Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 29 de febrero de 2016.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 273. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE. UU.*

Evaluar la integral

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(|t|\sqrt{x}\,\frac{x-15}{x-1}\right)\frac{dx}{x-4}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

entendida como un valor principal.

Problema 274. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea $k \geq 1$ un número entero. Probar que

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 i_2\cdots i_k(i_1+i_2+\cdots+i_k)^2} = \begin{cases} \frac{(k+1)!}{2}\zeta(k+2), & k=1,\\ k!\Big(\frac{k+1}{2}\zeta(k+2)-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k-1}\zeta(k+1-i)\zeta(i+1)\Big), & k>1,\end{cases}$$

donde ζ denota la función zeta de Riemann.

PROBLEMA 275. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sea $\{a_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión monótona de números reales positivos tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Supongamos además que, para $n \geq 0$ y $2^n \leq k \leq 2^{n+1}-1$, se verifica

$$a_k - a_{k+1} \geq 2^{-n} a_{2^{n+1}}.$$

Probar que, si α es un número irracional cuadrático, entonces la sucesión

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)}$$

es acotada.

PROBLEMA 276. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En un triángulo escaleno ABC, sean I el incentro y M_A el punto medio de BC (véase el esquema de la figura adjunta). Supongamos que la recta paralela a AB pasando por M_A corta a BI y CI en los puntos P y Q, respectivamente, y que la recta paralela a AC pasando por MA corta a BI y CI en R y S respectivamente. Las rectas PS y QR se cortan en un punto que denotaremos por J_A. Si de manera análoga se construyen otros dos puntos J_B y J_C, demostrar que los tres J_A, J_B y J_C están alineados.

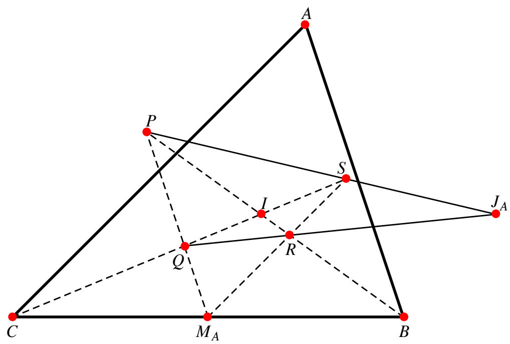

Figura correspondiente al Problema 276.

PROBLEMA 277. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

Demostrar que

$$\sqrt{\frac{x(x+y)}{x^2-xy+y^2}} + \sqrt{\frac{y(y+z)}{y^2-yz+z^2}} + \sqrt{\frac{z(z+x)}{z^2-zx+x^2}} \leq 3\sqrt{2},$$

donde x, y y z son números reales positivos.

Problema 278. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Calcular el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} aa' - bb' - cc' & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & bb' - cc' - aa' & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & cc' - aa' - bb' \end{vmatrix}$$

cuando las ternas de números positivos (a, b, c) y (a', b', c') representan, respectivamente, las longitudes de los lados de dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tales que $\angle CBA = \angle C'B'A'$ y $\angle BAC + \angle B'A'C' = \pi$.

Problema 279. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sea r una recta tangente en T a una circunferencia Γ. Sea $k > 0$ una constante y sean A y B dos puntos variables de r tales que $TA \cdot TB = k$, donde se consideran distancias orientadas. Sea T' el punto de Γ diametralmente opuesto a T. Probar que si las rectas $T'A$ y $T'B$ cortan de nuevo a Γ en P y Q, respectivamente, entonces la recta PQ pasa por un punto fijo al variar A y B.

Problema 280. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua. Si para $a \in [0, 1]$ consideramos las sucesiones $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$ y $b_n = n \sqrt[n]{a_n}$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)}\, dx.$$

Soluciones

Problema 249. *Propuesto por Javier del Rey Pantín, I. E. S. Doña Jimena, Gijón.*

Sobre la periferia de una polea de radio R que gira en torno al punto O (véase la imagen de la izquierda de la figura adjunta) actúa el peso variable P, que es equilibrado por un peso fijo Q, que cuelga de un hilo, cuya línea de acción es guiada por una curva Γ, sobre la que se puede arrollar el hilo. Dicha curva, rígida y solidaria con la polea —que suponemos equilibrada con su centro de gravedad en el punto O—, girará con ella hasta que, como es conocido, se establezca el equilibrio entre los momentos, respecto al centro de la polea, de los pesos P y Q, con la igualdad $P \cdot R = Q \cdot d$.

