Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2016.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 275 (Corrección). *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sea $\{a_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión monótona de números reales positivos tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Supongamos además, que para $n \geq 0$ y $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$, se verifica

$$a_k - a_{k+1} \geq 2^{-n} a_{2^{n+1}}.$$

Probar que, si α es un número irracional cuadrático, entonces la sucesión

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)}$$

es acotada.

Problema 281. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Sea $A \leq \pi/2$ el mayor ángulo de un triángulo ABC. Si a, b, c son las longitudes de los lados y r, R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita respectivamente, probar que

$$2(R + r) \leq b + c \leq a + 2\sqrt{3}r.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

PROBLEMA 282. *Propuesto por Cristóbal Sánchez-Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Desde un punto P exterior a una circunferencia dada de radio R trazamos las tangentes PT y PT'. Sean $TT' = 2c$, r el inradio del triángulo PTT' y r_a el radio de la circunferencia exinscrita tangente al lado TT'. Probar que la cantidad

$$\sqrt{r^2 + r_a^2 + 2c^2}$$

es independiente de la posición del punto P.

PROBLEMA 283. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Probar la identidad

$$\sec^2 \frac{\pi}{18} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{9} = 12.$$

PROBLEMA 284. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Los números de Stirling de primera especie, denotados $s(n,k)$ con $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$, están definidos por la identidad

$$z(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) z^k.$$

Para un entero $n \geq 2$, probar que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{x-y}{e^x - e^y}\right)^n dx\, dy = 2\sum_{i=1}^{n} s(n,i)\zeta(n+2-i),$$

donde ζ denota la función zeta de Riemann.

PROBLEMA 285. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

Sean a, b, c números reales positivos tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Probar que

$$54abc \leq (a+b+c)^2(a+b+c+9).$$

Problema 286. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

Sean D y E, respectivamente, puntos en los lados BC y AC de un triángulo ABC. Sean O el punto de intersección de las rectas AD y BE y F el punto de intersección de CO y AB. Si

$$\frac{DO}{OA} = p, \qquad \frac{EO}{OB} = q \qquad \text{y} \qquad \frac{FO}{OC} = r,$$

¿qué relación existe entre p, q y r?

Problema 287. *Propuesto por José Luis Arregui, Universidad de La Rioja, Logroño, La Rioja.*

Sea f una función real definida y continua en $[0,1]$ y tal que $f(0) = f(1)$. Digamos que un número real positivo t es un *paso* para f si hay dos puntos en su dominio separados una distancia t en los que la función toma el mismo valor. Para este tipo de funciones, en el Problema 19 del Capítulo 7 del clásico *Calculus* de M. Spivak (Ed. Reverté, 2.ª ed.), se prueba que $t = 1/n$ es siempre un *paso*.

a) Demostrar que el conjunto de pasos de f es un cerrado cuya medida de Lebesgue es mayor o igual que $1/2$.

b) Encontrar una sucesión de funciones f_n de modo que, para cualquier n, el conjunto de pasos de f_n mide exactamente $1/2$ y tiene intersección vacía con el intervalo $\big(1/(n+1), 1/n\big)$.

Problema 288. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} \right)^2.$$

Soluciones

Nota. Por un descuido involuntario, en la solución al Problema 249 olvidamos citar la solución correcta enviada por Roberto de la Cruz. Pedimos disculpas por ello.

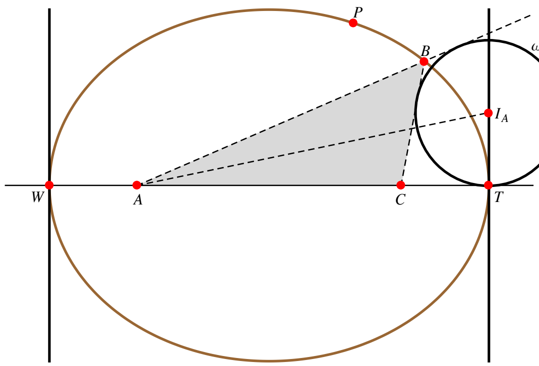

Figura 1: Esquema para la solución del apartado a) del Problema 257.

