Pub. Mat. UAB
N°21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

EXTENSIONES COFIBRACION-FIBRACION

L.J. Hernández Paricio

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad de Zaragoza

Llamamos extensión cofibración-fibración de A por B, a una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$, tal que i es cofibración y p es fibración (respecto a la teoría de homotopía inducida por un anillo R en los grupos abelianos). Si B (A) tiene una (co)presentación contraltil, damos un teorema de clasificación homotópica de las extensiones cofibración-fibración (salvo isomorfismo). Estudiamos las sucesiones exactas largas asociadas y analizamos el caso $R=\mathbb{Q}$.

INTRODUCION.- En (4), para un anillo R, hemos definido en los grupos abelianos una teoría de homotopía, hemos estudiado propiedades de cofibraciones y fibraciones y construido sucesiones homotópicas; aquí utilizando los resultados de (4), estudiamos el functor CF(B,A). Así como en (6), se da una clasificación homotópica de los G-fibrados principales y en (3) (5) se hace un estudio de Ext(B,A) a traves de adecuadas presentaciones, nosotros hacemos una clasificación homotópica de las extensiones cofibración-fibración (salvo isomorfismo), que denotamos CF(B,A), utilizando (co)presentaciones contractiles (cuando existen). Si el anillo que consideramos es $\mathbb{Q}$, probamos que si B es divisible, admite una presentación contractil $\Omega B \longrightarrow B^{\mathbb{Q}} \longrightarrow B$ y en este caso $CF(B,A)= [\Omega B,A]$. Si A es de cotorsión y libre de torsión, tiene una copresentación contractil $A \longrightarrow A \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow SA$, entonces $CF(B,A)= [B,SA]$, además $CF(B,A)=Ext(B,A)$.

A continuación, recogemos los teoremas más importantes, dejando al lector el enunciado de los correspondientes duales. Con $\mathcal{A}$ denotamos la categoría de los grupos abelianos.

EXTENSIONES COFIBRACION-FIBRACION. Vamos a considerar la categoría $\mathcal{CF}(B,A)$, que tiene como objetos las CF-extensiones de A por B (extensiones cofibración-fibrción), $u=(A\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B)$, $u'=(A\xrightarrow{i'}E'\xrightarrow{p'}B)$ y como morfismos $f:u\longrightarrow u'$, homomorfismos $f:E\longrightarrow E'$ tal que $fi=i'$, $p'f=p$. Es inmediato probar que todo morfismo de $\mathcal{CF}(B,A)$ es isomorfismo.

Para un homomorfismo $\alpha:A\longrightarrow K$, definimos un functor $\alpha_*:\mathcal{CF}(B,A)\longrightarrow\mathcal{CF}(B,K)$, del modo siguiente, sea $f:u\longrightarrow u'$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rrr, "\alpha"] \arrow[dl, "i"'] \arrow[ddr, "i'"] & & & K \arrow[dl, "i_\alpha"'] \arrow[ddr, "i'_\alpha"] & \\
E \arrow[rrr, "\bar{\alpha}"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "p"'] & & & E_\alpha \arrow[drr, "f_\alpha"] \arrow[ddr, "p_\alpha"] & & \\
 & & E' \arrow[rrr, "\bar{\alpha}'"] \arrow[dl, "p'"] & & & E'_\alpha \arrow[dl, "p'_\alpha"] \\
 & B \arrow[rrr, "1_B"] & & & B &
\end{tikzcd}$$

construido, a traves de los cuadrados cocartesianos determinados por α e i primero, y α e i' despues, $f_\alpha=i'_\alpha \vee \bar{\alpha}'\cdot f$, entonces $\alpha_*(u\xrightarrow{f}u')=u_\alpha\xrightarrow{f_\alpha}u'_\alpha$ siendo $u_\alpha=(K\xrightarrow{i_\alpha}E_\alpha\xrightarrow{p_\alpha}B)$ y $u'_\alpha=(K\xrightarrow{i'_\alpha}E'_\alpha\xrightarrow{p'_\alpha}B)$.

Definición.- Sean u,v dos CF-extensiones de A por B, diremos que son equivalentes si existe un isomorfismo $f:u\longrightarrow v$. Denotaremos por $CF(B,A)$ las CF-extensiones de A por B, salvo isomorfismo.

Notemos que el functor α_* lo podemos considerar de modo natural como una correspondencia $CF(B,A)\longrightarrow CF(B,K)$.

Lema.- Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\mathcal{A}}{\cong}"] & E' \arrow[dl, "p'"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

tal que p' es cofibración, $pi=p'i'$, $fi=i'$, $p \overset{A}{\simeq} p'f$ entonces existe $f'\colon E \longrightarrow E'$ tal que $f' \overset{A}{\simeq} f$ y $p'f'=p$.