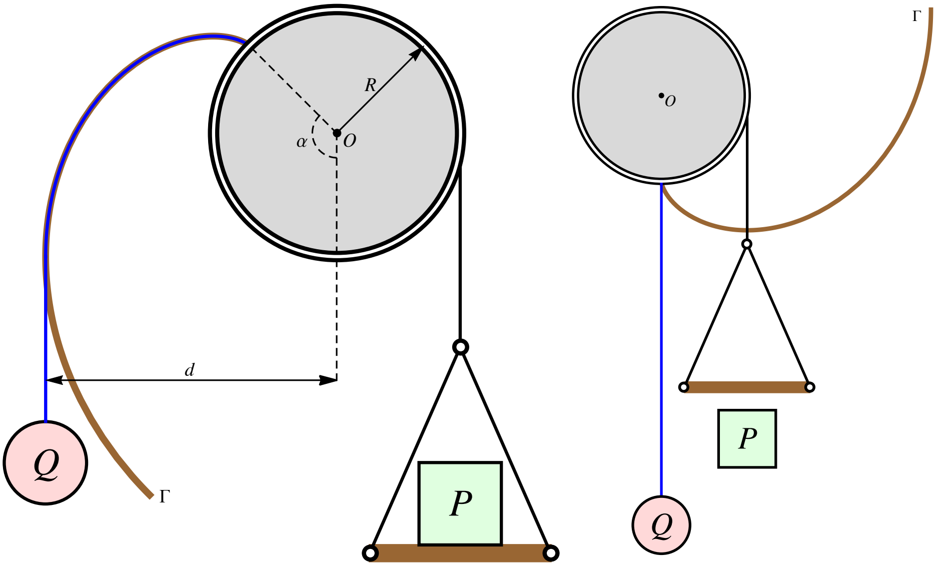

Figura correspondiente al Problema 249.

La parte izquierda de la figura adjunta describe esta situación de equilibrio y la figura de la derecha representa la situación inicial antes de que el peso P actúe sobre el dispositivo. ¿Qué forma ha de tener la curva Γ para que el equilibrio se alcance cuando el ángulo α girado por la polea sea proporcional al peso P? Concretamente, hallar una expresión matemática para esa curva si se desea que $P = Q \cdot \alpha$.

Solución enviada por el proponente.

Si la imagen de la izquierda en la propuesta del problema representa la situación de equilibrio, se tiene que cumplir $P \cdot R = Q \cdot d$, y para que el ángulo α girado al cargar el dispositivo con el peso P sea proporcional a P, con $P = Q \cdot \alpha$, tendrá que verificarse que $d = R \cdot \alpha$.

Es decir, la curva directriz Γ debe ser diseñada de manera que la distancia d entre una recta tangente a Γ y el origen de coordenadas, que suponemos situado en O, sea igual a $R \cdot \alpha$, siendo α el ángulo que gira la tangente al desplazarse por la curva. Obviamente, al ser Γ solidaria con la polea, este ángulo coincide con el de giro de la polea.

De este modo, la curva buscada Γ es la envolvente del haz de rectas cuya distancia al punto O es $d = R \cdot \alpha$. Esta familia de rectas viene descrita por la ecuación $f(x, y, \alpha) = 0$, siendo $f(x, y, \alpha) = x \cos \alpha + y \cos \alpha + R\alpha$, y la envolvente será la solución del sistema formado por las ecuaciones

$$f(x, y, \alpha) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, \alpha) = 0.$$

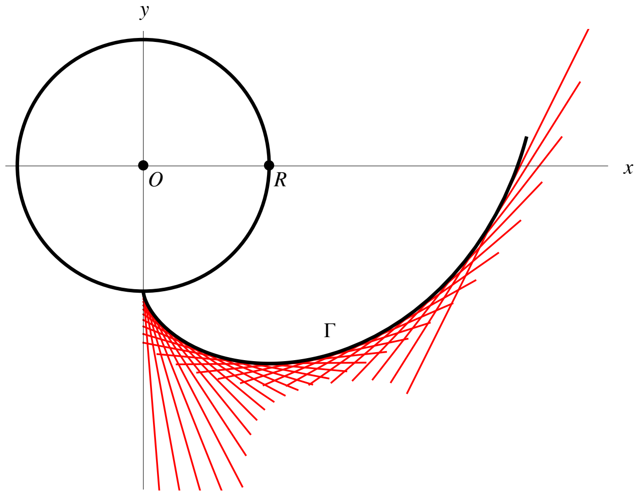

Figura 1: Algunas rectas de la familia $f(x, y, \alpha) = 0$ que aparece en la solución al Problema 249 y la curva Γ buscada.

Luego la curva Γ buscada tendrá ecuaciones paramétricas

$$x = -R\alpha \cos \alpha + R \operatorname{sen} \alpha \qquad \text{e} \qquad y = -R\alpha \operatorname{sen} \alpha - R \cos \alpha,$$

ecuaciones fácilmente identificables pues son las que corresponden a la *evolvente* de una circunferencia centrada en el origen de radio R, que tiene su arranque en el punto $(0, -R)$. La familia de rectas $f(x, y, \alpha) = 0$ y su envolvente pueden verse en la figura 1.

