# Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

**Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero**

*Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico* `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2012.*

*Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.*

## Problemas

Problema 187. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Una circunferencia de centro $O$ es inscriptible en una cuadrilátero $ABCD$. La recta que une los incentros $M$ y $N$ de los triángulos $ABC$ y $ACD$ corta a la diagonal $AC$ en un punto $K$. Demostrar que las rectas $BN$, $DM$ y $KO$ son concurrentes.

Problema 188. *Propuesto por Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión definida mediante $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$ para $n \geq 1$. Evaluar $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$.

Problema 189. *Propuesto por Yakub N. Aliyev, Qafqaz University, Azerbaiyán.*

En un triángulo $ABC$, sean $a$ la longitud del lado $BC$, $h$ la longitud de la altura desde el vértice $A$ hasta el lado $BC$ y $r$ el radio de la circunferencia inscrita. Probar que $a\sqrt{h-2r} \geq 2r\sqrt{h}$.

PROBLEMA 190. *Propuesto por Pablo Fernández Refolio (estudiante), Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.*

Denotando por $A$ la constante de Glaisher-Kinkelin, definida como

$$A = \lim_{n\to\infty} n^{-n^2/2-n/2-1/12} e^{n^2/4} \prod_{k=1}^{n} k^k = 1.2824\ldots,$$

probar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( e^{-2n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n^2+n-1/6} \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{A^4}.$$

PROBLEMA 191. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \to (0,1]$ una función integrable y sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \left( \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} g(x)\,dx \right)^n = \exp\left( \int_0^1 g(x) \log f(x)\,dx \right),$$

y

$$\lim_{n\to\infty} n \left( \left( \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} g(x)\,dx \right)^n - \exp\left( \int_0^1 g(x) \log f(x)\,dx \right) \right)$$
$$= \frac{1}{2} \exp\left( \int_0^1 g(x) \log f(x)\,dx \right) \left( \int_0^1 g(x) \log^2 f(x)\,dx - \left( \int_0^1 g(x) \log f(x)\,dx \right)^2 \right).$$

PROBLEMA 192. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Determinar, por construcción euclídea, los puntos $P$ y $Q$ sobre el lado $BC$ de un triángulo dado $ABC$ tales que $\angle BAP = \angle CAQ$ y $CQ = 2 \cdot BP$.

## Soluciones

PROBLEMA 163. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea $K$ el punto medio de un segmento dado $BB'$. Sean $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ dos circunferencias tangentes a $BB'$ en $K$ de radios respectivos $R_1$ y $R_2$ verificando $R_1 > R_2 > BK$. Supongamos que las rectas tangentes a $\Gamma_2$ pasando por $B$ y $B'$ se cortan en un punto $A$ formando un ángulo $\alpha$. Sean $M$ y $N$ los puntos de corte de $AB$ con $\Gamma_1$, y $M'$ y $N'$ sus simétricos respecto a $AK$. Supongamos que la perpendicular a $AB$ pasando por $N$ corta a $AB'$ en $C'$ y que la perpendicular a $AB'$ pasando por $M'$ corta a $AB$ en $C$. Probar que la recta $CC'$ es tangente a $\Gamma_2$ si y sólo si $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

*Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.*

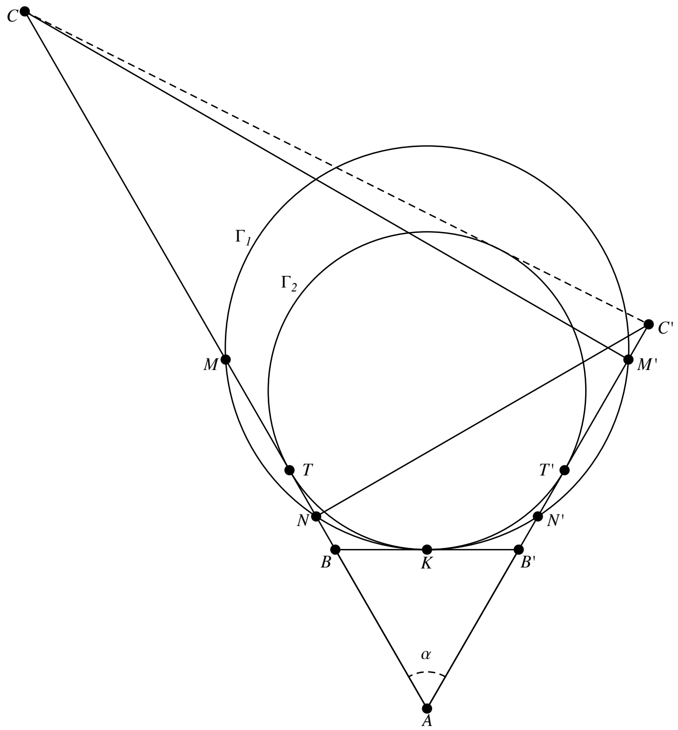
Demostramos en primer lugar el siguiente

