Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2016.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 289. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

En el triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A corta al lado opuesto en el punto D. Los puntos O, O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC, ABD y ACD, respectivamente. Probar que $OO_1 = OO_2$.

Problema 290. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía, y Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Siendo $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ el n-ésimo número armónico, probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{H_{2n}}{2n+1} x^{2n+1} = -\frac{\operatorname{arc\,tg}(x)\log(1+x^2)}{2}, \quad x \in [-1,1].$$

PROBLEMA 291. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Para $|a| < 1/2$, evaluar

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos(at - \operatorname{sen} t)\frac{e^{\cos t}}{t}\,dt.$$

PROBLEMA 292. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

Sea M un punto interior de un triángulo ABC, cuyos lados miden, denotados de la manera habitual, a, b y c. Probar que

$$MA + MB + MC \geq \sqrt[3]{a^2MA + b^2MB + c^2MC}.$$

PROBLEMA 293. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Gerona.*

Sobre cada uno de los lados de un triángulo ABC, y hacia su interior, levantamos un cuadrado de modo que los lados de estos cuadrados que son paralelos a los lados del triángulo, pero no están contenidos en ellos, forman un triángulo $A'B'C'$ interior al triángulo ABC (que obviamente es semejante a él). Si la razón de semejanza $|AB|/|A'B'| = k$, probar que $k \geq 2\sqrt{3} + 1$.

PROBLEMA 294. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean $\{F_k\}_{k\geq 0}$ los números de Fibonacci (tomando $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$) y A, B y C matrices cuadradas de orden n, con $a_{i,j} = F_j$, $b_{i,j} = F_i$ y $c_{i,j} = F_{2i-1}$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Si m y p son números enteros positivos, calcular $(A \cdot B)^m \cdot C^p$.

PROBLEMA 295. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En el triángulo ABC con incentro I, la recta perpendicular a AI que pasa por el punto I corta al lado AC en el punto D. Sean M y N los puntos medios de ID e IB, respectivamente, y el punto E la proyección ortogonal de I sobre BD. Probar que CE pasa por el punto medio de MN.

Problema 296. *Propuesto por Alberto Debernardi Pinos, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona.*

Sean $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = \log x$ y $h_j(x) = \log(h_{j-1}(x))$, para $j \geq 2$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ y $\beta > 0$, consideremos la serie infinita

$$S(r, \beta) = \sum_{n=n_r}^{\infty} \frac{1}{n\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(n)\big)\big(h_r(n)\big)^{\beta}},$$

donde n_r es el número natural más pequeño tal que $h_r(n_r) > 0$.

a) Determinar los valores de $r \in \mathbb{N}$ y $\beta > 0$ para los cuales la serie $S(r, \beta)$ es convergente.

b) Fijado $r \geq 2$, demostrar que, cuando $1 \leq m \leq r-1$, la serie

$$\sum_{n=n_r}^{\infty} \frac{h_m(n)}{n\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(n)\big)\big(h_r(n)\big)^{\beta}}$$

es divergente para todo $\beta > 0$.

Nota. El Problema 284, aparecido en el anterior número de La Gaceta, es una propuesta conjunta de Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía, y Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía, y no únicamente de Ovidiu Furdui como se publicó.

Soluciones

Problema 265. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Si Γ denota la función Gamma y $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}$, evaluar

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{a_{n+1}}^{a_n} \Gamma(n^2x^2)\, dx.$$

Solución enviada por Alfonso Álamo Zapatero, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Comprobemos que el límite pedido existe y vale $\frac{e}{2}\Gamma(\frac{e^2}{4})$.

