Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2015.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 265. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Si Γ denota la función Gamma y $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}$, evaluar

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{a_{n+1}}^{a_n} \Gamma(n^2x^2)\,dx.$$

Problema 266. *Propuesto por Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right).$$

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left| S_n - \log \frac{4}{\pi} \right| \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} n^3 \left| S_n - \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2} - \log \frac{4}{\pi} \right|.$$

PROBLEMA 267. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Sea ABC un triángulo acutángulo con inradio r, circunradio R y exinradios r_a, r_b y r_c. Sean h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas AD, BE y CF sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, y t_a, t_b y t_c las longitudes de las tangentes desde A, B y C, respectivamente, a la circunferencia circunscrita al triángulo órtico DEF. Probar que

$$\frac{t_a^2 r r_a}{h_a^2(r_a - r)} + \frac{t_b^2 r r_b}{h_b^2(r_b - r)} + \frac{t_c^2 r r_c}{h_c^2(r_c - r)} = \frac{r + R}{2}.$$

PROBLEMA 268. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sea una recta d, una circunferencia ω y sobre esta dos puntos fijos A y B y uno variable M. Demostrar que existen dos puntos P y Q en d tales que si las rectas MA y MB cortan a d en A' y B', respectivamente, el producto $PA' \cdot QB'$ es constante al variar M.

PROBLEMA 269. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo ABC a partir de las longitudes de sus lados, a, b y c, y del semiperímetro s mediante

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

a) Determinar fórmulas para el cálculo del área de un triángulo análogas a la de Herón en función de las longitudes de las medianas y en función de las longitudes de las alturas.

b) $\star$ ¿Es posible determinar una fórmula similar en función de las longitudes de las bisectrices?

PROBLEMA 270. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaiyán.*

Sea Γ una circunferencia y A un punto exterior a ella. Trazamos un recta por A que corta a Γ en dos puntos B y C. Sean D y E los puntos de corte con Γ del diámetro perpendicular a BC. Si F es el punto de corte de las rectas DB y AE, probar que $|AC|\cos(\angle DFE) \leq |AB|$.

Problema 271. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ y $n \geq 2$ un número entero. Calcular el producto de matrices $B(2)B(3)\cdots B(n)$.

Problema 272. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

Sean f y g dos funciones reales definidas en $[0,1]$ tales que g es integrable en $[0,1]$, con $\int_0^1 g(t)\,dt = a$, f es continua en $[0,1]$ y $\int_0^x f(t)\,dt \geq g(x)$ para $x \in [0,1]$. Probar que

$$\int_0^1 (f(t))^2\,dt \geq \frac{6a-1}{3}.$$

Soluciones

Problema 241. *Propuesto por Valcho Milchev, Kardzhali, Bulgaria.*

Determinar todos los números enteros positivos a y b tales que $\frac{a^4-a^2+1}{ab-1}$ es un número entero positivo.

Solución enviada por Roberto de la Cruz Moreno, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona.

Como $(a^4-a^2+1) = a^2(a^2+b^2-1)-(ab-1)(ab+1)$, se tiene que el problema planteado es equivalente a encontrar los a, b enteros positivos tales que $\frac{a^2+b^2-1}{ab-1}$ es entero. (Observar que a^4-a^2+1 es siempre positivo y a^2 y $ab-1$ son coprimos.)

Con esta nueva formulación es evidente que si (a,b) es solución también lo es (b,a). Ademas, (a,b) es solución de

$$\frac{a^2+b^2-1}{ab-1} = k$$

si y solo si $((ka-b),a)$ también lo es. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{(ka-b)^2+a^2-1}{(ka-b)a-1} &= \frac{k^2a^2+b^2-2abk+a^2-1}{ka^2-ab-1}\\ &= \frac{k^2a^2-2akb+k(ab-1)}{ka^2-ab-1} = k\frac{ka^2-ab-1}{ka^2-ab-1} = k.\end{aligned}$$

Entonces, por iteración de estas dos reglas, tenemos que cada solución es parte de una familia de soluciones.