No se han recibido otras soluciones.

Problema 250. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea ABC un triángulo escaleno con incentro I y circuncentro O. Las proyecciones de I sobre los lados BC, CA y AB son, respectivamente, D, E y F, y los puntos medios de las alturas desde A, B y C son, respectivamente, P, Q y R. Demostrar que las rectas DP, EQ, FR y OI son concurrentes.

Solución enviada por Saturnino Campo Ruiz, Salamanca.

Usaremos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC para resolver este problema.

La notación es la habitual: a, b y c para las longitudes de los lados, s para el semiperímetro, $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$ y expresiones análogas para S_B y S_C.

Los pies de las alturas son $H_a(0 : S_C : S_B)$, $H_b(S_C : 0 : S_A)$ y $H_c(S_B : S_A : 0)$ con lo que los puntos medios de las mismas son los puntos $P(a^2 : S_C : S_B)$,

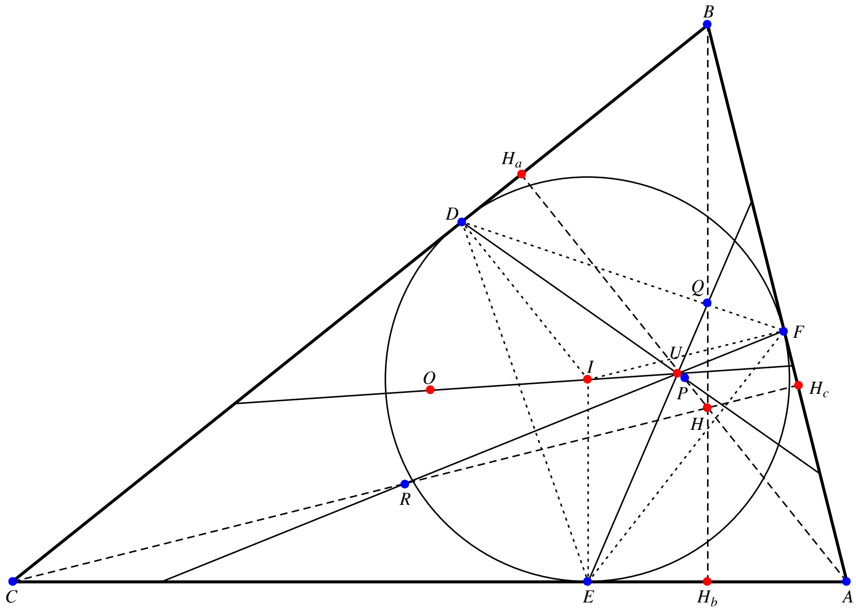

Figura 2: Esquema para la primera solución del Problema 250.

$Q(S_C : b^2 : S_A)$ y $R(S_B : S_A : c^2)$. El incentro y el circuncentro tienen coordenadas $I(a : b : c)$ y $O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, respectivamente. Las proyecciones de I sobre los lados son $D(0 : s-c : s-b)$, $E(s-c : 0 : s-a)$ y $F(s-b : s-a : 0)$.

Podemos formar ahora las ecuaciones de las rectas que intervienen en el problema

$$r_{DP} \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & s-c & s-b \\ a^2 & S_C & S_B \end{vmatrix} = 0, \qquad r_{EQ} \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ s-c & 0 & s-a \\ S_C & b^2 & S_A \end{vmatrix} = 0$$

y

$$r_{FR} \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ s-b & s-a & 0 \\ S_B & S_A & c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

que, desarrolladas y simplificadas, se convierten en

$$r_{DP} \equiv (c-b)(s-a)x + a(s-b)y - a(s-c)z = 0,$$
$$r_{EQ} \equiv b(s-a)x + (c-a)(s-b)y - b(s-c)z = 0$$

y

$$r_{FR} \equiv c(s-a)x - c(s-b)y + (b-a)(s-c)z = 0.$$

Como

$$\begin{vmatrix} c-b & a & -a \\ b & c-a & -b \\ c & -c & b-a \end{vmatrix} = 0,$$

las tres rectas anteriores son concurrentes y, resolviendo el sistema, el punto de concurrencia (que puede verse en la figura 2) es

$$U\left(\frac{a}{s-a} : \frac{b}{s-b} : \frac{c}{s-c}\right).$$

Para la ecuación de la recta que une incentro y circuncentro tenemos

$$r_{OI} \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$r_{OI} \equiv \frac{bS_B - cS_C}{a}x + \frac{cS_C - aS_A}{b}y + \frac{aS_A - bS_B}{c}z = 0.$$

