La teoría del centro mínimo de José Zaragoza y el teorema de Ceva

por

Edgar Labarga Varona

Resumen. En este artículo se expone, con un lenguaje matemático actual, una parte de la teoría geométrica desarrollada por el matemático español del siglo XVII José Zaragoza en su obra *Geometria Magna in Minimis*. Con ella, Zaragoza fue capaz de probar el teorema de Ceva cuatro años antes de que el propio G. Ceva publicara su demostración, y generalizar un interesante problema propuesto por Apolonio de Perga en su tratado *Plane Loci*.

Introducción

En el siglo XVII, en medio de una gran crisis demográfica, económica y política en España y cuando la ciencia española se había visto afectada por la situación del país, el jesuita José Zaragoza publicaba, en su obra *Geometria Magna in Minimis* ([15]), unos resultados geométricos con los cuales, por ejemplo, probaba incluso el conocido como teorema de Ceva cuatro años antes de que el propio trabajo de Ceva viera la luz. Por sus aportaciones en los campos de la Matemática y de la Astronomía, José Zaragoza está considerado como uno de los científicos españoles más destacados de su época.

El principal objetivo de este artículo es presentar al lector, con un lenguaje matemático más próximo al actual, una parte de la teoría del denominado *centro mínimo* que Zaragoza desarrolló en la *Geometria Magna in Minimis*. La fuente principal de este trabajo es el artículo [11] de E. Recasens, cuya tesis doctoral [10] también está dedicada a poner en claro la citada obra de Zaragoza. En sus estudios históricos, Recasens analiza cómo parte del libro de Zaragoza se podía interpretar como una geometría baricéntrica en la que el centro mínimo hacía el papel de centro de gravedad y que, entonces, ciertas proposiciones se correspondían con los resultados que Ceva publicaría cuatro años más tarde. Aquí no nos hemos preocupado de los aspectos que más interesan a la historia de las matemáticas —que también están excelentemente desarrollados en los estudios antes mencionados—, sino a explicar el método del centro mínimo de Zaragoza con el lenguaje y andamiaje matemático desarrollado por Recasens, con estilo, notación y criterios de demostración actuales; en particular, completando detalles de demostraciones que posiblemente nunca se hubiesen tenido en cuenta en la matemática del siglo XVII.

El presente artículo se estructura en varias secciones: en la primera se recuerda el resultado geométrico que se conoce como teorema de Ceva y se da su demostración original. En la segunda incluimos una breve reseña de la biografía y obra de José Zaragoza. Las secciones tercera y cuarta presentan algunos conceptos y resultados de la *Geometria Magna in Minimis* entre los cuales se encuentra el concepto fundamental de la teoría de Zaragoza, el de *centro mínimo* de un sistema de puntos con figuras asociadas. En la última sección se da una demostración alternativa del teorema de Ceva similar a la que Zaragoza escribió cuatro años antes de publicarse el trabajo de Ceva, y se presenta también, como hace Recasens ([11], [12]), la solución a un notable problema propuesto por Apolonio de Perga en el segundo libro de su tratado *Plane Loci*, que fue, como Zaragoza menciona en el prólogo ([15, *Operis Ratio Lectori*], ver [12, pág. 46]), la motivación de su obra *Geometria Magna in Minimis.*

1. El teorema de Ceva

El hoy conocido como teorema de Ceva es uno de los resultados más famosos y utilizados de la geometría clásica (ver [3, pág. 255] o [5, II, págs. 77–78]). Debe su nombre al matemático italiano Giovanni Ceva (ca. 1647–1734) y es el dual del teorema de Menelao (siglo I a. C.).

El enunciado y la demostración del teorema constituyen la Proposición X que incluye Ceva en su obra *De lineis rectis se invicem secantibus: statica constructio* (Milán, 1678). En vida de su autor este trabajo no fue excesivamente reconocido, y fueron el matemático francés M. Chasles[1] y el matemático italiano G. Cremona[2] quienes posteriormente lo difundirían con el nombre de teorema de Ceva.

Sin embargo, la autoría de ese teorema no está exenta de polémica. Pese a que hoy en día se atribuye a Ceva, antes de Ceva ya se conocía su formulación e incluso su demostración. Durante el reinado de taifas en la península ibérica, el rey de la taifa de Saraqusta (actual Zaragoza) Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd, en el siglo XI, ya había enunciado y probado el teorema en su obra *Libro de la perfección y de las apariciones ópticas* (*Kitāb al-Istikmāl*) (ver [7, pág. 9]). Y, muy posteriormente, pero cuatro años antes de la aparición del trabajo de Ceva, el matemático valenciano José Zaragoza había desarrollado una teoría de carácter puramente geométrico en su obra *Geometria Magna in Minimis* ([15]) de la cual deduce de forma inmediata el teorema.

La formulación original de Ceva del teorema no es exactamente la que hoy en día suele darse. Actualmente se enuncia como sigue:

TEOREMA 1 (Teorema de Ceva, forma actual). *Sea ABC un triángulo cualquiera y sean F, G y E puntos interiores de los segmentos AB, BC y CA, respectivamente. Entonces, las rectas AG, BE y CF son concurrentes si y solo si*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \tag{1}$$

[1]En su obra *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837).

[2]En el artículo *Intorno ad un'operetta di Giovanni Ceva matematico milanese del secolo XVII* publicado en la *Rivista ginnasiale e delle scuole tecniche o reali* **6** (1859), págs. 191–206.

En (1), igual que en otras ocasiones más adelante, PQ denota la longitud (no orientada) del segmento PQ.

En cambio, la formulación y demostración originales que proporcionó Ceva en 1678 son:

Proposición 1 (Teorema de Ceva, 1678). *Sea ABC un triángulo cualquiera y O un punto interior al triángulo. Sea F el punto de intersección de la recta CO con el lado AB, G el punto de intersección de la recta AO con el lado BC y E el punto de intersección de la recta BO con el lado AC. Si se conocen las razones CE/CG y EA/GB, entonces se puede encontrar la razón BF/FA.*

Demostración. Asociemos a cada vértice del triángulo unos pesos a, b, c de tal forma que el vértice A tenga un peso a, el vértice B tenga un peso b y el vértice C un peso c, y se verifique que

$$\frac{CG}{GB} = \frac{b}{c}, \qquad \frac{CE}{EA} = \frac{a}{c}.$$

De esta forma logramos que el punto O se convierta en el centro de gravedad del sistema de pesos a, b, c. Entonces, el punto F, intersección de la recta CO con el lado AB, será el centro de gravedad del sistema de pesos a, b y por tanto se cumplirá que $BF/FA = a/b$. De este modo, se tendrá que

$$\frac{BF}{FA} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{CE}{EA} \cdot \frac{GB}{CG} = \frac{CE}{CG} : \frac{EA}{GB} = \frac{CE \cdot GB}{EA \cdot CG}. \qquad \square$$

Notemos que el enunciado de la Proposición 1 solo se preocupa de la necesidad de la condición (1) para la concurrencia de las «cevianas» en el Teorema 1. Demostrar la suficiencia es sencillo a partir de lo anterior.

La demostración de Ceva no era del todo geométrica si se quiere, pues mezclaba los conceptos geométricos con el concepto físico de centro de gravedad de un sistema de pesos. Consciente de ello, el propio Ceva incluyó otra demostración puramente geométrica (basada en un argumento estándar de razones de áreas) que acreditó a su amigo P. Caravaggio ([11, pág. 288]). El matemático suizo Johann Bernoulli (1667–1748) también aportó una prueba geométrica original de la Proposición 1 (ver [2, Propositio I, pág. 33]).

2. José Zaragoza

2.1. Biografía

El Padre José Zaragoza vivió en el siglo XVII, época marcada por la profunda crisis demográfica, económica y política que atravesaba España. El descontento de la población con el gobierno de validos y con la nobleza acrecentaba la tensión interna. La ciencia española se vio afectada y quedó rezagada de los nuevos conocimientos que florecían en Europa gracias a la revolución científica; entre otros, la geometría analítica de Fermat y Descartes, la matemática infinitesimal de Newton y Leibniz, y la aparición del concepto de función.

José Zaragoza nació en Alcalà de Xivert, Castellón, el 5 de mayo de 1627, en el seno de una familia modesta. Comenzó sus estudios en el colegio o seminario recién fundado por D. Juan Jerónimo Vives y Masó cerca del convento de Jerusalem, mostrando desde muy temprano un interés especial por las matemáticas. Continuó estudiando en la Universidad de Valencia, donde obtendría el grado de Doctor en Filosofía.

Tras esto, rechazó la única cátedra de Matemáticas en Valencia para ingresar, con 24 años, en la Compañía de Jesús el 1 de febrero de 1651, en el colegio San Pablo de Valencia. Obtuvo el noviciado en Huesca y se trasladó a Calatayud a impartir Retórica. Leyó Artes y Retórica durante un periodo en Mallorca, donde conoció a Vicente Mut, uno de los astrónomos españoles más importantes de la época, y a su colaborador Miguel Fuster. Ellos incentivarían su interés por la astronomía aportándole importantes conocimientos que luego utilizaría en sus obras. También comenzó entonces a dar clases particulares a nobles.