Sea (a_0, b_0) una solución tal que $a_0 + b_0$ es mínima y donde podemos suponer que $a_0 < b_0$ (sustituyendo se ve que (x, x) nunca puede ser solución). Dada su condición extrema, se tiene que

$$a_0 + b_0 \leq (ka_0 - b_0) + a_0 \Leftrightarrow 2b_0 \leq ka_0$$

y

$$\begin{aligned}\frac{2b_0}{a_0} \leq k = \frac{a_0^2 + b_0^2 - 1}{a_0 b_0 - 1} &\Leftrightarrow 2a_0 b_0^2 - 2b_0 \leq a_0^3 + a_0 b_0^2 - a_0\\ &\Leftrightarrow a_0 b_0^2 - 2b_0 \leq a_0^3 - a_0\\ &\Leftrightarrow -a_0 b_0^2 + 2b_0 + (a_0^3 - a_0) \geq 0.\end{aligned}$$

Tenemos un polinomio de segundo grado en b_0 cuyo máximo se alcanza en $\frac{1}{a_0}$. Como $b_0 > a_0 \geq \frac{1}{a_0}$ y es entero, se tiene que

$$0 \leq -a_0 b_0^2 + 2b_0 + (a_0^3 - a_0) \leq -a_0(a_0 + 1)^2 + 2(a_0 + 1) + a_0^3 - a_0 = -2a_0^2 + 2$$

y, por tanto, $a_0 = 1$. Sustituyendo este valor, queda $b_0 = 2$ y $k = 4$. Luego solo tenemos una familia de soluciones.

De este modo concluimos que toda solución posible es de la forma (x_j, x_{j+1}) o (x_{j+1}, x_j), $j \in \mathbb{Z}^+$, donde la sucesión x_j está definida por la relación de recurrencia

$$x_{j+2} = 4x_{j+1} - x_j, \qquad j \geq 0,$$

con $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

También resuelto por J. Gómez, J. Nadal y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

PROBLEMA 242. *Propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumanía.*

Determinar las funciones continuas $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\int_x^{x^n} f(t)\, dt = \int_1^x (t + t^2 + \cdots + t^{n-2} + t^{n-1}) f(t)\, dt,$$

para $x \in [1, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Solución enviada por Jon Asier Bárcena Petisco (estudiante), Universidad del País Vasco, Leioa, Vizcaya.

Dado que f es continua, una vez fijado n tendremos a la derecha y a la izquierda de la igualdad dos funciones derivables. Como al evaluarlas en $x = 1$ ambas son nulas, la igualdad se verificará si y solo si sus derivadas son iguales; es decir,

$$nx^{n-1} f(x^n) - f(x) = (x + \cdots + x^{n-1}) f(x).$$

Es claro que si $x > 1$ llegamos a

$$f(x^n) = \frac{x^n - 1}{n(x-1)x^{n-1}} f(x),$$

o, lo que es lo mismo,

$$f(x) = \frac{x-1}{n(\sqrt[n]{x}-1)x^{1-1/n}} f(\sqrt[n]{x}). \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} x^{1-1/n} = x, \qquad \lim_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{x}) = f(1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1) = \log x,$$

de (1) se deduce que

$$f(x) = \lambda \frac{x-1}{x\log x}, \qquad x > 1,$$

siendo $\lambda = f(1)$ un número real cualquiera. Esta función f es continua en $[1, \infty)$. Toda función de ese tipo es claramente continua y verifica (1), lo que concluye la solución.

También resuelto por A. Castaño, M. Fernández y el proponente.

Problema 243. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En un triángulo ABC sean $\angle CAB = \pi/3$, ω su circunferencia inscrita, I su incentro y M el punto medio del lado BC. Si la circunferencia ω toca al lado BC en el punto D, corta al segmento AI en F, y al segmento MF en otro punto E distinto de F, demostrar que $AD = AE$.

Solución enviada por Andrea Fanchini, Cantú, Italia.

Para cada punto P del plano, sea $\boldsymbol{P}$ el radio vector de este punto respecto de un origen de coordenadas arbitrariamente elegido. Dado un $\triangle ABC$, existen números reales unívocamente determinados x, y y z tales que $\boldsymbol{P} = x\boldsymbol{A} + y\boldsymbol{B} + z\boldsymbol{C}$ y $x + y + z = 1$. La terna (x, y, z) son las *coordenadas baricéntricas absolutas* del punto P con respecto al $\triangle ABC$ y se escribe $P(x, y, z)$. Cualquier terna de números x', y' y z' proporcionales a x, y y z son unas *coordenadas baricéntricas relativas* de P con respecto al $\triangle ABC$ y se escribe $P(x' : y' : z')$.

