Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2018.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 329. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Hallar $\operatorname{mcd}(A,B)$, si A y B son números enteros tales que $(1+\sqrt{5})^{2017} = A+B\sqrt{5}$.

Problema 330. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Azerbaijan Diplomatic Academy, Baku, Azerbaiyán.*

Determinar todos los polinomios $p(x)$ tales que $p(0) = 0$ y

$$p(x+y) \geq p(x) + (x+1)p(y),$$

para $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 331. *Propuesto por Abdilkadir Altintas, Afyon, Turquía, y Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si en un triángulo ABC se verifica que $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \frac{\sqrt{3}}{8}$, determinar el mínimo valor de $\cos A \cos B \cos C$.

PROBLEMA 332. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

En un triángulo ABC sean Q y P, respectivamente, los puntos donde las bisectrices interior y exterior del ángulo en el vértice C cortan al lado AB. Denotamos $CQ = v$, $CP = w$ y sea $PA/QA = k$. Hallar el área y el perímetro del triángulo ABC en términos de v, w y k.

PROBLEMA 333. *Propuesto por Pablo Refolio, Madrid.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(36n^2 - 33n + 8)(6n-5)!}{2^{6n}(3n-1)!^2}.$$

PROBLEMA 334. *Propuesto por Ángel Plaza, Universidad de las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas.*

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos tales que $\prod_{j=1}^{n} x_j > 1$. Probar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^{k+1}}{\sum_{j=1}^{n} x_j^{2k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} - 1}.$$

PROBLEMA 335. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, donde $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ es el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos cuyos elementos son números racionales; así mismo, sea I_2 la matriz identidad, y O_2 la matriz nula. Si definimos

$$\log A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(A - I_2)^{k+1},$$

probar que $\log A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ si y solo si $(A - I_2)^2 = O_2$.

PROBLEMA 336. *Propuesto por Daniel Sitaru, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $g(x) \neq 0$, para $x \in [0,1]$, y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(g\left(\frac{1}{n+i}\right) - g\left(\frac{1}{n+1+i}\right) \right) \left(\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{g\left(\frac{1}{n+1}\right)} + \frac{f\left(\frac{1}{n+2}\right)}{g\left(\frac{1}{n+2}\right)} + \cdots + \frac{f\left(\frac{1}{n+i}\right)}{g\left(\frac{1}{n+i}\right)} \right).$$

Soluciones

Problema 305. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Probar la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-2^{-(n+1)}}}{\operatorname{senh}(2^{-(n+1)})}-\frac{e^{-2^{-n}}}{\operatorname{senh}(2^{-n})}-2^n\right)=\frac{e-3}{e-1}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Teniendo en cuenta que $\operatorname{senh} x = (e^x - e^{-x})/2$, un argumento de inducción permite probar de manera elemental que, para cualquier entero positivo M,

$$\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{e^{-2^{-(n+1)}}}{\operatorname{senh}(2^{-(n+1)})}-\frac{e^{-2^{-n}}}{\operatorname{senh}(2^{-n})}-2^n\right)=2\left(\frac{1}{e^{2^{-M}}-1}-\frac{1}{2^{-M}}+\frac{e-2}{e-1}\right).$$

Entonces el resultado se sigue inmediatamente usando que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}.$$

También resuelto por T. Aguilar, A. Castaño, M. Á. Díaz, J. Nadal, M. Omarjee, P. Perfetti, Á. Plaza, B. Salgueiro, J. Vinuesa y el proponente

Nota. Todas las soluciones recibidas suman la serie propuesta utilizando, de un modo u otro, un procedimiento telescópico que implícitamente también aparece en la solución seleccionada. En la solución de Á. Plaza, usando la igualdad

$$\frac{e^{-2^{-(n+1)}}}{\operatorname{senh}(2^{-(n+1)})}-\frac{e^{-2^{-n}}}{\operatorname{senh}(2^{-n})}=\frac{1}{\operatorname{senh}(2^{-n})},$$

el resultado se obtiene a partir de la fórmula

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\operatorname{senh}(2^{-j}x)}-2^j\right)=1-\frac{x}{\tanh x},$$

que se prueba en [1] mediante una variante de un argumento de «telescopización».

Referencias

[1] G. Boros y V. H. Moll, Sums of arctangents and some formulas of Ramanujan, *Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.)* **11** (2005), 13–24.