Después de enseñar Teología en Barcelona regresó a Valencia en 1660. Allí fue nombrado prefecto de las Conferencias de Teología Moral y, en 1668, calificador del Santo Oficio. Siguió con la práctica de las clases particulares a nobles. Más tarde, fue destinado a Madrid, donde desempeñó la cátedra en Matemáticas en los Reales Estudios del Colegio Imperial de San Isidro a finales del año 1670. En ese periodo la fama de Zaragoza aumentó entre la nobleza, y el Estado comenzó a confiarle varios encargos. Entre otros, el jesuita elaboró informes de las minas de azogue de Almadén y de las minas de Guadalcanal, así como de la ría de Sanlúcar de Barrameda, donde las flotas procedentes de las Indias sufrían numerosos percances debido a su escasa anchura. Estos empleos hicieron que Zaragoza fuera nombrado Visitador Oficial de la minería de Toledo y Castilla en 1677.

La exitosa actividad docente de Zaragoza le llevaría a impartir clases al futuro rey Carlos II, quien siempre mostró un gran aprecio hacia su profesor, incluso en su etapa como monarca.

José Zaragoza falleció el 14 de abril de 1679 en el Colegio Imperial de Madrid.

2.2. Obra de José Zaragoza

Dentro de la obra matemática de Zaragoza encontramos:

— *Aritmética universal que comprende el arte menor y mayor, Álgebra vulgar y especiosa* (1669), su primera obra impresa, y en la que aparece el método de Vieta para el cálculo de raíces de ecuaciones polinómicas por primera vez en España.

— *Geometría especulativa y práctica de los planos y sólidos* (1671), obra basada en varios libros de los *Elementos* de Euclides con una presentación pedagógica.

— *Trigonometría española; resolución de los triángulos planos y esféricos, fábrica y uso de los senos y logaritmos* (1672), donde se exponen la noción de logaritmo y sus propiedades básicas junto con dos extensas tablas.

— *Euclides novo antiquus singularis methodo illustratus* (1673), reedición de la obra *Geometría especulativa y práctica de los planos y sólidos.*

— *Geometria Magna in Minimis* (1674), en la cual nos centraremos en la siguiente sección.

— *Fábrica y uso de varios instrumentos matemáticos* (1675), que surge a propósito de un regalo que Zaragoza hizo al rey Carlos II por su decimocuarto cumpleaños.

De su obra astronómica, Zaragoza solamente vio impresa *Esphera en comun, celeste y terraqvea* (1675), tratado dividido en tres libros donde se presentan los fundamentos de geometría esférica, astronomía y geografía física.

Además de las obras mencionadas, existen algunas que se le atribuyen y otras que se han perdido, así como un amplio número de manuscritos.

Para el lector interesado en el contexto científico de España en el siglo XVII y en la biografía y obra de Zaragoza remitimos a [1].

3. Geometria Magna in Minimis

De entre los trabajos matemáticos de Zaragoza destaca su *Geometria Magna in Minimis* ([15]). La obra, publicada en Toledo en 1674, presenta un carácter puramente geométrico. Se divide en tres libros, a los cuales nos referiremos, como hace Recasens en [11], como GMm I, GMm II y GMm III. En el primero se exponen las principales ideas de su teoría del *centro mínimo* de un sistema de puntos con figuras asociadas y se resuelve uno de los problemas de lugares geométricos que propuso Apolonio en su tratado *Plane Loci*. En los dos libros siguientes se aplican las propiedades del centro mínimo para estudiar diversos problemas de geometría plana y espacial.

La obra, dedicada al rey Carlos II, está escrita en latín, lo que entonces permitía una mayor distribución por toda Europa. Sigue el patrón de proposición-demostración con estilo breve y claro, incluyendo además figuras del propio autor agrupadas en varias láminas.

3.1. Complemento de un polígono y polígonos equicomplementados

Comenzaremos presentando el concepto de *especie*. Zaragoza no lo define explícitamente aunque lo usa implícitamente asociado al vocablo *species* a lo largo de su obra.

Definición 1 (Especie). *Una* especie *(o* especie poligonal*) α es una aplicación de la clase de todos los segmentos en la clase de todos los polígonos basados,*[3] *es decir, una correspondencia que a cada segmento s le asigna un polígono $\alpha(s)$ de base s, y que verifica que dados dos segmentos s y s', el polígono $\alpha(s)$ de base s es semejante al polígono $\alpha(s')$ de base s'.*

Zaragoza denotaba implícitamente las especies dibujando distintas figuras poligonales junto a las letras del polígono que trataba (véase la Figura 1). Nosotros denotaremos las especies con letras griegas α, β, …, y utilizaremos la notación $\alpha(AB)$, siendo AB un segmento, tanto para denotar el polígono $\alpha(AB)$ como su área, dependiendo del contexto. En el caso de tener un segmento de la forma AA,

[3]Decimos que un polígono es un polígono *basado* cuando fijamos un lado de dicho polígono, al que llamamos *base*.

Figura 1: Tres imágenes de la *Geometria Magna in Minimis*. A la izquierda, la portada; en el centro, una página con la Proposición 96 en la que se pueden apreciar las figuras que utilizaba Zaragoza para designar implícitamente la noción de especie, y, a la derecha, una de las láminas de figuras.

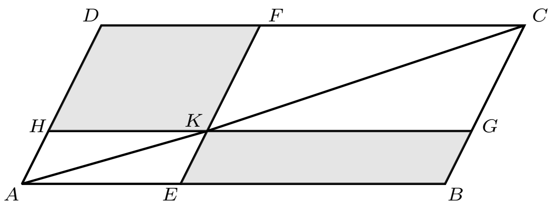


Figura 2: Paralelogramo asociado a la Proposición 43 del Libro I de los *Elementos* de Euclides.

consideraremos el polígono $\alpha(AA)$ construido sobre AA con la especie α como un polígono degenerado de área cero.

El siguiente concepto, el de *complemento* de un polígono, fue sugerido por Euclides en el primer libro de los *Elementos* ([4]) para el caso particular de los paralelogramos.[4] Sea un paralelogramo $AEKH$ (véase la Figura 2). Sea un punto B sobre la recta AE más allá del punto E. Consideremos un paralelogramo $ABCD$ semejante al $AEKH$ con una diagonal AC. Sea G el punto de intersección de la recta HK y el lado BC y sea F el punto de intersección de la recta EK con el lado DC. La proposición de Euclides afirma que los dos paralelogramos «complementarios» $EBGK$ y $HKFD$ tienen igual área.

Zaragoza generaliza en su obra la noción de complemento para cualquier polígono.

Definición 2 (Complemento de un polígono). *Sea una especie α y un segmento AB obtenido prolongando un segmento AE más allá del punto E. Llamaremos* com-

[4] En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí ([4, Libro I, Proposición 43]).

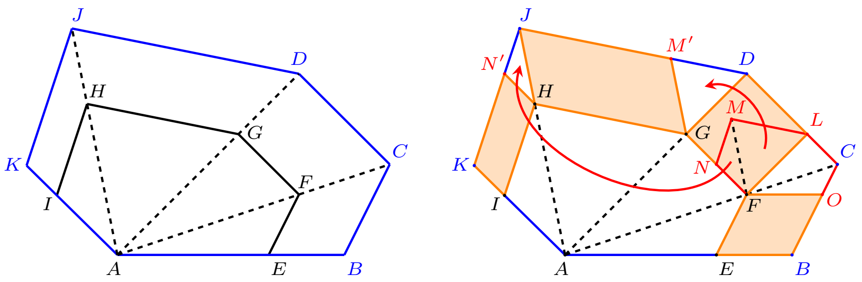


Figura 3: Caso particular de un hexágono. El complemento del hexágono $AEFGHI$ es igual a la suma de las áreas de los paralelogramos $EBOF$, $FLDG$, $GM'JH$ y $HN'KI$.

plemento *del polígono* $\alpha(AE)$ *en relación a la* base AE *y al* exceso de base EB, *y lo denotaremos por* $C_{\alpha(AE),EB}$, *a la cantidad*

$$C_{\alpha(AE),EB} = \alpha(AB) - \alpha(AE) - \alpha(EB). \tag{2}$$

Observación 1. Conviene notar que, por ejemplo en la Figura 2, $\alpha(EB) = \alpha(KG)$, de modo que $C_{\alpha(AE),EB}$ es en este caso efectivamente la suma de las áreas de los paralelogramos $EBGK$ y $HKFD$ como pedía Euclides. En general, el complemento de un polígono de n lados ($n \geq 3$) con respecto a una base y a un cierto exceso de base tiene la propiedad de ser la suma de las áreas de $n-2$ paralelogramos asociados (en la Figura 3 se muestra esto para un hexágono).

