

EXTENSIONES COFIBRACION-FIBRACION

L.J. Hernández Paricio

Dpto. de Geometría y Topología  
 Universidad de Zaragoza

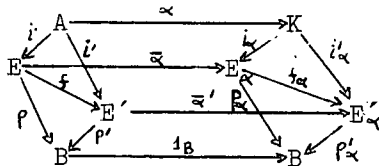
Llamamos extensión cofibración-fibración de A por B, a una sucesión exacta corta  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ , tal que i es cofibración y p es fibración (respecto a la teoría de homotopía inducida por un anillo R en los grupos abelianos). Si B (A) tiene una (co)presentación contractil, damos un teorema de clasificación homotópica de las extensiones cofibración-fibración (salvo isomorfismo). Estudiamos las sucesiones exactas largas asociadas y analizamos el caso  $R=\mathbb{Q}$ .

INTRODUCCION.- En (4), para un anillo R, hemos definido en los grupos abelianos una teoría de homotopía, hemos estudiado propiedades de cofibraciones y fibraciones y construido sucesiones homotópicas; aquí utilizando los resultados de (4), estudiamos el functor  $CF(B,A)$ . Así como en (6), se da una clasificación homotópica de los G-fibrados principales y en (3) (5) se hace un estudio de  $Ext(B,A)$  a través de adecuadas presentaciones, nosotros hacemos una clasificación homotópica de las extensiones cofibración-fibración (salvo isomorfismo), que denotamos  $CF(B,A)$ , utilizando (co)presentaciones contractiles (cuando existen). Si el anillo que consideramos es  $\mathbb{Q}$ , probamos que si B es divisible, admite una presentación contractil  $\Omega B \rightarrow B \xrightarrow{\mathbb{Q}} B$  y en este caso  $CF(B,A) = [\Omega B, A]$ . Si A es de cotorsión y libre de torsión, tiene una copresentación contractil  $A \rightarrow A \otimes \mathbb{Q} \rightarrow SA$ , entonces  $CF(B,A) = [B, SA]$ , además  $CF(B,A) = Ext(B,A)$ .

A continuación, recogemos los teoremas más importantes, dejando al lector el enunciado de los correspondientes duales. Con  $\mathcal{A}$  denotamos la categoría de los grupos abelianos.

EXTENSIONES COFIBRACION-FIBRACION. Vamos a considerar la categoría  $\mathcal{E}\mathcal{F}(B,A)$ , que tiene como objetos las CF-extensiones de A por B (extensiones cofibración-fibración),  $u=(A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B)$ ,  $u'=(A \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} B)$  y como morfismos  $f:u \rightarrow u'$ , homomorfismos  $f:E \rightarrow E'$  tal que  $fi=i'$ ,  $p'f=p$ . Es inmediato probar que todo morfismo de  $\mathcal{E}\mathcal{F}(B,A)$  es isomorfismo.

Para un homomorfismo  $\alpha:A \rightarrow K$ , definimos un functor  $\alpha_*:\mathcal{E}\mathcal{F}(B,A) \rightarrow \mathcal{E}\mathcal{F}(B,K)$ , del modo siguiente. sea  $f:u \rightarrow u'$  y consideremos el siguiente diagrama:

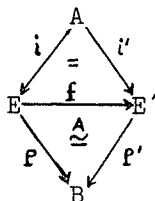


construido, a través de los cuadrados cocartesianos determinados por  $\alpha$  e  $i$  primero, y  $\alpha$  e  $i'$  después,  $f_\alpha = i'_\alpha \vee \alpha' f$ , entonces  $\alpha_*(u \xrightarrow{f} u') = u_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} u'_\alpha$  siendo  $u_\alpha = (K \xrightarrow{i_\alpha} E_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} B)$  y  $u'_\alpha = (K \xrightarrow{i'_\alpha} E'_\alpha \xrightarrow{p'_\alpha} B)$ .

Definición.- Sean  $u, v$  dos CF-extensiones de A por B, diremos que son equivalentes si existe un isomorfismo  $f:u \rightarrow v$ . Denotaremos por  $CF(B,A)$  las CF-extensiones de A por B, salvo isomorfismo.

Notemos que el functor  $\alpha_*$  lo podemos considerar de modo natural como una correspondencia  $CF(B,A) \rightarrow CF(B,K)$ .

Lema.- Consideremos el siguiente diagrama:



tal que  $p'$  es cofibración,  $p_i = p'i'$ ,  $f_i = i'$ ,  $p \stackrel{A}{\cong} p'f$  entonces existe  $f': E \rightarrow E'$  tal que  $f' \stackrel{A}{\cong} f$  y  $p'f' = p$ .

Ayundndonos de este lema podemos probar la siguiente proposición:

Proposición. - Sean  $\alpha^0, \alpha^1: A \rightarrow K$  tal que  $\alpha^0 \sim \alpha^1$  entonces  $\alpha_*^0 = \alpha_*^1: CF(B, A) \rightarrow CF(B, K)$ .

