

SUBESPACIOS INVARIANTES EN $L^p(\mu)$ SOBRE EL TORO

José J. Guadalupe Hernández

Colegio Universitario de Logroño

Abstract: Given a measure μ on the unit circle T whose weight function w satisfies $\log w \in L^1(T)$, we characterize the doubly and simply invariant subspaces for the shift operator on $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$. In particular, Szegő's theorem appears when $p=2$, and like in the classical case, $H^p(\mu_c)$ can be factorized as the product of inner and μ_c -outer functions.

1.- Sea μ una medida finita y positiva definida sobre la circunferencia unidad T , $\mu = \mu_c + \mu_s$, $\mu_c = w d\theta$ la descomposición de Lebesgue de dicha medida.

Consideremos el espacio de Banach $L^p(\mu)$ de las funciones complejas definidas sobre T con potencia p -ésima integrable respecto de μ . El operador shift en $L^p(\mu)$, que denotamos por S , viene definido por $S(f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta})$. Un subespacio $M \subset L^p(\mu)$ se dice invariante si $S(M) \subset M$. Si representamos por S^{-1} el inverso de S , ó sea, $S^{-1}(f)(e^{i\theta}) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta})$ entonces M se dice doblemente invariante si $S(M) \subset M$ y $S^{-1}(M) \subset M$, y simplemente invariante si es invariante pero no doblemente invariante.

En este trabajo caracterizamos tales subespacios, generalizando los resultados de Beurling (v. [3]).

Teorema 1 .Para cada subconjunto medible E de T , denotamos por M_E el conjunto de las funciones de $L^p(\mu)$ que se anulan μ -a.e. sobre el complementario de E . Entonces M_E es doblemente invariante y cada subespacio doblemente invariante tiene esta forma.

Demostración: Es inmediato que M_E es subespacio cerrado de $L^p(\mu)$ doblemente invariante. Por otra parte, si $1-q$ es el vec

tor de mejor aproximación de la función $1 \in L^p(\mu)$ en el subespacio doblemente invariante M es fácil ver que $q=1$ μ -a.e. ó $q=0$ μ -a.e.. Sea E el subconjunto de T en el cual $q=0$; entonces $M = (1-q) L^p(\mu)$, es decir, $M=M_E$.

Este teorema también puede obtenerse como resultado particular de [4]

- 2.- Consideremos la descomposición de $L^p(\mu)$ en su parte continua y singular $L^p(\mu) = L_c^p(\mu) \oplus L_s^p(\mu)$. Sea ahora un subespacio M simplemente invariante de $L^p(\mu)$ y consideremos el subespacio cerrado $e^{i\theta} M \subset M$. Sea $F \in M \setminus e^{i\theta} M$ y representemos por $F-q$ el vector de mejor aproximación de F en $e^{i\theta} M$. El vector $q \in M$ viene caracterizado por la condición $\tilde{q}(f)=0$ para toda $f \in e^{i\theta} M$, donde \tilde{q} es el funcional definido por $\tilde{q} = \|q\|_p^{1-p} |q|^{p-2} q \in L^{p'}(\mu)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Lema. - q está caracterizado por las tres siguientes condiciones: i) $F-q \in e^{i\theta} M$, ii) $|q|^p d\mu = \|q\|_p^p d\theta$, iii) $f_c \in qH^p(T)$, $f_c \in M$.

Demostración: La condición i) es obvia. Como M es invariante se tiene $e^{in\theta} q \in e^{i\theta} M$, $n \geq 1$ y por tanto $0 = \tilde{q}(e^{in\theta} q) = \int e^{in\theta} q |q|^{p-2} \bar{q} d\mu$, $n \geq 1$. Tomando conjugados se sigue que $0 = \int e^{in\theta} |q|^p d\mu$ para $n \neq 0$ y puesto que toda medida queda caracterizada por sus coeficientes de Fourier-Stieljes $\int |q|^p d\mu = \|q\|_p^p d\theta$. Por último, para iii), es fácil ver que los coeficientes de Fourier negativos de $\frac{1}{q} f_c$ son todos nulos. El recíproco es inmediato.