Este concepto de complemento de un polígono permite dar la definición de *polígonos equicomplementados.*

Definición 3 (Polígonos equicomplementados). *Sea un segmento* AB, M *un punto de ese segmento y* $\alpha(AM), \beta(BM)$ *dos polígonos de bases* AM *y* BM, *respectivamente. Diremos que los polígonos* $\alpha(AM)$ *y* $\beta(BM)$ *son* equicomplementados *si cuando consideramos puntos cualesquiera* X *y* X' *sobre la recta* AB *tales que* M *pertenece a la vez a los segmentos* AX' *y* XB *y además* $XM = MX'$, *se verifica que*

$$C_{\alpha(AM),MX'} = C_{\beta(BM),MX}.$$

Con el fin de obtener una caracterización de la equicomplementación de dos polígonos, mostramos en la Proposición 2 un resultado técnico muy útil.

Proposición 2 (Proposición 5 de GMm I). *Dado un segmento* AB *y un punto* M *del mismo, para todo par de puntos* X, X' *tales que* M *pertenece a la vez a los segmentos* AX' *y* XB *y además* $XM = MX'$, *y para toda especie dada* α, *se verifica que*

$$\alpha(AX) + C_{\alpha(AM),MX'} = \alpha(AM) + \alpha(MX').$$

En la demostración usaremos el siguiente lema que recoge las Proposiciones 1 y 2 de GMm I.

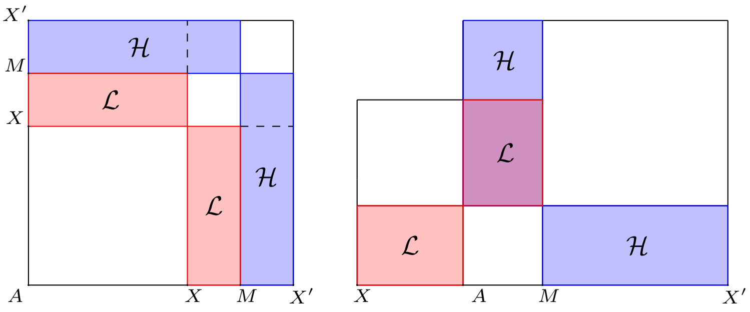


Figura 4: Representación gráfica de los casos del Lema 1. A la izquierda el primer caso y a la derecha el segundo.

Lema 1. *Sea M un punto fijo de un segmento AB. Para todo punto X del segmento AB se cumple*

$$XA^2 + X'A^2 = 2\left(MA^2 + MX'^2\right),$$

siendo X' el simétrico de X respecto del punto M.

Demostración. *Primer caso*: Que X' se encuentre en la semirrecta con origen en el punto A que contiene a B.

Sin pérdida de generalidad supongamos que X es un punto del segmento AM. Tomamos el segmento AM como base y construimos un cuadrado. De modo similar pero con base AX' construimos otro cuadrado. Notemos que podemos descomponer el cuadrado de base AX' en el cuadrado de base AM, en el de base MX' y en dos rectángulos de igual área (vamos a denotarla por $\mathcal{H}$), uno de base MX' y altura AM, y otro de base AM y altura MX'.

Descomponemos ahora el cuadrado de base AM en un cuadrado de base AX, en un cuadrado de base XM y en dos rectángulos de igual área (vamos a denotarla por $\mathcal{L}$), uno de base XM y altura AX, y otro de base AX y altura XM.

Como $XM = MX'$, cada rectángulo de área $\mathcal{H}$ se puede descomponer en un rectángulo de área $\mathcal{L}$ y un cuadrado de base XM. Por lo tanto,

$$AX'^2 = AM^2 + MX'^2 + 2\left(\mathcal{L} + MX'^2\right). \tag{3}$$

Pero sabemos que $2\mathcal{L} = AM^2 - XM^2 - AX^2$, y entonces, sustituyendo en (3), obtenemos

$$XA^2 + X'A^2 = 2\left(MA^2 + MX'^2\right),$$

como queríamos probar.

Segundo caso: Que X' se encuentre en la semirrecta de origen A que no contiene al punto B.

Renombramos los puntos X y X' permutando sus nombres entre sí, es decir, ponemos $X := X'$ y $X' := X$. Tomamos el segmento AM como base y construimos un cuadrado. De modo similar pero con base AX' construimos otro cuadrado. Notemos que podemos descomponer el cuadrado de base AX' en un cuadrado de base AM, en otro de base MX' y en dos rectángulos de igual área (vamos a denotarla por $\mathcal{H}$), uno de base MX' y altura AM, y otro de base AM y altura MX'.

Descomponemos ahora el cuadrado de base XM en un cuadrado de base AX, en un cuadrado de base AM y en dos rectángulos de igual área (vamos a denotarla por $\mathcal{L}$), uno de base AM y altura AX y otro de base AX y altura AM.

Como se verifica que $XM = MX'$, cada rectángulo de área $\mathcal{H}$ se puede descomponer en un rectángulo de área $\mathcal{L}$ y en un cuadrado de base AM. Entonces tenemos que

$$AX'^2 = AM^2 + MX'^2 + 2\left(\mathcal{L} + AM^2\right). \tag{4}$$

Pero como $2\mathcal{L} = XM^2 - AM^2 - XA^2$, sustituyendo en (4) tenemos

$$XA^2 + X'A^2 = 2\left(MA^2 + MX'^2\right),$$

como queríamos probar. □

Demostración de la Proposición 2. El Lema 1 nos dice que

$$XA^2 + X'A^2 = 2MA^2 + 2MX'^2.$$

Por otro lado, por la semejanza de los polígonos de la misma especie α, tenemos

$$\frac{\alpha(XA)}{XA^2} = \frac{\alpha(X'A)}{X'A^2} = \frac{\alpha(MA)}{MA^2} = \frac{\alpha(MX')}{MX'^2}, \tag{5}$$

y entonces $\alpha(XA) + \alpha(X'A) = 2\alpha(MA) + 2\alpha(MX')$. Como, por (2), $\alpha(AX') = \alpha(AM) + C_{\alpha(AM),MX'} + \alpha(MX')$, sustituyendo se obtiene el resultado. □

La siguiente proposición da una caracterización para dos polígonos equicomplementados.

Proposición 3 (Proposición 6 de GMm I). *Consideremos un segmento AB, sea M un punto de ese segmento y dos polígonos $\alpha(AM)$ y $\beta(MB)$. Los polígonos $\alpha(AM)$ y $\beta(MB)$ son equicomplementados si y solo si para todo punto X de la recta AB se verifica*

$$\alpha(XA) + \beta(XB) = \alpha(MA) + \beta(MB) + \alpha(MX) + \beta(MX). \tag{6}$$

Demostración. Supongamos primero que $\alpha(AM)$ y $\beta(MB)$ son equicomplementados y veamos que se verifica (6).

Sea X un punto de la recta AB y sea X' el simétrico de X respecto del punto M. Sin pérdida de generalidad, supongamos que M es un punto del segmento AX'. La Proposición 2 nos dice que

$$\alpha(XA) + C_{\alpha(AM),MX'} = \alpha(MA) + \alpha(MX'),$$

y como $MX = MX'$ y $C_{\alpha(AM),MX'} = C_{\beta(MB),MX}$, ya que los polígonos $\alpha(AM)$ y $\beta(MB)$ son equicomplementados, se tiene que

$$\alpha(XA) + C_{\beta(MB),MX} = \alpha(MA) + \alpha(MX).$$

Sumando a ambos lados de esta ecuación la cantidad $\beta(BM)+\beta(MX)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha(XA)+\beta(MB)+C_{\beta(MB),MX}+\beta(MX)\\=\alpha(MA)+\beta(MB)+\alpha(MX)+\beta(MX).\end{aligned}$$

Notemos que, por (2), $\beta(BX)=\beta(BM)+C_{\beta(BM),MX}+\beta(MX)$, y entonces llegamos a

$$\alpha(XA)+\beta(BX)=\alpha(MA)+\beta(MB)+\alpha(MX)+\beta(MX).$$

Recíprocamente, supongamos que para todo punto X de la recta AB se cumple (6) y veamos que los polígonos $\alpha(AM)$ y $\beta(MB)$ son entonces equicomplementados.

Podemos simplemente dar marcha atrás en el razonamiento anterior. Así, de (6), por definición de complemento, obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned}\alpha(XA)+\beta(BM)+C_{\beta(BM),MX}+\beta(MX)\\=\alpha(MA)+\beta(MB)+\alpha(MX)+\beta(MX),\end{aligned}$$

de la cual, como $MX=MX'$, se deduce que

$$\alpha(XA)+C_{\beta(BM),MX}=\alpha(MA)+\alpha(MX').$$

Aplicando la Proposición 2 tenemos que, necesariamente, $C_{\alpha(AM),MX'}=C_{\beta(BM),MX}$ y por tanto los polígonos son equicomplementados. □

De (6) se deduce que $\alpha(MA)+\beta(MB)$ es el valor mínimo de la cantidad $\alpha(XA)+\beta(XB)$ cuando el punto X recorre el segmento AB. Esto implica que el punto M está unívocamente determinado y se denomina *punto de equicomplementación* de los puntos A y B con las respectivas especies α y β.