Con la identidad $bS_B - cS_C = 2(c-b)(s-a)s$ y las análogas obtenidas cíclicamente, la ecuación de la recta puede escribirse como

$$r_{OI} \equiv \frac{(c-b)(s-a)}{a}x + \frac{(a-c)(s-b)}{b}y + \frac{(b-a)(s-c)}{c}z = 0.$$

Sólo resta comprobar que el punto U verifica esta ecuación. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{(c-b)(s-a)}{a} \cdot \frac{a}{s-a} + \frac{(a-c)(s-b)}{b} \cdot \frac{b}{s-b} + \frac{(b-a)(s-c)}{c} \cdot \frac{c}{s-c} \\ = (c-b) + (a-c) + (b-a) = 0, \end{aligned}$$

y con esto concluimos la demostración.

Solución enviada por el proponente.

Sean AH_a la altura desde A y N el simétrico de D respecto a I, ver la figura 3. Por ser I y P puntos medios de los segmentos paralelos ND y AH_a, se tiene que AN, PI y H_aD concurren en un mismo punto, que llamaremos D'. Razonando con la homotecia de centro A que lleva la circunferencia inscrita en la exinscrita asociada al lado BC, se tiene que D' es precisamente el punto de contacto de BC con dicha circunferencia exinscrita.

Por otra parte, sean J el punto de corte de las rectas AI y DP, T el segundo punto de corte de DP con la circunferencia inscrita, K la proyección de I sobre DP (que es el punto medio de DT), y A' el punto de intersección de IK con BC (al ser ABC escaleno, DP no es perpendicular a BC, luego IK no es paralela a BC, y A' está bien definido).

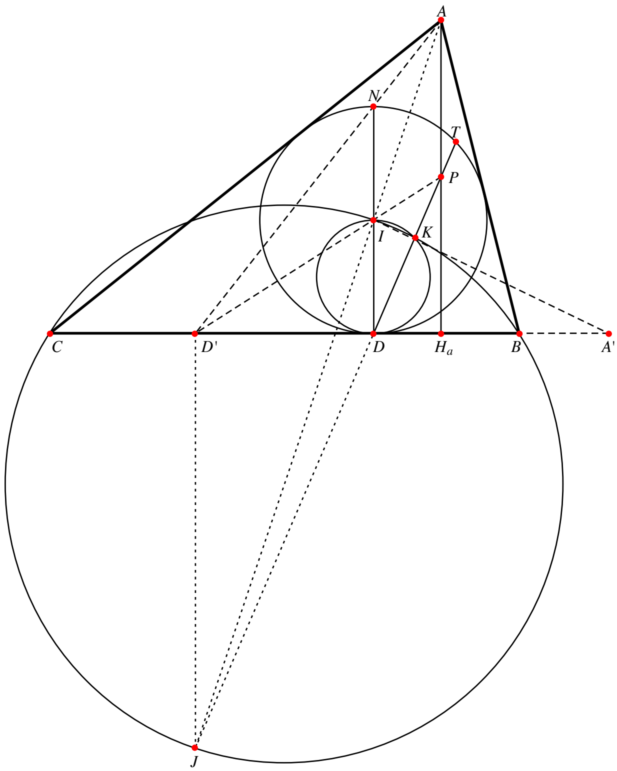

Figura 3: Esquema para la segunda solución del Problema 250.

Usando el teorema de Tales y que $NI = ID$, resulta

$$\frac{D'N}{D'A} = \frac{NI}{AP} = \frac{ID}{AP} = \frac{JI}{JA},$$

lo que prueba que la recta $D'J$ es paralela a NI, o sea perpendicular a BC. Por lo tanto el punto J es el exincentro asociado al lado BC, ya que está en la bisectriz de A y su proyección ortogonal sobre BC es el punto D' antes mencionado. De aquí se deduce que los puntos B, C, I y K están en una misma circunferencia, la de diámetro IJ, y calculando la potencia desde A' a esta circunferencia y a la de diámetro ID tenemos que

$$A'B \cdot A'C = A'I \cdot A'K = A'D^2.$$

Esto a su vez implica que A' está en e, el eje radical entre las circunferencias ω inscrita y Γ circunscrita al triángulo ABC. Además, está claro que la recta DP es la polar de A' respecto de ω, y de forma análoga que las rectas EQ y FR son las polares de (los que serían puntos análogos al A') B' y C'. Puesto que los puntos A', B' y C' pertencen a la recta e, las tres rectas anteriores concurren en un punto U,

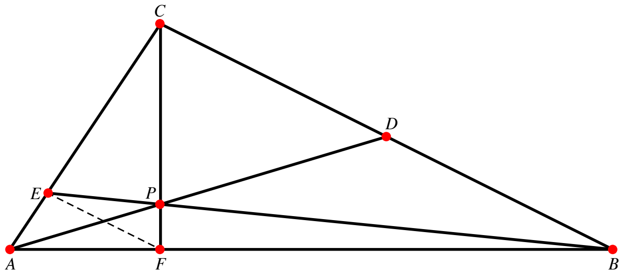

Figura 4: Esquema para la solución del Problema 251.

que es el polo de e respecto de ω. Finalmente, U está en la recta perpendicular a e trazada desde I, que es OI, lo que prueba que las cuatro rectas DP, EQ, FR y OI son concurrentes.