Sean a, b y c las longitudes de los lados del $\triangle ABC$, A, B y C sus ángulos, s su semiperímetro y r su inradio. Usando coordenadas baricéntricas con respecto al $\triangle ABC$, tenemos que $A(1, 0, 0)$ e $I(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s})$. Siendo $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$, tenemos que $r = AI \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$, luego $AI = 2r$. Por tanto, F es el punto medio de AI y tiene coordenadas $F(a + 2s : b : c)$. El punto F también es el punto de Feuerbach del $\triangle ABC$, que se corresponde con el punto $X(11)$ en la *Encyclopedia of Triangle Centers* de Clark Kimberling (ver `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`).

Con esto, la ecuación de la bisectriz IF es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a+2s & b & c \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad IF \equiv cy - bz = 0.$$

Además, tenemos que $M(0\colon 1\colon 1)$ y $D(0\colon s-c\colon s-b)$, luego la recta FM tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a+2s & b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad FM \equiv (b-c)x - (a+2s)y + (a+2s)z = 0$$

y la recta DF tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & s-c & s-b \\ a+2s & b & c \end{vmatrix} = 0$$
$$\Longrightarrow DF \equiv ((s-c)c - (s-b)b)x + (s-b)(a+2s)y - (s-c)(a+2s)z = 0.$$

La fórmula para el ángulo θ entre las rectas de ecuaciones $p_1x + q_1y + r_1z = 0$ y $p_2x + q_2y + r_2z = 0$ en coordenadas baricéntricas referidas al $\triangle ABC$ se puede escribir de la manera siguiente (ver teorema 8 en [1]):

$$S_\theta = S\cot\theta = \frac{S_A(q_1-r_1)(q_2-r_2) + S_B(r_1-p_1)(r_2-p_2) + S_C(p_1-q_1)(p_2-q_2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}$$

donde, siguiendo la notación de Conway (ver pág. 33 en [2]), S es el doble del área del $\triangle ABC$ y, por ejemplo, $S_A = bc\cos A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$. De modo, que $\angle IFM$ viene dado por

$$\begin{aligned} S_{IFM} &= S\cot\angle IFM \\ &= \frac{-2S_A(a+2s)(b+c) - bS_B(a+2s-b+c) - cS_C(b-c+a+2s)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & -b \\ b-c & -(a+2s) & a+2s \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

y, del mismo modo, $\angle IFD$ viene dado por

$$\begin{aligned} S_{IFD} = S\cot\angle IFD = {} & \frac{S_A(4a^2+2ab+2ac)(b+c)}{W} \\ & - \frac{bS_B(2c^2-2a^2-2b^2-2ab) + cS_C(2b^2-2a^2-2c^2-2ac)}{W}, \end{aligned}$$

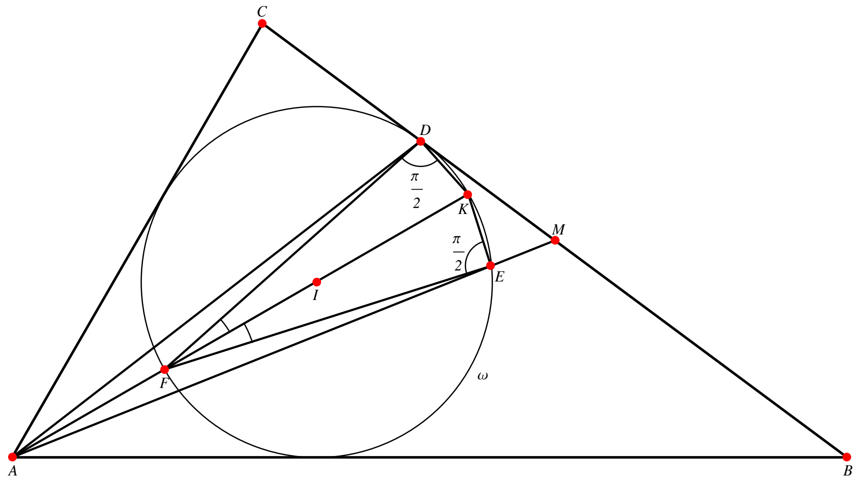

Figura 1: Esquema para la primera solución del Problema 243.