PROBLEMA 257. *Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña.*

Sean α y β, respectivamente, la elipse y la hipérbola de focos A y C que pasan por un punto P. Sea B un punto variable de estas cónicas. Si I denota el incentro del triángulo ABC e I_A, I_B e I_C denotan, respectivamente, los exincentros opuestos a los vértices A, B y C, se pide:

a) Demostrar que si B recorre α, tanto los exincentros I_A como los I_C están alineados.

b) Demostrar que si B recorre β, tanto los incentros I como los exincentros I_B están alineados.

c) Obtener los lugares geométricos descritos por los puntos anteriores.

Solución enviada por Ricardo Barros Campos, Sevilla, modificada por los editores.

a) Si α es la elipse de focos A y C que pasa por el punto P, existe una constante $m > 0$ tal que $PA + PC = 2m$. Entonces, si B es un punto genérico de la elipse α se tiene

$$BA + BC = 2m.$$

Supongamos que la circunferencia ω_A de centro I_A exinscrita al triángulo ABC toca a la prolongación del lado AC en el punto T, véase la figura 1. Es bien conocido que

$$AT = \frac{1}{2}(AC + BA + BC) = \frac{1}{2}AC + m,$$

constante. Luego, cuando el punto B recorre α, el lugar geométrico del exincentro I_A es la recta perpendicular a AC que pasa por el punto T. Como es inmediato comprobar, este punto T es uno de los vértices del eje mayor (el más próximo al foco C) de la elipse α.

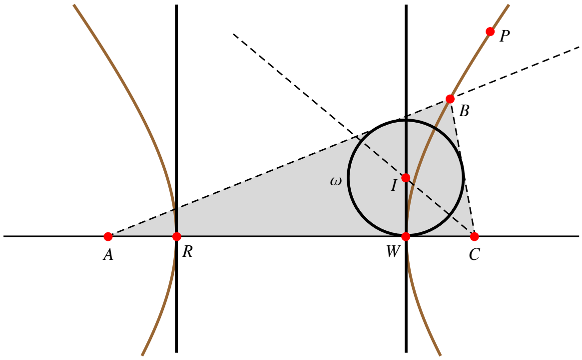

Figura 2: Esquema para la solución del apartado b) del Problema 257.

Análogamente, el lugar geométrico del exincentro I_C es la recta perpendicular a AC que pasa por el vértice W del eje mayor de α más cercano al foco A.

b) Suponiendo ahora $|PA - PC| = 2m > 0$, sea B un punto genérico de la hipérbola β de focos A y C que pasa por el punto fijo P. Podemos considerar, sin perder generalidad, que se cumple

$$BA - BC = 2m.$$

Si la circunferencia ω inscrita en el triángulo ABC toca al lado AC en el punto W, véase la figura 2, es bien conocido que

$$AW = \frac{1}{2}(BA + AC - BC) = \frac{1}{2}AC + m,$$

constante. Por tanto, el lugar geométrico del incentro I es la recta perpendicular a AC que pasa por este punto fijo W que, como es inmediato comprobar, es uno de los vértices de la hipérbola β.

Análogamente, la circunferencia exinscrita ω_B de centro I_B toca al lado AC en un punto R que verifica

$$AR = \frac{1}{2}(AC + BC - BA) = \frac{1}{2}AC - m.$$

Por consiguiente, R es un punto fijo del segmento AC (el otro vértice de β) e I_B se encuentra sobre la recta perpendicular a AC que pasa por R.

Los lugares geométricos solicitados en el apartado c) han quedado descritos en las soluciones a estos apartados anteriores.

También resuelto por S. Campo, J. Nadal y el proponente.

PROBLEMA 258. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

En un triángulo ABC, sean m_a, m_b y m_c las longitudes de las medianas, h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas, y r_a, r_b y r_c sus exinradios. Probar que

$$a^2\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{r_br_c}\right)+b^2\left(\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{h_ch_a}+\frac{1}{r_cr_a}\right)+c^2\left(\frac{1}{m_c^2}+\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{r_ar_b}\right)\geq 12.$$

Solución enviada por Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramures, Rumanía.