3.2. El coeficiente de cuadratura

Es posible dar una visión algebraica de algunos de los aspectos presentados anteriormente introduciendo la noción de *coeficiente de cuadratura*. Notemos que dada una especie α determinada por un polígono $\alpha(AB)$ cuya base es el segmento AB, para cualquier otro segmento PQ se tiene la igualdad

$$\frac{\alpha(AB)}{AB^2}=\frac{\alpha(PQ)}{PQ^2}\,. \tag{7}$$

Esta razón constante determina un número real positivo que, por comodidad en ciertas fórmulas a tratar, también denotaremos por α, y al que llamaremos *coeficiente de cuadratura* de la especie α; por consiguiente, el coeficiente de cuadratura verifica que $\alpha(AX)=\alpha\cdot AX^2$.

Considerando ahora un segmento AB y un punto E del mismo, sustituyendo la igualdad (7) en (2) se deduce que

$$\alpha(AB)=\alpha\cdot AE^2+C_{\alpha(AE),EB}+\alpha\cdot EB^2.$$

Puesto que E es un punto del segmento AB, es sencillo comprobar que

$$AB^2 = AE^2 + 2AE \cdot EB + EB^2,$$

y así,

$$\alpha(AB) = \alpha \cdot AB^2 = \alpha \cdot AE^2 + 2\alpha \cdot AE \cdot EB + \alpha \cdot EB^2,$$

de donde deducimos que el complemento de un polígono (con relación a la base AE y exceso de base EB), en función del coeficiente de cuadratura, es

$$C_{\alpha(AE),EB} = 2\alpha \cdot AE \cdot EB. \tag{8}$$

Esto también permite dar una expresión operativa para la definición de dos polígonos equicomplementados que pasamos a ver:

Aplicando (8) en la Definición 3, dado un segmento AB y un punto M de dicho segmento, los polígonos $\alpha(AM)$ y $\beta(MB)$ son equicomplementados si para todo segmento de longitud e (exceso de base) se cumple que

$$2\alpha \cdot AM \cdot e = 2\beta \cdot MB \cdot e$$

o bien, simplificando,

$$\alpha \cdot AM = \beta \cdot MB. \tag{9}$$

Esta interpretación algebraica nos acerca tal vez a la génesis de la demostración original de Ceva. Efectivamente, si pensamos que nuestros coeficientes α y β son pesos asociados a los vértices A y B respectivamente, la expresión (9) no es otra cosa que la *ley de la palanca* de Arquímedes.

Por otra parte, si en la expresión (6), que caracterizaba la equicomplementación de dos polígonos, expresamos $\alpha(PQ)$ y $\beta(LK)$ mediante sus coeficientes de cuadratura, obtenemos

$$\alpha \cdot XA^2 + \beta \cdot XB^2 = \alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 + (\alpha + \beta)MX^2,$$

que no es otra cosa que el teorema de Steiner que relaciona, en Física, el momento de inercia, respecto de un punto arbitrario X, del sistema de puntos A y B con masas respectivas α y β, con el momento de inercia de dicho sistema respecto de su centro de masas M.

Observación 2. En el caso particular en el que una especie α asigne a una base AB un rectángulo $\alpha(AB)$ de altura h_{AB}, se tiene que:

a) El coeficiente de cuadratura será $\alpha = (AB \cdot h_{AB})/AB^2 = h_{AB}/AB$, es decir, la razón entre la altura del rectángulo $\alpha(AB)$ y su base AB.

b) Si E es un punto del segmento AB y denotamos la longitud del segmento EB por e (exceso de base), el complemento es $C_{\alpha(AE),EB} = 2 \cdot h_{AB} \cdot e$.

   Como consecuencia, dado un segmento PQ y un punto E entre P y Q, si $\alpha(PE)$ y $\beta(EQ)$ son rectángulos de alturas h y h' respectivamente, los dos rectángulos $\alpha(PE)$ y $\beta(EQ)$ son equicomplementados si y solo si $h = h'$.

4. El centro mínimo

En esta sección generalizaremos varias de las nociones expuestas en el apartado anterior. Probablemente, el término que le da título, el de *centro mínimo*, sea uno de los conceptos básicos más importantes de la obra *Geometria Magna in Minimis*. El objetivo de Zaragoza (ver [13, pág. 697]) era el de definir un punto con las propiedades geométricas equivalentes a las propiedades físicas del centro de gravedad de un sistema de puntos materiales (en el plano o en el espacio).

A partir de ahora, usaremos la notación $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ para denotar el sistema de n puntos fijos $A_1, \dots, A_n$ con las especies $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ respectivamente asociadas a esos puntos, de modo que para cada punto X del espacio podemos considerar las bases $A_1X, \dots, A_nX$, y construir los polígonos $\alpha_1(A_1X), \dots, \alpha_n(A_nX)$.

Analizaremos en primer lugar el caso en el que los puntos sean colineales, y el primer concepto que generalizaremos será el de equicomplementación. Vamos a extender entonces la Definición 3 al caso de tener n puntos colineales $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Definición 4 (Polígonos equicomplementados). *Sean n puntos colineales $A_1, \dots, A_n$ (dispuestos en este orden en una recta), y sea el sistema $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$. Sea M un punto interior al segmento A_jA_{j+1} para algún j. Diremos que los polígonos $\alpha_1(A_1M), \dots, \alpha_n(A_nM)$ son* equicomplementados *si para todo exceso de base de longitud e, la suma de los complementos de los polígonos correspondientes a los segmentos $A_1M, \dots, A_jM$ es igual a la suma de los complementos de los polígonos correspondientes a los segmentos $MA_{j+1}, \dots, MA_n$, es decir, que para todo exceso de base de longitud e se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{j} C_{\alpha_i(A_iM),e} = \sum_{i=j+1}^{n} C_{\alpha_i(MA_i),e}. \tag{10}$$

También podemos dar una expresión, en términos de los coeficientes de cuadratura, de cuándo varios polígonos son equicomplementados. Para cada polígono de la Definición 4, su complemento vendrá dado por

$$C_{\alpha_i(A_iM),e} = 2\alpha_i \cdot A_iM \cdot e,$$

con lo que la igualdad (10) equivale a que sea

$$\alpha_1 \cdot A_1M + \cdots + \alpha_j \cdot A_jM = \alpha_{j+1} \cdot MA_{j+1} + \cdots + \alpha_n \cdot MA_n. \tag{11}$$

Esta definición de equicomplementación para varios polígonos permite dar la siguiente proposición, que es una generalización de la Proposición 3 de la sección anterior y cuya demostración sigue un procedimiento similar.

Proposición 4 (Proposición 7 de GMm I). *Sea el sistema $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$, donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ son n puntos colineales (dispuestos en este orden en una recta). Sea M un punto del segmento A_jA_{j+1} para algún j. Entonces, los polígonos $\alpha_1(A_1M), \dots, \alpha_n(A_nM)$ son equicomplementados si y solo si para todo punto X colineal con los puntos dados se tiene*

$$\begin{aligned}\alpha_1(XA_1) + \cdots + \alpha_n(XA_n) = {} & \alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n) \\ & + \alpha_1(MX) + \cdots + \alpha_n(MX).\end{aligned} \tag{12}$$

Si observamos el significado del «si y solo si» de esta proposición, podemos darnos cuenta del papel que juega el punto M; a la izquierda del «si y solo si», M es un punto de equilibrio en el sentido de que hace que los polígonos sean equicomplementados. Por otra parte, a la derecha del «si y solo si», M es un punto que verifica (12) y, por tanto, M da un mínimo para la suma de las áreas $\alpha_1(XA_1) + \cdots + \alpha_n(XA_n)$. Es decir, que el punto M tiene la propiedad de que

$$\alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n) \leq \alpha_1(XA_1) + \cdots + \alpha_n(XA_n)$$

para todo punto X, donde la desigualdad es estricta si $X \neq M$. Con esto queda probado, igual que en la sección anterior para el caso de dos puntos, que el punto M es único. Lo denominaremos *punto de equicomplementación* del sistema $(A_1, \alpha_1), \ldots,$ (A_n, α_n).