con

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 - c^2 - ab + ac & 2a^2 - b^2 + c^2 - ab + 3ac & c^2 - 2a^2 - b^2 + ac - 3ab \\ 0 & c & -b \end{vmatrix}.$$

Ahora bien, siendo $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$, tenemos que $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, $S_A = \frac{bc}{2}$,

$$S_B = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2} = \frac{2c^2 - bc}{2} = c^2 - S_A$$

y

$$S_C = \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{2} = \frac{2b^2 - bc}{2} = b^2 - S_A.$$

Haciendo operaciones, desarrollando y simplificando, se obtiene

$$S_{IFM} = S_{IFD} = S_A \, \frac{a + 2s}{b - c},$$

luego $\triangle IFM$ y $\triangle IFD$ son semejantes, véase la figura 1. Así también son semejantes los triángulos rectángulos $\triangle KDF$ y $\triangle KEF$. Y lo mismo para $\triangle ADK$ y $\triangle AEK$ y, por tanto, $AD = AE$.

Referencias:

[1] V. Volenec, Metrical relations in barycentric coordinates, *Math. Commun.* **8** (2003), 55–68.

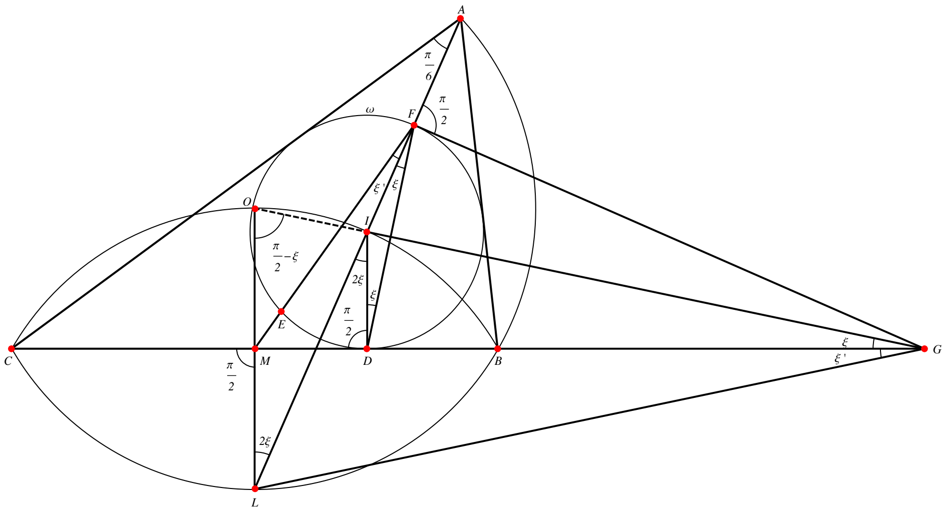

Figura 2: Esquema para la segunda solución del Problema 243.

[2] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Florida Atlantic University Lecture Notes, 2001 (accesible en la dirección `http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry130411.pdf`).

Solución enviada por el proponente.

Se excluye el caso equilátero por ser trivial, ya que entonces $D = E = M$. Asumimos $b > c$ sin pérdida de generalidad.

Si definimos los ángulos, véase la figura 2, $\xi = \angle DFI = \angle FDI$ y $\xi' = \angle MFI$, bastará probar que $\xi = \xi'$, lo que asegurará que los puntos D y E son simétricos con respecto a AI, y se tendrá $AD = AE$.

Sea G el punto de intersección de la recta BC con la perpendicular a FI por el punto F. El cuadrilátero $DIFG$ es inscriptible en la circunferencia de diámetro IG, luego $\angle DGI = \xi$.

Denotemos por L al segundo punto de intersección de AI con la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, de modo que, en particular, L está en la mediatriz de BC. Entonces el cuadrilátero $LMFG$ es inscriptible en la circunferencia de diámetro LG y se tiene $\angle MGL = \xi'$. Además, $\angle MLI = \angle LID = 2\xi$. Si O es el circuncentro del $\triangle ABC$ sabemos que $\angle BOC = 2\angle CAB$ y $\angle BIC = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle CAB$.

