
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico oscar.ciaurri@unirioja.es en archivos con formato TEX . Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2017.

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (\star) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

PROBLEMA 297. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Gerona.*

Construir con regla y compás un pentágono convexo del que se conocen los puntos medios de los lados.

PROBLEMA 298. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a , b y c tres números positivos tales que $ab + bc + ca = 3abc$. Demostrar que

$$\sqrt{\frac{a+b}{c(a^2+b^2)}} + \sqrt{\frac{b+c}{a(b^2+c^2)}} + \sqrt{\frac{c+a}{b(c^2+a^2)}} \leq 3.$$

PROBLEMA 299. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{x^2}{1+n^2 \cos^2 x} dx.$$

PROBLEMA 300. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Evaluar la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 301. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Sean $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$ las longitudes de los lados de un triángulo ABC . Si $\angle BCA = C \geq \pi/3$, demostrar que

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 4 + \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}}.$$

PROBLEMA 302. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiș, Rumanía.*

Sea $\{x\} = x - [x]$ la parte decimal de x . Probar que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{x}{y} \right\} \left\{ \frac{y}{z} \right\} \left\{ \frac{z}{x} \right\} dx dy dz = 1 + \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{6} - \frac{3\zeta(2)}{4}.$$

PROBLEMA 303. *Propuesto por Florin Stănescu, Găești, Rumanía.*

Sea $M_2(\mathbb{Z})$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos cuyas entradas son números enteros. Determinar todas las matrices $X_1, X_2, \dots, X_9 \in M_2(\mathbb{Z})$, con $\det(X_i) = 1$ para $i = 1, \dots, 9$, tales que

$$X_1^4 + X_2^4 + \dots + X_9^4 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_9^2 + 18 \cdot I_2.$$

PROBLEMA 304. *Propuesto por Marcel Chiriță, Bucarest, Rumanía.*

En un triángulo ABC , sean M el punto medio del lado BC y D el punto medio de la mediana AM . Si la recta perpendicular al segmento DM en su punto medio pasa por el ortocentro del triángulo ABC , probar que $\angle BDC = \pi/2$.

Soluciones

PROBLEMA 273. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Evaluar la integral

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} \left(|t| \sqrt{x} \frac{x-15}{x-1} \right) \frac{dx}{x-4}, \quad t \in \mathbb{R},$$

entendida como un valor principal.

Solución enviada por el proponente.

Denotando por $f(t)$ la integral a evaluar, con el cambio de variable $x = r^2$ y tomando la función $\phi(r) = r \frac{r^2-15}{r^2-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \int_0^\infty \operatorname{sen} (|t|\phi(r)) \frac{r}{r^2-4} dr \\ &= \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} (|t|\phi(r)) \frac{r}{r^2-4} dr \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} (|t|\phi(r)) \frac{dr}{r-2} + \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} (|t|\phi(r)) \frac{dr}{r+2} \right) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} (|t|\phi(r)) \frac{dr}{r-2} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \operatorname{sen} (|t|\phi(r_1)) \frac{dr_1}{r_1-2} + \int_{-1}^1 \operatorname{sen} (|t|\phi(r_2)) \frac{dr_2}{r_2-2} \\ &\quad + \int_1^\infty \operatorname{sen} (|t|\phi(r_3)) \frac{dr_3}{r_3-2}. \end{aligned}$$

La ecuación $\phi(r) = u$ (o $r^3 - ur^2 - 15r + u = 0$), con $u \in \mathbb{R}$, tiene tres raíces $r_1(u)$, $r_2(u)$ y $r_3(u)$, que cumplen $r_1(u) < -1 < r_2(u) < 1 < r_3(u)$. Además, por las fórmulas de Cardano,

$$r_1(u) + r_2(u) + r_3(u) = 1, \quad r_1(u)r_2(u) + r_2(u)r_3(u) + r_3(u)r_1(u) = -15 \quad (1)$$

y

$$r_1(u)r_2(u)r_3(u) = u. \quad (2)$$

Entonces, considerando los cambios $r_i = r_i(u)$, llegamos a que

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} (|t|u) \frac{dr_1(u)}{du} \frac{du}{r_1(u)-2} + \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} (|t|u) \frac{dr_2(u)}{du} \frac{du}{r_2(u)-2} \\ &\quad + \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} (|t|u) \frac{dr_3(u)}{du} \frac{du}{r_3(u)-2} = \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} (|t|u) g(u) du, \end{aligned}$$

con

$$g(u) = \left(\frac{dr_1(u)}{du} \frac{1}{r_1(u) - 2} + \frac{dr_2(u)}{du} \frac{1}{r_2(u) - 2} + \frac{dr_3(u)}{du} \frac{1}{r_3(u) - 2} \right).$$

Usando (1) y (2), y siendo

$$h(u) = r_1(u)r_2(u)r_3(u) - 2(r_1(u)r_2(u) + r_2(u)r_3(u) + r_3(u)r_1(u)) + 4(r_1(u) + r_2(u) + r_3(u)),$$

resulta sencillo comprobar que

$$g(u) = \frac{1}{h(u) - 8} \frac{dh(u)}{du} = \frac{1}{3u + 22} \frac{d}{du} (3u + 30) = \frac{3}{3u + 22},$$

y de este modo

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(|t|u) \frac{du}{u + \frac{22}{3}} = \pi \cos \frac{22t}{3},$$

donde la última integral se ha evaluado como un valor principal.