En primer lugar,

$$a_n = \frac{2\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{(2n)!}}.$$

y, por la equivalencia de Stirling, entonces

$$a_n \sim \frac{e}{2n}. \tag{1}$$

Por otra parte, tras el cambio de variables $nx = u$, aplicando el teorema del valor medio integral se deduce que

$$n^2 \int_{a_{n+1}}^{a_n} \Gamma(n^2x^2)\, dx = n \int_{na_{n+1}}^{na_n} \Gamma(u^2)\, du = n^2(a_n - a_{n+1})\Gamma(\zeta_n^2),$$

con ζ_n un punto del intervalo cerrado de extremos na_{n+1} y na_n. De la equivalencia (1) se tiene que $\zeta_n \to \frac{e}{2}$ y, por la continuidad de la función Γ en $(0, \infty)$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(\zeta_n^2) = \Gamma\left(\frac{e^2}{4}\right).$$

De esta forma, lo único que resta por comprobar es la identidad

$$\lim_{n\to\infty} n^2(a_n - a_{n+1}) = \frac{e}{2}. \tag{2}$$

Para tal fin, notemos que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ satisface la relación de recurrencia $a_n^n = (2n+1)a_{n+1}^{n+1}$, que puede reescribirse como

$$a_n = a_{n+1} \sqrt[n]{(2n+1)a_{n+1}},$$

y que implica

$$n^2\big(a_n - a_{n+1}\big) = n^2 a_{n+1}\big(\sqrt[n]{(2n+1)a_{n+1}} - 1\big)a_{n+1}.$$

Por (1) tenemos que $na_{n+1} \to \frac{e}{2}$, luego basta ver que $n\big(\sqrt[n]{(2n+1)a_{n+1}} - 1\big) \to 1$, pero esto es inmediato ya que

$$\sqrt[n]{(2n+1)a_{n+1}} - 1 \sim \log(\sqrt[n]{(2n+1)a_{n+1}}) = \frac{1}{n}\log((2n+1)a_{n+1}),$$

luego

$$n\big(\sqrt[n]{(2n+1)a_{n+1}} - 1\big) \sim \log((2n+1)a_{n+1}) \to \log e = 1$$

y la demostración de (2) está concluida.

NOTA. Obsérvese que la única hipótesis utilizada sobre la función Γ ha sido su continuidad. Por ello, el mismo razonamiento valdría para calcular límites análogos al propuesto con funciones continuas en un cierto abierto que contuviese a $\frac{e^2}{4}$.

También resuelto por A. Castaño, A. Kotronis, D. Lasaosa, J. Nadal, M. Omarjee, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

PROBLEMA 266. *Propuesto por Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}\right).$$

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left|S_n - \log\frac{4}{\pi}\right| \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} n^3 \left|S_n - \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2} - \log\frac{4}{\pi}\right|.$$

Solución enviada (independientemente) por Anastasios Kotronis, Atenas, Grecia, y Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \log \frac{k+1}{k} =: A_n - B_n.$$

Para A_n se tiene que

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k} \\ &= \log 2 - (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_0^1 x^{n+k-1}\, dx \\ &= \log 2 - (-1)^n \int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k\, dx = \log 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes cuatro veces la última integral deducimos la identidad

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$+ \frac{3}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{24}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \int_0^1 \frac{x^{n+4}}{(1+x)^5}\, dx.$$

De este modo, para $n \to \infty$,

$$A_n = \log 2 - \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{(-1)^n}{8n^4} + O(n^{-5}). \tag{1}$$

Ahora, usando transformaciones elementales, para B_n obtenemos que

$$\begin{aligned} B_n &= \log \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{(-1)^{k+1}}}{k^{(-1)^{k+1}}} \right) = \log \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{(-1)^{k+1}}}{k^{(-1)^{k}}} \right) + 2 \log \left(\prod_{k=1}^{n} k^{(-1)^k} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \log(n+1) + 2 \log \left(\frac{2^{2\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2}{n!} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \log(n+1) + 4 \left[\frac{n}{2}\right] \log 2 + 4 \log \left[\frac{n}{2}\right]! - 2 \log n!. \end{aligned}$$

