Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2018.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 321. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Un cuadrilátero plano tiene vértices $ABCD$ en orden cíclico. Los ángulos en A y C son rectos, y el ángulo en B es agudo. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Se construye el rectángulo de vértices $DEFG$ en orden cíclico que cumple las siguientes condiciones:

i) El lado DE es paralelo a la bisectriz interior del ángulo ABC.

ii) El vértice F es el punto donde se cortan la bisectriz interior del ángulo BCH y la bisectriz interior del ángulo BAH.

Probar que la diagonal EG de este rectángulo pasa por el punto medio M de la diagonal AC del cuadrilátero inicial.

Problema 322. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I.E.S. Penyagolosa, Castellón.*

Dado un triángulo ABC, sean D y E, respectivamente, el punto de la semirrecta BA con origen B y el punto de la semirrecta CA con origen C tales que $BD = CE = BC$.

a) Probar que los segmentos DE y OI, donde O e I son, respectivamente, el circuncentro y el incentro del triángulo ABC, son perpendiculares.

b) Probar que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ADE es igual a la distancia OI.

PROBLEMA 323. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean a, b, x, y y z números reales positivos y m un número real no negativo. Probar que

$$\frac{x^{2m+2}}{(ay+bz)^{2m+2}\sec^{2m}\frac{\pi}{18}}+\frac{y^{2m+2}}{(az+bx)^{2m+2}\operatorname{cosec}^{2m}\frac{\pi}{9}}+\frac{z^{2m+2}}{(ax+by)^{2m+2}\operatorname{cosec}^{2m}\frac{2\pi}{9}}\geq\frac{3}{4^m(a+b)^{2m+2}}.$$

PROBLEMA 324. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioculescu School, Găeşti, Rumanía.*

Sea $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función convexa tal que $f(0)=0$. Probar que

$$\int_0^1 f(x)\,dx\geq 4\int_0^{1/2} f(x)\,dx.$$

PROBLEMA 325. *Propuesto por Abdilkadir Altintas, Afyon, Turquía, y Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean a, b, c, d y e números reales tales que $a+b+c+d+e=0$ y $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=k$, con k un número real positivo. Probar que

$$abcd+abce+abde+acde+bcde\geq-\frac{3k^2}{80}.$$

PROBLEMA 326. *Propuesto por José Luis Arregui, Universidad de La Rioja, Logroño.*

N personas salen ordenadamente de una estancia pero, antes de abandonarla, cada uno debe retirar su paraguas. Cada persona reconoce su paraguas excepto una, a la que llamaremos Donald. Cuando le toca salir a Donald, lo que hace es retirar al azar un paraguas de los que quedan disponibles. Todas las demás personas se llevan su propio paraguas si lo encuentran cuando van a salir, y, si no lo está, retiran al azar un paraguas disponible.

Sea X el número de personas que, finalmente, abandonan la estancia con un paraguas que no es el suyo. Se trata de calcular el valor esperado de X en dos supuestos:

a) Donald es la primera persona en salir.

b) El orden de salida es totalmente aleatorio.

Problema 327. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Evaluar

$$\int_0^{\pi/2} \{\cot x\}\, dx,$$

donde $\{x\} = x - [x]$ es la parte decimal de x.

Problema 328. *Propuesto por Neculai Stanciu, Buzău, Rumanía, y Titu Zvonaru, Comăneşti, Rumanía.*

Sean x, y y z números reales positivos. Probar que

$$\left(\sum_{\text{cíclica}} \sqrt{\frac{x(x+y)}{x^2 - xy + y^2}} \right)^2 + \frac{\sum_{\text{cíclica}} x(y-z)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}} \leq 18.$$

Soluciones

Problema 297. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Gerona.*

Construir con regla y compás un pentágono convexo del que se conocen los puntos medios de los lados.