También resuelto por D. Aranda, A. Fanchini, J. Mir, J. Nadal y N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente).

Nota. El proponente indica que el problema está inspirado en el Problema 6 de la XLVIII Olimpíada Matemática Española. A. Fanchini, J. Mir y N. Stanciu y T. Zvonaru observan en sus soluciones que el punto de concurrencia de las rectas del problema es el punto X_{57} de la *Encyclopedia of Triangle Centers* de C. Kimberling, disponible en `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`.

Problema 251. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Sean ABC un triángulo con $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$, R su circunradio y P un punto interior del triángulo situado en la mediana AD. Supongamos que las rectas PB y PC cortan a los lados CA y AB en E y F, respectivamente. Probar que

$$a^2[PAF] \cdot [PBD] + b^2[PBD] \cdot [PCE] + c^2[PCE] \cdot [PAF] \leq \frac{R^2}{4}[ABC]^2,$$

donde $[XYZ]$ denota el área del triángulo XYZ.

Solución enviada por Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramures, Rumanía.

Por el teorema de Ceva (véase la figura 4) se tiene la identidad

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1,$$

que, como $BD = DC$, implica

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}.$$

Así, las líneas EF y BC son paralelas y $[BFC] = [CEB]$. Es claro que

$$[PBF] = [BFC] - [BPC] = [CEB] - [BPC] = [PCE].$$

Puesto que AD es la mediana desde el vértice A, se verifican las igualdades $[ABD] = [ACD]$ y $[PBD] = [PCD]$. De esta manera $[PAF] = [PAE]$ y

$$[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{[ABC]}{2}.$$

Para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, la *desigualdad de Stevin-Bottema* establece que

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 R^2 \geq \lambda_2\lambda_3 a^2 + \lambda_1\lambda_3 b^2 + \lambda_1\lambda_2 c^2.$$

Entonces, tomando

$$\lambda_1 = [PCE], \qquad \lambda_2 = [PAF] \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = [PBD]$$

concluimos que

$$\begin{aligned} a^2[PAF][PBD] &+ b^2[PBD][PCE] + c^2[PCE][PAF] \\ &\leq ([PAF] + [PBD] + [PCE])^2 R^2 = \frac{R^2}{4}[ABC], \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

También resuelto por J. Nadal, B. Salgueiro y el proponente.

NOTA. La desigualdad de Stevin-Bottema que se utiliza en la solución publicada puede probarse del siguiente modo. Por un argumento de homogeneidad y usando que

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

basta probar que

$$\frac{tsa^2 + tb^2 + sc^2}{(1+t+s)^2} \leq \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}, \qquad t, s > 0.$$

Las derivadas parciales de la función

$$g(t,s) = \frac{tsa^2 + tb^2 + sc^2}{(1+t+s)^2}$$

se anulan en el punto (t_0, s_0), donde

$$t_0 = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{c^2 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2 - c^2}, \qquad s_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{b^2 - a^2 - c^2}{a^2 - b^2 - c^2},$$

y

$$g(t_0, s_0) = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Este valor resulta ser el máximo de g en el primer cuadrante.

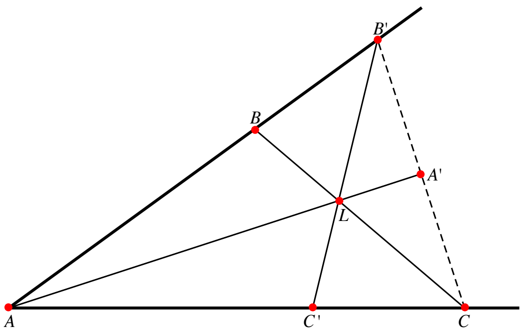

Figura 5: Esquema para la primera solución del Problema 252.

Problema 252. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Si B y C son dos puntos variables, situados uno en cada uno de los lados de un ángulo fijo de vértice A, y se verifica que la suma de los inversos de las distancias AB y AC es una constante dada, probar que la recta BC pasa siempre por un punto fijo.

Solución enviada por F. Damián Aranda Ballesteros, I. E. S. Blas Infante, Córdoba.