Ahora utilizaremos por primera vez el hecho de que $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$ para observar que los dos ángulos anteriores miden $\frac{2\pi}{3}$, de donde se deduce que los puntos B, C, O e I están en una misma circunferencia. Es sencillo darse cuenta de que el centro de esta circunferencia es el punto L y que $\triangle COL$ y $\triangle BOL$ son equiláteros. Por su parte, el $\triangle LOI$ es isósceles con $LO = LI$, por lo tanto $\angle LOI = \angle LIO = \frac{\pi}{2} - \xi$, lo cual implica que los puntos O, I y G están alineados. Pero además O y L son simétricos con respecto a BC, de donde se deduce que $\triangle MOG$ y $\triangle MLG$ son congruentes, luego $\xi = \xi'$, como queríamos demostrar.

Nota. El proponente también advierte que F es el punto de Feuerbach del $\triangle ABC$.

También resuelto por F. D. Aranda, R. Barroso, J. Nadal, C. Sánchez y N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente).

Problema 244. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.*

Sean α y β números reales tales que $\alpha \neq -2k$, $\alpha \neq 2k-1$, $\beta \neq 2k+2$ y $\beta \neq -2k-1$ para cada entero positivo k. Definimos la sucesión

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha + (-1)^k k}{\beta + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(k+1)}, \qquad n \geq 1,$$

y los límites

$$T(\alpha,\beta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n, \qquad U(\alpha,\beta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n a_n$$

y

$$S(\alpha,\beta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n.$$

a) Probar que los límites existen si $-1 < \alpha + \beta < 1$.

b) Determinar los valores de α y β para los que

$$(\alpha+\beta)S(\alpha,\beta) - 3T(\alpha,\beta) - 2U(\alpha,\beta) > 0.$$

Solución enviada por el proponente (modificada por los editores).

Si $c_n = (-1)^n a_n$, podemos comprobar que

$$\frac{c_{2n}}{c_{2n-1}} = -\frac{\alpha + 2n}{\beta - 2n - 2}, \qquad \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = -\frac{\alpha - 2n - 1}{\beta + 2n + 3}$$

y

$$\frac{c_{2n}}{c_{2n-1}} = 1 + \frac{\beta + \alpha - 2}{2n} + O(n^{-2}), \qquad \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1 - \frac{\beta + \alpha + 2}{2n+1} + O(n^{-2}). \qquad (1)$$

Por tanto, c_n es una sucesión de signo constante, si $n \geq n_0$ para un cierto n_0, y el límite $S(\alpha,\beta)$ existe para $-1 < \alpha + \beta < 1$ como consecuencia del criterio de Raabe. Usando el mismo criterio, se puede deducir que la serie diverge para $|\alpha + \beta| > 1$.

La existencia del límite $S(\alpha,\beta)$ implica de manera obvia la existencia del límite $T(\alpha,\beta)$ para $|\alpha+\beta|<1$.

Observando que $na_n=(-1)^n nc_n$, el criterio de Leibniz asegura la existencia de $U(\alpha,\beta)$ si previamente probamos que nc_n es una sucesión monótona decreciente que tiende a cero.

Es conocido que si la serie de una sucesión b_n monótona y de términos positivos converge, entonces nb_n tiende a cero. De este hecho podemos deducir que nc_n converge a cero ya que (1) implica que c_n es monótona para $n\geq n_1$, para un cierto n_1. Para probar que nc_n es monótona basta tener en cuenta que

$$\frac{c_{2n}}{c_{2n-1}}\frac{2n}{2n-1}=1+\frac{\beta+\alpha-1}{2n}+O(n^{-2})\leq 1,\qquad \text{si } \beta+\alpha<1,$$

y

$$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{-\beta-\alpha-1}{n}+O(n^{-2})\leq 1,\qquad \text{si } \beta+\alpha>-1.$$

Esto prueba el apartado a).

Para probar b) demostraremos que

$$(\beta+\alpha)S(\alpha,\beta)-3T(\alpha,\beta)-2U(\alpha,\beta)+(\beta+3)a_1=0,\qquad |\beta+\alpha|<1. \tag{2}$$

Por ser

$$-(\beta+3)a_1=1-\alpha$$

se tendrá que

$$(\beta+\alpha)S(\alpha,\beta)-3T(\alpha,\beta)-2U(\alpha,\beta)>0,$$

para $|\alpha+\beta|<1$, si y solo si $\alpha<1$.