PROBLEMA 306. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Probar que

$$\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}^{1}\frac{dx\,dy}{(x+y)^2+(1+xy)^2}=\frac{1}{3}\left(G+\frac{\pi}{8}\log(2-\sqrt{3})\right),$$

donde

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

es la constante de Catalan.

Solución enviada por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.

Para $0<a,b<1$, consideramos

$$V(a,b)=\int_b^1\int_a^1\frac{dx\,dy}{(x+y)^2+(1+xy)^2}.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right)=\frac{1-x^2}{(x+y)^2+(1+xy)^2},$$

tenemos

$$\begin{aligned}V(a,b)&=\int_b^1\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{x+a}{1+xa}\right)\right)\frac{dx}{1-x^2}\\&=\int_b^1\arctan\left(\frac{1-a}{1+a}\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{dx}{1-x^2},\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la relación

$$\frac{\pi}{4}-\arctan w=\arctan\left(\frac{1-w}{1+w}\right)$$

con $w=\frac{x+a}{1+xa}$. Ahora, con el cambio de variable $\frac{1-a}{1+a}\frac{1-x}{1+x}=t$ deducimos que

$$V(a,b)=\frac{1}{2}\operatorname{Ti}_2\left(\frac{1-a}{1+a}\frac{1-b}{1+b}\right),$$

donde

$$\operatorname{Ti}_2(z)=\int_0^z\frac{\arctan t}{t}\,dt$$

es la función arcotangente integral.

Finalmente, el resultado propuesto se obtiene tomando $a=b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ y teniendo en cuenta la identidad

$$\operatorname{Ti}_2(2-\sqrt{3})=\frac{2}{3}G+\frac{\pi}{12}\log(2-\sqrt{3})\tag{1}$$

probada por Ramanujan [2] (artículo que puede verse en la recopilación [1, pág. 40]).

Referencias

[1] G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar y B. M. Wilson, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[2] S. Ramanujan, On the integral $\int_0^x \frac{\tan^{-1} t}{t}\, dt$, *J. Indian Math. Soc.* **7** (1915), 93–96.

También resuelto por el proponente.

Nota. La prueba de Ramanujan de (1) recogida en [2] es realmente simple y elegante. Comienza considerando la identidad

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1^2}+\frac{\operatorname{sen}(6x)}{3^2}+\frac{\operatorname{sen}(10x)}{5^2}+\cdots+\frac{\operatorname{sen}(2(2n+1)x)}{(2n+1)^2}+\cdots=\mathrm{Ti}_2(\log x)-x\log(\tan x),$$

cuya prueba se obtiene por derivación con respecto a x de ambos miembros de la igualdad. Después, tomando $x=\pi/12$, como

$$\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{6}=\begin{cases}\frac{(-1)^j}{2}, & n=3j,\\ (-1)^j, & n=3j+1,\\ \frac{(-1)^j}{2}, & n=3j+2,\end{cases}$$

obtiene que $2\,\mathrm{Ti}_2(1)=3\,\mathrm{Ti}_2(2-\sqrt{3})+\frac{\pi}{4}\log(2+\sqrt{3})$ y, así, (1) es inmediata ya que $\mathrm{Ti}_2(1)=G$.

Problema 307. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sean X, Y y Z las proyecciones del baricentro G de un triángulo ABC sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean S y T las áreas de los triángulos ABC y XYZ, respectivamente. Probar que

$$T=\frac{4}{9}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\,S^3,$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente.

Solución enviada (independientemente) por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, y Raúl A. Simón Eléxpuru, Chile.

Designemos por h_a, h_b y h_c las longitudes de las respectivas alturas relativas a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. Si D es el pie de la perpendicular desde el vértice A al lado BC, véase la figura 1, se tiene que $h_a=AD$.