Sean $\{B, C\}$ y $\{B', C'\}$ dos pares de puntos verificando la propiedad del enunciado. Por tanto,

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AB'} + \frac{1}{AC'}. \tag{1}$$

Resulta sencillo comprobar que si el punto B' es exterior al segmento AB, entonces el punto C' ha de encontrarse situado entre A y C. De este modo podemos considerar, en el triángulo $AB'C$, los segmentos $B'C'$ y BC como dos cevianas que se cortan en un punto L. Si la ceviana que parte del tercer vértice A y pasa por este punto L corta al lado $B'C$ en un punto A' (véase la figura 5), por el recíproco del teorema de Ceva debe verificarse la relación

$$\frac{B'B}{BA} \cdot \frac{AC'}{C'C} \cdot \frac{CA'}{A'B'} = 1. \tag{2}$$

A partir de (1) y (2), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{CA'}{A'B'} = \frac{BA}{B'B} \cdot \frac{C'C}{AC'} &= \frac{1}{\frac{AB'-AB}{AB}} \cdot \frac{AC - AC'}{AC'} \\ &= \frac{1}{AB'\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AB'}\right)} \cdot AC \cdot \left(\frac{1}{AC'} - \frac{1}{AC}\right) = \frac{AC}{AB'}\end{aligned}$$

y, por tanto, el punto A' pertenece a la bisectriz interior del ángulo fijo A. Entonces también el punto L, intersección de los segmentos BC y $B'C'$, pertenecerá a dicha bisectriz. En realidad, L es el pie de la bisectriz interior del ángulo A en el triángulo ABC y su posición en el segmento BC está fijada. Así, cualquier otra transversal $B'C'$ deberá cortar a BC en un punto perteneciente a la bisectriz del ángulo A que no podrá ser que el punto L.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

En el plano complejo, situamos el vértice del ángulo en cero, y los lados del ángulo en el semieje real positivo y en la semirrecta de argumento ϕ. Los puntos B y C son entonces t y $se^{i\phi}$ con $t > 0$, $s > 0$ y $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = k$, y el segmento BC el conjunto de puntos (o números) $\lambda t + (1-\lambda)se^{i\phi}$ con $0 < \lambda < 1$, que pasa por el punto representado por el número $\frac{1}{k}(1 + e^{i\phi}) = \frac{2\cos\phi}{k}e^{i\phi/2}$ independientemente del valor de t, como se comprueba fácilmente. En efecto, basta tomar $\lambda = \frac{1}{kt} = 1 - \frac{1}{ks} < 1$ y se tiene

$$\lambda t + (1-\lambda)se^{i\phi} = \frac{1}{kt}t + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{ks}\right)\right)se^{i\phi} = \frac{1}{k}(1 + e^{i\phi}).$$

En otras palabras, cualquiera que sea el segmento BC en las condiciones del enunciado corta a la bisectriz del ángulo en un punto fijo.

También resuelto por M. Amengual, R. Barroso, C. Beade, J. Benítez, S. Campo, R. de la Cruz, J. Mir, J. Nadal, A. M. Oller, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

PROBLEMA 253. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Universidad Técnica de Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

a) Probar que

$$\int_0^1 \left(\log\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\right)^2 dx = \frac{(\log 2)^2}{4} - \frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + G,$$

donde G denota la *constante de Catalan* definida por

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} = 0.9159655941\ldots.$$

b) $\star$ Sea $k \geq 3$ un número entero. Evaluar, en forma cerrada, la integral

$$\int_0^1 \left(\log\left(\sqrt[k]{1+x} - \sqrt[k]{1-x}\right)\right)^2 dx.$$

Solución enviada por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.

a) Si denotamos

$$I_n = \int_0^1 \left(\log\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\,\right)\right)^n \, dx,$$

aplicando integración por partes se tiene

$$\begin{aligned} I_n &= \left(\frac{\log 2}{2}\right)^n - \frac{n}{2}\int_0^1 \left(\log\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\,\right)\right)^{n-1} \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \left(\frac{\log 2}{2}\right)^n - \frac{n}{2} I_{n-1} - \frac{n}{2} J_n, \end{aligned}$$

donde

$$J_n = \int_0^1 \left(\log\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\,\right)\right)^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Haciendo el cambio de variable $x = \cos(2t)$ resulta

$$\begin{aligned} J_n &= 2\int_0^{\pi/4} \left(\log\left(\sqrt{2}(\cos t - \operatorname{sen} t)\right)\right)^{n-1} dt \\ &= 2\int_0^{\pi/4} (\log(2\operatorname{sen}(\pi/4 - t)))^{n-1} \, dt \\ &= 2\int_0^{\pi/4} (\log(2\operatorname{sen} t))^{n-1} \, dt = -Ls_n(\pi/2), \end{aligned}$$

siendo

$$Ls_n(x) = -2\int_0^x \left(\log\left|2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|\right)^{n-1} dt.$$

Como

$$I_1 = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

y $Ls_2(\pi/2) = G$ (ver L. Lewin, *Dilogarithms and Associated Functions*, MacDonald, Londres (1958), pág. 148), concluimos que

$$I_2 = \frac{(\log 2)^2}{4} - \frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + G,$$

como queríamos probar.

