Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 20 (2017), Núm. 1, Pág. 212

Una función que, sin parecerlo, es constante en un intervalo

En los primeros cursos de Análisis Matemático, resulta muy útil disponer de funciones con definiciones sencillas que tengan comportamientos extraños e insospechados a primera vista, de modo que los alumnos se convenzan de la necesidad de introducir el rigor. Aquí vamos a ver que la función

$$F(a) = \int_{-1}^{1} \frac{\log(x-a)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

es constante (igual a $-2\pi\log 2$) cuando $a \in [-1,1]$, pero no lo es cuando $|a| > 1$.

Comencemos suponiendo $|a| \le 1$. Usando $F(-a) = F(a)$ y el cambio de variable $x = \cos t$, se tiene

$$2F(a) = \int_{-1}^{1} \frac{\log(x^2-a^2)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \log(\cos^2 t - \cos^2\alpha)^2\,dt,$$

donde hemos tomado $a = \cos\alpha$. Mediante transformaciones de sumas en productos se prueba que $(\cos^2 a - \cos^2 b)^2 = \operatorname{sen}^2(a+b)\operatorname{sen}^2(a-b)$ y, de esta forma, usando que la función $\operatorname{sen}^2 z$ es π-periódica, llegamos a

$$\begin{aligned} 2F(a) = \int_0^{\pi} \log(\operatorname{sen}(t+\alpha)\operatorname{sen}(t-\alpha))^2\,dt = \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \log(\operatorname{sen}^2(t+\alpha))\,dt \\ + \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \log(\operatorname{sen}^2(t-\alpha))\,dt = 2\int_0^{\pi} \log(\operatorname{sen}^2 t)\,dt = 2F(1). \end{aligned}$$

Para $|a| > 1$, derivando bajo el signo integral y aplicando el cambio de variable $x = (1-u^2)/(1+u^2)$, se tiene

$$F'(a) = 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = 4\int_0^{\infty} \frac{du}{a-1+(a+1)u^2} = \frac{2\operatorname{sgn}(a)\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

así que $F(a) = 2\pi\log(|a| + \sqrt{a^2-1}) + C$. Por continuidad de F, $C = F(1)$.

Damos una pincelada de los cálculos que conducen a $F(1)$. De las identidades

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \log(\operatorname{sen} t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} t)\,dt \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t)\,dt$$

se obtiene

$$F(1) = 2\left(\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} t)\,dt + \int_0^{\pi/2} \log(\cos t)\,dt\right) = 2\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen}(2t)/2)\,dt,$$

luego $F(1) = -\pi\log 2 + F(1)/2$ y $F(1) = -2\pi\log 2$.

Óscar Ciaurri y Juan Luis Varona, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: oscar.ciaurri@unirioja.es, jvarona@unirioja.es