Si M es el punto medio del lado BC, los triángulos ADM y GXM son semejantes y, por tanto,

$$\frac{GX}{AD}=\frac{GM}{AM}=\frac{1}{3},$$

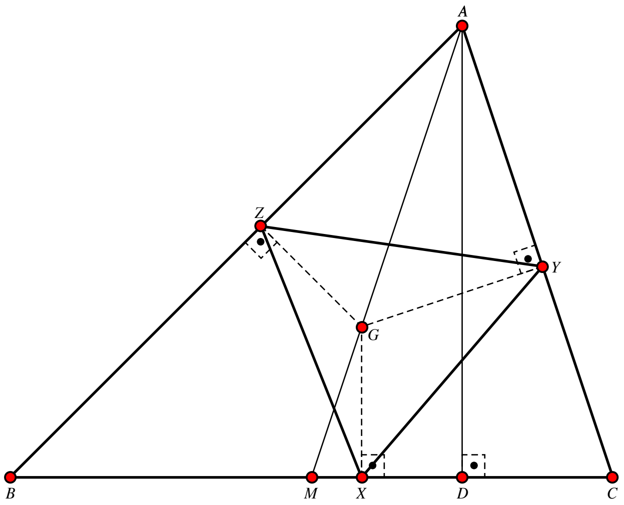

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 307.

lo que implica

$$GX = \frac{1}{3}h_a.$$

De manera análoga se deducen las relaciones $GY = \frac{1}{3}h_b$ y $GZ = \frac{1}{3}h_c$.

Puesto que los ángulos $\angle GXC$ y $\angle CYG$ del cuadrilátero $GXCY$ son rectos, los ángulos $\angle YGX$ y $\angle XCY$ $(= \angle C)$ son suplementarios y se verifica que

$$\text{Área}(\triangle GXY) = \frac{1}{2}GX \cdot GY \cdot \operatorname{sen}(\angle YGX) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}h_a \cdot \frac{1}{3}h_b \cdot \operatorname{sen} C.$$

A su vez, las igualdades $2S = a \cdot h_a = b \cdot h_b = ab \operatorname{sen} C$ implican $h_a h_b \operatorname{sen} C = \frac{8S^3}{a^2b^2}$ y, por consiguiente,

$$\text{Área}(\triangle GXY) = \frac{4S^3}{9a^2b^2}.$$

Análogamente, $\text{Área}(\triangle GYZ) = \frac{4S^3}{9b^2c^2}$ y $\text{Área}(\triangle GZX) = \frac{4S^3}{9c^2a^2}$. Finalmente, al ser G un punto interior al triángulo ABC, T es igual a la suma de las áreas de los triángulos GXY, GYZ y GZX, y se tiene la igualdad

$$T = \frac{4S^3}{9}\left(\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}\right),$$

que es equivalente a la propuesta.

También resuelto por F. D. Aranda, A. Fanchini, J. Nadal, R. Peiró, B. Salgueiro, J. P. Sempere, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

Nota. En las soluciones enviadas por B. Salgueiro y N. Stanciu y T. Zvonaru se indica que este problema relaciona las áreas del triángulo ABC y el triángulo pedal de G respecto de ABC y que, entre las fórmulas que pueden encontrarse en la página web `http://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html`, está la relación

$$T = \frac{R^2 - OG^2}{4R^2}\, S,$$

siendo O y R, respectivamente, el centro y el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, de donde resulta fácilmente la identidad propuesta.

Problema 308. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîtămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Si

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sqrt[n]{(\operatorname{sen} x)^n + (\cos x)^n}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

evaluar los límites

$$L = \lim_{n\to\infty} I_n \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} n^2(I_n - L).$$

Solución enviada por Moubinool Omarjee, Lycée Henri IV, París, Francia.

Con el cambio de variable $\tan^2 x = t$ se tiene

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[n]{1+t^{n/2}}}{2\sqrt{t}(1+t)^{3/2}}\, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{1+t^{n/2}}}{\sqrt{t}(1+t)^{3/2}}\, dt$$

y aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (notar que el integrando está acotado superiormente por la función $2t^{-1/2}(1+t)^{-3/2}$, que es integrable en $(0,1)$) llegamos a

$$L = \lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)^{3/2}} = \int_1^{\infty} \frac{dz}{(1+z)^{3/2}} = \sqrt{2}.$$

Puesto que

$$n^2(I_n - L) = n^2 \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{1+t^{n/2}} - 1}{\sqrt{t}(1+t)^{3/2}}\, dt = 2\int_0^1 \frac{n(\sqrt[n]{1+s} - 1)s^{1/n}}{s(1+s^{2/n})^{3/2}}\, ds,$$

donde en el último paso hemos usado el cambio de variable $t^{n/2} = s$, usando nuevamente el teorema de la convergencia dominada (en este caso, la desigualdad $(1+z)^r - 1 < rz$, válida para $z > -1$ y $0 < r < 1$, permite estimar superiormente en el intervalo $(0,1)$ el integrando por una constante), deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} n^2(I_n - L) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\log(1+s)}{s}\, ds = \frac{\pi^2}{12\sqrt{2}},$$

ya que, como es conocido,

$$\int_0^1 \frac{\log(1+s)}{s}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

También resuelto por L. Glasser, S. de Luxán y Á. Plaza (conjuntamente), P. Perfetti, B. Salgueiro y los proponentes.