Al elaborar su teoría, Zaragoza idea un modo de extender la Proposición 4 a puntos no colineales. El punto M de equicomplementación de un sistema $(A_1, \alpha_1),$ $\ldots, (A_n, \alpha_n)$, donde los puntos son colineales, se va a convertir entonces en el *centro mínimo* de un sistema similar donde los puntos no son necesariamente colineales. La definición de Zaragoza esencialmente es la siguiente ([11, pág. 299]):

Definición 5 (Centro mínimo). *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n puntos cualesquiera (en el plano o en el espacio), y las especies asociadas a ellos respectivamente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ α_n. Se dice que un punto M es el* centro mínimo *del sistema $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ si y solo si se cumple*

$$\alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n) \leq \alpha_1(XA_1) + \cdots + \alpha_n(XA_n), \tag{13}$$

para todo punto X (del plano o del espacio).

Es claro que en el caso en que los puntos $A_1, \ldots, A_n$ son colineales, el centro mínimo M es el punto de equicomplementación y está determinado unívocamente. El siguiente resultado asegura que el centro mínimo de un sistema cualquiera de puntos con especies asociadas también lo está.

Proposición 5 (Unicidad del centro mínimo). *El centro mínimo del sistema $(A_1, \alpha_1),$ $\ldots, (A_n, \alpha_n)$ es único.*

Demostración. Supongamos que M y M' fuesen ambos centros mínimos del sistema $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$, y que $M \neq M'$. De (13) podemos deducir que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(MA_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(M'A_i)$$

o, equivalentemente, que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot M'A_i^2.$$

Como los coeficientes de cuadratura son números positivos, se deduce que $MA_i = M'A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego cada A_i pertenece al plano mediador del segmento MM'. Si denotamos por π a ese plano, el segmento MM' es perpendicular a π.

Por otro lado, notemos que $M \in \pi$, pues si suponemos que $M \notin \pi$ y llamamos M'' al pie de la recta perpendicular a π que pasa por M, tendremos que $A_iM > A_iM''$, para todo $i = 1, \ldots, n$, y por lo tanto $\alpha_i(A_iM) > \alpha_i(A_iM'')$. Pero, entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(A_iM) > \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(A_iM''),$$

lo que contradice que M sea el centro mínimo del sistema $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$. Así, $M \in \pi$. Análogamente, $M' \in \pi$.

Como $M, M' \in \pi$ y el segmento MM' es perpendicular a π, se deduce que $M = M'$. □

4.1. Propiedades del centro mínimo

Zaragoza se interesó por las propiedades del centro mínimo. Para demostrarlas hizo uso de un resultado que vamos a denominar ley pitagórica pues es una consecuencia, y a la vez una generalización, del teorema de Pitágoras.

Lema 2 (Ley pitagórica). *Sea ABC un triángulo rectángulo en el vértice A. Sean a, b y c las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C respectivamente. Entonces, para toda especie poligonal α se cumple*

$$\alpha(a) = \alpha(b) + \alpha(c).$$

Demostración. Para toda especie poligonal α se tiene que

$$\frac{\alpha(a)}{a^2} = \frac{\alpha(b)}{b^2} = \frac{\alpha(c)}{c^2}.$$

Así,

$$\alpha(b) = \frac{b^2}{a^2} \cdot \alpha(a) \qquad \text{y} \qquad \alpha(c) = \frac{c^2}{a^2} \cdot \alpha(a).$$

Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras,

$$\alpha(b) + \alpha(c) = \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2}\right) \cdot \alpha(a) = \alpha(a).$$ □

Damos a continuación las propiedades básicas del centro mínimo siguiendo la presentación y la nomenclatura de [11, pág. 300]. Una demostración detallada de todas ellas puede verse en [9, Sección 4.2].

Supongamos que el centro mínimo del sistema $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ es M. Se satisfacen las siguientes propiedades:

a) **Propiedad de proyección**: Si proyectamos ortogonal o paralelamente los puntos $A_1, \ldots, A_n$ sobre una línea recta (de su plano si los puntos son coplanarios) o un plano (si los puntos no son coplanarios) que pase por M y obtenemos los puntos $B_1, \ldots, B_n$, entonces el centro mínimo del sistema $(B_1, \alpha_1), \ldots, (B_n, \alpha_n)$ sigue siendo M.

b) **Propiedad de separación**: Para cualquier punto X distinto de M se cumple que

$$\alpha_1(XA_1) + \cdots + \alpha_n(XA_n) = \alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n) \\ + \alpha_1(MX) + \cdots + \alpha_n(MX).$$

c) **Propiedad de colinealidad**: Si para algún j, M_1 es el centro mínimo del subsistema $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_j, \alpha_j)$ y M_2 es el centro mínimo del subsistema complementario asociado $(A_{j+1}, \alpha_{j+1}), \ldots, (A_n, \alpha_n)$, entonces los puntos M, M_1 y M_2 son colineales.

d) **Propiedad acumulativa**: Si, para algún j, M_1 y M_2 son los centros mínimos de los subsistemas $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_j, \alpha_j)$ y $(A_{j+1}, \alpha_{j+1}), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ respectivamente, entonces M también es el centro mínimo del sistema (M_1, α), (M_2, α'), donde $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$ y $\alpha' = \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_n$.[5]

Utilizando esta última propiedad, la obtención del centro mínimo de un sistema de puntos con especies asociadas se va a reducir a un problema de equicomplementar polígonos. Dados los puntos A con especies asociadas $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ y B con especies asociadas $\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n$ (o, lo que es lo mismo, el sistema $(A, \alpha_1, \ldots, \alpha_j)$, $(B, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$), su centro mínimo es el punto de equicomplementación, es decir, el punto M del segmento AB tal que los polígonos $\alpha_1(AM), \ldots, \alpha_j(AM), \alpha_{j+1}(MB)$, $\ldots, \alpha_n(MB)$ son equicomplementados.

Sin embargo, la construcción del punto de equicomplementación de un sistema no es sencilla. En el tercer libro de su *Geometria Magna in Minimis*, Zaragoza incluye varios ejercicios al respecto.

Un hecho fundamental que simplifica la búsqueda del centro mínimo de un sistema de dos puntos A y B es que es invariante si se sustituyen las especies poligonales asignadas a los puntos A y B por rectángulos que tengan el mismo coeficiente de cuadratura que las correspondientes especies. Esto se puede demostrar de un modo geométrico de la siguiente forma (véase nuestra Figura 5, donde se representa el proceso que a continuación se describe):

Consideremos un polígono $\alpha(b)$ de base b construido con una especie α. Nuestro objetivo es construir un rectángulo de base b que tenga la misma área que el polígono $\alpha(b)$, ya que de esta forma el coeficiente de cuadratura de dicho rectángulo será α. El primer paso hacia este objetivo es dividir $\alpha(b)$ en triángulos trazando las diagonales desde un vértice.

Para cada uno de los triángulos obtenidos construimos un rectángulo de igual área. Para ello, se puede construir sobre un lado del triángulo un rectángulo de altura igual a la mitad de la altura del triángulo.

[5]Por definición, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ quiere decir que, dado un segmento arbitrario AB, $\alpha(AB) = \alpha_1(AB) + \alpha_2(AB)$. Por otro lado, la caracterización geométrica de esta especie suma α es irrelevante, pudiendo considerla siempre rectangular.

En [15], Zaragoza prueba que se puede reducir el problema de calcular el centro mínimo de varios puntos, cada uno con su respectiva especie asociada, al de hallar el centro mínimo de únicamente dos puntos, cada uno teniendo asociadas varias de las anteriores especies.

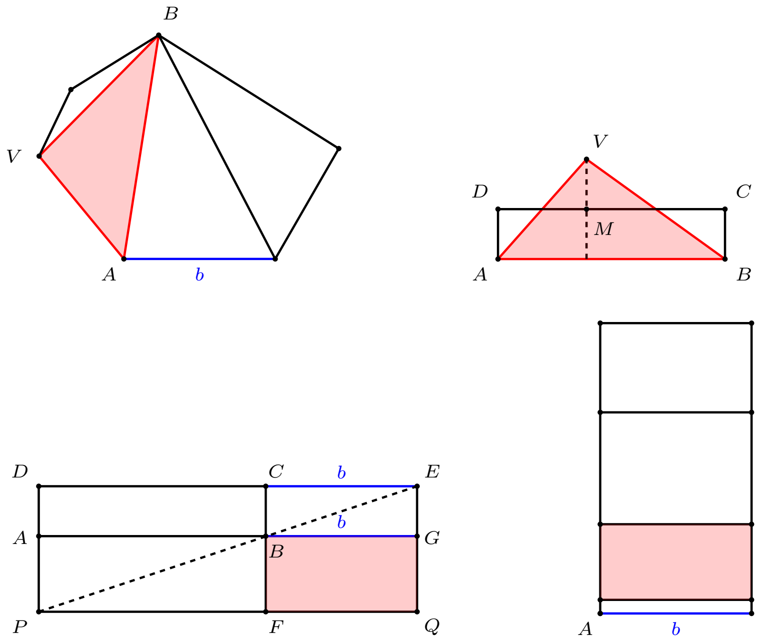


Figura 5: Pasos para la construcción geométrica de un rectángulo con el mismo coeficiente de cuadratura que el de un polígono dado.