Nota. Debemos señalar que, dados cinco puntos M_1, M_2, M_3, M_4 y M_5, en el plano hay un único pentágono $A_1A_2A_3A_4A_5$ tal que M_i es el punto medio del lado A_iA_{i+1} con $i = 1, \dots 5$, siendo $A_6 \equiv A_1$. Sin embargo, no se puede asegurar que el pentágono $A_1A_2A_3A_4A_5$ vaya a ser convexo aunque lo sea el pentágono $M_1M_2M_3M_4M_5$, como muestra el siguiente ejemplo. Consideramos los puntos $M_1 = (0,2)$, $M_2 = (-2,0)$, $M_3 = (-1,-1)$, $M_4 = (1,-1)$ y $M_5 = (2,0)$ —véase la figura 1—, que dan lugar al pentágono de vértices $A_1 = (2,2)$, $A_2 = (-2,2)$, $A_3 = (-2,-2)$, $A_4 = (0,0)$ y $A_5 = (2,-2)$, que claramente no es convexo. Este hecho es observado en todas las soluciones recibidas, incluida la del proponente. La exigencia de convexidad para el pentágono resultante fue erróneamente impuesta por los editores.

Solución enviada por Juan Mir Pieras, Lloseta, Mallorca.

En primer lugar debemos señalar que un punto C simétrico de un punto A respecto de otro punto B del plano se puede construir fácilmente con regla y compás. En concreto, C es el punto distinto de A donde la recta AB corta a la circunferencia de centro B que pasa por A.

Tomamos entonces un punto cualquiera P del plano y construimos, sucesivamente:

- el punto P_1 simétrico de P respecto del punto dado M_1,

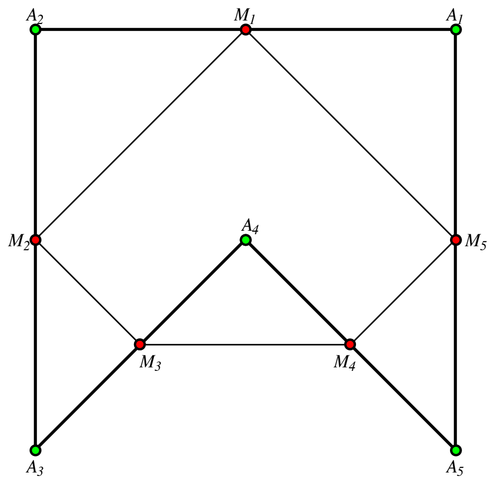

Figura 1: Pentágono no convexo cuyo pentágono de puntos medios es convexo.

- el punto P_2 simétrico de P_1 respecto del punto dado M_2,
- el punto P_3 simétrico de P_2 respecto del punto dado M_3,
- el punto P_4 simétrico de P_3 respecto del punto dado M_4, y
- el punto P_5 simétrico de P_4 respecto del punto dado M_5.

Hecho esto, el punto medio del segmento PP_5 es el vértice A_1 del pentágono que buscamos. En efecto, sean $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{p}_i$ y $\mathbf{a}_i$, respectivamente, los vectores de posición de los puntos P, M_i, P_i y A_i, con $i = 1, \dots, 5$. Por construcción se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_5 &= 2\mathbf{m}_5 - \mathbf{p}_4 = 2\mathbf{m}_5 - (2\mathbf{m}_4 - \mathbf{p}_3)\\ &= \cdots = 2(\mathbf{m}_5 - \mathbf{m}_4 + \mathbf{m}_3 - \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1) - \mathbf{p},\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}_5}{2} &= \mathbf{m}_5 - \mathbf{m}_4 + \mathbf{m}_3 - \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1\\ &= \frac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_5}{2} - \frac{\mathbf{a}_5+\mathbf{a}_4}{2} + \frac{\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_3}{2} - \frac{\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_2}{2} + \frac{\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_1}{2} = \mathbf{a}_1.\end{aligned}$$

Y, a partir del vértice A_1,

- el vértice A_2 es el simétrico de A_1 respecto de M_1,
- el vértice A_3 es el simétrico de A_2 respecto de M_2,
- el vértice A_4 es el simétrico de A_3 respecto de M_3, y
- el vértice A_5 es el simétrico de A_4 respecto de M_4,

y $A_1A_2A_3A_4A_5$ es el pentágono buscado.