No se han recibido otras soluciones.

PROBLEMA 274. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea $k \geq 1$ un número entero. Probar que

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 i_2 \cdots i_k (i_1 + i_2 + \cdots + i_k)^2} \\ = \begin{cases} \frac{(k+1)!}{2} \zeta(k+2), & k = 1, \\ k! \left(\frac{k+1}{2} \zeta(k+2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(k+1-i) \zeta(i+1) \right), & k > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

donde ζ denota la función zeta de Riemann.

Solución enviada por Anastasios Kotronis, Atenas, Grecia.

Usando que

$$\frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-jx}}{j} = -\log(1 - e^{-x}),$$

tenemos

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 \cdots i_k (i_1 + \cdots + i_k)^2} = (-1)^k \int_0^{+\infty} x \log^k(1 - e^{-x}) dx,$$

y así, con el cambio de variable $1 - e^{-x} = y$, llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 \cdots i_k (i_1 + \cdots + i_k)^2} &= (-1)^k \int_0^1 -\frac{\log(1-y)}{1-y} \log^k y \, dy \\ &= (-1)^k \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n y^n \right) \log^k y \, dy \\ &= (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} H_n \int_0^1 y^n \log^k y \, dy, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$-\frac{\log(1-y)}{1-y} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n y^n.$$

De la identidad

$$\begin{aligned} &\int y^n \log^k y \, dy \\ &= y^{n+1} \left(\frac{\log^k y}{n+1} - \frac{k \log^{k-1} y}{(n+1)^2} + \frac{k(k-1) \log^{k-2} y}{(n+1)^3} - \cdots + \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} \right) + C, \end{aligned}$$

válida para n y k enteros no negativos y que puede obtenerse usando integración por partes, deducimos fácilmente que

$$\int_0^1 y^n \log^k y \, dy = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Por tanto,

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 \cdots i_k (i_1 + \cdots + i_k)^2} = k! \sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^{k+1}}$$

y concluimos usando la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^k} = \frac{k+1}{2} \zeta(k+2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(k+1-i) \zeta(i+1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde la suma en el lado derecho debe tomarse como cero en el caso $k = 1$, ver [1, pág. 278].

REFERENCIAS

[1] D. Borwein, J. M. Borwein y R. Girgensohn, Explicit evaluation of Euler sums, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **38** (1995), 277–294; disponible online en <https://carma.newcastle.edu.au/db90/pdfs/db90-107.00.pdf>.

También resuelto por L. Glasser, A. Stadler y el proponente.

PROBLEMA 275. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sea $\{a_k\}_{k \geq 1}$ una sucesión monótona de números reales positivos tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Supongamos además que, para $n \geq 0$ y $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$, se verifica

$$a_k - a_{k+1} \geq 2^{-n} a_{2^{n+1}}.$$

Probar que, si α es un número irracional cuadrático, entonces la sucesión

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)}$$

es acotada.

Solución enviada por Moubinoöl Omarjee Lycée Henri IV, París, Francia.

En primer lugar debemos recordar que si α es un irracional cuadrático, existe una constante positiva C tal que $|q\alpha - p| \geq C/q$ para cualesquiera enteros p y q . Denotando por $\|x\|$ la distancia de x al entero más próximo, se tiene que $|\operatorname{sen}(\alpha\pi x)| \geq 2\|k\alpha\| > 2C/k$, donde en la última desigualdad hemos usado la observación anterior sobre irracionales cuadráticos. Entonces, es evidente que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)} \right| \leq \frac{B}{n} \sum_{k=1}^n ka_k,$$

para una cierta constante B .

Comprobemos que la prueba se puede completar si damos por supuesto que la sucesión $\{a_k\}_{k \geq 1}$ cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n \log n = 0. \quad (1)$$

En efecto, en ese caso, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $0 < na_n < \frac{\varepsilon}{\log n}$ para $n \geq n_0$ y, así,

$$\sum_{k=1}^n ka_k = \sum_{k=1}^{n_0} ka_k + \sum_{k=n_0+1}^n ka_k \leq A(n_0) + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{\log k},$$

donde $A(n_0)$ es una constante que depende de n_0 . Como

$$\sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{\log k} = O\left(\frac{n}{\log n}\right),$$

llegamos a que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)} \right| \leq \frac{B}{n} \left(A(n_0) + O\left(\frac{n}{\log n}\right) \right),$$

y la sucesión $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)}$ es acotada.