A continuación hay que construir, para cada uno de esos rectángulos, otro de igual área pero de base b (este paso solo tiene sentido si el rectángulo en consideración no tiene ya algún lado de longitud b). Para hacer esto, si a cada rectángulo considerado lo denotamos por $ABCD$, prolongaremos el lado DC más allá del vértice C con un segmento de longitud b hasta el punto E. Seguidamente trazamos la recta BE. Sea P el punto donde esa recta corta a la recta AD. Ahora construimos un rectángulo $PQED$ con los vértices P, E y D que hemos ido obteniendo. Denotemos por F el punto de intersección de las rectas CB y PQ, y por G el punto de intersección de las rectas AB y EQ. Notemos que en el rectángulo $FQGB$, el lado BG, de longitud b, se puede considerar como su base, y que el área de dicho rectángulo es igual al área del rectángulo $ABCD$.

Por último, basta con colocar todos los rectángulos de base b así obtenidos uno sobre otro para obtener el rectángulo de base b de igual área que el polígono $\alpha(b)$.

4.2. Construcción del centro mínimo. Un ejemplo

Veamos un ejemplo concreto ([11, págs. 304–305]) de cómo hallar el centro mínimo de un sistema de dos puntos con dos especies rectangulares asociadas a cada uno de ellos. Antes damos la siguiente proposición auxiliar ([11, pág. 304]).

Proposición 6 (Proposición 30 de GMm I). *Si M es el centro mínimo del sistema $(P,\alpha),(Q,\alpha')$ y M' es el centro mínimo del sistema $(P',\alpha),(Q',\alpha')$, entonces se* *verifica que*

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{P'M'}{M'Q'}.$$

Demostración. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\alpha}'$ especies rectangulares con el mismo coeficiente de cuadratura que las especies poligonales α y α' respectivamente. Notemos que, como ya se ha dicho, basta probar el resultado para $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\alpha}'$.

Sean h y h' las alturas respectivas de los rectángulos $\tilde{\alpha}(PM)$ y $\tilde{\alpha}'(P'M')$. Tendremos que $\tilde{\alpha} = h'/P'M' = h/PM$, y, por tanto,

$$\frac{h}{h'} = \frac{PM}{P'M'}. \tag{14}$$

También, $\tilde{\alpha}' = h'/Q'M' = h/QM$, y así

$$\frac{h}{h'} = \frac{QM}{Q'M'}. \tag{15}$$

De (14) y (15) se deduce el resultado. □

Supongamos que tenemos dos puntos A y B con las especies rectangulares α, β asociadas al punto A y las especies γ, δ también rectangulares asociadas a B. Consideremos el segmento AB (véase la Figura 6).

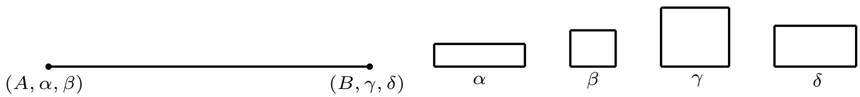


Figura 6: Segmento AB y especies rectangulares α, β, γ y δ para el ejemplo.

El centro mínimo de este sistema será el punto M del segmento AB tal que los polígonos $\alpha(AM)$, $\beta(AM)$, $\gamma(MB)$ y $\delta(MB)$ resulten ser equicomplementados. Dividiremos el proceso de encontrar tal punto M en tres pasos.

Primer paso: Tomamos un segmento de longitud arbitraria m y construimos el rectángulo de base m con la especie α. Sea i su altura. Sobre este rectángulo construimos otro de igual base m y especie β. A la altura de este segundo rectángulo la denotamos por j. Procedemos de igual forma a partir de otro segmento de longitud arbitraria n para las especies γ y δ. A las respectivas alturas de los rectángulos ahora construidos las denotamos por k y l. La Figura 7 muestra las construcciones realizadas en este paso.

Segundo paso: Buscamos un segmento z que cumpla que los polígonos $\alpha(m)$, $\beta(m)$, $\gamma(z)$ y $\delta(z)$ sean equicomplementados. Sean x e y las respectivas alturas de los polígonos $\gamma(z)$ y $\delta(z)$. Se debe cumplir que

$$\alpha \cdot m + \beta \cdot m = \gamma \cdot z + \delta \cdot z, \tag{16}$$

pero como nuestras especies α, β, γ y δ son rectángulos, sus coeficientes de cuadratura son

$$\alpha = \frac{i}{m}, \ \beta = \frac{j}{m}, \ \gamma = \frac{x}{z}, \ \delta = \frac{y}{z},$$

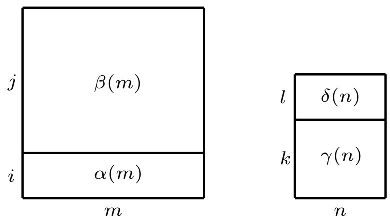


Figura 7: Primer paso.

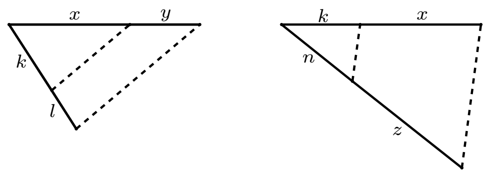


Figura 8: Construcción del segmento z en el segundo paso.

y sustituyendo en (16) resulta

$$i + j = x + y. \tag{17}$$

Además, como todos los rectángulos de la especie γ son semejantes, al igual que todos los rectángulos de la especie δ, se cumple

$$\frac{k}{n} = \frac{x}{z}, \qquad \frac{l}{n} = \frac{y}{z}, \tag{18}$$

o bien

$$\frac{z}{n} = \frac{x}{k}, \qquad \frac{z}{n} = \frac{y}{l}, \tag{19}$$

y por consiguiente, $x/k = y/l$. Entonces, usando (17), es sencillo construir geométricamente segmentos de longitudes x e y, y, por último, usando cualquiera de las dos igualdades en (19), obtener el segmento de longitud z buscado (véase la Figura 8).

Tercer paso: A partir del punto A trazamos una semirrecta distinta de la AB. En ella, consideramos el punto M' tal que $AM' = m$ y el punto B' tal que $M'B' = z$. El punto M', por (16) y el segundo paso, es el punto tal que $\alpha(AM')$, $\beta(AM')$, $\gamma(M'B')$ y $\delta(M'B')$ son equicomplementados. Ahora, unimos B con B'. La recta paralela a BB' por el punto M' corta al segmento AB en un punto M que, de acuerdo con la Proposición 6, es el punto que buscamos (véase la Figura 9).

En general, para hallar el centro mínimo de un sistema de la forma $(A_1, \alpha_1), \ldots,$ (A_n, α_n) procedemos de la siguiente manera:

En primer lugar construimos el centro mínimo del sistema $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2)$ como en el ejemplo anterior. Sea M_2 tal centro mínimo. Seguidamente, se construye el centro mínimo M_3 del sistema $(M_2, \alpha_1, \alpha_2), (A_3, \alpha_3)$. Después, el centro mínimo M_4 del sistema $(M_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (A_4, \alpha_4)$ y así sucesivamente hasta agotar todos los puntos del sistema de partida. El último centro mínimo, M_n, del sistema $(M_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), (A_n, \alpha_n)$ es el centro mínimo del sistema $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ dado.

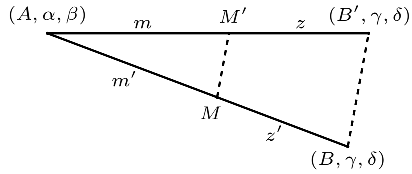


Figura 9: Cálculo del punto M (tercer paso).

5. Algunas aplicaciones

5.1. El teorema de Ceva

Como hemos dicho al comienzo, Zaragoza prueba en [15] el teorema de Ceva cuatro años antes de que la correspondiente obra de Ceva viera la luz.

En la sección anterior hemos visto un modo de encontrar el centro mínimo de $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$, donde $A_1, \ldots, A_n$ son puntos fijos y las especies $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son cualesquiera. En las Proposiciones 35 de GMm I y también 35 de GMm II, Zaragoza estudia, en ciertas situaciones, el proceso inverso. Así, por ejemplo, la siguiente proposición asegura que cualquier punto C interior a un segmento AB dado es siempre el centro mínimo de un sistema $(A, \alpha), (B, \beta)$, donde α y β son especies elegidas de forma «adecuada».

Proposición 7 (Proposición 35 de GMm I). *Sea un segmento AB y un punto C interior al mismo. Entonces, C es el centro mínimo del sistema $(A, \alpha), (B, \beta)$, donde $\alpha(AB)$ es un cuadrado de lado AC y $\beta(CB)$ un rectángulo de base CB y altura AC.*

La demostración de este resultado es obvia, pues los polígonos $\alpha(AC)$ y $\beta(CB)$ son rectángulos de la misma altura (recordar la Observación 2).