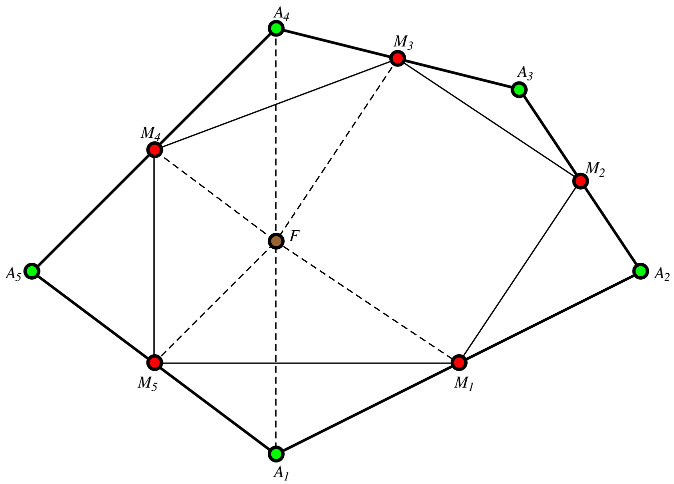

Figura 2: Esquema para la segunda solución del Problema 297.

Solución enviada por Ignacio Larrosa Cañestro, A Coruña.

Es conocido (*teorema de Varignon*) que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo, ya que los lados opuestos del cuadrilátero que forman los puntos medios son paralelos a una misma diagonal del cuadrilátero dado (y miden la mitad que ella).

Supongamos que hemos resuelto el problema, véase la figura 2. Si F es el punto medio del segmento A_1A_4, F será entonces el cuarto vértice de un paralelogramo de vértices consecutivos M_1, M_2 y M_3, de modo que, dados estos puntos, construimos el punto F como intersección de la recta paralela a M_1M_2 por M_3 y la paralela a M_2M_3 por M_1.

Pero, entonces, M_4, M_5 y F son los puntos medios de los lados del triángulo $A_4A_5A_1$. Trazando por F la recta paralela a M_4M_5, por M_4 la paralela a M_5F, y por M_5 la paralela a FM_4, por las intersecciones de estas tres rectas quedan determinados los puntos A_4, A_5 y A_1.

Finalmente, el simétrico de A_1 respecto de M_1 es el vértice A_2, y el simétrico de A_4 respecto de M_3 es el vértice A_3.

Este procedimiento se extiende fácilmente para cualquier polígono con un número impar de lados. Si el número de lados es par, el problema no tiene solución o queda indeterminado.

También resuelto por C. Beade, S. Campo, M. Cidrás, R. S. Eléxpuru, C. Sánchez y el proponente.

Nota. M. Amengual nos informa de que la generalización de este problema al caso de un número impar cualquiera $n \geq 3$ de puntos del plano está contenida en el Problema 15 del libro *Geometric Transformations*, vol. I, de I. M. Yaglom (publicado en 1962 por *The Math. Assoc. of Amer.* en la colección New Mathematical Library). En las págs. 86–87 pueden encontrarse dos soluciones distintas del problema. También se estudia el caso n par. Yaglom da generalizaciones del Problema 15 del vol. I en el Problema 21 del mismo volumen y en el Problema 37 del vol. II de dicha obra.

La solución enviada por M. Cidrás es muy similar a la seleccionada de J. Mir y ambas son una variante de la primera solución al Problema 15 que presenta Yaglom en su libro. Las soluciones de C. Sánchez y del proponente están, en cambio, relacionadas con la segunda solución de Yaglom. C. Sánchez también considera la posible generalización del problema a un polígono de n lados con n impar, y discute el caso n par. Las soluciones de C. Beade y S. Campo son similares a la seleccionada de I. Larrosa. C. Beade extiende al caso general de un $(2n+1)$-gono la construcción hecha para el pentágono, mediante un argumento de inducción que utiliza el *teorema de Varignon*.