En el triángulo dado, si p denota el semiperímetro, r el radio de la circunferencia inscrita, y R el de la circunscrita, es conocido que

$$\sum_{\text{cíclica}} m_a^2=\frac{3}{2}(p^2-r^2-4Rr) \qquad \text{y} \qquad \frac{R}{2r}\sum_{\text{cíclica}} h_ah_b=\sum_{\text{cíclica}} r_ar_b=p^2.$$

Entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad entre las medias armónica y geométrica implican

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cíclica}} a^2\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{r_br_c}\right) &\geq \frac{(3\sum_{\text{cíclica}} a)^2}{\sum_{\text{cíclica}} m_a^2+\sum_{\text{cíclica}} h_bh_c+\sum_{\text{cíclica}} r_br_c}\\ &=\frac{36p^2}{\frac{3}{2}(p^2-r^2-4Rr)+\frac{2p^2r}{R}+p^2}\\ &=\frac{36p^2}{\left(\frac{5}{2}+\frac{2r}{R}\right)p^2-\frac{3}{2}(4Rr+r^2)}.\end{aligned}$$

Por tanto, para concluir el resultado basta probar

$$\frac{36p^2}{\left(\frac{5}{2}+\frac{2r}{R}\right)p^2-\frac{3}{2}(4Rr+r^2)}\geq 12,$$

que es equivalente a

$$p^2R+3Rr^2+12R^2r\geq 4p^2r. \tag{1}$$

La desigualdad de Gerretsen (véase O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, 1969, págs. 50–51) establece que

$$16Rr-5r^2\leq p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2.$$

Entonces se satisfacen las estimaciones

$$p^2R+3Rr^2+12R^2r\geq(16Rr-5r^2)R+3Rr^2+12R^2r=28R^2r-2Rr^2$$

y

$$4p^2r\leq 16R^2r+16Rr^2+12r^3.$$

De este modo, (1) se cumplirá si

$$0\leq 2R^2-3Rr-2r^2=(R-2r)(2R+r),$$

que resulta ser cierta por la desigualdad de Euler $R\geq 2r$.

También resuelto por J. Nadal, P. Perfetti, B. Salgueiro y los proponentes.

Problema 259. *Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.*

Sean $0 < a_i < b_i$, con $i = 1, \dots, n$, números reales y

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i/b_i \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq x_i/a_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Calcular

$$\iint \cdots \int_A \frac{dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n}{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Solución enviada por Jorge Mozo Fernández, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Hagamos el cambio de variable

$$x_i = \frac{y_i}{y_1^2 + \cdots + y_n^2}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Así, $y_i = \dfrac{x_i}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ y la imagen del dominio de integración A por este cambio es

$$\tilde{A} = \{(y_1, \dots, y_n) : a_i \leq y_i \leq b_i\}.$$

Denotamos $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ y $\|\mathbf{y}\|^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2$. De este modo, las entradas de la matriz jacobiana $\mathcal{J} = (j_{i,k})_{i,k=1,\dots,n}$ son

$$j_{i,k} = \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \begin{cases} \dfrac{-2y_i y_k}{\|\mathbf{y}\|^4}, & \text{si } i \neq k, \\[2ex] \dfrac{\|\mathbf{y}\|^2 - 2y_i^2}{\|\mathbf{y}\|^4}, & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Por lo anterior, tras sencillas manipulaciones algebraicas, para la matriz $\mathcal{J}^2 =: H = (h_{i,k})_{i,k=,1,\dots,n}$ se tiene

$$h_{i,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k, \\ \dfrac{1}{\|\mathbf{y}\|^4}, & \text{si } i = k. \end{cases}$$

De este modo, $\det(H) = \dfrac{1}{\|\mathbf{y}\|^{4n}}$ y $|\det(\mathcal{J})| = \dfrac{1}{\|\mathbf{y}\|^{2n}}$.

La integral pedida es, por tanto,

$$\iint \cdots \int_{\tilde{A}} \frac{\|\mathbf{y}\|^{2n}}{y_1 y_2 \cdots y_n} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^{2n}}\, dy_1\, dy_2\, \cdots\, dy_n = \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{y_i}\, dy_i = \prod_{i=1}^n \log\left(\frac{b_i}{a_i}\right).$$

También resuelto por J. A. Bárcena, J. Mir y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

Problema 260. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

Sean A', B' y C', respectivamente, puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo acutángulo ABC, tales que $\angle BA'C' = \angle CA'B'$, $\angle CB'A' = \angle AB'C'$ y $\angle AC'B' = \angle BC'A'$. Encontrar la razón S'/S entre las áreas de los triángulos $A'B'C'$ y ABC. Probar que $S'/S \leq 1/4$. ¿Cuál es el triángulo $A'B'C'$?

