Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2015.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 259. *Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.*

Sean $0 < a_i < b_i$, con $i = 1, \dots, n$, números reales y

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i/b_i \le x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le x_i/a_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Calcular

$$\iint \cdots \int_A \frac{dx_1\, dx_2\, \cdots\, dx_n}{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Problema 260. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

Sean A', B' y C', respectivamente, puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo acutángulo ABC, tales que $\angle BA'C' = \angle CA'B'$, $\angle CB'A' = \angle AB'C'$ y $\angle AC'B' = \angle BC'A'$. Encontrar la razón S'/S entre las áreas de los triángulos $A'B'C'$ y ABC. Probar que $S'/S \le 1/4$. ¿Cuál es el triángulo $A'B'C'$?

PROBLEMA 261. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En el triángulo escaleno ABC de incentro I, sea M_A el punto medio del lado BC. La recta que pasa por M_A y es paralela al lado AB corta a la recta BI en el punto P y a la recta CI en el punto Q. La recta que pasa por M_A y es paralela al lado AC corta a BI en el punto R y a CI en el punto S. Las rectas PS y QR se cortan en el punto J_A.

a) Probar que la recta IJ_A es paralela al lado BC.

b) Si se construyen de forma análoga, a partir de los puntos medios M_B y M_C de los lados CA y AB, puntos J_B y J_C, demostrar que los puntos J_A, J_B y J_C están alineados.

PROBLEMA 262. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Rumanía.*

Sea $n \geq 1$ un número entero. Probar que

$$\int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^n}\,dx = \frac{\pi}{2(n+1)}\cot\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \frac{\log(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)\log\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

PROBLEMA 263. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean a y b números reales positivos y $n \geq 3$ un número entero. Si $a_1, \ldots, a_n$ son número reales mayores que uno y tales que $p_n^a > \max_{1\leq k\leq n} a_k^b$, siendo $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, probar que

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{p_n^a/a_k^b} a_k \geq \frac{n}{an-b}.$$

PROBLEMA 264. *Propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumanía.*

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden tres sobre los reales.

a) Si $\det A = \det B = 3$ y $\det(A+B) = -1$, probar que $\det(3A+2B)\cdot\det(2A+3B) \leq 0$.

b) Si $AB = BA$, $\det B = 0$, $\det(A+B) = 3$ y $\det(A-B) = \det(A^2+B^2) = 1$, calcular $\det(A^3+B^3)$ y $\det(A^4+B^4)$.

Soluciones

Nota. En el anterior número de la sección, las soluciones a los problemas 230 y 231 realizadas conjuntamente por N. Stanciu y T. Zvonaru no fueron incluidas en el listado de las recibidas. Sentimos la omisión.

Problema 235. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Un triángulo se dice pseudorrectángulo si la diferencia entre dos de sus ángulos es $\pi/2$. Dado ABC un triángulo pseudorrectángulo en el que el ángulo en B menos el ángulo en C es $\pi/2$, se pide:

a) Demostrar que el lado BC es paralelo al diámetro AD de la circunferencia circunscrita y que la altura AA' es tangente a esa circunferencia y a la que pasa por los puntos medios de los tres lados.

b) Probar que

$$\frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

Solución enviada por Ricardo Barroso Campos, profesor jubilado, Sevilla.

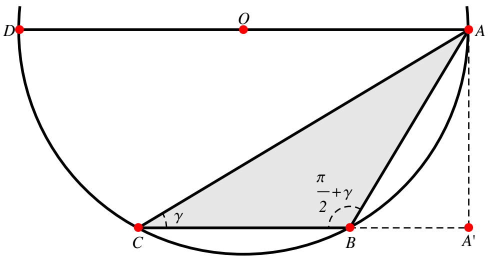

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 235 (primera parte del apartado a) y apartado b)).

Supongamos que $\angle ABC = \gamma$; entonces, por ser ABC un triángulo pseudorrectángulo, se tiene $\angle CBA = \frac{\pi}{2} + \gamma$. Siguiendo la figura 1, es evidente que $\angle COA = \pi - 2\gamma$. Como el triángulo COA es isósceles, deducimos que $\angle OCA = \angle OAC = \gamma$ y, por tanto, que los segmentos BC y CD son paralelos.