Veamos ahora una demostración de (1). De la condición $a_k - a_{k+1} \geq 2^{-n} a_{2^{n+1}}$ para $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$, se deduce que la sucesión $\{2^k a_{2^k}\}_{k \geq 1}$ es decreciente. En efecto,

$$a_{2^k} - a_{2^{k+1}} = \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} (a_j - a_{j+1}) \geq 2^{-k} a_{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = a_{2^{k+1}},$$

lo que implica $2^k a_{2^k} \geq 2^{k+1} a_{2^{k+1}}$.

Recordemos que si una sucesión de términos positivos $\{u_n\}_{n \geq 1}$ es decreciente y la suma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0. \tag{2}$$

De esta forma se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n 2^n a_{2^n} = 0.$$

Para cada n se verifica que $2^{q_n} \leq n < 2^{q_n+1}$ con $q_n = \left\lfloor \frac{\log n}{\log 2} \right\rfloor$, siendo $[x]$ la parte entera de x . Así, como $q_n \leq \frac{\log n}{\log 2} < q_n + 1$ y a_n es decreciente, deducimos las desigualdades

$$\frac{q_n \log 2}{2(q_n + 1)} (q_n + 1) 2^{q_n+1} a_{2^{q_n+1}} \leq a_n n \log n < \frac{2(q_n + 1)}{q_n} q_n 2^{q_n} a_{2^{q_n}},$$

que implican (1).

También resuelto por J. Nadal y el proponente.

NOTA. El límite que aparece en (2) es una consecuencia del criterio de condensación de Cauchy. En efecto, por dicho criterio se tiene que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ es convergente y, por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k u_{2^k} = 0.$$

Como $\{u_n\}_{n \geq 1}$ es decreciente se cumple que

$$0 \leq n u_n \leq 2^k u_{2^k}, \quad n = 1, \dots, 2^k,$$

lo que implica (2).

PROBLEMA 261. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En el triángulo escaleno ABC de incentro I , sea M_A el punto medio del lado BC . La recta que pasa por M_A y es paralela al lado AB corta a la recta BI en el punto P y a la recta CI en el punto Q . La recta que pasa por M_A y es paralela al lado AC corta a BI en el punto R y a CI en el punto S . Las rectas PS y QR se cortan en el punto J_A .

- a) Probar que la recta IJ_A es paralela al lado BC .
- b) Si se construyen de forma análoga, a partir de los puntos medios M_B y M_C de los lados CA y AB , puntos J_B y J_C , demostrar que los puntos J_A , J_B y J_C están alineados.

PROBLEMA 276. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En un triángulo escaleno ABC , sean I el incentro y M_A el punto medio de BC (véase el esquema de la figura adjunta). Supongamos que la recta paralela a AB pasando por M_A corta a BI y CI en los puntos P y Q , respectivamente, y que la recta paralela a AC pasando por M_A corta a BI y CI en R y S respectivamente. Las rectas PS y QR se cortan en un punto que denotaremos por J_A . Si de manera análoga se construyen otros dos puntos J_B y J_C , demostrar que los tres J_A , J_B y J_C están alineados.

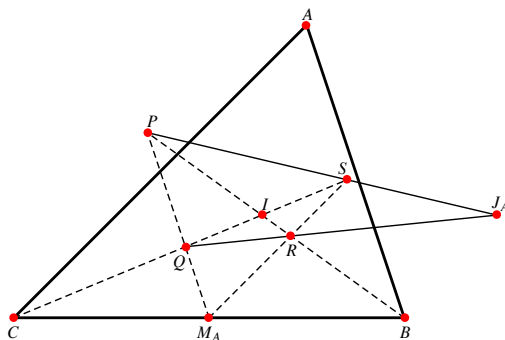


Figura correspondiente al Problema 276.

NOTA. Como en su momento observaron varios de nuestros lectores, los Problemas 261 y 276 son, esencialmente, el mismo, aunque con una redacción diferente. Este hecho se debió a una confusión de los editores por la que pedimos disculpas. Por esa razón hemos decidido presentar las soluciones a ambos problemas conjuntamente. Aunque las soluciones seleccionadas responden a los apartados a) y b) del Problema 261, han sido elaboradas con el material recibido para ambos problemas.

Solución al Problema 261 enviada por Andrea Fanchini, Cantú, Italia.

Usaremos coordenadas baricéntricas relativas con respecto al triángulo ABC de lados a, b, c , semiperímetro s y área $S/2$. Pondremos $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$ y expresiones análogas para S_B y S_C .