La Proposición 35 de GMm II establece que cualquier punto O interior a un triángulo dado ABC es siempre el centro mínimo de un sistema $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$, donde α, β y γ son especies elegidas de forma «adecuada».

Proposición 8 (Proposición 35 de GMm II). *Sea un triángulo ABC cualquiera y un punto O en su interior. Sean G el punto de intersección de la recta AO con el lado BC y E el punto de intersección de la recta BO con el lado AC. Entonces, O es el centro mínimo del sistema $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$, donde $\gamma(CE)$ es un cuadrado, $\alpha(EA)$ un rectángulo de base EA y altura CE, y $\beta(GB)$ un rectángulo de base GB y altura CG.*

Demostración. Por la Proposición 7, E es el centro mínimo del sistema $(A, \alpha), (C, \gamma)$ y G es el centro mínimo del sistema $(B, \beta), (C, \gamma)$.

Por la propiedad de colinealidad, el centro mínimo del sistema $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ debe encontrarse en la recta AG (pues G es el centro mínimo del sistema $(B, \beta), (C, \gamma)$) y en la recta BE (pues E es el centro mínimo del sistema $(A, \alpha), (C, \gamma)$). Así, el centro mínimo del sistema $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ debe ser el punto O. $\square$

Para demostrar el teorema de Ceva, Zaragoza utiliza la siguiente proposición.

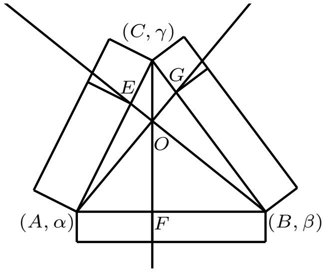


Figura 10: Triángulo ABC y especies asociadas a cada vértice en la demostración de la Proposición 9.

Proposición 9 (Proposición 37 de GMm II). *Sea ABC un triángulo. Siendo G y E puntos en los lados BC y AC, respectivamente, se trazan las rectas AG y BE y denotamos por O su punto de intersección. La recta CO corta al lado AB en el punto F. Entonces hay un segmento de longitud h que verifica, a la vez,*

$$\frac{h}{AF} = \frac{CE}{EA} \quad y \quad \frac{h}{FB} = \frac{CG}{GB}\,. \tag{20}$$

Demostración. Asociemos al vértice C la especie γ tal que $\gamma(CE)$ es un cuadrado de lado CE. De manera análoga, asociemos al vértice A la especie α tal que $\alpha(EA)$ es un rectángulo de base EA y altura CE, y al vértice B la especie β tal que $\beta(GB)$ es un rectángulo de base GB y altura CG.

Aplicando la Proposición 8 se concluye que O es el centro mínimo del sistema $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$. Entonces, por la propiedad de colinealidad, el punto F de intersección de la recta CO con el lado AB es el centro mínimo del sistema $(A, \alpha), (B, \beta)$.

Por lo tanto, los rectángulos $\alpha(AF)$ y $\beta(BF)$ son equicomplementados, lo que implica que los dos rectángulos tienen una misma altura h.

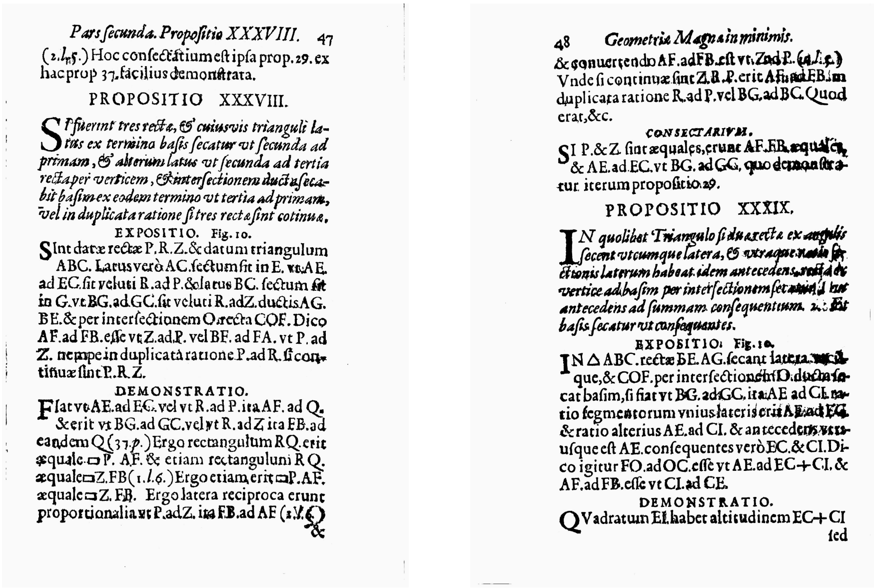
Como todos los rectángulos de una misma especie son semejantes, se obtienen las igualdades que se requerían,

$$\frac{h}{AF} = \frac{CE}{EA} \quad \text{y} \quad \frac{h}{FB} = \frac{CG}{GB}\,. \qquad \square$$

El teorema de Ceva es ahora un corolario inmediato que resulta de dividir estas dos igualdades.

Proposición 10 (Proposición 38 de GMm II). *Sean G y E puntos en los lados BC y AC, respectivamente, de un triángulo ABC. Sea O el punto de intersección de las rectas AG y BE. La recta CO corta al lado AB en el punto F. Supongamos que $AE/EC = r/p$ y $BG/GC = r/z$, donde p, r y z denotan las longitudes de ciertos segmentos. Entonces, $AF/FB = z/p$ o, equivalentemente,*

$$\frac{AF}{FB} = \frac{GC}{BG} \cdot \frac{AE}{EC}\,.$$



Pars secunda. Propositio XXXVIII. 47

(2.l.5.) Hoc consectarium est ipsa prop. 29. ex hac prop 37. facilius demonstrata.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si fuerint tres rectæ, & cuiusvis trianguli latus ex termino basis secatur vt secunda ad primam, & alterum latus vt secunda ad tertia recta per verticem, & intersectionem ducta secabit basim ex eodem termino vt tertia ad primam, vel in duplicata ratione si tres rectæ sint cotinuæ.

EXPOSITIO. Fig. 10.

Sint datæ rectæ P. R. Z. & datum triangulum ABC. Latus verò AC. sectum sit in E. vt AE. ad EC. sit veluti R. ad P. & latus BC. sectum sit in G. vt BG. ad GC. sit veluti R. ad Z. ductis AG. BE. & per intersectionem O. recta COF. Dico AF. ad FB. esse vt Z. ad P. vel BF. ad FA. vt P. ad Z. nempe in duplicatâ ratione P. ad R. si continuæ sint P. R. Z.

DEMONSTRATIO.

Fiat vt AE. ad EC. vel vt R. ad P. ita AF. ad Q. & erit vt BG. ad GC. vel vt R. ad Z ita FB. ad eandem Q (37.p.) Ergo rectangulum RQ. erit æquale □ P. AF. & etiam rectangulum RQ. æquale □ Z. FB (1.l.6.) Ergo etiam erit □ P. AF. æquale □ Z. FB. Ergo latera reciproca erunt proportionalia vt P. ad Z. ita FB. ad AF (1.l.6.) &

48 *Geometriæ Magna in minimis.*

& conuertendo AF. ad FB. est vt Z. ad P. (4.l.5.) Vnde si continuæ sint Z. R. P. erit AF. ad FB. in duplicata ratione R. ad P. vel BG. ad BC. Quod erat, &c.

CONSECTARIVM.

Si P. & Z. sint æquales, erunt AF. FB. æquales, & AE. ad EC. vt BG. ad GC, quo demonstratur iterum propositio 29.

PROPOSITIO XXXIX.

In quolibet Triangulo si duæ rectæ ex angulis secent vtcumque latera, & vtraque [illegible] sectionis laterum habeat idem antecedens, recta ex vertice ad basim per intersectionem [illegible] antecedens ad summam consequentium. [illegible] Et basis secatur vt consequentes.

EXPOSITIO. Fig. 10.

In △ ABC. rectæ BE. AG. secant latera [illegible] que, & COF. per intersectionem O. ducta secat basim, si fiat vt BG. ad GC. ita AE ad CI. ratio segmentorum vnius lateris erit AE. ad EC. & ratio alterius AE. ad CI. & antecedens vtriusque est AE. consequentes verò EC. & CI. Dico igitur FO. ad OC. esse vt AE. ad EC + CI. & AF. ad FB. esse vt CI. ad CE.

DEMONSTRATIO.

Qvadratum EI. habet altitudinem EC + CI sed

Figura 11: Proposición 38 de GMm II (Teorema de Ceva).