Para $n \to \infty$, la aproximación de Stirling establece que

$$\log n! = n \log n - n + \frac{\log n}{2} + \frac{\log(2\pi)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k(k-1)n^{k-1}} + O(n^{-m})$$

donde, en esta fórmula, los B_k son los números de Bernoulli; y para el caso particular $m = 5$ (recordar que $B_3 = B_5 = 0$) da

$$\log n! = n \log n - n + \frac{\log n}{2} + \frac{\log(2\pi)}{2} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + O(n^{-5}).$$

Así,

$$\begin{aligned}B_{2N} &= -\log(2N+1) + 4N\log 2 + 4\log N! - 2\log((2N)!)\\ &= \log\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4N} + \frac{1}{8N^2} - \frac{5}{96N^3} + \frac{1}{64N^4} + O(N^{-5})\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}B_{2N+1} &= \log(2N+2) + 4N\log 2 + 4\log N! - 2\log((2N+1)!)\\ &= \log\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4N} - \frac{1}{4N^2} + \frac{23}{96N^3} - \frac{7}{32N^4} + O(N^{-5}),\end{aligned}$$

lo que implica

$$B_n = \log\frac{\pi}{2} - \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^n}{2n^2} - \frac{5(-1)^n}{12n^3} + \frac{(-1)^n}{4n^4} + O(n^{-5}). \tag{2}$$

Por tanto, con (1) y (2) se llega a

$$S_n = \log\frac{4}{\pi} - \frac{(-1)^n}{4n^2} + \frac{5(-1)^n}{12n^3} - \frac{3(-1)^n}{8n^4} + O(n^{-5}),$$

de donde inmediatamente se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left|S_n - \log\frac{4}{\pi}\right| = \frac{1}{4}, \qquad \lim_{n\to\infty} n^3\left|S_n - \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2} - \log\frac{4}{\pi}\right| = \frac{5}{12}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left|S_n + \frac{5(-1)^{n-1}}{12n^3} - \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2} - \log\frac{4}{\pi}\right| = \frac{3}{8}.$$

También resuelto por A. Álamo, P. Perfetti y los proponentes. Se ha recibido una solución incompleta.

PROBLEMA 267. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Sea ABC un triángulo acutángulo con inradio r, circunradio R y exinradios r_a, r_b y r_c. Sean h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas AD, BE y CF sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, y t_a, t_b y t_c las longitudes de las tangentes desde A, B y C, respectivamente, a la circunferencia circunscrita al triángulo órtico DEF. Probar que

$$\frac{t_a^2 r r_a}{h_a^2(r_a - r)} + \frac{t_b^2 r r_b}{h_b^2(r_b - r)} + \frac{t_c^2 r r_c}{h_c^2(r_c - r)} = \frac{r+R}{2}.$$

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Nótese en primer lugar que t_a^2 es la potencia de A respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo órtico; es decir, respecto de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC, que pasa también por los puntos medios de los lados. Luego

$$t_a^2 = \frac{AB \cdot AF}{2} = \frac{AC \cdot AE}{2} = \frac{bc \cos A}{2}.$$

Al mismo tiempo, la circunferencia A-exinscrita, tangente a la vez al segmento BC y a las prolongaciones de los segmentos AC y AB, es el resultado de aplicar una homotecia con centro A y razón $\frac{b+c+a}{b+c-a}$ a la circunferencia inscrita; tenemos que $\frac{r_a}{r} = \frac{b+c+a}{b+c-a}$, luego

$$\frac{r_a}{r_a - r} = \frac{a+b+c}{2a} = \frac{2S}{2ar} = \frac{h_a}{2r},$$

donde además hemos usado conocidas expresiones del área S del triángulo ABC. Se sigue entonces, por sustitución de las expresiones anteriores, que

$$\frac{t_a^2 r r_a}{h_a^2(r_a - r)} = \frac{bc \cos A}{4h_a} = \frac{abc \cos A}{8S} = \frac{R \cos A}{2},$$

y las fórmulas análogas cíclicamente. De este modo,

$$\frac{t_a^2 r r_a}{h_a^2(r_a - r)} + \frac{t_b^2 r r_b}{h_b^2(r_b - r)} + \frac{t_c^2 r r_c}{h_c^2(r_c - r)} = \frac{R}{2} \left(\cos A + \cos B + \cos C\right),$$

y concluimos la demostración con la conocida identidad

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R + r}{R}.$$

Nota. Este último resultado puede obtenerse utilizando el teorema del coseno y la fórmula de Herón para el área de un triángulo. En efecto,

