Polinomios con raíces entrelazadas*

Antonio J. Durán, Mario Pérez y Juan Luis Varona

1. Introducción

El objetivo más inmediato de la teoría de aproximación es proporcionar objetos sencillos y fácilmente calculables (polinomios, por ejemplo) que se aproximen a unos objetos dados (funciones de variable real, por ejemplo). Con eso en mente, los polinomios ortogonales son centrales en dicha teoría, y tienen aplicaciones en multitud de campos de la matemática y de la física. Tienen una gran cantidad de propiedades interesantes, y siguen siendo un tema de investigación muy activo; de hecho, la investigación sobre polinomios ortogonales ocupa a numerosos matemáticos, y cada año se publican cientos de artículos sobre el tema. Pero no vamos a dedicarnos aquí a ellos, sino que sólo mencionaremos alguna de sus propiedades como justificación para motivar el problema que pretendemos abordar. Vamos con ello.

Dada una medida de Borel σ (positiva) sobre la recta real $\mathbb{R}$, y tal que $0 < \sigma(\mathbb{R}) < \infty$; si al lector esto le parece demasiado técnico, piense simplemente que tenemos una función $w(x)$ (no negativa) tal que $0 < \int_{\mathbb{R}} w(x)\,dx < \infty$. Es bien conocido que, salvo constantes multiplicativas, existe una única sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (cada uno con el grado que indica su subíndice) que cumplen

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)\,d\sigma(x) = 0 \quad \text{si } n \neq m,$$
$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x)^2\,d\sigma(x) > 0 \quad \text{en otro caso}$$

(en el caso de la función $w(x)$ antes citado sería $d\sigma(x) = w(x)\,dx$). En estas circunstancias se dice que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales sobre la recta real (siendo precisos, y dependiendo de cómo sea la medida, puede ocurrir que sólo haya una familia finita de polinomios ortogonales, pero esto no tiene importancia para lo que sigue, así que no nos preocuparemos de ello).

Una muy conocida propiedad de los polinomios ortogonales es que las raíces de cada $P_n(x)$ (con $n \geq 1$, claro) son siempre reales y simples (y están en el intervalo en el que está soportada la medida). Además, las raíces de $P_n(x)$ y $P_{n-1}(x)$ están

*Este artículo ha sido publicado (el 4 de octubre de 2019) en *MATerials MATemàtics* **2019** (2019), no. 3, 9 pp.; http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2019/v2019n03.pdf

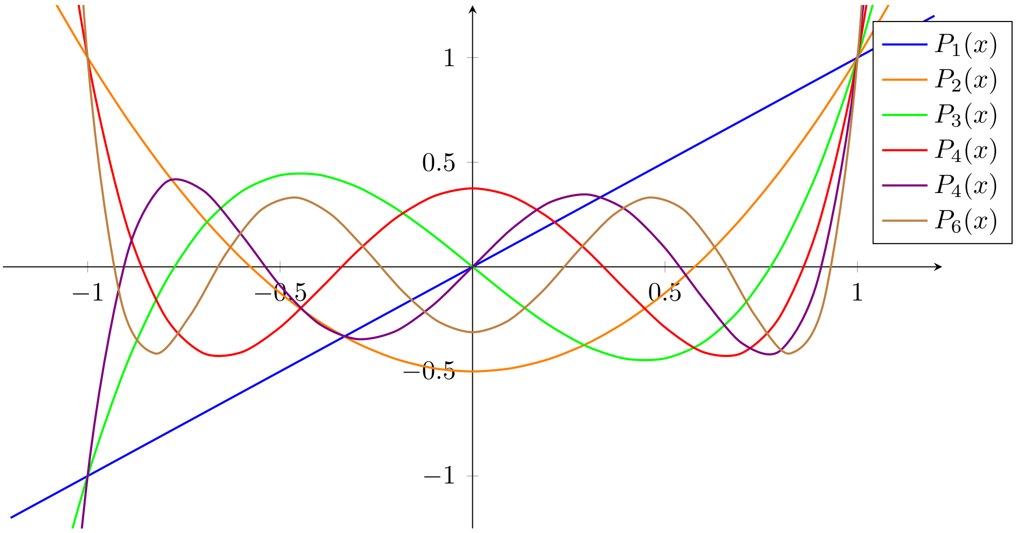

Figura 1: Los polinomios ortogonales de Legendre de grados 1 a 6.

entrelazadas (dicho de otra forma, que sus raíces se separan mutuamente), en el sentido de que, si $\{r_j\}_{j=1}^{n}$ son las raíces de $P_n(x)$, y $\{s_j\}_{j=1}^{n-1}$ las de $P_{n-1}(x)$, se cumple

$$r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \cdots < r_{n-1} < s_{n-1} < r_n. \tag{1}$$

Estas propiedades son sencillas de demostrar, y se pueden encontrar en cualquier texto dedicado a los polinomios ortogonales.