El apartado a) también resuelto por G. C. Greubel (dos soluciones), J. Nadal, P. Perfetti y el proponente.

NOTA. No se han recibido soluciones al apartado b). G. C. Greubel da una representación de la integral b) en términos de funciones hipergeométricas de una y dos variables; es decir, de la función ${}_2F_1$ y de la función de Appell. Cualquier otra aportación a su solución será bienvenida.

La referencia dada en la solución publicada para la identidad $Ls_2(\pi/2) = G$ es difícil de localizar. El trabajo del mismo autor *Polylogarithms and Associated Functions*, North-Holland, Nueva York (1981), es una ampliación del citado en la solución y es accesible de una manera más sencilla. La fórmula puede encontrase en la pág. 104 de esta última referencia. De todos modos la identidad $Ls_2(\pi/2) = G$ puede probarse de la siguiente manera. En primer lugar,

$$\begin{aligned} Ls_2(\pi/2) &= -\frac{\pi}{2}\log 2 - \int_0^{\pi/4} \log\left(\operatorname{sen}^2 t\right)\, dt \\ &= -\frac{\pi}{2}\log 2 - \int_0^{\pi/4} \log(\operatorname{sen} t \cos t)\, dt + \int_0^{\pi/4} \log(\tan t)\, dt. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $\tan t = s$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \log(\tan t)\, dt &= \int_0^1 \frac{\log s}{1+s^2}\, ds = \int_0^1 \frac{\arctan s}{s}\, ds \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^1 s^{2m}\, ds = G, \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir la identidad, puesto que

$$\int_0^{\pi/4} \log(\operatorname{sen} t \cos t)\, dt = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

PROBLEMA 254. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Sean a, b, c, d, e y f números reales positivos tales que $a+b+c = d+e+f$. Probar que

$$ad(a+4d) + be(b+4e) + cf(c+4f) \geq 16abc - def.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

El resultado se deduce sumando miembro a miembro las desigualdades

$$a^2d + b^2e + c^2f \geq 3def \qquad \text{y} \qquad 4(ad^2 + be^2 + cf^2) \geq 16abc - 4def,$$

que comprobamos un poco más adelante. Notemos además que, para que la primera desigualdad sea una igualdad, es necesario que $d = e = f$, y en la segunda ocurre si y sólo si $a = \frac{e+f}{2}$, $b = \frac{f+d}{2}$ y $c = \frac{d+e}{2}$. Y para que valga la igualdad en la desigualdad del enunciado es necesario (y suficiente) que se den ambas condiciones a la vez; o sea, que $a = b = c = d = e = f$.

Para probar que $a^2d+b^2e+c^2f \geq 3def$ basta aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz primero a $(a\sqrt{d}, b\sqrt{e}, c\sqrt{f})$ y $(\sqrt{ef}, \sqrt{fd}, \sqrt{de})$, elevar al cuadrado, y después a (d,e,f) y (e,f,d). Así se obtiene que

$$(a+b+c)^2 def \leq (a^2d+b^2d+c^2f)(e^2+d^2+f^2),$$

y concluimos usando la condición $a+b+c=d+e+f$ y la desigualdad

$$\left(\frac{d+e+f}{3}\right)^2 \leq \frac{d^2+e^2+f^2}{3}.$$

La segunda desigualdad $4(ad^2+be^2+cf^2) \geq 16abc - 4def$, o su equivalente $ad^2+be^2+cf^2 \geq 4abc - def$, aparece demostrada, junto con el estudio de los casos de igualdad, por ejemplo, en el problema 4.20 del libro *Inequalities with Beautiful Solutions*, de Vasile Cîrtoaje, Võ Quõc Bá Cãn y Trân Quõc Anh, GIL Publishing House, 2009, págs. 206 y 207.

También resuelta por el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

Problema 255. *Propuesto por Anastasios Kotronis, Atenas, Grecia.*

Sea $p \in \mathbb{N}$ un número impar y $q, \ell \in \mathbb{Z}$ con p y q primos entre sí. Evaluar

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\ell\pi q}{p}\right) \cot\left(\frac{k\pi q}{p}\right).$$

Solución enviada por el proponente.