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B + \cos C &= \frac{a\left(b^2 + c^2 - a^2\right) + b\left(c^2 + a^2 - b^2\right) + c\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2abc} \\
&= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 + 2abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c)} \\
&= 1 + \frac{8S^2}{abc(a+b+c)} = 1 + \frac{r}{R},
\end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente la relación $S = \frac{abc}{4R} = \frac{(a+b+c)r}{2}$.

También resuelto por A. Fanchini, J. Nadal y B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

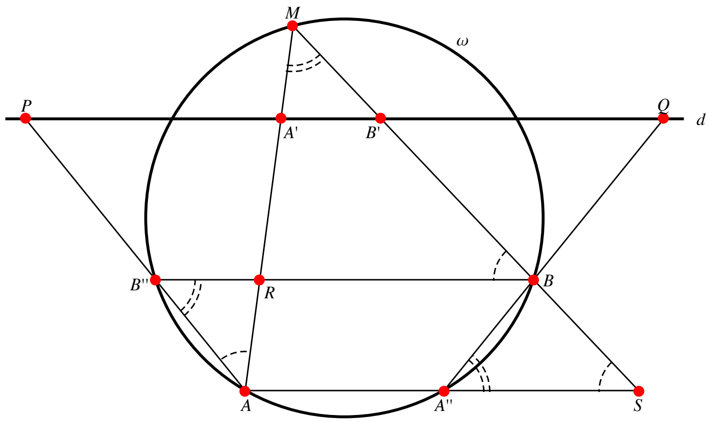

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 268.

PROBLEMA 268. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sea una recta d, una circunferencia ω y sobre esta dos puntos fijos A y B y uno variable M. Demostrar que existen dos puntos P y Q en d tales que si las rectas MA y MB cortan a d en A' y B', respectivamente, el producto $PA' \cdot QB'$ es constante al variar M.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sean A'' y B'' los respectivos puntos de corte con ω de las rectas paralelas a d por A y B, con $A'' \neq A$ y $B'' \neq B$, y demostremos a continuación que basta con tomar como P y Q los puntos de corte con d de las rectas AB'' y $A''B$, respectivamente, véase la figura 1. Si R y S denotan los respectivos puntos de corte de las rectas MA con BB'' y de MB con AA'', los triángulos $SA''B$ y SMA son semejantes (tienen común el ángulo en S y los lados que parten de S respectivamente proporcionales, por ser $SA'' \cdot SA' = SB \cdot SM$, dado que ambos son iguales a la potencia de S con respecto a ω), y como SMA es semejante a BMR (lados paralelos dos a dos) y BMR a $AB''R$ (el ángulo en R es común y los ángulos en M y B'' son iguales por ser inscritos en ω que abarcan el mismo arco), deducimos que $SA''B$ y $AB''R$ son semejantes, teniendo por tanto sus lados respectivamente proporcionales, luego $B''R \cdot A''S = B''A \cdot A''B$, resultando así, al ser $B''A = A''B$, que $B''R \cdot A''S = B''A^2$.

Como APA' es semejante a $AB''R$ y BQB' lo es a $BA''S$ (lados paralelos dos a dos en ambos casos),

$$PA' = \frac{PA \cdot B''R}{B''A} \qquad \text{y} \qquad QB' = \frac{QB \cdot A''S}{A''B}$$

respectivamente, con lo cual

$$PA' \cdot QB' = \frac{PA \cdot QB \cdot B''R \cdot A''S}{B''A^2} = PA \cdot QB,$$

cantidad independiente de la posición de M.