PROBLEMA 309. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo no isósceles ABC. Si $m \geq 0$, probar que

$$\frac{a^{3(m+1)}}{((a-b)(a-c))^{m+1}} + \frac{b^{3(m+1)}}{((b-a)(b-c))^{m+1}} + \frac{c^{3(m+1)}}{((c-a)(c-b))^{m+1}} > \frac{(a+b+c)^{m+1}}{3^m}.$$

NOTA. Como observan J. Nadal y A. Stadler, la desigualdad propuesta es falsa. J. Nadal prueba esta afirmación tomando $a=5$, $b=6$, $c=10$ y $m=2$. En ese caso, el lado izquierdo de la desigualdad propuesta es $-16\,839$ y el lado derecho es un valor positivo. A continuación presentamos la demostración de A. Stadler de la desigualdad

$$\frac{a^{3(m+1)}}{|(a-b)(a-c)|^{m+1}} + \frac{b^{3(m+1)}}{|(b-a)(b-c)|^{m+1}} + \frac{c^{3(m+1)}}{|(c-a)(c-b)|^{m+1}} > \frac{(a+b+c)^{m+1}}{3^m}. \tag{1}$$

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

En el caso $m=0$, como entre las cantidades $(a-b)(a-c)$, $(b-a)(b-c)$ y $(c-a)(c-b)$ una es negativa, se tiene

$$\begin{aligned}&\frac{a^3}{|(a-b)(a-c)|} + \frac{b^3}{|(b-a)(b-c)|} + \frac{c^3}{|(c-a)(c-b)|}\\ &\qquad > \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c.\end{aligned}$$

Así, para $m>0$, usando que la media aritmética está acotada superiormente por la media de orden $m+1$, obtenemos que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m+1}\\ &\quad < \left(\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{|(a-b)(a-c)|} + \frac{b^3}{|(b-a)(b-c)|} + \frac{c^3}{|(c-a)(c-b)|}\right)\right)^{m+1}\\ &\quad \leq \frac{1}{3}\left(\frac{a^{3(m+1)}}{|(a-b)(a-c)|^{m+1}} + \frac{b^{3(m+1)}}{|(b-a)(b-c)|^{m+1}} + \frac{c^{3(m+1)}}{|(c-a)(c-b)|^{m+1}}\right),\end{aligned}$$

y esto implica (1).

Problema 310. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaiyán.*

Probar que para cualquier número racional m/n se verifica la desigualdad

$$\left|\sqrt{7} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{6n^2}.$$

Solución enviada por Martín Ortiz Ramírez (estudiante), Merton College, Universidad de Oxford, Reino Unido.

Basta probar la desigualdad propuesta cuando $|\sqrt{7} - \frac{m}{n}| \leq \frac{1}{6}$, puesto que, en caso contrario, el resultado es inmediato. En esa suposición, se verifica que $0 < m/n < 3$ y, por tanto,

$$\left|\sqrt{7} + \frac{m}{n}\right| < 6.$$

Ahora, como $\sqrt{7}$ es irracional, para cualesquiera enteros m y n se tiene que

$$|7n^2 - m^2| \geq 1.$$

De este modo resulta

$$\left|\sqrt{7} - \frac{m}{n}\right| = \frac{\left|7 - \frac{m^2}{n^2}\right|}{\left|\sqrt{7} + \frac{m}{n}\right|} = \frac{1}{n^2} \frac{|7n^2 - m^2|}{\left|\sqrt{7} + \frac{m}{n}\right|} > \frac{1}{6n^2}$$

y la prueba está concluida.

También resuelto por M. A. Díaz, Kee-Wai Lau, A. Messegué, J. Nadal, P. Perfetti, J. Vinuesa y el proponente.

Problema 311. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioculescu School, Găeşti, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función derivable verificando las siguientes propiedades:

a) f es inyectiva, *b*) $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, *c*) f' es creciente.

Probar que se verifica la desigualdad

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 x f^2(x)\,dx \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \int_0^1 f(x)\big(f^{-1}(x) - x\big)\,dx\right)^2.$$

Solución enviada por el proponente.

