{32}u_{39}$$
$$[v_{17},w_{24}]=\frac{-1}{4}u_{40};\ [v_{17},w_{25}]=\frac{-7}{32}u_{41};\ [v_{17},w_{26}]=\frac{-3}{16}u_{42};\ [v_{17},w_{27}]=\frac{-5}{32}u_{43}$$
$$[v_{17},w_{28}]=\frac{-1}{8}u_{44};\ [v_{17},w_{29}]=\frac{-3}{32}u_{45};\ [v_{17},w_{30}]=\frac{-1}{16}u_{46};\ [v_{17},w_{31}]=\frac{-1}{32}u_{47}$$