También resuelto por D. Lasaosa, J. Nadal y el proponente.

Problema 269. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo ABC a partir de las longitudes de sus lados, a, b y c, y del semiperímetro s mediante

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

a) Determinar fórmulas para el cálculo del área de un triángulo análogas a la de Herón en función de las longitudes de las medianas y en función de las longitudes de las alturas.

b) ⋆ ¿Es posible determinar una fórmula similar en función de las longitudes de las bisectrices?

Solución enviada por Zayda Ferrer Rico y Juan Carlos López, Universidad de Pamplona, Colombia (modificada por los editores).

a) En primer lugar, es elemental comprobar que, dados u, v y w, se tiene la identidad

$$s(s-u)(s-v)(s-w) = \frac{1}{16}((u^2+v^2+w^2)^2 - 2(u^4+v^4+w^4)), \qquad (1)$$

con $s = (u+v+w)/2$. En particular, si u, v y w son las longitudes de los lados de un triángulo, por la fórmula de Herón, (1) da el cuadrado del área de dicho triángulo.

Fórmula de tipo Herón para el área de un triángulo en función de las longitudes de las medianas. Si m_a, m_b y m_c representan las longitudes de las medianas del triágulo ABC correspondientes a los vértices A,B y C, respectivamente, sabemos que

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2, \quad 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Estas tres igualdades dan lugar a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

y

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{16}{9}(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4).$$

Usando las dos relaciones anteriores y (1), llegamos a

$$\begin{aligned}(\text{Área}(ABC))^2 &= \frac{1}{16}\left((a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)\right)\\ &= \frac{1}{9}\left((m_a^2+m_b^2+m_c^2)^2 - 2(m_a^4+m_b^4+m_c^4)\right)\\ &= \frac{16}{9}p(p-m_a)(p-m_b)(p-m_c),\end{aligned}$$

donde $p = (m_a+m_b+m_c)/2$.

Fórmula de tipo Herón para el área de un triángulo en función de las longitudes de las alturas. Si h_a, h_b y h_c son las longitudes de las alturas trazadas desde los vértices A, B y C sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente, entonces

$$a = \frac{2\,\text{Área}(ABC)}{h_a}, \quad b = \frac{2\,\text{Área}(ABC)}{h_b}, \quad c = \frac{2\,\text{Área}(ABC)}{h_c}.$$

Con estas expresiones para las longitudes de los lados, y usando de nuevo (1), tenemos

$$(\text{Área}(ABC))^2 = (\text{Área}(ABC))^4\left(\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{h_a^4}+\frac{1}{h_b^4}+\frac{1}{h_c^4}\right)\right)$$

que, con la notación $H_a = 1/h_a$, $H_b = 1/h_b$ y $H_c = 1/h_c$, implica

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\text{Área}(ABC))^2} &= \left((H_a^2+H_b^2+H_c^2)^2 - 2(H_a^4+H_b^4+H_c^4)\right)\\ &= 16q(q-H_a)(q-H_b)(q-H_c),\end{aligned}$$

donde $q = (H_a+H_b+H_c)/2$.

También resuelto por C. Beade, J. Mir y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta. No se han recibido soluciones al apartadob).

PROBLEMA 270. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaiyán.*

Sea Γ una circunferencia y A un punto exterior a ella. Trazamos un recta por A que corta a Γ en dos puntos B y C. Sean D y E los puntos de corte con Γ del diámetro perpendicular a BC. Si F es el punto de corte de las rectas DB y AE, probar que $|AC|\cos(\angle DFE) \leq |AB|$.

Solución enviada por el proponente, modificada por los editores.

Vamos a suponer que $|BA| < |CA|$ y que $|AD| \leq |AE|$, como ocurre en la figura 2. Una argumentación análoga funciona también para cualquiera de los otros casos.