PROBLEMA 298. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c tres números positivos tales que $ab+bc+ca=3abc$. Demostrar que

$$\sqrt{\frac{a+b}{c(a^2+b^2)}}+\sqrt{\frac{b+c}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{c+a}{b(c^2+a^2)}}\leq 3.$$

Solución enviada por Miguel Cidrás Senra (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

Como a, b, c son reales positivos, la condicion $ab+bc+ca=3abc$ es equivalente a

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3 \tag{1}$$

Por otro lado, utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, se tiene que

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\leq\frac{x+y}{2xy}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}$$

y, por tanto,

$$\sqrt{\frac{a+b}{a^2+b^2}}+\sqrt{\frac{b+c}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{c+a}{c^2+a^2}}\leq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}=3. \tag{2}$$

Finalmente, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (1) y (2), se sigue el resultado. En efecto,

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{a+b}{c(a^2+b^2)}}+\sqrt{\frac{b+c}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{c+a}{b(c^2+a^2)}}\\&\qquad\leq\sqrt{\left(\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\leq\sqrt{3\cdot 3}=3.\end{aligned}$$

Además, la igualdad se cumple si y solo si $a=b=c=1$.

También resuelto por D. Aranda, G. García, L. Giugiuc, Kee-Wai Lau, J. Nadal, P. Perfetti, Á. Plaza, B. Salgueiro, A. Stadler, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

Problema 299. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{x^2}{1+n^2\cos^2 x}\, dx.$$

Solución enviada por Ramya Dutta, Chennai Mathematical Institute, Chennai, India.

Probaremos que, para cualquier función continua f definida en $[0,1]$ y que toma valores reales, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{f(x/n)}{1+n^2\cos^2 x}\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx. \tag{1}$$

Este hecho implica que el valor del límite propuesto es $1/3$.

Por el teorema de aproximación de Weierstrass, teniendo en cuenta la linealidad del límite y la integral, para obtener (1) basta probar el resultado para las funciones $f(x) = x^k$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Usando que para cada entero n existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n/\pi < m+1$, deducimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^k} \int_0^n \frac{x^k}{1+n^2\cos^2 x}\, dx \\
&\qquad = \frac{1}{n^k} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{x^k}{1+n^2\cos^2 x}\, dx + \frac{1}{n^k} \int_{m\pi}^{n} \frac{x^k}{1+n^2\cos^2 x}\, dx \\
&\qquad = \frac{1}{n^k} \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^{\pi} \frac{(x+j\pi)^k}{1+n^2\cos^2 x}\, dx + \frac{1}{n^k} \int_0^{n-m\pi} \frac{(x+m\pi)^k}{1+n^2\cos^2 x}\, dx.
\end{aligned}$$

Como el integrando es una función positiva y $0 < n - m\pi < \pi$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^k} \int_0^{n-m\pi} \frac{(x+m\pi)^k}{1+n^2\cos^2 x}\, dx &\le \frac{1}{n^k} \int_0^{\pi} \frac{(x+m\pi)^k}{1+n^2\cos^2 x}\, dx \\
&\le \frac{(m+1)^k\pi^k}{n^k} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\, dx \\
&= \frac{2(m+1)^k\pi^k}{n^k} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\, dx \\
&= \frac{2(m+1)^k\pi^k}{n^k} \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{1+n^2+\tan^2 x}\, dx \\
&= \frac{2\pi^k(m+1)^k}{n^k\sqrt{1+n^2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1+n^2}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, puesto que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^k}\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^{\pi}\frac{(j\pi)^k}{1+n^2\cos^2 x}\,dx &\leq \frac{1}{n^k}\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^{\pi}\frac{(x+j\pi)^k}{1+n^2\cos^2 x}\,dx\\ &\leq \frac{1}{n^k}\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^{\pi}\frac{(j+1)^k\pi^k}{1+n^2\cos^2 x}\,dx\end{aligned}$$