Para probar (2), escribimos la sucesión c_n/c_{n-1} como

$$c_n\beta+\alpha c_{n-1}+(-1)^{n+1}c_n+(-1)^{n+1}(n+1)c_n+(-1)^n nc_{n-1}=0.$$

Entonces

$$(\beta+\alpha)(-1)^n a_n+\alpha(c_{n-1}-c_n)-(2a_n+a_{n-1})-(na_n+(n-1)a_{n-1})=0.$$

Sumando la identidad anterior para $n=2,\ldots,N$ llegamos a

$$(\beta+\alpha)\sum_{n=2}^{N}(-1)^n a_n+\alpha(c_1-c_N)-\sum_{n=2}^{N}(2a_n-a_{n-1})-\sum_{n=2}^{N}(na_n+(n-1)a_{n-1}),$$

de donde, tomando límite cuando N tiende a infinito, concluimos (2).

No se han recibido otras soluciones.

PROBLEMA 245. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, p su semiperímetro y r y R, respectivamente, los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

a) Probar que si $\lambda \geq 1$, entonces

$$\frac{2p^2}{27} \leq \frac{6rR + \lambda(2p^2 - 6rR)}{3(2+7\lambda)} \leq \frac{2p^2 - 6rR}{21}.$$

b) Probar que si $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces

$$rR \leq \frac{6rR + \lambda(2p^2 - 6rR)}{3(2+7\lambda)} \leq \frac{2p^2}{27}.$$

Solución enviada por Daniel Văcaru, Pitesti, Rumanía.

Considerando la función

$$f(\lambda) = \frac{6rR + \lambda(2p^2 - 6rR)}{3(2+7\lambda)}, \qquad \lambda > 0,$$

se tiene

$$f'(\lambda) = \frac{2(2p^2 - 27rR)}{3(2+7\lambda)^2}.$$

Dando momentánemente por supuesto que

$$2p^2 - 27rR \geq 0, \tag{1}$$

deducimos que la función f es creciente y las desigualdades propuestas son evidentes. En efecto, el apartado a) es equivalente a la desigualdad $f(0) \leq f(\lambda) \leq f(1)$, y el apartado b) a $f(1) \leq f(\lambda) \leq \lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda)$.

Veamos que la desigualdad (1) es cierta. Usando la identidad $rR = \frac{abc}{4p}$, es posible establecer la equivalencia

$$2p^2 \geq 27rR \iff (a+b+c)^3 \geq 27abc,$$

y esta última desigualdad se verifica por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

También resuelto por I. V. Codreanu, R. de la Cruz, J. Nadal, P. Perfetti, B. Salgueiro y el proponente.

PROBLEMA 246. *Propuesto por Nikos Bagis, Aristotle University, Tesalónica, Grecia; y Larry Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, Estados Unidos.*

Probar que

$$\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \cos\phi\cos\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos\phi\cos\theta}}$$

para $0 < \phi < \pi$.

Solución enviada por Emilio Fernández Moral, Logroño, La Rioja.

La identidad trigonométrica

$$1-\cos\phi\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2}\left(1+\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}\right)^2\right)$$

sugiere realizar el cambio de variable $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{z}{2}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}$. Así,

$$1-\cos\phi\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{1+\cos\phi\cos z}, \qquad d\theta = \frac{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}(1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2})}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}\,dz$$

y

$$\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos\phi\cos\theta}} = \int_0^{\pi/2}\frac{dz}{\sqrt{1+\cos\phi\cos z}}.$$

También resuelto por los proponentes.