Tracemos ahora la circunferencia que pasa por M_A, M_B y M_C, puntos medios de los lados BC, CA y AB, respectivamente; véase la figura 2. Dicha circunferencia cortará al lado BC, además de en M_A, en un punto A_1. Puesto que abarcan el mismo arco, resulta evidente que $\angle M_BA_1C = \angle M_BM_CM_A$. Además, por estar comprendido entre segmentos paralelos, tenemos $\angle M_BM_CM_A = \angle M_BCM_A = \gamma$ y, por tanto, el triángulo CM_BA_1 es isósceles. De este modo, el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo CAA_1 será M_B y, por ser CA un diámetro de la

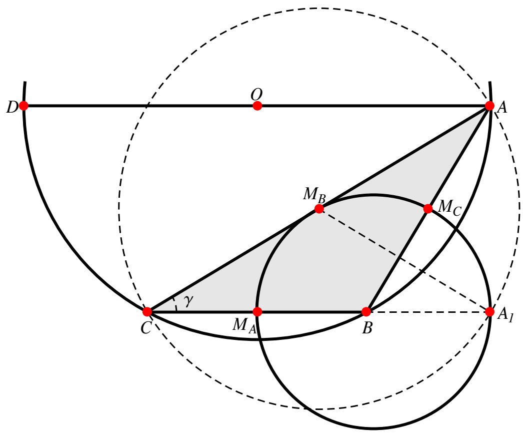

Figura 2: Esquema para la solución del Problema 235 (segunda parte del apartado a)).

misma, obtenemos que $A_1 = A'$, el pie de la perpendicular al lado BC desde el vértice A. Entonces resulta evidente que el segmento AA' es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo $M_AM_BM_C$, concluyendo el apartado a).

La identidad a probar en el apartado b) es equivalente a

$$1 = \frac{AA'^2}{AB^2} + \frac{AA'^2}{AC^2}$$

y es evidente, ya que a partir de la figura 1 se observa que

$$\frac{AA'}{AC} = \operatorname{sen}(\angle A'CA) = \operatorname{sen}\gamma \quad \text{y} \quad \frac{AA'}{AB} = \operatorname{sen}(\angle A'BA) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = \cos\gamma.$$

También resuelto por M. Amengual, C. Beade, J. Benítez, R. de la Cruz, R. S. Eléxpuru, A. Fanchini, D. Lasaosa, J. Nadal, R. Peiró, A. Sáez, B. Salgueiro, D. Văcaru y el proponente.

PROBLEMA 236. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. Cassà de la Selva, Cassà de la Selva, Girona.*

Determinar un múltiplo de 2013 que sea capicúa y tal que en su expresión decimal intervengan todos los números del 1 al 9 pero no el cero.

Solución enviada por Jon Asier Bárcena Petisco (estudiante), Universidad del País Vasco UPV/EHU, Leioa, Vizcaya.

Uno de los muchos posibles candidatos es

$$\begin{aligned} S = {} & 12345678911111111111111111111 \\ & 12345678911111111111111111111 \\ & 11111111111111111111987654321 \\ & 11111111111111111111987654321. \end{aligned}$$

Dado que tiene 120 cifras, lo hemos dividido en 4 bloques para agilizar la demostración. Asimismo, como $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, para ver que es múltiplo de 2013 basta ver que es múltiplo de 3, 11 y de 61.

Tenemos que S es múltiplo de 3 porque la suma de sus cifras, $4(45 + 21) = 264$, lo es. Sabemos que S es múltiplo de 11 porque todo número capicúa que posee un número par de cifras lo es. Por último, dado que en el cuerpo $\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}$ el número 10^{30} es -1, que el primer bloque es el segundo por 10^{30}, y que el tercero es como el cuarto por 10^{30}, aplicando congruencias verificamos que S es múltiplo de 61.

Este problema se puede generalizar a buscar un número S que sea múltiplo capicúa de n y tal que en su expansión decimal intervengan todos los números del 1 al 9, pero no el 0. Suponemos que n no es múltiplo de 10, caso en el que claramente no existe tal número.

Nuestra primera suposición será que 10 y n son coprimos. En ese caso, existirá un $k \geq 9$ tal que $10^k = 1$ en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Con ese k definimos el número que buscamos:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} 123456789\underbrace{1\ldots1}_{k-9 \text{ unos}} \cdot 10^{ik} + \sum_{i=n}^{2n-1} \underbrace{1\ldots1}_{k-9 \text{ unos}}987654321 \cdot 10^{ik}. \tag{1}$$

El número que proponemos es claramente capicúa, y aplicando módulo n vemos que sumamos n veces el mismo número, luego S será múltiplo de n.