Ayundndonos de este lema podemos probar la siguiente proposición:

<u>Proposición</u>.- Sean $\alpha^{o}, \alpha' \colon A \longrightarrow K$ tal que $\alpha^{o} \simeq \alpha'$ entonces $\alpha^{o}_{*} = \alpha'_{*} \colon CF(B,A) \longrightarrow CF(B,K)$.

<u>Definición</u>.- Sea $B \in |\mathcal{A}|$ diremos que $\xi_B = (N_B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{q} B)$ es una presentación contractil de B, si ξ_B es una CF-extensión de A por B y C es contractil.

Despues demostramos el siguiente teorema de clasificación

<u>Teorema</u>.- Sea $B \in |\mathcal{A}|$ y supongamos que B tiene una presentación contractil $\xi_B = (N_B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{q} B)$ entonces la correspondencia $\psi \colon [N_B, A] \longrightarrow CF(B,A)$ tal que $\psi[\alpha] = \alpha_{*}[\xi_B]$ es una equivalencia natural, en la segunda variable. La inversa $\varphi \colon CF(B,A) \longrightarrow [N_B, A]$ se define del siguiente modo $\varphi[A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B] = [\hat{e}]$ siendo $e \colon C \longrightarrow E$ una elevación de q a traves de p, $pe=q$ y $\hat{e}$ el homomorfismo inducido en los conúcleos, único tal que $i\hat{e}=ej$.

Un corolario inmediato es la existencia de la siquientes sucesiones exactas.

<u>Corolario</u>.- Sea $B \in |\mathcal{A}|$ y supongamos queB tiene una presentación contractil, sea un homomorfismo $g\colon X \longrightarrow Y$ y $\ldots \longrightarrow \Omega Y \xrightarrow{i^1} F_g \xrightarrow{g^1} X \xrightarrow{g} Y$ la sucesión de Eckmann-Hilton asociada a g, entonces la siguiente sucesión es exacta para $n \geq 1$.

$$\ldots \longrightarrow CF(B, \Omega^{n} Y) \longrightarrow CF(B, \Omega^{n-1} F_g) \longrightarrow CF(B, \Omega^{n-1} X) \longrightarrow CF(B, \Omega^{n-1} Y) -$$

Si además g es una fibración con núcleo $F \xrightarrow{i} X$ y sucesión de fibras homotópicas asociada $\ldots \longrightarrow \Omega Y \xrightarrow{\Delta} F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{g} Y$ la siguiente sucesión es exacta para $n \geq 1$.

$$\ldots — CF(B, \Omega^{n} Y) — CF(B, \Omega^{n-1} F) — CF(B, \Omega^{n-1} X) — CF(B, \Omega^{n-1} Y) -$$

Por último aseguramos que estas sucesiones son naturales respecto pares de homomorfismos como los siguientes:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r, "g'"] & Y' \end{tikzcd}$$

Ejemplos.- Para $R=\mathbb{Q}$, si B es divisible admite la siguiente presentación contractil $\Omega B \longrightarrow B^{\mathbb{Q}} \longrightarrow B$, $\Omega B=\mathrm{Hom}(S,B)$ $S=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, entonces $CF(B,A) = [\Omega B,A]$ .Podemos ver que $CF \neq$ Ext ya que $CF(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \neq \mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, $CF(\mathbb{Q},\mathbb{Z})=0$ por ser $\mathbb{Q}$ contractil, y $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \cong R$. Si A es de cotorsión entonces $CF(B,A) \cong \mathrm{Ext}(B,A)$, si además A es libre de torsión $A \longrightarrow A \otimes Q \longrightarrow A \otimes S$ es una copresentación contractil, entonces $\mathrm{Ext}(B,A) \cong CF(B,A) = [B,A \otimes S]$ Si tomamos $B=S^p=\mathbb{Z}(p^\infty)$ y $A=J_p$ enteros p-adicos, entonces:

$$\mathrm{Ext}(S^p,J_p) \cong CF(S^p,J_p)$$

$$CF(S^p,J_p) \cong [\Omega S^p,J_p] \cong [J_p,J_p] \cong \mathrm{Hom}(J_p,J_p) \cong J_p$$

$$CF(S^p,J_p) \cong [S^p,J_p \otimes S] \cong \mathrm{Hom}(S^p,J_p \otimes S)$$

BIBLIOGRAFIA

(1) Cartan,H; Eilemberg,S: Homological Algebra. Princeton University Press (1956).

(2) Dieck, T. tom; Kamps, K.H.; Puppe: Homotopietheorie. Lecture Notes in Mathematics. No 157. Springer-Verlag (1970)

(3) Fuchs, L: Infinite Abelian Groups. Academic Press(1970)

(4) Hernandez, L. J.: Un Ejemplo de Teoría de Homotopía en Grupos Abelianos (por aparecer)

(5) Hilton, P.J.; Stammbach,U.: A course in Homological Algebra , GTM 4, Springer-Verlag (1971).

(6) Husemoller, D.:Fibre Bundles. Mc Graw-Hill(1966).