Escribiendo $\ell = mp + \upsilon$, para $\upsilon = 0, \ldots, p-1$, y puesto que para $\upsilon = 0$ la suma es nula, es suficiente analizar los casos $\ell = 1, \ldots, p-1$.

Si $t = \exp\left(\frac{2\pi i q}{p}\right)$, tenemos la descomposición

$$\frac{px^{\ell-1}}{x^p - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A_k}{x - t^k},$$

para ciertos coeficientes A_k. Multiplicando por $x - t^k$, tomando límites cuando $x \to t^k$, para $k = 0, \ldots, p-1$, y teniendo en cuenta que $t^p = 1$, se deduce que $A_k = t^{k\ell}$ y

$$\frac{px^{\ell-1}}{x^p-1} - \frac{1}{x-1} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k\ell}}{x - t^k},$$

que, tomando el límite cuando $x \to 1$, implica

$$\ell - \frac{p+1}{2} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k\ell}}{1 - t^k}.$$

Ahora, denotando $\theta = \frac{\pi q}{p}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k\ell}}{1-t^k} &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k\ell}}{1-\cos(2\theta k) - i\,\mathrm{sen}\,(2\theta k)} \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k\ell}}{2\,\mathrm{sen}\,(\theta k)\,(\mathrm{sen}\,(\theta k) - i\cos(\theta k))} \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k\ell}}{2} \frac{\mathrm{sen}(\theta k) + i\cos(\theta k)}{\mathrm{sen}(\theta k)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} t^{k\ell} + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{p-1} \cos(2\theta k\ell)\cot(\theta k) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{sen}(2\theta k\ell)\cot(\theta k) \\
&= -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{sen}(2\theta k\ell)\cot(\theta k),
\end{aligned}$$

puesto que p y q son primos entre si, $\ell \in \{1, \dots, p-1\}$ y p es impar. De esta forma $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{sen}(2\theta k\ell)\cot(\theta k) = \frac{p}{2} - \ell$ y

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{sen}\left(\frac{2k\ell\pi q}{p}\right)\cot\left(\frac{k\pi q}{p}\right) = \begin{cases} p\left(\frac{1}{2} + \left[\frac{\ell}{p}\right]\right) - \ell, & p \nmid \ell \\ 0, & p \mid \ell \end{cases},$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x.

Se ha recibido una solución incompleta.

PROBLEMA 256. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que los puntos B y D son simétricos respecto a la recta AC. Se consideran dos puntos distintos E y F tales que $ADCE$ es un paralelogramo y F es el segundo punto de intersección de la recta DE con la circunferencia circunscrita al triángulo ACE. Si la circunferencia que pasa por B, D y F corta al segmento AC en un punto G, demostrar que $\angle ABG = \angle CBG$.

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.

Como el cuadrilátero $ABCD$ es simétrico respecto de la diagonal AC (ver figura 6), vamos a considerar como datos del problema los ángulos del triángulo ABC: $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle BCA$.

El cuadrilátero $FDGB$ está inscrito en la circunferencia que pasa por los puntos B, D y F, de modo que se tiene

$$\angle DGB = \pi - \angle DFB.$$

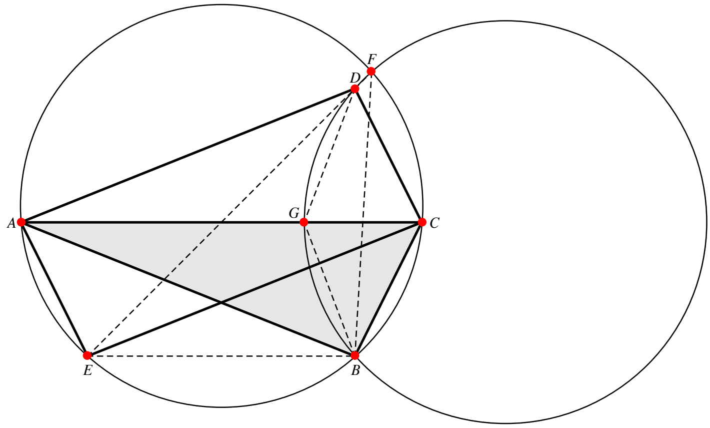

Figura 6: Esquema para la solución del Problema 256.

Es sencillo ver las rectas que AC y EB son paralelas y que, por tanto,

$$\angle DFB = \angle EFB = \angle ECB = \gamma - \alpha.$$

Así,

$$\angle CGB = \frac{\pi - (\gamma - \alpha)}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Por otra parte,

$$\angle CBG = \pi - (\gamma + \angle CGB) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2}.$$

Luego $\angle ABG = \beta - \angle CBG = \frac{\beta}{2} = \angle CBG$, como queríamos demostrar.

También resuelto por M. Amengual, D. Aranda, A. Franchini, J. Nadal, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.