Ahora supondremos que $n = 5^k$. Para que exista, es condición suficiente (y necesaria) encontrar un número de k cifras múltiplo de 5^k que no tenga el 0. La razón es que, al aplicar congruencias, cualquier dígito a partir de la k-ésima cifra se va a anular, pues $10^{k+r} \equiv 0 \mod 5^k$. Con lo cual, a partir de la k-ésima cifra podemos poner los dígitos que queramos para lograr un capicúa.

Lo demostraremos por inducción (5 es el caso inicial). Supongamos que para $k-1$ el número x satisface esas propiedades. Nos basta con encontrar un d en $\{1, \ldots, 9\}$ tal que $d10^{k-1} + x$ es múltiplo de 5^k. Como $d10^{k-1} + x = 5^{k-1}(d2^{k-1} + x')$ y la ecuación $d2^{k-1} \equiv -x' \mod 5$ tiene una solución en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, existe el d que buscamos y, por tanto, S. Para $n = 2^k$ el procedimiento es análogo.

Ahora vamos al caso general $n = a^{k_1}m$, donde a y m son coprimos y $a = 2$ o $a = 5$. Basta construir S para que sea múltiplo de a^{k_1} y de m a la vez. Para garantizarnos lo primero, asignamos a las últimas k_1 cifras un múltiplo de a^{k_1}. Después, con un $k_2 \geq 9 + k_1$ tal que 10^{k_2} sea 1 en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, extendemos esa terminación y usamos la técnica de la suma espejo utilizada en (1).

De hecho, este sistema es generalizable a base b, a cuyos dígitos llamaremos $\{d_0, \ldots, d_{b-1}\}$. La justificación es igual cuando n y b son coprimos. Sin embargo, el caso en que todo divisor primo de n también lo es de b presenta unas pequeñas diferencias. Por último, cuando n no es múltiplo de b se generaliza de la misma forma que en base 10.

En el segundo caso, cuando los divisores primos de n también lo son de b, vamos a demostrar por inducción que si k es el menor número tal que $n \mid b^k$, entonces existe un número x de k cifras, ninguna d_0, tal que x es un múltiplo de n. El caso $k = 1$ es trivial, ya que en este caso n divide a b y podemos tomar $x = d_n$. Sea ahora $k \geq 2$; como n divide a b^k, pero no a b^{k-1}, (n, b^{k-1}) no divide a b^{k-2}, pero sí a b^{k-1}. Aplicando la hipótesis de inducción a (n, b^{k-1}) vemos que existe un múltiplo suyo, digamos y, de $k-1$ cifras no nulas. Como antes, hay que hallar un d tal que $db^{k-1} + y \equiv 0 \mod n$. Sacando factor común se simplifica la ecuación a $dr + y' \equiv 0$ $\mod m$, donde

$$r = \frac{b^{k-1}}{(n, b^{k-1})}, \qquad y' = \frac{y}{(n, b^{k-1})} \qquad \text{y} \qquad m = \frac{n}{(n, b^{k-1})}.$$

Esa ecuación tiene solución con d en $\{d_1, \ldots, d_m\}$ dado que $(r, m) = 1$. Finalmente, tomamos $x = dr + y$ una de dichas soluciones.

Por último, debemos resaltar que de esta manera podemos construir infinitos números que satisfagan las condiciones del enunciado.

También resuelto por R. de la Cruz, B. Salgueiro, D. Lasaosa y el proponente (dos soluciones).

PROBLEMA 237. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universidad Barcelona Tech, Barcelona.*

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales tales que $x_i \in [a, b]$, $1 \le i \le n$, siendo $0 < a < b$. Probar que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \le \frac{(a^2+b^2)^3}{6a^2b^2}.$$

Solución enviada por Paolo Perfetti, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.