Demostración. Según la Proposición 9 existe un segmento de longitud q para el que se verifican, a la vez,

$$\frac{AE}{EC} = \frac{r}{p} = \frac{AF}{q} \quad \text{y} \quad \frac{BG}{GC} = \frac{r}{z} = \frac{FB}{q}\,.$$

De aquí se deduce $rq = p{\cdot}AF = z{\cdot}FB$, por tanto $AF/FB = z/p$ o, equivalentemente,

$$\frac{FB}{AF} = \frac{p}{z} = \frac{r}{z}\cdot\frac{p}{r} = \frac{BG}{GC}\cdot\frac{EC}{AE}\,. \qquad \square$$

5.2. Un interesante problema de Apolonio

Como de la mayor parte del trabajo perdido de Apolonio de Perga, tenemos conocimiento de su tratado *Plane Loci* gracias a la obra *Synagoge* (*Colección matemática*) de Pappus. En el libro VII de esta obra se enumera una lista de resultados, sin demostración, que estarían contenidos originalmente en los dos libros perdidos que habrían constituido *Plane Loci*. Resolver estos problemas supuso una fuente de motivación para un gran número de geómetras desde el siglo XVI, entre los que podemos destacar[6] a Fermat (1636), Huygens (1650), van Schooten (1656), Zaragoza (1674), Robert Simson (1749) y Chasles (1860).

En esta subsección nos vamos a ocupar, siguiendo a Recasens, del quinto problema del segundo libro de *Plane Loci*. El enunciado original del problema es el siguiente (ver [8, Parte 1, pág. 110], [6, pág. 188]):

[6]Ver [12, págs. 36–37], [13, pág. 697] y [14, pág. 299].

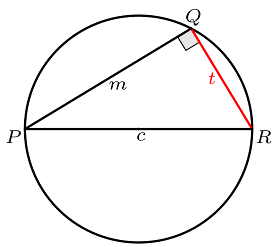


Figura 12: Obtención del segmento t tal que $t^2 = c^2 - m^2$ donde $c > m$ son segmentos dados. El segmento PR es un diámetro de la circunferencia de diámetro c.

Si desde varios puntos cualesquiera del plano se trazan segmentos hasta un mismo punto y la suma de las áreas de ciertos polígonos de especies dadas descritos sobre esos segmentos es igual a una cierta área también dada, entonces el punto estará sobre una circunferencia de centro y radio determinados.

Aunque la solución completa se atribuye hoy en día a Simson, fue Zaragoza el primero en dar una demostración usando únicamente conceptos geométricos en el Capítulo III de GMm I (Proposiciones 83 y 84, véase [13, pág. 697]). Como se ha dicho en la introducción del presente artículo, este problema fue el estímulo en la concepción de la idea de centro mínimo.

Zaragoza reformula y generaliza el problema en términos de su teoría de la siguiente forma:

Dados un sistema $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ de puntos en el espacio con especies asociadas y un polígono de área q, encontrar el lugar geométrico de los puntos X del espacio que verifican la condición

$$\alpha_1(XA_1) + \cdots + \alpha_n(XA_n) = q. \tag{21}$$

Para resolver este problema, Zaragoza construye en primer lugar el centro mínimo, M, del sistema $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$. Aplicando la propiedad de separación, (21) es equivalente a

$$\alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n) + \alpha_1(MX) + \cdots + \alpha_n(MX) = q. \tag{22}$$

Se construyen ahora un cuadrado de lado c y área $c^2 = q$, y un cuadrado de lado m y área $m^2 = \alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n)$.[7] El problema de Apolonio tiene solución si y solo si $c^2 > m^2$.

Bajo esta suposición, sea t el lado del cuadrado de área $t^2 = c^2 - m^2$. Su obtención es sencilla (véase la Figura 12). La ecuación (22) se transforma en

$$\alpha_1(MX) + \cdots + \alpha_n(MX) = t^2. \tag{23}$$

Notemos que de aquí ya podemos deducir que el lugar geométrico de los puntos X va a ser una esfera de centro M, pues reescribiendo (23) en términos de los coeficientes

[7] Estas construcciones pueden hacerse mediante el uso de parábolas auxiliares (ver [9, Sección 5.2.2.]).

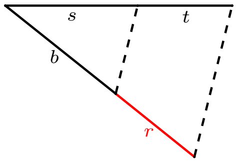


Figura 13: Obtención del radio r de la esfera solución del problema de Apolonio.

de cuadratura, queda $\alpha_1 \cdot MX^2 + \cdots + \alpha_n \cdot MX^2 = t^2$, de donde

$$MX^2 = \frac{t^2}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} .$$

Para construir geométricamente el radio r de esta «esfera solución» hay que determinar un segmento $MX = r$ que satisfaga (23). Para hacer esto se construyen polígonos $\alpha_1(b), \ldots, \alpha_n(b)$ sobre un segmento arbitrario b. Se cumplirán entonces las igualdades

$$\frac{\alpha_1(MX)}{MX^2} = \frac{\alpha_1(b)}{b^2}, \ldots, \frac{\alpha_n(MX)}{MX^2} = \frac{\alpha_n(b)}{b^2},$$

de donde se obtiene

$$\frac{\alpha_1(MX) + \cdots + \alpha_n(MX)}{\alpha_1(b) + \cdots + \alpha_n(b)} = \frac{MX^2}{b^2} .$$

Si s es el lado del cuadrado cuya área es $s^2 = \alpha_1(b) + \cdots + \alpha_n(b)$, entonces el segmento $MX = r$ (radio de la esfera solución) se obtiene finalmente a partir de la proporción $t/s = r/b$ por una sencilla aplicación del teorema de Tales (véase la Figura 13).

Agradecimientos

Este artículo es una adaptación del Trabajo Fin de Grado ([9]) que el autor presentó en la Universidad de La Rioja. Agradezco a mis tutores del Trabajo Fin de Grado, los doctores Luis Javier Hernández Paricio y María Teresa Rivas Rodríguez, y a mi compañero de despacho Emilio Fernández Moral, la minuciosa lectura y las valiosas sugerencias para la mejora del documento. Gracias también a Eduard Recasens Gallart por su lectura del manuscrito y sus comentarios.

Referencias

[1] A. Cotarelo Valledor, El P. José de Zaragoza y la Astronomía de su tiempo, *Estudios sobre la ciencia española del siglo XVII*, Gráfica Universal, Madrid, 1935, 65–223.

[2] J. Bernoulli, Geometricæ Propositiones variæ, *Opera Omnia*, T. IV, N.º CLV, Lausana y Ginebra, 1742. Disponible en Internet Archive, `https://archive.org/details/bub_gb_6UDrvp1JZI8C`.

[3] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa Wiley, México, 1988.

[4] EUCLIDES, *Elementos, Libros I–IV, V–IX y X–XII*, con introducción de Luis Vega y traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1991, 1994, 1996.

[5] H. EVES, *Estudio de las Geometrías*, 2 vol., Uteha, México, 1969.

[6] T. L. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, Vol. II, reimpresión, Dover, 1981.

[7] J. P. HOGENDIJK, Al-Mu'taman ibn Hūd, 11th Century King of Saragossa and Brilliant Mathematician, *Historia Mathematica* **22** (1995), 1–18.

[8] A. JONES, *Pappus of Alexandria. Book 7 of the* Collection*. Part 1: Introduction, Text, and Translation; Part 2: Commentary, Index, and Figures*, Springer-Verlag, 1986.

[9] E. LABARGA VARONA, *La teoría del centro mínimo de José Zaragoza y el Teorema de Ceva*, Trabajo Fin de Grado en la Universidad de La Rioja, 2013. Disponible en la Biblioteca de la Universidad de La Rioja, `http://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000324.pdf`.

[10] E. RECASENS GALLART, *La Geometria Magna in Minimis de J. Zaragoza. El Centre Minim i el lloc 5é d'Apol.loni*, Ph. D. Thesis en la Universitat Autónoma de Barcelona, 1991.

[11] E. RECASENS GALLART, J. Zaragosa's Centrum Minimum, an Early Version of Barycentric Geometry, *Arch. Hist. Exact Sci.* **46** (1994) 285–320.

[12] E. RECASENS GALLART, El lloc II-5 d'Apol·loni: un altre exemple de la influència de la *Synagogé* de Pappos en les matemàtiques del segle XVII, *Butl. Soc. Catalana Mat.* **9** (1994), 35–54.

[13] E. RECASENS GALLART, Geometrical studies in 17th century Spain and their counterparts in European mathematics, *The Global and the Local: The History of Science and the Cultural Integration of Europe* (Proceedings of the 2nd ICESHS), online edition, Cracow 2007, chapter 24, 695–700.

[14] E. RECASENS GALLART, Huygens i el lloc II-5 d'Apol·loni a l'Horologium oscillatorium, *III Jornada d'Història de la Ciència i Ensenyament, Nova Època* **1** (2) (2008), 297–302.

[15] J. ZARAGOZA, *Geometria Magna in Minimis*, Toledo, 1674. Disponible en Google Books, `http://www.google.es/books?id=PAt7wWnDwOgC`.

EDGAR LABARGA VARONA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, 26006 LOGROÑO

Correo electrónico: `edlabarg@unirioja.es`