Denotemos por A_∞ , B_∞ y C_∞ , respectivamente, los puntos del infinito de las rectas BC , CA y AB . Se tiene $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$, $A_\infty = (0 : 1 : -1)$, $B_\infty = (-1 : 0 : 1)$ y $C_\infty = (1 : -1 : 0)$. También, $M_A = (0 : 1 : 1)$, $M_B = (1 : 0 : 1)$, $M_C = (1 : 1 : 0)$ e $I = (a : b : c)$.

a) La ecuación de la recta que pasa por M_A y es paralela al lado AB es

$$M_A C_\infty \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$M_A C_\infty \equiv x + y - z = 0.$$

Por otro lado se tiene $BI \equiv cx - az = 0$ y $CI \equiv bx - ay = 0$, por lo tanto

$$P = M_A C_\infty \cap BI = (a : c - a : c) \quad \text{y} \quad Q = M_A C_\infty \cap CI = (a : b : a + b).$$

Análogamente, $M_A B_\infty \equiv x - y + z = 0$, $R = (a : a + c : c)$ y $S = (a : b : b - a)$.
Entonces,

$$PS \equiv (s - a)x - (s - b)y - (s - c)z = 0, \quad QR \equiv sx - (s - c)y - (s - b)z = 0$$

y $J_A = PS \cap QR = (a(b - c) : S_C : -S_B)$. La ecuación de la recta IJ_A es

$$IJ_A \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a(b - c) & S_C & -S_B \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$IJ_A \equiv (bS_B + cS_C)x - a(S_B - c(c - b))y - a(S_C + b(c - b))z = 0.$$

Dado que

$$bS_B + cS_C = 2(b + c)(s - b)(s - c) \quad \text{y} \quad S_B - c(c - b) = S_C + b(c - b) = 2(s - b)(s - c),$$

la ecuación se simplifica a la expresión

$$IJ_A \equiv (b + c)x - ay - az = 0.$$

Obviamente, esta recta pasa por el punto A_∞ , luego en efecto es paralela al lado BC .

b) Por permutación cíclica de las letras obtenemos las coordenadas baricéntricas de los puntos análogos, $J_B = (S_C : b(c - a) : S_A)$ y $J_C = (S_B : -S_A : c(a - b))$. La condición de colinealidad de los puntos J_A, J_B y J_C es la anulación del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(b - c) & S_C & -S_B \\ -S_C & b(c - a) & S_A \\ S_B & -S_A & c(a - b) \end{vmatrix}.$$

Las relaciones

$$S^2 + S_A^2 = (bc \sin A)^2 + (bc \cos A)^2 = b^2 c^2, \quad S^2 + S_B^2 = c^2 a^2, \quad S^2 + S_C^2 = a^2 b^2,$$

pueden aligerar un poco esta comprobación final. En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta &= abc(a - b)(b - c)(c - a) + a(b - c)S_A^2 + b(c - a)S_B^2 + c(a - b)S_C^2 \\ &= -a^2 bc^2(c - a) - a^2 b^2 c(a - b) - ab^2 c^2(b - c) \\ &\quad + a(b - c)(b^2 c^2 - S^2) + b(c - a)(a^2 c^2 - S^2) + c(a - b)(a^2 b^2 - S^2) \\ &= -(a(b - c) + b(c - a) + c(a - b))S^2 = 0. \end{aligned}$$

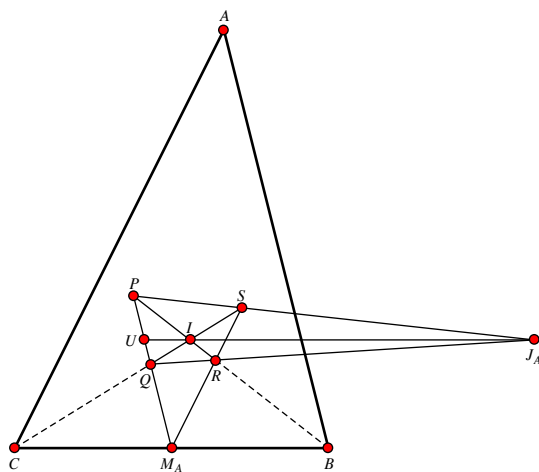


Figura 1: Esquema para la segunda solución al apartado a) del Problema 261.

Solución al apartado a) del Problema 261 elaborada a partir de las enviadas por Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, y el proponente.