Por otra parte, hay algunos tipos de polinomios ortogonales que se denominan «clásicos» (no vamos a explicar aquí por qué, pero esta caracterización tiene que ver con el hecho de que cumplan ciertas propiedades). Hay tres familias de polinomios ortogonales clásicos, los de Jacobi, los de Laguerre y los de Hermite, cuya ortogonalidad viene dada, respectivamente, y expresada sólo para el caso $n \neq m$, mediante

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = 0,$$

$$\int_{0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^{\alpha} e^{-x}\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2}\,dx = 0,$$

donde α y β son parámetros mayores que -1; casos particulares de los polinomios de Jacobi son los de Legendre que aparecen en la figura 1 ($\alpha = \beta = 0$) o los de Chebyshev ($\alpha = \beta = -1/2$). En los polinomios ortogonales clásicos, la derivada de los polinomios de una familia vuelve a ser una nueva familia de polinomios ortogonales (esta es, de hecho, una de las caracterizaciones que justifican el nombre «clásicos»). En consecuencia, las derivadas de los polinomios clásicos conservan la propiedad del entrelazamiento de raíces.

Eso ya no es tan claro con polinomios ortogonales que no sean de alguna de las familias clásicas y, menos aún, con polinomios en general.

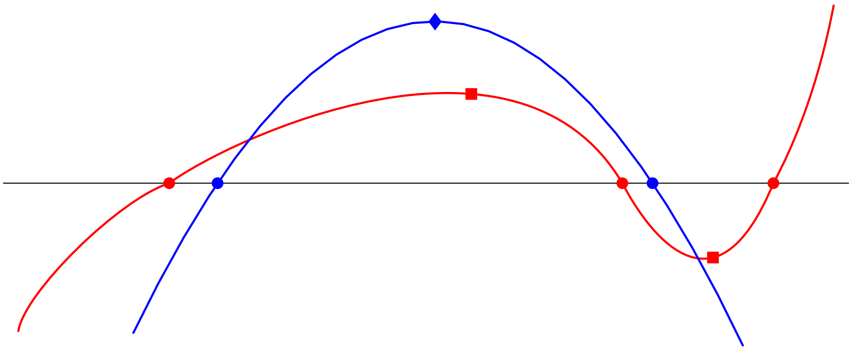

Figura 2: Entrelazamiento de raíces de f y g, que no se conserva en f' y g'.

Por ejemplo, supongamos que tenemos $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios reales, el primero de grado $n > 1$ y el segundo de grado $n-1$, y cuyas raíces $\{r_j\}_{j=1}^{n}$ y $\{s_j\}_{j=1}^{n-1}$ son todas reales y distintas (simples), y están entrelazadas como en (1). ¿Será verdad que las raíces de $f'(x)$ y $g'(x)$ también están entrelazadas?

Hace unos años, cuando los autores de este artículo hacíamos experimentos numéricos en relación con las conjeturas que planteamos en [4], observamos empíricamente, para nuestra sorpresa, que tal propiedad parecía cumplirse siempre. Una propiedad de enunciado tan sencillo, de ser cierta, debía ser bien conocida, y posiblemente fácil de demostrar, pero no nos resultó sencillo salir de dudas.[1] De momento, no adelantamos acontecimientos.

Si uno piensa en el teorema de Rolle (entre cada dos raíces de una función derivable hay una raíz de la derivada), es fácil imaginarse —gráficamente— una situación en la que esa propiedad falla. Por ejemplo, pensemos en un polinomio f de grado 3 y otro g de grado 2 que fuesen como se esboza en la figura 2 (f en rojo y g en azul, junto con el eje horizontal), con sus raíces entrelazadas. Los dos raíces de f' son el máximo y el mínimo de f (marcados con sendos cuadrados), y la raíz de g' es el máximo de g (marcado con un rombo). La figura muestra claramente que la raíz de g' no está entre las dos raíces de f' (la marca en forma de rombo no está entre los cuadrados), así que las raíces de f y g están entrelazadas, pero las de f' y g' no.