Como f es inyectiva y continua, es estrictamente monótona y, puesto que $f(0) = 0$, debe ser estrictamente creciente. Además, como $f(1) = 1$, la función f es biyectiva y, por tanto, tiene inversa. La función f^{-1} será derivable y se cumplirá la relación

$$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 f^{-1}(x)\,dx = 1. \tag{1}$$

Puesto que f' es creciente, f es convexa y, así, si $0 \le x_1 < x_2 < x_3 \le 1$, se verifica la desigualdad

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

En particular, si $x \in (0,1)$, como $0 < f^{-1}(x) < 1$, se cumple que

$$\frac{f(f^{-1}(x)) - f(0)}{f^{-1}(x)} \le \frac{f(1) - f(f^{-1}(x))}{1 - f^{-1}(x)},$$

y, por tanto, $x \le f^{-1}(x)$. Este hecho implica de manera obvia que

$$f(x) \le x \le f^{-1}(x), \qquad x \in [0,1]. \tag{2}$$

Aplicando nuevamente la convexidad de la función f, para $x \in (0,1]$ tal que $0 < x < f^{-1}(x)$ se verifica que

$$\frac{f(x)}{x} \le \frac{x - f(x)}{f^{-1}(x) - x},$$

lo cual implica

$$f(x)f^{-1}(x) \le x^2, \qquad x \in [0,1]. \tag{3}$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y usando (1), (2) y (3), tenemos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 f(x)(f^{-1}(x) - x)\,dx\right)^2 \\
&\quad\le \int_0^1 f^2(x)(f^{-1}(x) - x)\,dx \cdot \int_0^1 (f^{-1}(x) - x)\,dx \\
&\quad= \left(\int_0^1 f^2(x)f^{-1}(x)\,dx - \int_0^1 xf^2(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,dx\right) \\
&\quad\le \left(\frac{1}{4} - \int_0^1 xf^2(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,dx\right) \\
&\quad= \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 xf^2(x)\,dx\right) + \int_0^1 xf^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 f(x)\,dx \\
&\quad\le \frac{1}{8} - 2\sqrt{\frac{1}{8}\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 xf^2(x)\,dx} + \int_0^1 xf^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 f(x)\,dx \\
&\quad= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\int_0^1 xf^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 f(x)\,dx}\right)^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^1 xf^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{8},$$

se cumple

$$\int_0^1 f(x)(f^{-1}(x)-x)\,dx \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 xf^2(x)\,dx}$$

y la desigualdad propuesta se sigue de manera evidente.

No se han recibido otras soluciones.

Problema 312. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

Una pirámide recta de altura h tiene de base un n-gono regular de perímetro $2p$. Un gusano quiere escalar la pirámide e inicia su ascensión en un vértice de la base. Arrastrándose por una cara, se dirige perpendicularmente hacia la arista opuesta. Al llegar a esta arista prosigue su camino, siempre en el mismo sentido, por la cara adyacente, siguiendo una trayectoria perpendicular a la arista opuesta, y así sucesivamente.

Calcular la distancia que recorre el gusano hasta que completa m vueltas alrededor del eje de simetría de la pirámide, así como la altura sobre el suelo a la que se encuentra en ese momento.

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.

El problema se visualiza y se expresa muy claramente en función de los datos del triángulo de una de las caras, a partir de lo que sería un desarrollo plano del recorrido del gusano, véase la figura 2.

Para facilitar la escritura denotaremos por b el lado del polígono, por ℓ la arista de la pirámide y por α el ángulo $\angle AVB$. Todos estos valores son fácilmente expresables en función de los datos de la pirámide; en concreto, $b = \frac{2p}{n}$ y

$$\ell = \frac{p}{n \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}.$$

Como también se tiene la expresión

$$\ell = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{2\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}},$$

se deduce que

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{p^2 + h^2 n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