y

$$\sum_{j=0}^{m-1} j^k = \frac{m^{k+1}}{k+1}\left(1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right),$$

llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^k}\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^{\pi}\frac{(x+j\pi)^k}{1+n^2\cos^2 x}\,dx &= \frac{\pi^k m^{k+1}\left(1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)}{(k+1)n^k}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\,dx\\ &= \frac{2\pi^k m^{k+1}\left(1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)}{(k+1)n^k\sqrt{1+n^2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1+n^2}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\\ &= \frac{\pi^{k+1} m^{k+1}\left(1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)}{(k+1)n^k\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{k+1}+O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

lo que implica

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\frac{(x/n)^k}{1+n^2\cos^2 x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k\,dx;$$

es decir, (1) para $f(x)=x^k$.

También resuelto por Kee-Wai Lau, J. Mir, B. Salgueiro y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

PROBLEMA 300. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Evaluar la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Solución enviada por Moubinool Omarjee, Lycée Henri IV, París, Francia.

El valor de la suma propuesta es $\frac{\operatorname{senh}^2 x}{2}$. En efecto, usando la identidad

$$\cosh(2y)\operatorname{senh}^2 y = \frac{1}{4}\big(\cosh(4y)-2\cosh(2y)+1\big),$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^k \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(2^{k-2} \cosh\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - 2^{k-1} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) + \frac{2^k}{4}\right) \\
&= \frac{\cosh(2x) - 1}{4} + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} 2^n \left(1 - \cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \\
&= \frac{\cosh(2x) - 1}{4} = \frac{\operatorname{senh}^2 x}{2}.
\end{aligned}
$$

También resuelto por A. Álamo, L. Glasser, J. Monterde, J. Nadal y el proponente.

Problema 301. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Sean $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$ las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si $\angle BCA = C \geq \pi/3$, demostrar que

$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 4 + \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Por el teorema del seno, resulta sencillo comprobar que la desigualdad propuesta es equivalente a

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} + \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} - 2 \geq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}} - \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}. \tag{1}$$

Para la prueba de (1) usaremos las desigualdades

$$\operatorname{sen} \frac{C}{2} \geq \frac{1}{2} \tag{2}$$

y

$$\cos^2 \frac{A - B}{4} \geq \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B. \tag{3}$$

Como $\frac{\pi}{3} \leq C < \pi$, (2) es evidente. De las desigualdades obvias $1 \geq -\cos(A + B)$ y $\cos \frac{A-B}{2} \geq \cos(A - B)$ tenemos

$$2\cos^2 \frac{A - B}{4} = 1 + \cos \frac{A - B}{2} \geq \cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B,$$

que implica (3).

Así, usando (2) y (3), para el lado izquierdo de (1) se verifica que

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}+\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}-2=\frac{(\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B)^2}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}&=\frac{4\operatorname{sen}^2\frac{A-B}{2}\cos^2\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}\\ &=\frac{16\operatorname{sen}^2\frac{A-B}{4}\cos^2\frac{A-B}{4}\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}\geq 4\operatorname{sen}^2\frac{A-B}{4}\end{aligned}$$

y, para el lado derecho,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}-\frac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}&=\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}-\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\\ &=\frac{1-\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}\leq 2\left(1-\cos\frac{A-B}{2}\right)=4\operatorname{sen}^2\frac{A-B}{4}.\end{aligned}$$

De esta forma, (1) es inmediata, y la solución está concluida.

También resuelto por J. Nadal y el proponente.