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Denotemos $\alpha = \angle BA'C' = \angle CA'B'$, y de forma similar definamos β y γ. Considerando sucesivamente los triángulos $AB'C'$, $A'BC'$ y $A'B'C$, y que $A+\beta+\gamma = \alpha+B+\gamma = \alpha+\beta+C = \pi$, se obtiene $\alpha = A$, $\beta = B$ y $\gamma = C$. Los puntos A', B' y C' son únicos, ya que cualesquiera otros tres puntos A'', B'' y C'' que cumplan las condiciones del enunciado, son tales que $B''C''$ es paralela a $B'C'$. Pero, en esas condiciones, si B'' está en el interior del segmento AB', entonces C'' está en el interior del segmento AC', y las rectas que forman los mismos ángulos con AC, AB que $B''C''$ y que pasan por B'' y C'' respectivamente, se cortan en el interior de ABC y a la vez pasan ambas por A'', absurdo, mientras que si B'' está en el interior del segmento $B'C$, entonces C'' está en el interior del segmento $C'B$, y esta vez las rectas que pasan por A'' se cortarían en el exterior de ABC, nuevamente absurdo. Claramente, si $B'' = B'$, al tener que ser $B''C''$ y $B''A''$ paralelas respectivamente a $B'C'$ y $B'A'$, serían $A'' = A'$, $B'' = B'$ y $C'' = C'$.

Ahora bien, es conocido (o fácilmente demostrable, considerando las tres circunferencias que tienen por diámetros los tres lados de ABC) que los pies de las alturas del triángulo ABC cumplen el enunciado, luego $A'B'C'$ es el triángulo órtico (cuyos vértices son los pies de las alturas de ABC) y no puede ser otro. Es también conocido (o demostrable considerando las circunferencias anteriores y trigonometría básica) que entonces los triángulos $AB'C'$, $A'BC'$ y $A'B'C$ son semejantes al ABC, con razones de semejanza respectivas $\cos A$, $\cos B$ y $\cos C$. Además, la circunferencia circunscrita al triángulo $A'B'C'$ es el círculo de los nueve puntos de ABC, con lo que su diámetro es igual al circunradio R de ABC. Se tiene entonces que

$$S' = \frac{a\cos A \cdot b\cos B \cdot c\cos C}{4\frac{R}{2}} = 2S\cos A\cos B\cos C,$$

y queda solo demostrar la desigualdad $8\cos A\cos B\cos C \leq 1$, que es bien conocida y se puede probar fácilmente como sigue:

$$\begin{aligned} 8\cos A\cos B\cos C &= 4\cos C(\cos(A-B)+\cos(A+B)) \\ &= 4\cos C\cos(A-B) - 4\cos^2 C \\ &\leq 4\cos C - 4\cos^2 C = 1-(1-2\cos C)^2 \leq 1, \end{aligned}$$

con igualdad en la primera desigualdad si y solo si $A = B$ por ser A, B, C agudos, y en la segunda si y solo si $\cos C = \frac{1}{2}$. Queda entonces demostrado que $S'/S \leq 1/4$, con igualdad si y solo si ABC es equilátero.

Solución enviada por N. Stanciu, Buzău, y T. Zvonaru, Comăneşti, Rumanía.

Usaremos la notación $\alpha = \angle BA'C' = \angle CA'B'$, $\beta = \angle CB'A' = \angle AB'C'$ y $\gamma = \angle AC'B' = \angle BC'A'$. Por el teorema del seno,

$$\frac{A'B}{C'B} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad \frac{B'C}{A'C} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \text{y} \qquad \frac{C'A}{B'A} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Por tanto,

$$\frac{A'B}{A'C}\frac{B'C}{B'A}\frac{C'A}{C'B} = 1$$

y, por el teorema de Ceva, las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes. Tomando

$$x = \frac{A'B}{A'C}, \qquad y = \frac{B'C}{B'A} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{C'A}{C'B},$$

se verifica que $xyz = 1$ y

$$A'B = \frac{ax}{x+1}, \qquad A'C = \frac{a}{x+1}, \qquad B'C = \frac{by}{y+1}, \qquad B'A = \frac{b}{y+1},$$
$$C'A = \frac{cz}{z+1} \qquad \text{y} \qquad C'B = \frac{c}{z+1}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} S' &= S - \frac{axc\operatorname{sen}B}{2(x+1)(z+1)} - \frac{bya\operatorname{sen}C}{2(y+1)(x+1)} - \frac{czb\operatorname{sen}A}{2(z+1)(y+1)} \\ &= S - S\left(\frac{x}{(x+1)(z+1)} + \frac{y}{(y+1)(z+1)} + \frac{z}{(z+1)(y+1)}\right) \\ &= \frac{2S}{(x+1)(y+1)(z+1)} \end{aligned}$$

y

$$\frac{S'}{S} = \frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)},$$

que, por la desigualdad entre las medias arimética y geométrica, implica

$$\frac{S'}{S} \leq \frac{2}{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}\cdot 2\sqrt{z}} = \frac{1}{4}.$$