No nos equivoquemos, esto no es un contraejemplo, pues, al menos de momento, nada nos permite asegurar que polinomios como los del dibujo existan. Pero sí es una muestra de que, si hay que probar algo al respecto, no va ser suficiente con usar el teorema de Rolle ya que, desde luego, sí que existen funciones f y g derivables con 3 y 2 raíces (respectivamente) y que se comportan como en el dibujo.

De hecho, es fácil comprobar que el entrelazamiento de raíces no se conserva al derivar si los polinomios, además de tener reales, tienen alguna compleja. Por

[1] En realidad, hay otras propiedades relacionadas polinomios (y sus raíces) que, pese a su indudable belleza, no siempre son muy conocidas. Véanse, por ejemplo, las que aparecen en [6, sección 9].

ejemplo, es claro que las raíces reales de los polinomios

$$f(x) = (x^2+1)(x-5)(x+5)x, \qquad g(x) = (x^2+1)(x+4)(x-4)$$

están entrelazadas; sin embargo, $f'(x) = 5x^4 - 72x^2 - 25$ sólo tiene dos raíces reales, mientras que las tres raíces de $g'(x) = 4x^3 - 30x$ son reales, y las tres (0 y $\pm\sqrt{15/2} \approx \pm 2.73861$) están entre las dos de $f'(x)$ (cuyo valor aproximado es ± 3.83917).

Así pues, centrémonos en el caso de polinomios con coeficientes reales y con todas sus raíces reales (a veces, a estos polinomios se los denomina hiperbólicos); supondremos además que las raíces son simples. El teorema de Rolle prueba que si un polinomio (de grado mayor o igual que 2) tiene todas sus raíces reales y simples, lo mismo es cierto para su derivada.

Para poder hablar de que las raíces de dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$ de este tipo están entrelazadas, los grados de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ deben ser el mismo o diferir en 1, a lo más. De este modo, si suponemos que el grado de f es n, y sus raíces las denotamos r_i, y el grado g es n o $n-1$, y sus raíces las denotamos s_i, estamos asumiendo que se cumple

$$r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \cdots < r_{n-1} < s_{n-1} < r_n < s_n,$$
$$s_1 < r_1 < s_2 < r_2 < \cdots < s_{n-1} < r_{n-1} < s_n < r_n$$

o bien

$$r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \cdots < r_{n-1} < s_{n-1} < r_n.$$

En estas circunstancias, ¿están también entrelazadas las raíces de $f'(x)$ y $g'(x)$?

No podemos asegurar que el problema no fuese abordado antes, pero todas las citas que hemos encontrado acaban llegando al matemático búlgaro Nikola Obreshkov (1896–1963); en concreto, a su texto [8], publicado el mismo año en el que falleció. Obreshkov (también transcrito como Obreschkoff) fue profesor de la Universidad de Sofía y director del Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Bulgaria, y publicó más de un centenar de trabajos sobre diversas disciplinas matemáticas —álgebra, análisis de Fourier, análisis numérico, sumabilidad de series divergentes, teoría de números, teoría de probabilidad. . . —, así como varios libros.

Figura 3: Nikola Obreshkov

De [8] (cuyo título significa *Distribución y cálculo de ceros de polinomios reales*), su reseña en *MathSciNet* comienza diciendo «Durante muchos años se ha sabido que el autor había estado preparando un manuscrito sobre los ceros reales de un polinomio real. El manuscrito por fin ha sido publicado. Tiene la forma de un libro de texto que pretende familiarizar a un estudiante universitario con los resultados clásicos y modernos en este campo.» y termina con «El libro tiene una gran cantidad de información, por lo que es una adición bienvenida a la literatura sobre los ceros de los polinomios.» Sigue siendo una fuente de información muy útil, aunque el hecho de estar en alemán dificulta su lectura para muchos de nosotros (existe también una versión en ruso).

La demostración que presentamos es, aproximadamente, la de [7, p. 9], aunque algo simplificada. Utiliza un resultado previo que se conoce como teorema de Obreshkov. De este teorema hay versiones ligeramente distintas en otros trabajos, pues a veces se suaviza lo que se entiende por «entrelazamiento de ceros», admitiendo la posibilidad de que las desigualdades no sean estrictas; así lo hacen [1, 2, 3, 5]. Pero esto complica bastante tanto los enunciados como las demostraciones, y está fuera de los objetivos que aquí perseguimos.