Obviamente, la desigualdad propuesta viene implicada por

$$b^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \le \frac{(a^2+b^2)^3}{6a^2b^2}. \tag{1}$$

La desigualdad de Kantorovich establece que si $z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 1$ y $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} z_i^2 \le \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n};$$

luego tomando $z_i = 1/\sqrt{n}$ y $\lambda_i = x_i$ nos da

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \le \frac{(x_1+x_n)^2}{4x_1x_n}.$$

De este modo, teniendo en cuenta la desigualdad

$$\frac{(x_1+x_n)^2}{4x_1x_n} \le \frac{(a+b)^2}{4ab},$$

que se sigue de la condición $0 < a < x_1 \leq x_n < b$, para obtener (1) basta comprobar que

$$b^2 \frac{(a+b)^2}{4ab} \leq \frac{(a^2+b^2)^3}{6a^2b^2}. \tag{2}$$

Tomando $b = a + h$, para un cierto $x > 0$, (2) es equivalente a

$$2h^6 + 9ah^5 + 15a^2h^4 + 7a^3h^3 - 3a^4h^2 + 4a^6 \geq 0$$

y ésta se cumple ya que, por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica,

$$4a^6 + 15a^2h^4 - 3a^4h^2 \geq 4\sqrt{15}a^4h^2 - 3a^4h^2 > 0.$$

También resuelto por R. de la Cruz, D. Lasaosa y el proponente.

Problema 238. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Universidad Técnica de Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Los números de Stirling de primera especie, denotados por $s(n,k)$, están definidos mediante la función generatriz

$$z(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) z^k.$$

Sean n y m números enteros tales que $m \geq 2$ y $n > m-1$. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{(\log(1+x))^n}{x^m}\,dx = \frac{n!}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{m-1} s(m-1,k)\Big(\zeta(n+1-k) - S_m\Big)$$

donde ζ denota la función zeta de Riemann, $S_2 = 0$ y $S_m = \sum_{i=1}^{m-2} 1/i^{n+1-k}$ para $m \geq 3$.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Aplicando el cambio de variable $x = e^y - 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{(\log(1+x))^n}{x^m}\,dx &= \int_0^\infty \frac{y^n e^y}{(e^y-1)^m}\,dy = \int_0^\infty \frac{y^n e^{-(m-1)y}}{(1-e^{-y})^m}\,dy \\
&= \int_0^\infty y^n e^{-(m-1)y} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-m}{j} (-1)^j e^{-jy}\,dy \\
&= \int_0^\infty y^n e^{-(m-1)y} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+m-1}{m-1} e^{-jy}\,dy \\
&= \int_0^\infty y^n e^{-(m-1)y} \sum_{j=m-1}^{\infty} \binom{j}{m-1} e^{-(j-m+1)y}\,dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty y^n \sum_{j=m-1}^{\infty} \binom{j}{m-1} e^{-jy}\, dy \\
&= \sum_{j=m-1}^{\infty} \binom{j}{m-1} \int_0^\infty y^n e^{-jy}\, dy = n! \sum_{j=m-1}^{\infty} \binom{j}{m-1} \frac{1}{j^{n+1}} \\
&= \frac{n!}{(m-1)!} \sum_{j=m-1}^{\infty} \frac{j(j-1)\cdots(j-m+1)}{j^{n+1}} \\
&= \frac{n!}{(m-1)!} \sum_{j=m-1}^{\infty} \frac{1}{j^{n+1}} \sum_{k=1}^{m-1} s(m-1,k) j^k \\
&= \frac{n!}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{m-1} s(m-1,k) \sum_{j=m-1}^{\infty} \frac{1}{j^{n+1-k}} \\
&= \frac{n!}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{m-1} s(m-1,k) \Big(\zeta(n+1-k) - S_m \Big),
\end{aligned}
$$

como se solicitaba. El intercambio de la suma y la integral es posible por la positividad de todos los factores involucrados.

También resuelto por M. Glasser, A. Kotronis, D. Lasaosa, B. Salgueiro y el proponente.

NOTA. D. Lasaosa en su solución denota por $T(n,m)$ la integral a evaluar y por $U(n,m)$ el lado derecho de la identidad propuesta, demuestra que ambas sucesiones satisfacen la misma relación de recurrencia

$$
R(n+1,m+1) = \frac{n+1}{m} R(n,m) - \frac{m-1}{m} R(n+1,m),
$$

y comprueba que $T(n,2) = U(n,2)$ para todo $n \geq 2$, lo que le permite concluir la igualdad de ambas sucesiones.