PROBLEMA 302. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Sea $\{x\}=x-[x]$ la parte decimal de x. Probar que

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}\left\{\frac{y}{z}\right\}\left\{\frac{z}{x}\right\}dx\,dy\,dz=1+\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{6}-\frac{3\zeta(2)}{4}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Denotando por I la integral propuesta se tiene

$$I=1-J-K_1-K_2-K_3+L_1+L_2+L_3,$$

donde

$$J=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left[\frac{x}{y}\right]\left[\frac{y}{z}\right]\left[\frac{z}{x}\right]dx\,dy\,dz,$$

$$K_1=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{x}{y}\right]\frac{y}{x}\,dx\,dy,\quad K_2=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{y}{z}\right]\frac{z}{y}\,dy\,dz,\quad K_3=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{z}{x}\right]\frac{x}{z}\,dy\,dz,$$

$$L_1=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{x}{y}\left[\frac{y}{z}\right]\left[\frac{z}{x}\right]dx\,dy\,dz,\qquad L_2=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{y}{z}\left[\frac{z}{x}\right]\left[\frac{x}{y}\right]dx\,dy\,dz$$

y

$$L_3=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{z}{x}\left[\frac{x}{y}\right]\left[\frac{y}{z}\right]dx\,dy\,dz.$$

Como el integrando de J es nulo excepto cuando $x=y=z$, es claro que $J=0$. Además, por simetría, $K_1=K_2=K_3$ y $L_1=L_2=L_3$, luego basta probar que

$$K_1=\frac{\zeta(2)}{4}\qquad\text{y}\qquad L_1=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{18}.$$

En primer lugar demostraremos que

$$\int_0^\infty \frac{[s]}{s^n}\,ds = \frac{\zeta(n-1)}{n-1}, \qquad n \geq 3. \tag{1}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{[s]}{s^n}\,ds &= \sum_{k=1}^\infty k \int_k^{k+1} \frac{ds}{s^n} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^\infty k\left(\frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}}\right)\\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{n-1}} = \frac{\zeta(n-1)}{n-1}.\end{aligned}$$

Ahora, como el integrando de K_1 es nulo para $x < y$, usando el cambio de variable $y = x/s$ tenemos

$$K_1 = \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{x}{y}\right]\frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_0^1 x \int_0^\infty \frac{[s]}{s^3}\,ds\,dx = \frac{\zeta(2)}{4},$$

donde en el último paso hemos usado (1) con $n = 3$. En el caso de L_1, el integrando es nulo a menos que $y \leq z \leq x$ y, por tanto,

$$L_1 = \int_0^1 \int_0^y \int_0^z \frac{x}{y}\left[\frac{y}{z}\right]\left[\frac{z}{x}\right]dx\,dz\,dy.$$

El cambio de variables $x = y/st$ y $z = y/t$ nos da

$$L_1 = \int_0^1 y^2 \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{[s]}{s^3}\frac{[t]}{t^4}\,ds\,dt\,dy = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{18},$$

donde nuevamente hemos aplicado (1) con $n = 3$ y $n = 4$.

También resuelto por R. Dutta, L. Glasser y el proponente.

Nota. El proponente nos indica que la integral que se ha calculado en este problema es un caso particular de la propuesta en el Problema 2.58 del libro *Limits, Series, and Fractional Part Integrals: Problems in Mathematical Analysis* de Ovidiu Furdui. Allí se propone, como problema abierto, evaluar la familia de integrales

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\frac{x_1}{x_2}\right]\left[\frac{x_2}{x_3}\right]\cdots\left[\frac{x_n}{x_1}\right]dx_1\,dx_2\cdots dx_n, \qquad n \geq 3.$$

Problema 303. *Propuesto por Florin Stănescu, Găeşti, Rumanía.*

Sea $M_2(\mathbb{Z})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos cuyas entradas son números enteros. Determinar todas las matrices $X_1, X_2, \ldots, X_9 \in M_2(\mathbb{Z})$, con $\det(X_i) = 1$ para $i = 1, \ldots, 9$, tales que

$$X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_9^4 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_9^2 + 18 \cdot I_2.$$

Solución enviada por Enrique Macías Virgós, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