2. El teorema de Obreshkov y sus consecuencias

Sin más preámbulos, enunciemos y demostremos el teorema de Obreshkov.

Teorema 1 (de Obreshkov). *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios con coeficientes reales de grados que difieren en 1 a lo más, cuyas raíces son todas reales y simples. Entonces, son equivalentes:*

(a) Los raíces de f y g están entrelazadas.

(b) Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, las raíces del polinomio

$$h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

son todas reales y simples.

Demostración. Podemos suponer que f tiene grado $n \geq 0$ y que g tiene grado n o $n-1$. Sean $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ las raíces de f. Puesto que son raíces simples, f cambia de signo a cada lado de cada raíz. Además, $f'(r_j)$ va alternando de signo, es decir, $f'(r_j)$ y $f'(r_{j+1})$ tienen signo contrario. Por la misma razón, g cambia de signo a cada lado de sus raíces.

(a) $\Rightarrow$ (b): Trivialmente, podemos suponer que $\lambda \neq 0 \neq \mu$. Por hipótesis, dos raíces consecutivas de f están cada una a un lado de una raíz de g. Por lo tanto, $g(r_j)$ va alternando de signo. Puesto que $h(r_j) = \mu g(r_j)$, también $h(r_j)$ va alternando de signo, luego h tiene en cada intervalo (r_j, r_{j+1}) un número impar de raíces (contando su multiplicidad). Ahora bien: h es un polinomio de grado menor o igual que n y los (r_j, r_{j+1}) son $n-1$ intervalos. Así que h tiene que tener en cada intervalo (r_j, r_{j+1}) una única raíz, y además simple. Si el grado de h es n, entonces la otra raíz de h tendrá que ser también real y además tendrá que ser menor que r_1 o mayor que r_n. Luego todas sus raíces son reales y simples.

(b) $\Rightarrow$ (a): Se trata de probar que g tiene en cada intervalo (r_j, r_{j+1}) una única raíz. Tomemos un $x \in \mathbb{R}$ cualquiera; x es una raíz del polinomio, en z,

$h(z) = g(x)f(z) - f(x)g(z)$, así que tomando $\lambda = g(x)$ y $\mu = -f(x)$, por hipótesis, es una raíz simple. Es decir,

$$0 \neq h'(x) = g(x)f'(x) - f(x)g'(x).$$

De aquí deducimos que $g(x)f'(x) - f(x)g'(x)$, con $x \in \mathbb{R}$, tiene signo constante. Evaluando en r_j se deduce que $g(r_j)f'(r_j)$ tiene signo constante. Pero como $f'(r_j)$ va alternando de signo, también $g(r_j)$ irá alternando de signo y g tendrá en (r_j, r_{j+1}) un número impar de raíces. Y, teniendo en cuenta que g tiene grado menor o igual que n, será única en cada intervalo (r_j, r_{j+1}). $\square$

Como consecuencia inmediata se obtiene que, efectivamente, la derivación de polinomios con todas sus raíces reales y simples conserva el entrelazamiento:

Teorema 2. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios no constantes de grados que difieren en 1 a lo más, cuyas raíces son todas reales y simples. Si las raíces de f y g están entrelazadas, entonces las raíces de f' y g' también están entrelazadas.*

Demostración. Por el teorema de Rolle, las raíces de los polinomios f' y g' son reales y simples. Y si f y g cumplen el apartado (b) del teorema, entonces f' y g' también lo cumplen (sin más que volver a aplicar el teorema de Rolle al polinomio h). $\square$

En realidad, este resultado se puede generalizar fácilmente. Por comodidad, denotamos $\mathbf{P}$ al conjunto de los polinomios con todas sus raíces reales y simples. En la demostración anterior hemos usado que el operador derivada es lineal y que $f' \in \mathbf{P}$ siempre que $f \in \mathbf{P}$ (aunque no lo hemos comentado expresamente, también se usa implícitamente que, al derivar, el grado de un polinomio no constante disminuye siempre en uno). Pero, en lugar del operador derivada podemos usar cualquier otro operador lineal T definido sobre el espacio de los polinomios que conserve el grado o lo reduzca de alguna forma compatible con la conservación del entrelazamiento (por ejemplo, en una cantidad fija k), y tal que $Tf \in \mathbf{P}$ para cualquier $f \in \mathbf{P}$. Con estas hipótesis, la misma demostración prueba que el operador T preserva el entrelazamiento de raíces (por supuesto, esto podría aplicarse sólo cuando el grado de los polinomios implicados es $\geq k$).