En el cuadrilátero $PQRS$ (Figura 1) el punto de intersección de las diagonales es I , mientras que M_A y J_A son los puntos de intersección de los pares de lados opuestos. Es conocido que en esta configuración de cuadrilátero completo, la recta IJ_A corta al segmento PQ en un punto U que es el cuarto armónico del punto M_A respecto de los extremos P y Q , es decir, el punto U con razón doble $(PQM_AU) = \frac{PM_A}{QM_A} : \frac{PU}{QU} = -1$ (segmentos orientados), lo que se puede demostrar, por ejemplo, así: por un lado, el teorema de Menelao aplicado al triángulo $J_A PQ$ cortado por la transversal $M_A S$ da

$$\frac{M_A P}{M_A Q} \frac{RQ}{R J_A} \frac{S J_A}{S P} = 1;$$

y, por otro lado, el teorema de Ceva en el mismo triángulo, aplicado a las cevianas concurrentes PR , QS y $J_A U$, da

$$\frac{RQ}{R J_A} \frac{S J_A}{S P} \frac{U P}{U Q} = -1.$$

Pues bien, en la proyección desde el punto exterior I de esta cuaterna armónica P, Q, M_A, U sobre la recta BC se obtiene otra cuaterna armónica C, B, M_A, X , ya que la razón doble de cuatro puntos es un invariante proyectivo. El punto X , homólogo del punto U en esta proyección, es el punto del infinito de la recta BC (al ser M_A el punto medio del segmento BC se tiene $(CBM_A X) = \frac{BX}{CX} = -1$). Luego la recta IJ_A es paralela al lado BC .

Solución al apartado b) del Problema 261 enviada por el proponente.

Sean, respectivamente, E y F los puntos donde la recta PS corta a los lados AC y AB del triángulo ABC . Veamos que E y F son precisamente los puntos de contacto de esos lados con la circunferencia ω inscrita al triángulo. Para ello basta probar que los ángulos CEI y BFI son rectos.

Es sencillo ver (Figura 2) que los triángulos PBM_A y SCM_A son isósceles, luego $M_AP = M_AB$ y $M_AS = M_AC$. Entonces los puntos B, C, P y S están en una misma circunferencia de centro M_A , de la que BC es un diámetro, y se tiene

$$\angle BPS = \angle BCS = \frac{\gamma}{2} \quad \text{y} \quad \angle BPC = \frac{\pi}{2}.$$

Pero de la igualdad $\angle BPS = \frac{\gamma}{2} = \angle ICE$ se deduce también que $EPCI$ es un

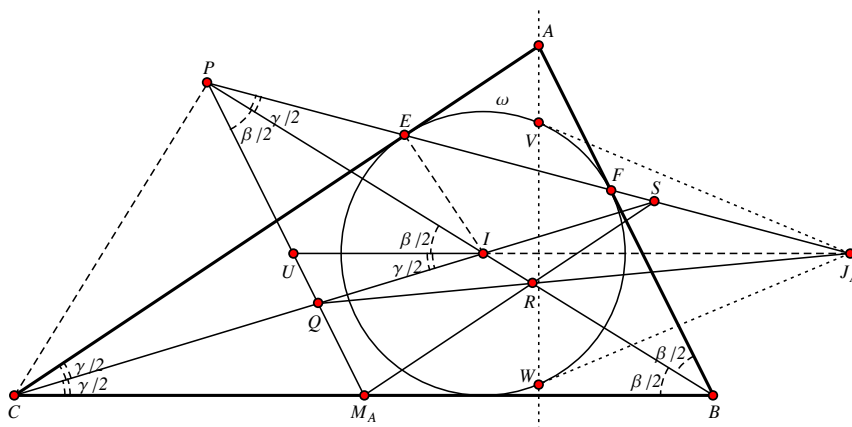


Figura 2: Esquema para la segunda solución al apartado b) del Problema 261.

cuadrilátero cíclico, y entonces $\angle CEI = \angle CPI = \frac{\pi}{2}$. De forma similar se prueba que $\angle BFI = \frac{\pi}{2}$.

Ahora, la recta EF es la polar del punto A respecto de ω (es la cuerda de las tangentes trazadas a ω desde A), y el punto J_A pertenece a esta recta. Por la propiedad de pertenencia recíproca de un punto a la polar de otro se tiene que, entonces, A pertenece a la polar de J_A . La polar del punto J_A respecto de ω es la cuerda de tangentes VW perpendicular a IJ_A y perpendicular también, por tanto, a BC en aplicación del apartado a). De modo que la polar de J_A respecto de ω es la altura del triángulo ABC correspondiente al vértice A .

Análogamente las polares de los puntos J_B y J_C respecto de ω son las alturas correspondientes a los vértices B y C respectivamente. Como las polares de los puntos J_A, J_B y J_C son concurrentes (en el ortocentro del triángulo ABC), los tres puntos J_A, J_B y J_C pertenecen a (están alineados en) la recta polar del ortocentro respecto de ω .

También resuelto por F. Aranda, S. Campo, D. Lasaosa, J. Mir, J. Nadal y B. Salgueiro.

NOTA. Las soluciones de Aranda, Mir y Nadal al problema 261, la de Campo al apartado b) de ese problema y la solución de Salgueiro al problema 276 utilizan también coordenadas baricéntricas. Alternativamente, la solución de Lasaosa usa coordenadas trilineales.