Cada matriz $X \in M_2(\mathbb{Z})$ con $\det X = 1$ anula su polinomio característico $\lambda^2 - t\lambda + 1$, donde $t = \operatorname{tr} X \in \mathbb{Z}$ es la traza de la matriz X. Luego es claro que $X^2 = tX - I_2$. Usando la linealidad de la traza se sigue que

$$\operatorname{tr}(X^4 - X^2 - 2 \cdot I_2) = p(t)$$

con $p(t) = t^4 - 5t^2$. Si $t^2 = 1$ o $t^2 = 4$ se tiene que $p(t) = -4$, y si $t^2 \geq 9$ se cumple que $p(t) = t^2(t^2 - 5) \geq 9 \times 4 = 36$. Entonces, si la ecuación tiene solución, tomando la traza y llamando $t_i = \operatorname{tr} X_i$, tendríamos que

$$0 = \sum_{i=1}^{9} \operatorname{tr}(X_i^4 - X_i^2 - 2 \cdot I_2) = \sum_{i=1}^{9} p(t_i).$$

Si hay n sumandos negativos y p positivos, se sigue que $0 \geq -4n + 36p$ y, como $n + p \leq 9$ (puesto que puede haber sumandos nulos), se deduce que $p = 0$ y por tanto tiene que ser $n = 0$. Así, todos las matrices X_i tienen traza nula.

Recíprocamente, cualquier elección de matrices X_i en las condiciones del problema y con traza nula nos da una solución porque $X_i^2 = -I_2$ y $X_i^4 = I_2$.

También resuelto por L. Giugiuc, J. Mir, J. Nadal, M. Omarjee y el proponente.

PROBLEMA 304. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

En un triángulo ABC, sean M el punto medio del lado BC y D el punto medio de la mediana AM. Si la recta perpendicular al segmento DM en su punto medio pasa por el ortocentro del triángulo ABC, probar que $\angle BDC = \pi/2$.

NOTA. Marcel Chiriţă, colaborador habitual de esta sección, falleció el 26 de febrero de 2016. Sirva esta última publicación de uno de sus problemas como homenaje desde LA GACETA.

Solución enviada por Saturnino Campo, Salamanca.

Sean α y β las circunferencias de radios DA y MB y centros D y M, respectivamente, H el ortocentro del triángulo ABC y H' el pie de la altura desde el vértice A, véase la figura 3. Es evidente que α pasa por H'.

Vamos a demostrar que el ortocentro H es un punto del eje radical de las circunferencias α y β. Para ello calcularemos la potencia del punto H respecto de ambas circunferencias. Sabemos que el simétrico de H respecto de BC es el punto H'' de la circunferencia Γ circunscrita al triángulo ABC. Para el punto H' se tiene, según la potencia respecto de la circunferencia Γ,

$$AH' \cdot H'H'' = AH' \cdot HH' = CH' \cdot H'B = MB^2 - MH'^2. \tag{1}$$

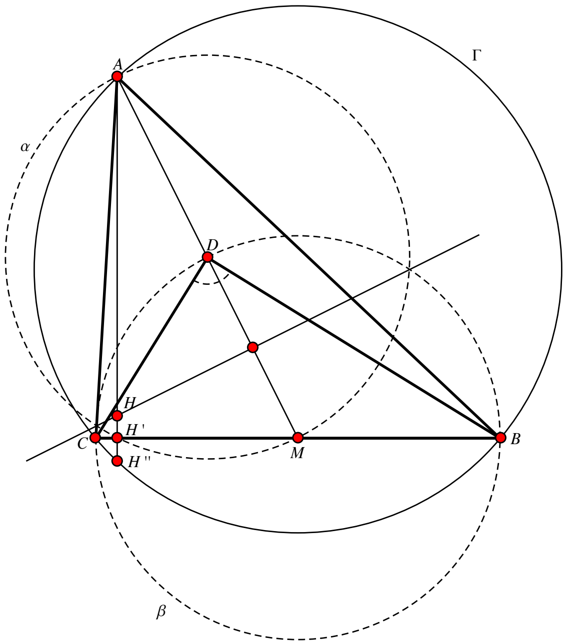

Figura 3: Esquema para la solución del Problema 304.