Además de la derivada (o la derivada k-ésima), un operador lineal T que cumple $Tf \in \mathbf{P}$ para cualquier $f \in \mathbf{P}$ es

$$T : f(x) \mapsto af(bx + c)$$

para $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Pero este operador no proporciona nada sobre el comportamiento de las raíces que no sea obvio. Y no es sencillo dar con otros operadores de este estilo.

Los polinomios con todas sus raíces reales también aparecen asociados a ciertas estructuras combinatorias; por ejemplo, el denominado *polinomio de emparejamientos* de un grafo (a menudo se usa su nombre inglés *matching polynomial*) no sólo tiene raíces reales, sino que, si de un grafo obtenemos otro quitándole un vértice, los correspondientes polinomios de emparejamientos tienen sus raíces entrelazadas. Y lo mismo ocurre con los llamados *polinomios característicos*. En estos contextos se definen operadores lineales que conservan la pertenencia a $\mathbf{P}$. Como muestra, y únicamente con intención de satisfacer la posible curiosidad del lector, veamos un ejemplo, extraído de [1, Teorema 3]. Dados dos polinomios f y g, su *producto diamante* se define como

$$f \diamond g = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \frac{g^{(n)}(x)}{n!} x^n (x+1)^n.$$

Entonces, si g es un polinomio con todas sus raíces en $(-1, 0)$ y simples, el operador T_g definido como

$$T_g(f) = f \diamond g$$

cumple que $T_g f \in \mathbf{P}$ cuando $f \in \mathbf{P}$. En el mismo artículo [1] se pueden ver otros ejemplos.

3. Volvemos con los polinomios ortogonales

Hemos empezado este artículo motivando el problema a partir de lo que ocurre en las sucesiones de polinomios ortogonales. Queremos acabar comentando que el hecho de que el entrelazamiento de raíces se conserve al aplicar derivadas tiene una pequeña implicación en la teoría de polinomios ortogonales.

En [9], Wendroff prueba que, si P y Q son dos polinomios de grados consecutivos y que entrelazan sus raíces, siempre existe una medida en la recta real tal que P y Q son parte de la sucesión de polinomios ortogonales respecto de esa medida. Así, usando que los polinomios ortogonales tienen todas sus raíces reales y las de dos consecutivos están entrelazados, aplicando el teorema 2 y el resultado de Wendroff se deduce lo siguiente:

Teorema 3. *Sean $P_n(x)$ y $P_{n-1}(x)$ (con $n \geq 2$) dos polinomios consecutivos de la sucesión de polinomios ortogonales respecto a una medida real. Entonces, existe otra medida sobre la recta real tal que $P'_n(x)$ y $P'_{n-1}(x)$ forman parte de la sucesión de polinomios ortogonales respecto a esta medida.*

Referencias

[1] P. Brändén, On operators on polynomials preserving real-rootedness and the Neggers-Stanley conjecture, *J. Algebraic Combin.* **20** (2004), 119–130.

[2] J.-P. Dedieu, Obreschkoff's theorem revisited: What convex sets are contained in the set of hyperbolic polynomials?, *J. Pure Appl. Algebra* **81** (1992), 269–278.

[3] J.-P. Dedieu y R. J. Gregorac, Corrigendum: "Obreschkoff's theorem revisited: What convex sets are contained in the set of hyperbolic polynomials?" [*J. Pure Appl. Algebra* **81** (1992), 269–278], *J. Pure Appl. Algebra* **93** (1994), 111–112.

[4] A. J. Durán, M. Pérez y J. L. Varona, Some conjectures on Wronskian and Casorati determinants of orthogonal polynomials, *Exp. Math.* **24** (2015), 123–132.

[5] S. Fisk, *Polynomials, roots, and interlacing*, arXiv:math/0612833v2, 2008.

[6] A. Gasull, Gemmes matemàtiques, *MATerials MATemàtics* **2019** (2019), núm. 2, 88 pp.

[7] A. S. Householder, *The numerical treatment of a single nonlinear equation*, McGraw-Hill, New York, 1970.

[8] N. Obreschkoff, *Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschafter, 1963.

[9] B. Wendroff, On orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** (1961), 554–555.

Antonio J. Durán
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Sevilla
duran@us.es
https://personal.us.es/duran/

Mario Pérez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza
mperez@unizar.es

Juan Luis Varona
Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
jvarona@unirioja.es
https://www.unirioja.es/cu/jvarona/