Definición. - Sea  $B \in |\mathcal{A}|$  diremos que  $\mathfrak{J}_B = (N_B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{q} B)$  es una presentación contractil de  $B$ , si  $\mathfrak{J}_B$  es una CF-extensión de  $A$  por  $B$  y  $C$  es contractil.

Despues demostramos el siguiente teorema de clasificación

Teorema. - Sea  $B \in |\mathcal{A}|$  y supongamos que  $B$  tiene una presentación contractil  $\mathfrak{J}_B = (N_B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{q} B)$  entonces la correspondencia  $\Psi: [N_B, A] \rightarrow CF(B, A)$  tal que  $\Psi[\alpha] = \alpha_* [I_B]$  es una equivalencia natural, en la segunda variable. La inversa  $\mathcal{V}: CF(B, A) \rightarrow [N_B, A]$  se define del siguiente modo  $\mathcal{V}[A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B] = [\hat{e}]$  siendo  $e: C \rightarrow E$  una elevación de  $q$  a través de  $p$ ,  $pe = q$  y  $\hat{e}$  el homomorfismo inducido en los núcleos, único tal que  $\hat{e}i = ej$ .

Un corolario inmediato es la existencia de la siguientes sucesiones exactas.

Corolario. - Sea  $B \in |\mathcal{A}|$  y supongamos que  $B$  tiene una presentación contractil, sea un homomorfismo  $g: X \rightarrow Y$  y

$\dots \rightarrow \Omega Y \xrightarrow{i^1} F \xrightarrow{g^1} X \xrightarrow{g} Y$  la sucesión de Eckmann-Hilton asociada a  $g$ , entonces la siguiente sucesión es exacta para  $n \geq 1$ .

$\dots \rightarrow CF(B, \Omega^n Y) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} F_g) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} X) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} Y)$  -

Si además  $g$  es una fibración con núcleo  $F \xrightarrow{i} X$  y sucesión de fibras homotópicas asociada  $\dots \rightarrow \Omega Y \xrightarrow{A} F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{g} Y$  la siguiente sucesión es exacta para  $n \geq 1$ .

$\dots \rightarrow CF(B, \Omega^n Y) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} F) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} X) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} Y)$  -

Por último aseguramos que estas sucesiones son naturales respecto pares de homomorfismos como los siguientes:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\xi} & Y \\
 \downarrow \alpha & = & \downarrow \beta \\
 X' & \xrightarrow{\xi'} & Y'
 \end{array}$$

Ejemplos.- Para  $R=\mathbb{Q}$ , si  $B$  es divisible admite la siguiente presentación contractil  $\Omega B \longrightarrow B^{\mathbb{Q}} \longrightarrow B$ ,  $\Omega B = \text{Hom}(S, B)$   $S = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , entonces  $CF(B, A) = [\Omega B, A]$ . Podemos ver que  $CF \neq \text{Ext}$  ya que  $CF(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \neq \text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ ,  $CF(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$  por ser  $\mathbb{Q}$  contractil, y  $\text{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong R$ . Si  $A$  es de cotorsión entonces  $CF(B, A) \cong \text{Ext}(B, A)$ , si además  $A$  es libre de torsión  $A \longrightarrow A \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow A \otimes S$  es una copresentación contractil, entonces  $\text{Ext}(B, A) \cong CF(B, A) = [B, A \otimes S]$  Si tomamos  $B = S^{\mathbb{P}} = \mathbb{Z}(p^{\infty})$  y  $A = J_p$  enteros  $p$ -adicos, entonces:

$$\text{Ext}(S^{\mathbb{P}}, J_p) \cong CF(S^{\mathbb{P}}, J_p)$$

$$CF(S^{\mathbb{P}}, J_p) \cong [\Omega S^{\mathbb{P}}, J_p] \cong [J_p, J_p] \cong \text{Hom}(J_p, J_p) \cong J_p$$

$$CF(S^{\mathbb{P}}, J_p) \cong [S^{\mathbb{P}}, J_p \otimes S] \cong \text{Hom}(S^{\mathbb{P}}, J_p \otimes S)$$

#### BIBLIOGRAFIA

- (1) Cartan, H; Eilenberg, S: Homological Algebra. Princeton University Press (1956).
- (2) Dieck, T. tom; Kamps, K.H.; Puppe: Homotopietheorie. Lecture Notes in Mathematics. No 157. Springer-Verlag (1970)
- (3) Fuchs, L: Infinite Abelian Groups. Academic Press (1970)
- (4) Hernandez, L. J.: Un Ejemplo de Teoría de Homotopía en Grupos Abelianos (por aparecer)
- (5) Hilton, P.J.; Stammbach, U.: A course in Homological Algebra, GTM 4, Springer-Verlag (1971).
- (6) Husemoller, D.: Fibre Bundles. Mc Graw-Hill (1966).