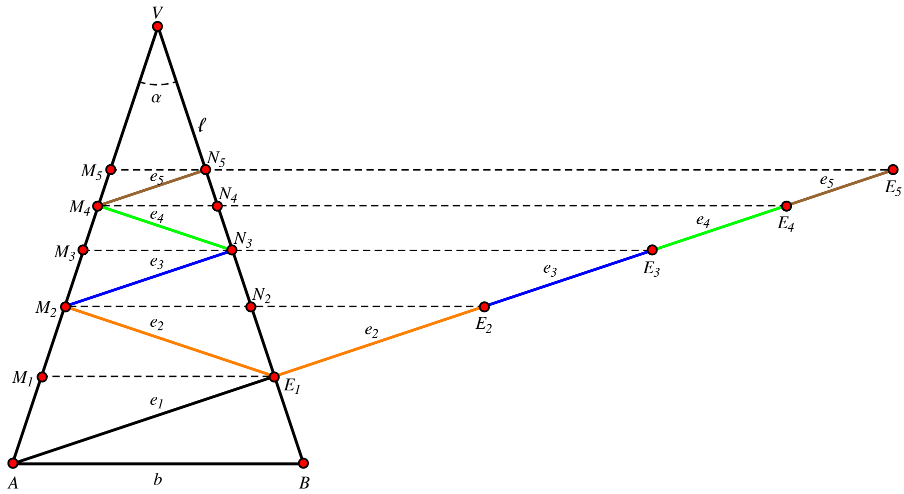

Figura 2: Visualización de los cinco primeros pasos de la trayectoria del gusano del Problema 312.

La trayectoria del gusano se visualiza claramente plegando las sucesivas caras sobre la primera alternando el sentido; dicha trayectoria queda como una sucesión de segmentos cada uno perpendicular a la arista de llegada. En la figura 2 se muestran los cinco primeros pasos. El resto es un simple cálculo dado que las longitudes forman una progresión geométrica de razón menor que uno.

En efecto, el triángulo AE_1M_2 es rectángulo en M_2 y $e_2 = e_1 \cos\alpha$, y por la semejanza de los triángulos sucesivos $E_1M_2N_3$, $M_2N_3M_4$, etc., tenemos que es $e_{k+1} = e_k \cos\alpha$, con $k = 1, 2, \ldots$. Como $e_1 = b\cos\frac{\alpha}{2}$, la distancia AE_p recorrida tras m vueltas completas será, si ponemos $t = mn$,

$$AE_t = \sum_{k=1}^{t} e_k = b\,\frac{1-(\cos\alpha)^t}{1-\cos\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Por el teorema de Tales, los segmentos AM_1, M_1M_2, etc., forman también otra progresión geométrica de razón $\cos\alpha$.

La longitud AM_t alcanzada sobre la arista de partida tras m vueltas completas se puede obtener aplicando el teorema de los senos al triángulo AE_pM_p. En efecto, como

$$\frac{AM_t}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{AE_t}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

se tiene que

$$AM_t = AE_t \tan\frac{\alpha}{2},$$

de donde resulta

$$AM_t = b\,\frac{1-(\cos\alpha)^t}{1-\cos\alpha}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

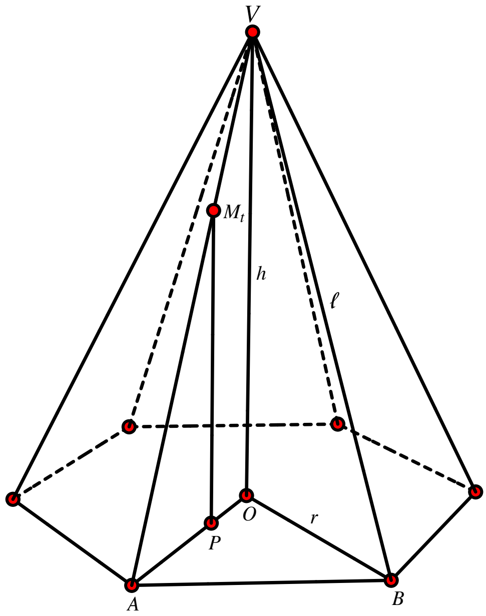

Figura 3: Esquema para el cálculo de la altura del punto M_t en el Problema 312.

Finalmente, vamos a calcular la altura sobre la base de este punto final M_t. Sea P la proyección de M_t en el plano de la base, véase la figura 3. Por la semejanza de los triángulos VOA y M_tPA tenemos

$$\frac{M_tP}{h} = \frac{AM_t}{\ell}$$

y entonces

$$M_tP = AM_t\,\frac{h}{\ell} = \frac{hb}{\ell}\,\frac{1-(\cos\alpha)^t}{1-\cos\alpha}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

También resuelto por R. S. Eléxpuru, J. P. Sempere y el proponente.