PROBLEMA 277. *Propuesto por Marcel Chiriță, Bucarest, Rumanía.*

Mostrar que

$$\sqrt{\frac{x(x+y)}{x^2-xy+y^2}} + \sqrt{\frac{y(y+z)}{y^2-yz+z^2}} + \sqrt{\frac{z(z+x)}{z^2-zx+x^2}} \leq 3\sqrt{2},$$

donde x, y y z son números reales positivos.

Solución enviada independientemente por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia, y Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Rumanía.

De la desigualdad $4(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)^2$ deducimos inmediatamente que

$$\sqrt{\frac{x(x+y)}{x^2-xy+y^2}} \leq 2\sqrt{\frac{x}{x+y}},$$

luego el resultado propuesto viene implicado por

$$\sum_{\text{cíclica}} \sqrt{\frac{x}{x+y}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Aplicando la desigualdad de Jensen con la función convexa \sqrt{z} se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cíclica}} \sqrt{\frac{x}{x+y}} &= \sum_{\text{cíclica}} \frac{x+z}{2(x+y+z)} \sqrt{\frac{4x(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)^2}} \\ &\leq \left(\sum_{\text{cíclica}} \frac{2x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y concluiremos (1) probando que

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} \leq \frac{9}{4}.$$

Esta desigualdad se transforma en

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 \geq 6xyz,$$

que equivale a

$$\sum_{\text{cíclica}} z(x - y)^2 \geq 0,$$

y esta es claramente cierta.

También resuelto por Kee-Wai Lau, J. Nadal, B. Salgueiro, T. Zvonaru y N. Stanciu (conjuntamente) y el proponente.

PROBLEMA 278. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Calcular el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} aa' - bb' - cc' & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & bb' - cc' - aa' & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & cc' - aa' - bb' \end{vmatrix}$$

cuando las ternas de números positivos (a, b, c) y (a', b', c') representan, respectivamente, las longitudes de los lados de dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tales que $\angle CBA = \angle C'B'A'$ y $\angle BAC + \angle B'A'C' = \pi$.

Solución enviada por el proponente.

En primer lugar presentamos un cálculo del determinante Δ debido a T. Muir [1] (ver también [2, §72, págs. 100–103]).

Tomando $S_3 = aa' + bb' + cc'$ y desarrollando Δ en potencias de S_3 se tiene

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2aa' - S_3 & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & 2bb' - S_3 & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & 2cc' - S_3 \end{vmatrix} \\ &= -S_3^3 + S_3^2(2aa' + 2bb' + 2cc') \\ &\quad - S_3 \left(\begin{vmatrix} 2bb' & bc' + cb' \\ bc' + cb' & 2cc' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2aa' & ac' + ca' \\ ac' + ca' & 2cc' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2aa' & ab' + ba' \\ ab' + ba' & 2bb' \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + \begin{vmatrix} 2aa' & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & 2bb' & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & 2cc' \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora bien,

$$\begin{pmatrix} 2aa' & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & 2bb' & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & 2cc' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego el término independiente de S_3 en (1) es cero, ya que es igual al producto de dos determinantes nulos. Por otro lado, de la igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} 2xx' & xy' + yx' \\ xy' + yx' & 2yy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}$$

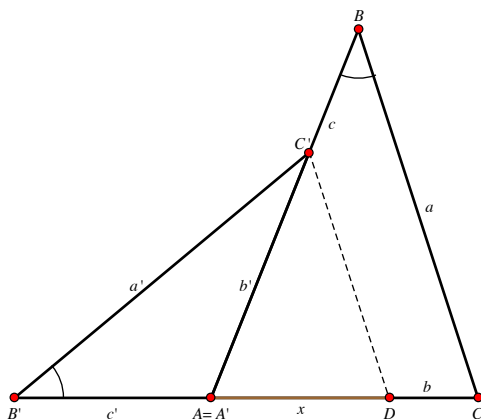


Figura 3: Esquema para la solución del Problema 278.

se sigue

$$\begin{vmatrix} 2xx' & xy' + yx' \\ xy' + yx' & 2yy' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2,$$

y utilizando esto vemos que el coeficiente de S_3 en (1) es igual a

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - S_3^2,$$

donde hemos considerado los vectores $\mathbf{u} = (a, b, c)$ y $\mathbf{v} = (a', b', c')$ y la relación

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2.$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} \Delta &= -S_3^3 + S_3^2 \cdot 2S_3 + S_3 [(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - S_3^2] \\ &= S_3(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2). \end{aligned}$$