PROBLEMA 239. *Propuesto por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.*

Para cada entero no negativo j, definimos $\{a_{j,k}\}_{k\geq 0}$ mediante la identidad

$$
(\operatorname{arc\,sen} x)^j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} x^k, \qquad |x| < 1.
$$

Probar que, para $j,k \geq 2$, se verifica la relación

$$
k(k-1) a_{j,k} = j(j-1) a_{j-2,k-2} + (k-2)^2 a_{j,k-2}.
$$

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Denotemos $f_j(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)^j$. Entonces $f_j'(x) = \frac{j}{(1-x^2)^{1/2}} f_{j-1}(x)$ y

$$\begin{aligned} f_j''(x) &= \frac{j}{(1-x^2)^{1/2}} f_{j-1}'(x) + \frac{jx}{(1-x^2)^{3/2}} f_{j-1}(x) \\ &= \frac{j(j-1)}{1-x^2} f_{j-2}(x) + \frac{x}{1-x^2} f_j'(x), \end{aligned}$$

que puede reescribirse como

$$f_j''(x) = j(j-1) f_{j-2}(x) + x^2 f_j''(x) + x f_j'(x).$$

Ahora, derivando término a término en las series, cosa que puede hacerse en las series de potencias dentro del círculo de convergencia, resulta

$$f_j''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_{j,k} x^{k-2}$$

y

$$\begin{aligned} & j(j-1) f_{j-2}(x) + x^2 f_j''(x) + x f_j'(x) \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} j(j-1) a_{j-2,k} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_{j,k} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_{j,k} x^k \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(j(j-1) a_{j-2,k} + k^2 a_{j,k} \Big) x^k \\ &\qquad = \sum_{k=2}^{\infty} \Big(j(j-1) a_{j-2,k-2} + (k-2)^2 a_{j,k-2} \Big) x^{k-2}, \end{aligned}$$

lo que da como consecuencia la relación

$$k(k-1) a_{j,k} = j(j-1) a_{j-2,k-2} + (k-2)^2 a_{j,k-2}.$$

También resuelto por A. Castaño, D. Lasaosa, B. Salgueiro y el proponente.

Problema 240. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea ABC un triángulo isósceles con $AC = BC$ y sean M y N, respectivamente, los puntos medios de los lados BC y AB. Si la circunferencia inscrita al triángulo ABC es tangente al lado BC en D y corta al segmento MN en otro punto $E \neq N$, demostrar que $AD = AE$.

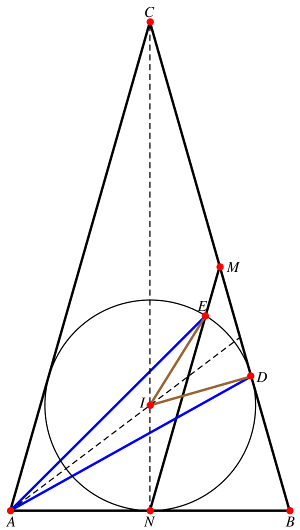

Figura 3: Esquema para la solución del Problema 240.

Solución enviada por Ricard Peiró i Estruch, Valencia.

Siguiendo la notación de la figura 3, si I es el incentro del triángulo ABC, es claro que $ID = IE$. Si suponemos que $\angle CAB = \angle CBA = 2\alpha$, se tiene que $\angle AIN = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y $\angle NID = \pi - \angle CBA = \pi - 2\alpha$ (notar que $NIDB$ es un cuadrilátero y los ángulos $\angle NID$ y $\angle DBN$ son rectos) e inmediatamente deducimos que

$$\angle AID = \angle AIN + \angle NID = \frac{3\pi}{2} - 3\alpha.$$

Por ser MN paralelo al lado AC, los triángulos NMB y NCM son ambos isósceles, luego $\angle CNM = \angle NCM = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ y, por tanto, $\angle CIE = 2\angle CNM = \pi - 4\alpha$. Como $\angle AIC = \pi - \angle AIN = \frac{\pi}{2} + \alpha$, se tiene

$$\angle AIE = \angle AIC + \angle CIE = \frac{3\pi}{2} - 3\alpha,$$

de donde se concluye que los triángulos AID y AIE son congruentes y que $AD = AE$, como queríamos demostrar.

También resuelto por M. Amengual; R. Barroso; D. M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente); J. Benítez; R. de la Cruz; A. Fanchini; D. Lasaosa; J. Nadal; B. Salgueiro; C. Sánchez y el proponente.