Por otra parte, la potencia del punto H respecto de la circunferencia α es

$$\mathrm{Pot}(H,\alpha) = -AH \cdot HH' = -(AH' - HH') \cdot HH' = HH'^2 - AH' \cdot HH'$$

y la potencia de H respecto de β, usando que HH' es perpendicular a $H'M$ y (1), es

$$\mathrm{Pot}(H,\beta) = HM^2 - MB^2 = HH'^2 - (MB^2 - MH'^2) = HH'^2 - AH' \cdot HH',$$

lo que nos permite concluir que H pertenece al eje radical de las circunferencias α y β. Volviendo al enunciado, se tiene que H equidista de los puntos D y M, que son los centros de las circunferencias α y β. Al estar H en el eje radical, estas circunferencias tienen entonces igual radio, es decir, $AD = DM = MB$. Por tanto, el punto D está sobre la circunferencia β y, consecuentemente, $\angle BDC = \pi/2$ por ser un ángulo inscrito que abarca un diámetro. (Recíprocamente, si $\angle BDC$ es un ángulo recto, es trivial que H está en la mediatriz de DM.)

Solución enviada por el proponente.

Supongamos el circuncentro del triángulo ABC en el origen del plano complejo. Diremos que z es la *coordenada* del punto Z para indicar que Z es el *afijo* del número complejo z. Sean entonces 1, b y c, respectivamente, las coordenadas de los vértices A, B y C. Se tiene $|b| = |c| = 1$.

Sea N el punto medio del segmento DM. Pongamos que las coordenadas de los puntos M, D, N y H sean, respectivamente, m, d, n y h. Del enunciado se sigue inmediatamente

$$m = \frac{b+c}{2}, \qquad d = \frac{m+1}{2} \qquad \text{y} \qquad n = \frac{3m+1}{4}. \tag{2}$$

Por otra parte, es bien conocido (ver, por ejemplo, [1, pág. 98], o bien [2, pág. 71]) que

$$h = 1 + b + c = 2m + 1, \tag{3}$$

y que la condición $HN \perp AM$ equivale a

$$(n - h) \cdot (m - 1) = 0, \tag{4}$$

si se define, en general, $u \cdot v := \frac{1}{2}(\overline{u}v + u\overline{v})$ (ver también [1, pág. 98]). Sustituyendo (2) y (3) en (4), resulta que $HN \perp AM$ es equivalente a la condición

$$m + \overline{m} + 3 = 5|m|^2. \tag{5}$$

A partir de (5), usando la ley del paralelogramo, se obtiene

$$\begin{aligned} AM^2 &= |m-1|^2 = (m-1)(\overline{m}-1) = 4 - 4|m|^2 = 4 - |b+c|^2 \\ &= 2|b|^2 + 2|c|^2 - |b+c|^2 = |b-c|^2 = BC^2, \end{aligned}$$

y, por consiguiente, se verifica $AM = BC$ y $DM = \frac{1}{2}\,BC$. De aquí se deduce que el triángulo BDC es rectángulo en D, ya que está inscrito en una semicircunferencia de centro M y radio MB.

REFERENCIAS

[1] T. ANDREESCU Y D. ANDRICA, *Complex Numbers from A to ... Z*, 2nd ed., Birkhäuser, 2014.

[2] LIANG-SHIN HAHN, *Complex Numbers & Geometry*, MAA Spectrum Series, The Mathematical Association of America, 1994.

También resuelto por M. Amengual (tres soluciones), F. D. Aranda, R. Barroso, A. Fanchini, J. Mir, J. Nadal, R. Peiró, B. Salgueiro, C. Sánchez, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente (otra solución).