

## SUBESPACIOS INVARIANTES EN $L^p(\mu)$ SOBRE EL TORO

José J. Guadalupe Hernández

Colegio Universitario de Logroño

Abstract: Given a measure  $\mu$  on the unit circle  $T$  whose weight function  $w$  satisfies  $\log w \in L^1(T)$ , we characterize the doubly and simply invariant subspaces for the shift operator on  $L^p(\mu)$   $1 < p < \infty$ . In particular, Szegő's theorem appears when  $p=2$ , and like in the classical case,  $H^p(\mu_c)$  can be factorized as the product of inner and  $\mu_c$ -outer functions.

1.- Sea  $\mu$  una medida finita y positiva definida sobre la circunferencia unidad  $T$ ,  $\mu = \mu_c + \mu_s$ ,  $\mu_c = w d\theta$  la descomposición de Lebesgue de dicha medida.

Consideremos el espacio de Banach  $L^p(\mu)$  de las funciones complejas definidas sobre  $T$  con potencia  $p$ -ésima integrable respecto de  $\mu$ . El operador shift en  $L^p(\mu)$ , que denotamos por  $S$ , viene definido por  $S(f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta})$ . Un subespacio  $M \subset L^p(\mu)$  se dice invariante si  $S(M) \subset M$ . Si representamos por  $S^{-1}$  el inverso de  $S$ , ó sea,  $S^{-1}(f)(e^{i\theta}) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta})$  entonces  $M$  se dice doblemente invariante si  $S(M) \subset M$  y  $S^{-1}(M) \subset M$ , y simplemente invariante si es invariante pero no doblemente invariante.

En este trabajo caracterizamos tales subespacios, generalizando los resultados de Beurling (v. [3]).

Teorema 1 .Para cada subconjunto medible  $E$  de  $T$ , denotamos por  $M_E$  el conjunto de las funciones de  $L^p(\mu)$  que se anulan  $\mu$ -a.e. sobre el complementario de  $E$ . Entonces  $M_E$  es doblemente invariante y cada subespacio doblemente invariante tiene esta forma.

Demostración: Es inmediato que  $M_E$  es subespacio cerrado de  $L^p(\mu)$  doblemente invariante. Por otra parte, si  $1-q$  es el vec

tor de mejor aproximación de la función  $1 \in L^p(\mu)$  en el subespacio doblemente invariante  $M$  es fácil ver que  $q=1$   $\mu$ -a.e. ó  $q=0$   $\mu$ -a.e.. Sea  $E$  el subconjunto de  $T$  en el cual  $q=0$ ; entonces  $M = (1-q) L^p(\mu)$ , es decir,  $M=M_E$ .

Este teorema también puede obtenerse como resultado particular de [4]

- 2.- Consideremos la descomposición de  $L^p(\mu)$  en su parte continua y singular  $L^p(\mu) = L_c^p(\mu) \oplus L_s^p(\mu)$ . Sea ahora un subespacio  $M$  simplemente invariante de  $L^p(\mu)$  y consideremos el subespacio cerrado  $e^{i\theta} M \subset M$ . Sea  $F \in M \setminus e^{i\theta} M$  y representemos por  $F-q$  el vector de mejor aproximación de  $F$  en  $e^{i\theta} M$ . El vector  $q \in M$  viene caracterizado por la condición  $\tilde{q}(f)=0$  para toda  $f \in e^{i\theta} M$ , donde  $\tilde{q}$  es el funcional definido por  $\tilde{q} = \|q\|_p^{1-p} |q|^{p-2} q \in L^{p'}(\mu)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ).

Lema. -  $q$  está caracterizado por las tres siguientes condiciones: i)  $F-q \in e^{i\theta} M$ , ii)  $|q|^p d\mu = \|q\|_p^p d\theta$ , iii)  $f_c \in qH^p(T)$ ,  $f_s \in M$ .

Demostración: La condición i) es obvia. Como  $M$  es invariante se tiene  $e^{in\theta} q \in e^{i\theta} M$ ,  $n \geq 1$  y por tanto  $0 = \tilde{q}(e^{in\theta} q) = \int e^{in\theta} q |q|^{p-2} \bar{q} d\mu$ ,  $n \geq 1$ . Tomando conjugados se sigue que  $0 = \int e^{in\theta} |q|^p d\mu$  para  $n \neq 0$  y puesto que toda medida queda caracterizada por sus coeficientes de Fourier-Stieljes  $|q|^p d\mu = \|q\|_p^p d\theta$ . Por último, para iii), es fácil ver que los coeficientes de Fourier negativos de  $\frac{1}{q} f_c$  son todos nulos. El recíproco es inmediato.