Resulta obvio que $A'B'C'$ es el triángulo órtico del triángulo ABC.

También resuelto por M. Amengual, F. D. Aranda, C. Beade, R. S. Elexpuru, J. Mir, R. Peiró B. Salgueiro, C. Sánchez y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

PROBLEMA 262. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Rumanía.*

Sea $n \geq 1$ un número entero. Probar que

$$\int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^n}\,dx = \frac{\pi}{2(n+1)}\cot\left(\frac{\pi}{n+1}\right)+\frac{\log(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)\log\left(2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Solución enviada por Anastasios Kotronis, Atenas, Grecia.

Es claro que

$$I := \int_0^1 \frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}\,dx.$$

Para cada ε tal que $0<\varepsilon<1$, consideramos las integrales

$$I(\varepsilon) := \int_0^1 \frac{1-x^n}{(1-x^{n+1})^{1-\varepsilon}}\,dx.$$

Puede comprobarse de manera elemental que

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_0^1 (1-x^{n+1})^{\varepsilon-1}\,dx - \int_0^1 x^n(1-x^{n+1})^{\varepsilon-1}\,dx \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\int_0^1 y^{1-1/(n+1)}(1-y)^{\varepsilon-1}\,dy - \int_0^1 (1-y)^{\varepsilon-1}\,dy\right) \\ &= \frac{\Gamma(\varepsilon)}{n+1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\Gamma\left(\varepsilon+\frac{1}{n+1}\right)} - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon+1)}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Del desarrollo limitado

$$\Gamma(x+a) = \Gamma(a) + x\Gamma'(a) + O(x^2), \quad x \to 0,$$

se deduce que

$$\frac{1}{\Gamma(x+a)} = \frac{1}{\Gamma(a)}\cdot\frac{1}{1+\Psi(a)x+O(x^2)} = \frac{1}{\Gamma(a)} - \frac{\Psi(a)}{\Gamma(a)}x + O(x^2), \quad x \to 0, \tag{2}$$

donde Ψ es la función digamma. Así, usando (2) con $a=1$ y $a=\frac{1}{n+1}$ en (1), la identidad $\Psi(1)=\gamma$ (la constante de Euler-Mascheroni), y puesto que $\Gamma(x)=\frac{1}{x}+O(1)$ cuando $x\to 0$, se tiene

$$I(\varepsilon) = -\frac{1}{n+1}\left(\Psi\left(\frac{1}{n+1}\right)+\gamma\right) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0^+,$$

y, por el teorema de la convergencia dominada,

$$I = -\frac{1}{n+1}\left(\Psi\left(\frac{1}{n+1}\right) + \gamma\right).$$

Ahora la identidad (ver, por ejemplo, la pág. 12 de *Introduction to the Gamma function*, de P. Sebah X. Gourdon, disponible online en `http://www.csie.ntu.edu.tw/~b89089/link/gammaFunction.pdf`)

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi p}{q}\right) - \log(2q) + \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2\pi kp}{q}\right)\log\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{q}\right),$$

válida para $0 < p < q$ y $p, q \in \mathbb{N}$, con $p = 1$ y $q = n+1$ implica la identidad propuesta teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right) = -1.$$

También resuelto por A. Álamo, L. Glasser, D. Lasaosa, J. Mozo, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

Problema 263. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean a y b números reales positivos y $n \geq 3$ un número entero. Si $a_1, \ldots, a_n$ son números reales mayores que uno y tales que $p_n^a > \max_{1\leq k\leq n} a_k^b$, siendo $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, probar que

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{p_n^a/a_k^b} a_k \geq \frac{n}{an-b}.$$

Solución enviada por Roberto Castaño, Technische Universität Chemnitz, Chemnitz, Alemania.

El enunciado del problema también es válido si $n = 1$ o $n = 2$, alcanzándose la igualdad en el primer caso de manera trivial.