PROBLEMA 247. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

Sean $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función derivable y $a,b\in(0,1)$, con $a<b$, tales que

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_b^1 f(x)\,dx = 0.$$

Probar que

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \frac{1-a+b}{4}\sup\{|f'(x)| : x\in(0,1)\}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Denotando $M=\sup\{|f'(x)| : x\in(0,1)\}$, probaremos la desigualdad más fuerte

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \le \frac{M}{4}.$$

Aplicando integración por partes, se tiene

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-1)(f(a)+f(b))}{2} - \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx. \quad (1)$$

La continuidad de la función f y las condiciones

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_b^1 f(x)\,dx = 0$$

implican que existen p y q tales que $0<p<a$, $b<q<1$ y $f(p)=f(q)=0$. Así,

$$|f(a)| = \left|\int_p^a f'(x)\,dx\right| \le aM \qquad \text{y} \qquad |f(b)| = \left|\int_b^q f'(x)\,dx\right| \le (1-b)M.$$

Finalmente, usando

$$\left|\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\,dx\right| \le M \int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right| dx = \frac{(b-a)^2 M}{2},$$

de la igualdad (1) concluimos que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| &\le \frac{(b-a)(1+a-b)M}{2} + \frac{(b-a)^2 M}{4}\\ &= \frac{(1-(1+a-b)^2)M}{4} \le \frac{M}{4},\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

También resuelto por T. Aguilar, A. Álamo, R. de la Cruz, B. Salgueiro, P. Perfetti y el proponente.

Problema 248. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, Estados Unidos.*

Probar que

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{x(x^2-\pi^2)}{x^2-e^2}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{1+\pi^2}{1+e^2}\right).$$

Solución enviada por G. C. Greubel, Newport News, Virginia, Estados Unidos.

El resultado es consecuencia de la integral

$$I = \int_C \frac{e^{izf(z^2)}}{z^2+p^2}\,dz \qquad \text{con} \qquad f(w) = \frac{w-a^2}{w-b^2},$$

donde el contorno de integración C aparece descrito en la figura 3.

Puesto que el integrando tiene un único polo simple en el interior de C, por el teorema de los residuos tenemos

$$I = \int_{\Gamma_R \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3} \frac{e^{izf(z^2)}}{z^2+p^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{izf(z^2)}}{z^2+p^2}, ip\right). \tag{1}$$

El camino Γ_R admite la parametrización $z = R\,e^{i\theta}$, con $0 \le \theta \le \pi$, y es claro que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{izf(z^2)}}{z^2+p^2}\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta} f(R^2 e^{2i\theta})}}{R^2 e^{2i\theta}+p^2}\, iRe^{i\theta}\,d\theta = 0.$$

Las integrales a lo largo de los caminos γ_1 y γ_2, que se parametrizan con $z \pm b = \varepsilon\, e^{i\theta}$, con $0 \le \theta \le \pi$, verifican

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} \frac{e^{izf(z^2)}}{z^2+p^2}\,dz = 0.$$

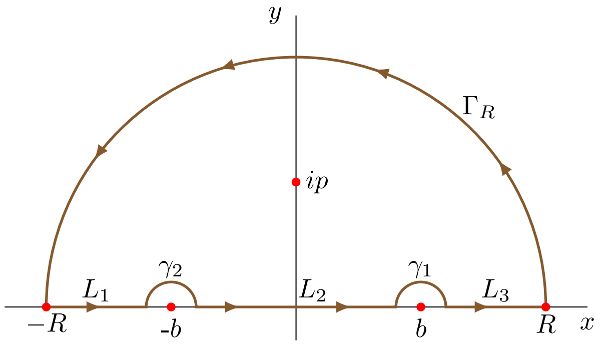

Figura 3: Contorno de integración para la solución del Problema 248.

Además,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{L_1\cup L_2\cup L_3} \frac{e^{izf(z^2)}}{z^2+p^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixf(x^2)}}{x^2+p^2}\,dx.$$

Como

$$2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{izf(z^2)}}{z^2+p^2}, ip\right) = 2\pi i \lim_{z\to i}(z-ip)\frac{e^{izf(z^2)}}{z^2+p^2} = \frac{\pi}{p}\,e^{-pf(-p^2)} = \frac{\pi}{p}\,e^{-p\left(\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\right)},$$

de (1) deducimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixf(x^2)}}{x^2+p^2}\,dx = \frac{\pi}{p}\,e^{-p\left(\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\right)}.$$

Puesto que la parte real de la integral involucra una función par y la parte imaginaria una función impar, llegamos a la identidad

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ixf(x^2)}}{x^2+p^2}\,dx = \frac{\pi}{2p}\,e^{-p\left(\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\right)},$$

de la que concluimos la integral propuesta tomando $a=\pi$, $b=e$ y $p=1$.

También resuelto por B. Salgueiro y el proponente.