En segundo lugar, consideremos dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen las condiciones del enunciado colocados como se ve en la Figura 3, con el vértice común $A' \equiv A$ y los vértices B' y C alineados con A a uno y otro lado respectivamente. Los ángulos en B' y B son iguales. Trazando el segmento $C'D$ paralelo al lado BC , donde D es un punto del segmento AC , se obtienen los triángulos $AC'D$ y $B'C'D$, ambos semejantes al ABC como es sencillo ver. Pongamos $x = |AD|$. De la semejanza entre los triángulos $AC'D$ y ABC se sigue

$$cx = bb', \quad (2)$$

y de la semejanza entre los triángulos $C'B'D$ y ABC se sigue, usando (2), que

$$aa' = c(c' + x) = bb' + cc'. \quad (3)$$

Según la relación (3), entonces en este caso se tiene $S_3 = 2aa'$ y, finalmente,

$$\Delta = 2aa'(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

REFERENCIAS

- [1] T. Muir, Note on a special symmetrical determinant, *The Analyst* **8** (1881), 169–171.
- [2] T. Muir, *A Treatise on the Theory of Determinants*, MacMillan and Co., London, 1882.

También resuelto por J. Nadal y B. Salgueiro.

PROBLEMA 279. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sea r una recta tangente en T a una circunferencia Γ . Sea $k > 0$ una constante y sean A y B dos puntos variables de r tales que $TA \cdot TB = k$, donde se consideran distancias orientadas. Sea T' el punto de Γ diametralmente opuesto a T . Probar que si las rectas $T'A$ y $T'B$ cortan de nuevo a Γ en P y Q , respectivamente, entonces la recta PQ pasa por un punto fijo al variar A y B .

Solución enviada por Titu Zvonaru, Comănești, Rumanía, y Neculai Stanciu, Buzău, Rumanía.

Considerando que la circunferencia Γ tiene radio unidad, tomamos un sistema de coordenadas tal que la ecuación de Γ es $x^2 + y^2 = 1$, la ecuación de la recta r es $y = -1$, $T = (0, -1)$, $T' = (0, 1)$, $A = (a, -1)$ y $B = (b, -1)$, con $a \neq b$ y $ab = k > 0$. De este modo, las rectas $T'A$ y $T'B$ tienen, respectivamente, las ecuaciones

$$2x + ay = a \quad \text{y} \quad 2x + by = b,$$

y obtenemos que

$$P = \left(\frac{4a}{a^2 + 4}, \frac{a^2 - 4}{a^2 + 4} \right) \quad \text{y} \quad Q = \left(\frac{4b}{b^2 + 4}, \frac{b^2 - 4}{b^2 + 4} \right).$$

Luego la recta que pasa por P y Q es

$$2x(a + b) + y(k - 4) - (k + 4) = 0$$

y, si $k \neq 4$, pasa por el punto fijo $F = (0, \frac{k+4}{k-4})$. Cuando $k = 4$, la recta PQ es perpendicular a la recta r .

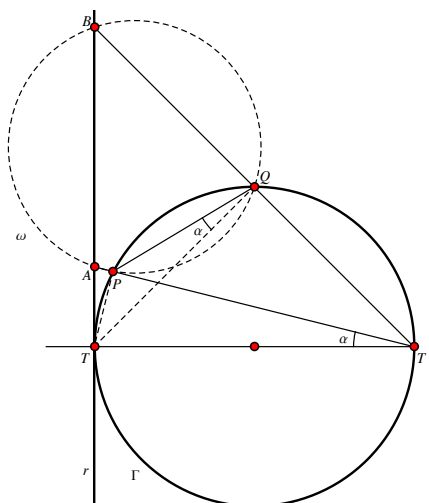


Figura 4: Primer esquema para la segunda solución del Problema 279.

Solución enviada por Florentino D. Aranda Ballesteros, Córdoba.

Probemos en primer lugar que el cuadrilátero $ABQP$ es siempre cíclico. Poniendo para abreviar $\angle TT'A = \angle PQT = \alpha$ (ver la Figura 4), tenemos

$$\angle BAP = \angle BAT' = \pi - \angle TAT' = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

y

$$\angle BQP = \pi - \angle PQT' = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

así que $\angle BAP + \angle BQP = \pi$ y los puntos A , B , Q y P están en una misma circunferencia ω .

Ahora nos referiremos a la Figura 5. Sean A y B dos puntos de r tales que $TA \cdot TB = k > 0$. Podemos considerar, sobre la recta r , el punto (fijo) C tal que $TC^2 = k$. Sabemos que la circunferencia γ de centro T y radio TC es entonces ortogonal a la circunferencia ω circunscrita al cuadrilátero $ABQP$, ya que γ es la circunferencia doble de la inversión de centro T en la que A y B son puntos inversos y la circunferencia ω es su propia inversa.