Teorema 1. - Los subespacios simplemente invariantes de $L^p(\mu)$ son de la forma $M = q.H^p(T) \oplus S_E = q.H^p(T) \oplus \chi_E L^p(\mu_s)$ donde E es un subconjunto medible de $\text{sop}(\mu_s)$ y $q \in L_c^p(\mu)$ verificando $|q|^p w = 1$. El conjunto E es único salvo conjuntos μ_s -nulos y q es única salvo factores constantes de módulo 1.

Demostración: Sea $M_c = M \cap L_c^p(\mu)$, $M_s = M \cap L_s^p(\mu)$. Se prueba, aplicando el Lema, que M_s es doblemente invariante, luego $M_s = \chi_E.L_s^p(\mu)$. Como M es simplemente invariante, M_c también debe serlo. Es inmediato que $M_c \subset q.H^p(T)$. La parte ii) del Lema junto a la convergencia en $L^p(T)$ de series de Fourier (T^a de M. Riesz) proporcionan $q.H^p(T) \subset M_c$. La unicidad no es difícil probarla y la condición $|q|^p w = 1$ resulta de tomar q normalizado.

Denotemos por $H^p(\mu)$ el subespacio de $L^p(\mu)$ de las funciones aproximables por polinomios analíticos $p_n(e^{i\theta}) = \sum_0^n a_k e^{ik\theta}$ en la norma de $L^p(\mu)$. Supondremos que se verifica la condición de Szegő para el peso ($\log w \in L^1(T)$) lo que equivale a $H^p(\mu) \subsetneq L^p(\mu)$ (v. [2]). En estas condiciones una consecuencia obvia del Teorema 2 es:

Corolario. - $H^p(\mu) = K_p \cdot H^p(T) \oplus L^p_S(\mu)$ donde K_p verifica:

$$i) 1 - K_p \in e^{i\theta} H^p(\mu) \quad ii) \|K_p\|^p d\mu = \|K_p\|^p d\theta \quad iii) 1/K_p \in H^p(T)$$

Este resultado generaliza el conocido Teorema de Szegő (v. [1]) y en [2] se obtiene para K_p la siguiente expresión explícita

$$K_p = \left(\frac{w}{c}\right)^{-1/p} \exp\left[-\frac{i}{p} (\log \frac{w}{c})^\sim\right]$$

donde c es la media geométrica del peso y $(\cdot)^\sim$ representa la función conjugada.

3.- Recordamos que una función interna es una función analítica en el disco unidad abierto y cuyo módulo en T es igual a 1 a.e. Definimos función externa f en $H^p(\mu_c)$ (μ_c -externa) aquella tal que el subespacio engendrado por $\{f \cdot e^{in\theta}\}_0^\infty$ es denso en $H^p(\mu_c)$. Una consecuencia del Teorema 2 y Corolario es

Teorema 3. - Los subespacios simplemente invariantes en $H^p(\mu)$ son de la forma $M = u \cdot H^p(\mu)$ donde u es interna y única salvo factores constantes de módulo 1.

Sea $f \in H^p(\mu_c) = H^p_C(\mu)$ (v. [2]). Entonces $f = K_p \cdot g$ $g \in H^p(T)$; pero como $g \in H^p(T)$ $g = u \cdot 0$ con u interna y 0 externa clásica. Luego $f = u \cdot K_p \cdot 0$ y es inmediato que $K_p \cdot 0$ es μ_c -externa, pues $K_p \cdot H^p(T) = H^p(\mu_c)$. Se obtiene entonces:

Teorema 4. - Toda función de $H^p(\mu_c)$ es el producto de una función interna por una función μ_c -externa, donde la factorización es única salvo constantes de módulo 1.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FREUD Orthogonal Polynomials. Pergamon Press 1971
- [2] GUADALUPE J.J. Clausura en $L^p(\mu)$ de los polinomios analíticos sobre la circunferencia unidad. Tesis. Dpto. Teoría de Funciones. Zaragoza
- [3] HELSON H. Lectures on invariant subspaces. Academic Press 1964

- [4] REZOLA M. Un teorema de aproximación en espacios L^p . Rev. Hispano-Americana. (por aparecer)
- [5] RUDIN Fourier Analysis on groups. Interscience Publishers 1967