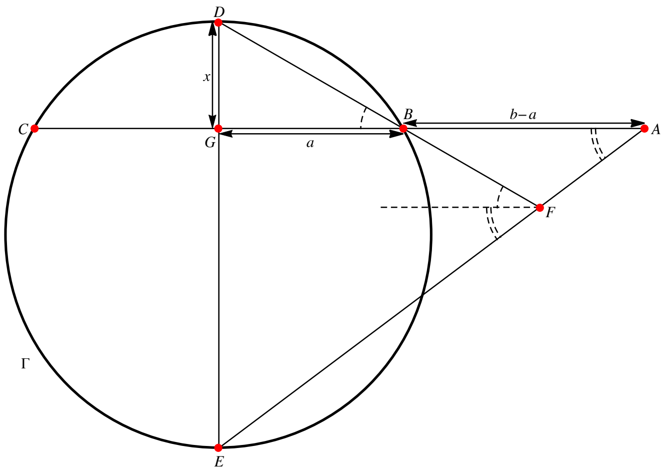

Figura 2: Esquema para la solución del Problema 270.

Denotemos por G el punto de intersección del segmento BC con el diámetro DE y tomamos $x = |DG|$, $a = |BG| = |GC|$ y $b = |AG|$. Como $|BG| \cdot |GC| = |DG| \cdot |GE|$, resulta $|GE| = \frac{a^2}{x}$. Puesto que F es exterior a la circunferencia Γ, se tiene que $\angle DFE < \pi/2$ y, como $\angle DFE = \angle DBG + \angle GAE$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\angle DFE) &= \frac{\operatorname{tg}(\angle DBG) + \operatorname{tg}(\angle GAE)}{1 - \operatorname{tg}(\angle DBG)\operatorname{tg}(\angle GAE)} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{a^2}{bx}}{1 - \frac{a}{b}} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{b}{b-a} = \frac{2\sqrt{ab}}{b-a}, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de dos números positivos. Entonces,

$$\frac{1}{\cos^2(\angle DFE)} \geq 1 + \frac{4ab}{(b-a)^2} = \frac{(b+a)^2}{(b-a)^2}$$

y, finalmente,

$$0 \leq \cos(\angle DFE) \leq \frac{b-a}{b+a} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Se puede comprobar que la igualdad ocurre cuando $\angle DBG = \angle GAE$, en cuyo caso el triángulo DEF es isósceles.

También resuelto por F. D. Aranda, J. Nadal y B. Salgueiro.

Nota. En el caso $|BA| < |CA|$ y $|AD| > |AE|$, la desigualdad propuesta es siempre estricta (como anota B. Salgueiro en su solución) porque ahora $\operatorname{tg}(\angle DBG) = \frac{x}{b}$ y

$\operatorname{tg}(\angle GAE) = \frac{a}{x}$, y la igualdad $\frac{x}{b} = \frac{a}{x}$, que es equivalente a $x^2 = ab$, ocurre si solo si el triángulo ECA es rectángulo en E, lo que es imposible ya que el ángulo $\angle CEB$ está contenido en el $\angle CEA$.

PROBLEMA 271. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ y $n \geq 2$ un número entero. Calcular el producto de matrices $B(2)B(3)\cdots B(n)$.

Solución enviada por Ryan Acosta Babb (estudiante), I. E. S. Miguel de Cervantes, Granada.

Tomando las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix},$$

se tiene que $B(x) = PD(x)P^{-1}$ y, por tanto,

$$B(2)B(3)\cdots B(n) = PD(2)D(3)\cdots D(n)P^{-1}.$$

Ahora observamos que

$$D(2)D(3)\cdots D(n) = \begin{pmatrix} (n-1)! & 0 \\ 0 & \frac{(n+1)!}{2} \end{pmatrix}.$$