Al variar los puntos A y B , visto al contrario, las circunferencias ω , ω' , etc., son siempre ortogonales a la circunferencia γ . Entonces forman un *haz de circunferencias coaxiales* (es decir, circunferencias que comparten el eje radical de dos cualesquiera de ellas) *no intersecantes* (ver [1, § 6.5, págs. 113–115]). Los centros de las circunferencias del haz están sobre una recta r_c paralela a la recta r . El punto T , al tener la misma potencia respecto de toda circunferencia ω , pertenece al eje radical del haz,

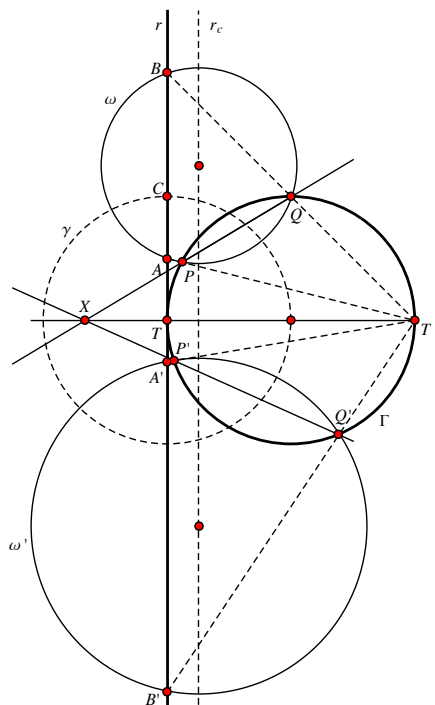


Figura 5: Segundo esquema para la segunda solución del Problema 279.

que debe ser una recta perpendicular a la línea de centros r_c ; por lo tanto, el eje radical del haz de las circunferencias ω es precisamente la recta TT' .

Si la circunferencia ω del haz corta a la circunferencia Γ en los puntos P y Q , la recta PQ es el eje radical de ω y Γ . Si ω' es otra circunferencia cualquiera del haz, las rectas PQ y $P'Q'$ se cortan en un punto X que es el centro radical de las tres circunferencias ω , ω' y Γ y en particular pertenece al eje radical TT' del haz. Este punto fijo X es el centro radical del haz y la circunferencia Γ .

REFERENCIAS

[1] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa, México D.F., 1971.

También resuelto por J. Mir, J. Nadal, B. Salgueiro y el proponente.

PROBLEMA 280. *Propuesto por D. M. Bătinețu-Giurgiu, “Matei Basarab” National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, “George Emil Palade” Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua. Si para $a \in [0, 1]$ consideramos las

sucesiones $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$ y $b_n = n \sqrt[n]{a_n}$, calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)} dx.$$

Solución enviada por Jon Asier Bárcena Petisco (estudiante), Université Pierre et Marie Curie, París, Francia.

El valor del límite solicitado es $1/2$ para todo $a \geq 0$ (la hipótesis $a \in [0, 1]$ no es necesaria).

Con el cambio de variable $y - b_n = b_{n+1} - x$ podemos verificar que

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)} dx = \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(b_{n+1} - y)}{f(b_{n+1} - y) + f(y - b_n)} dy$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n) + f(b_{n+1} - x)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)} dx \right) \\ &= \frac{b_{n+1} - b_n}{2}. \end{aligned}$$

Así, basta probar que, para $a \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = 1. \quad (1)$$

Por la desigualdad triangular tenemos que

$$|b_{n+1} - b_n - 1| \leq |n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} - 1| + |n(n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} - n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_n})| + |n(n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_n} - n \sqrt[n]{a_n})| \quad (2)$$

y será suficiente verificar que cada uno de los tres sumandos tiende a cero.

Como

$$1 \leq n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq n^{n+1} \sqrt[n+1]{n+1},$$

usando $n^{n+1} \sqrt[n+1]{n+1} \rightarrow 1$ deducimos que $|n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} - 1| \rightarrow 0$.

Para analizar los dos sumandos restantes en (2) aplicaremos el teorema del valor medio. Para cada $a \geq 0$, tomando $g(x) = n^{n+1} \sqrt[n+1]{x}$, existirán $\theta_n \in (a_n, a_{n+1})$ tales que

$$\begin{aligned} n(n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} - n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_n}) &= n g'(\theta_n)(a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{n}{(n+1)^{a+1}} \frac{1}{\theta_n^{1-1/(n+1)}} \leq \frac{1}{a_n^{1-1/n}} \frac{1}{n^a} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando $h(x) = a_n^{1/x}$, existirán $\xi_n \in (n, n+1)$ que cumplen

$$n(n \sqrt[n]{a_n} - n^{n+1} \sqrt[n+1]{a_n}) = -n h'(\xi_n) = \frac{n}{\xi_n^2} a_n^{1/\xi_n} \log a_n \leq n^{1/n-1} \log n \rightarrow 0,$$

con lo que habremos concluido.

También resuelto por M. Omarjee, P. Perfetti, D. Văcaru y los proponentes. Se ha recibido una solución incorrecta.