Teorema 1. - Los subespacios simplemente invariantes de  $L^p(\mu)$  son de la forma  $M = q.H^p(T) \oplus S_E = q.H^p(T) \oplus \chi_E L^p(\mu_s)$  donde  $E$  es un subconjunto medible de  $\text{sop}(\mu_s)$  y  $q \in L_c^p(\mu)$  verificando  $|q|^p = 1$ . El conjunto  $E$  es único salvo conjuntos  $\mu_s$ -nulos y  $q$  es única salvo factores constantes de módulo 1.

Demostración: Sea  $M_c = M \cap L_c^p(\mu)$ ,  $M_s = M \cap L_s^p(\mu)$ . Se prueba, aplicando el Lema, que  $M_s$  es doblemente invariante, luego  $M_s = \chi_E.L_s^p(\mu)$ . Como  $M$  es simplemente invariante,  $M_c$  también debe serlo. Es inmediato que  $M_c \subset q.H^p(T)$ . La parte ii) del Lema junto a la convergencia en  $L^p(T)$  de series de Fourier ( $T^a$  de M. Riesz) proporcionan  $q.H^p(T) \subset M_c$ . La unicidad no es difícil probarla y la condición  $|q|^p = 1$  resulta de tomar  $q$  normalizado.

Denotemos por  $H^p(\mu)$  el subespacio de  $L^p(\mu)$  de las funciones aproximables por polinomios analíticos  $p_n(e^{i\theta}) = \sum_0^n a_k e^{ik\theta}$  en la norma de  $L^p(\mu)$ . Supondremos que se verifica la condición de Szegő para el peso ( $\log w \in L^1(T)$ ) lo que equivale a  $H^p(\mu) \subsetneq L^p(\mu)$  (v. [2]). En estas condiciones una consecuencia obvia del Teorema 2 es:

Corolario. -  $H^p(\mu) = K_p \cdot H^p(T) \oplus L^p_S(\mu)$  donde  $K_p$  verifica:

$$i) 1 - K_p \in e^{i\theta} H^p(\mu) \quad ii) \|K_p\|_p^p d\mu = \|K_p\|_p^p d\theta \quad iii) 1/K_p \in H^p(T)$$

Este resultado generaliza el conocido Teorema de Szegő (v. [1]) y en [2] se obtiene para  $K_p$  la siguiente expresión explícita

$$K_p = \left(\frac{w}{c}\right)^{-1/p} \exp \left[ -\frac{i}{p} (\log \frac{w}{c})^\sim \right]$$

donde  $c$  es la media geométrica del peso y  $(\cdot)^\sim$  representa la función conjugada.

3.- Recordamos que una función interna es una función analítica en el disco unidad abierto y cuyo módulo en  $T$  es igual a 1 a.e. Definimos función externa  $f$  en  $H^p(\mu_c)$  ( $\mu_c$ -externa) aquella tal que el subespacio engendrado por  $\{f \cdot e^{in\theta}\}_0^\infty$  es denso en  $H^p(\mu_c)$ . Una consecuencia del Teorema 2 y Corolario es

Teorema 3. - Los subespacios simplemente invariantes en  $H^p(\mu)$  son de la forma  $M = u \cdot H^p(\mu)$  donde  $u$  es interna y única salvo factores constantes de módulo 1.

Sea  $f \in H^p(\mu_c) = H^p_C(\mu)$  (v. [2]). Entonces  $f = K_p \cdot g$   $g \in H^p(T)$ ; pero como  $g \in H^p(T)$   $g = u \cdot 0$  con  $u$  interna y  $0$  externa clásica. Luego  $f = u \cdot K_p \cdot 0$  y es inmediato que  $K_p \cdot 0$  es  $\mu_c$ -externa, pues  $K_p \cdot H^p(T) = H^p(\mu_c)$ . Se obtiene entonces:

Teorema 4. - Toda función de  $H^p(\mu_c)$  es el producto de una función interna por una función  $\mu_c$ -externa, donde la factorización es única salvo constantes de módulo 1.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] FREUD Orthogonal Polynomials. Pergamon Press 1971
- [2] GUADALUPE J.J. Clausura en  $L^p(\mu)$  de los polinomios analíticos sobre la circunferencia unidad. Tesis. Dpto. Teoría de Funciones. Zaragoza
- [3] HELSON H. Lectures on invariant subspaces. Academic Press 1964

- [4] REZOLA M. Un teorema de aproximación en espacios  $L^p$ . Rev. Hispano-Americana. (por aparecer)
- [5] RUDIN Fourier Analysis on groups. Interscience Publishers 1967