Por simplicidad, denotaremos $\alpha_k = \log a_k$, para $k = 1, \ldots, n$, que por hipótesis son todos positivos, y $\sigma = \log p_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. En ese caso, la condición del enunciado se puede escribir como

$$a\sigma/b > \max_{1\leq k\leq n} \alpha_k$$

y lo que se pretende probar es, tras un cambio de base en los logaritmos, que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{a\sigma - b\alpha_k} \geq \frac{1}{an-b}. \tag{1}$$

Consideremos la función $\varphi(x) = x/(a\sigma - bx)$. Es claro que

$$\varphi''(x) = \frac{2ab\sigma}{(a\sigma - bx)^3} > 0, \qquad x < a\sigma/b,$$

y, por tanto, φ es una función convexa. Entonces podemos aplicar la desigualdad de Jensen a φ en los puntos α_k (notar que $\alpha_k < a\sigma/b$ para $k = 1, \dots, n$), con pesos todos iguales a $1/n$, para concluir la desigualdad (1). En efecto,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{a\sigma - b\alpha_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(\alpha_k) \geq \varphi\left(\frac{\sigma}{n}\right) = \frac{1}{an - b}.$$

También resuelto por D. Armesto, D. Lasaosa, J. Mir, J. Mozo, J. Nadal, P. Perfetti, B. Salgueiro, D. Văcaru y los proponentes.

PROBLEMA 264. *Propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumanía.*

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden tres sobre los reales.

a) Si $\det A = \det B = 3$ y $\det(A + B) = -1$, probar que $\det(3A + 2B) \cdot \det(2A + 3B) \leq 0$.

b) Si $AB = BA$, $\det B = 0$, $\det(A + B) = 3$ y $\det(A - B) = \det(A^2 + B^2) = 1$, calcular $\det(A^3 + B^3)$ y $\det(A^4 + B^4)$.

Solución enviada por Roberto de la Cruz Moreno, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona.

a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Como A y B son de orden 3, se tiene

$$\det(xA + yB) = x^3 \det A + x^2 y\lambda_1 + xy^2\lambda_2 + y^3 \det B, \tag{1}$$

donde λ_1 y λ_2 son números reales que dependen de A y B. Para $x = y = 1$, imponiendo las condiciones del enunciado a la ecuación (1) se obtiene $\lambda_1 + \lambda_2 = -7$, de donde deducimos directamente el resultado pedido, puesto que

$$\det(3A + 2B) = 27 \det A + 18\lambda_1 + 12\lambda_2 + 8 \det B = 21 + 6\lambda_1$$

y

$$\det(2A + 3B) = 4 \det A + 12\lambda_1 + 18\lambda_2 + 27 \det B = -(21 + 6\lambda_1).$$

b) Como A y B conmutan, podemos establecer las igualdades

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \tag{2}$$

y

$$A^4 + B^4 = (A^2 + \sqrt{2}AB + B^2)(A^2 - \sqrt{2}AB + B^2). \tag{3}$$

Por otra parte, para $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos, usando las condiciones de este apartado,

$$\begin{aligned}\det(x(A^2+B^2)+yAB) &= x^3\det(A^2+B^2)+x^2y\mu_1+xy^2\mu_2+y^3\det(AB)\\ &= x^3+x^2y\mu_1+xy^2\mu_2.\end{aligned}$$

Tomando ahora las parejas $(x, y) = (1, 2)$ y $(x, y) = (1, -2)$ llegamos a las ecuaciones

$$9=\det((A+B)^2)=1+2\mu_1+4\mu_2 \qquad \text{y} \qquad 1=\det((A-B)^2)=1-2\mu_1+4\mu_2,$$

que implican $\mu_1 = 2$ y $\mu_2 = 1$. De este modo,

$$\det((A^2+B^2)-AB)=1-2+1=0, \quad \det((A^2+B^2)+\sqrt{2}AB)=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$$

y

$$\det((A^2+B^2)-\sqrt{2}AB)=1-2\sqrt{2}+2=3-2\sqrt{2},$$

y, usando (2) y (3),

$$\det(A^3+B^3)=0 \qquad \text{y} \qquad \det(A^4+B^4)=1.$$

También resuelto por A. Álamo, R. Castaño, B. Salgueiro, J. Mir, J. Mozo, J. Nadal y el proponente.