De este modo, de las dos relaciones anteriores se deduce que

$$\begin{aligned} B(2)B(3)\cdots B(n) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (n-1)! & 0 \\ 0 & \frac{(n+1)!}{2} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{(n+1)!}{2} + (n-1)! & \dfrac{(n+1)!}{2} - (n-1)! \\ \dfrac{(n+1)!}{2} - (n-1)! & \dfrac{(n+1)!}{2} + (n-1)! \end{pmatrix} \\ &= \frac{(n-1)!}{4}\begin{pmatrix} n^2+n+2 & n^2+n-2 \\ n^2+n-2 & n^2+n+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Siendo

$$a_n = \frac{(n-1)!}{4}(n^2+n+2) \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{(n-1)!}{4}(n^2+n-2)$$

se tiene que $a_1 = 2$, $b_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n(n+1) + b_n$ y $b_{n+1} = a_n + b_n(n+1)$. Entonces puede probarse por inducción que

$$B(2)B(3)\cdots B(n) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

y

$$B(2)B(3)\cdots B(n)B(n+1) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

También resuelto por A. Álamo, J. L. Arregui, A. Bárcena, C. Beade, A. Castaño, R. de la Cruz, Z. Ferrer y J. C. López (conjuntamente), G. C. Greubel, J. M. Gutiérrez, S. Jiménez, D. Lasaosa, F. J. Martínez, A. Messegué, J. Mir, J. Nadal, A. M. Oller, M. Omarjee, B. Salgueiro, C. Sánchez, A. Stadler, D. Văcaru y el proponente.

Nota. Bruno Salgueiro y Albert Stadler señalan que el problema anterior apareció como Problema 5530 en la revista *School Science and Mathematics* en diciembre de 2014. Rogamos a los proponentes que eviten enviar un mismo problema a distintas publicaciones al mismo tiempo.

Problema 272. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

Sean f y g dos funciones reales definidas en $[0,1]$ tales que g es integrable en $[0,1]$, con $\int_0^1 g(t)\,dt = a$, f es continua en $[0,1]$ y $\int_0^x f(t)\,dt \geq g(x)$ para $x \in [0,1]$. Probar que

$$\int_0^1 (f(t))^2\,dt \geq \frac{6a-1}{3}.$$

Solución enviada por Jon Asier Bárcena Petisco (estudiante), Universidad del País Vasco, Leioa, Vizcaya.

La continuidad de f nos garantiza la existencia de la integral propuesta. Además, usando integración por partes obtenemos

$$\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt = \int_0^1 \int_0^t f(x)\,dx\,dt \geq \int_0^1 g(t)\,dt = a.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(t))^2\,dt - 2a + \frac{1}{3} &\geq \int_0^1 (f(t))^2\,dt + \frac{1}{3} - 2\int_0^1 f(t)(1-t)\,dt \\ &= \int_0^1 (f(t))^2\,dt - 2\int_0^1 f(t)(1-t)\,dt + \int_0^1 (1-t)^2\,dt \\ &= \int_0^1 (f(t)-(1-t))^2\,dt \geq 0. \end{aligned}$$

Notar que la igualdad se alcanza si y sólo si $f(t) = 1 - t$ y $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx = t - t^2/2$. En el resto de los casos, la desigualdad planteada es estricta.

Solución enviada por Arnau Messegué Buisan (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

Aplicando integración por partes y la desigualdad de Cauchy obtenemos

$$\begin{aligned}|a| &= \left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| \leq \left|\int_0^1 \int_0^x f(t)\,dt\,dx\right| \\ &\leq \left|\int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 xf(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 (1-x)|f(x)|\,dx \\ &\leq \left(\int_0^1 (1-x)^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 (f(x))^2\,dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int_0^1 (f(x))^2\,dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^1 (f(x))^2\,dx \geq 3a^2,$$

lo que concluye el resultado puesto que $3a^2 = 2a - 1/3 + (\sqrt{3}a - 1/\sqrt{3})^2 \geq 2a - 1/3$.

También resuelto por A. Álamo, J. L. Arregui, R. de la Cruz, Kee-Wai Lau, B. Salgueiro, J. Vinuesa y el proponente.