Lema. *Sea $\Gamma$ una circunferencia y $X$ el punto exterior a ella donde se cortan dos rectas tangentes a $\Gamma$ en $T$ y $T'$. Sean ahora $Y$ y $Z$ puntos respectivamente en las rectas $XT$ y $XT'$. Entonces, $YZ$ es tangente a $\Gamma$ si y sólo si $XY + XZ - YZ = XT + XT'$ cuando $T$ y $T'$ están respectivamente en el interior de $XY$ y $XZ$; si y sólo si $XY + XZ + YZ = 2XT$ cuando $Y$ y $Z$ están respectivamente en el interior de $XT, XT'$; y si y sólo si $XY + YZ - XZ = XT + XT'$ cuando $T$ está en el interior de $XY$ y $X$ en el interior de $ZT'$.*

Demostración. Los tres casos se demuestran de forma análoga, basándose la demostración en que $\Gamma$ es, respectivamente en los tres casos, la circunferencia inscrita al triángulo $XYZ$, la exinscrita tangente al lado $YZ$, y la exinscrita tangente al lado $XY$, si y sólo si se cumple la relación de distancias dada. En el primer caso, nótese que, dados $X$, $Y$ y $\Gamma$ como se describe, siempre se puede encontrar $Z$ en $XT'$ tal que $\Gamma$ sea la circunferencia inscrita al triángulo $XYZ$, cumpliéndose entonces la relación dada entre distancias. Ahora bien, como $XT = XT'$ son dados, fijado $Y$, el conjunto de puntos $Z$ del plano tal que $XZ - YZ = XT + XT' - XY$ es, de las dos ramas de una hipérbola de focos $X$ e $Y$, la más cercana al foco $X$ (sin pérdida de generalidad, pues en caso contrario podemos invertir los papeles de $Y$ y $Z$). Esta rama cortará a una recta $XT'$ dada que pasa por el foco $X$ en a lo sumo dos puntos, uno a cada lado del eje de simetría $XY$, luego existe uno y sólo un punto que cumple la relación dada entre distancias situado en el trozo apropiado de la recta $XT'$, y como dicho punto debe entonces coincidir con el $Z$ antes construido, tal que $\Gamma$ es la circunferencia inscrita a $XYZ$, la relación de distancias es equivalente a la condición de tangencia. Los otros dos casos se demuestran de forma análoga. □

La recta $AK$ es obviamente la mediatriz de $BB'$, y el eje de simetría de la figura formada por la recta $BB'$ y las circunferencias $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$, pues al ser perpendicular a $BB'$ en el punto donde son tangentes $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$, pasa por sus centros, y las tangentes a $\Gamma_2$ que pasan por $B$ y $B'$ distintas de $BB'$ han de ser simétricas respecto de $AK$. Nótese que, por esta simetría, podemos intercambiar los papeles de $AB$ y $AB'$ y de los puntos definidos en ellas. Podemos entonces también intercambiar los papeles de $M$ y $N$, y asumir sin pérdida de generalidad que $M$ es el punto de corte de $\Gamma_1$ más cercano a $A$.

Cuando $\alpha = 90°$ el punto $C$ no se puede definir al ser paralelas la recta $AB$ y la perpendicular a $AB'$ por $M$, y análogamente tampoco se puede definir $C'$. Si $\alpha > 90°$, los puntos $C$ y $C'$ están claramente en el semiplano opuesto a $\Gamma_2$ respecto a $BB'$. Si además consideramos las cuatro regiones en que queda dividido el plano por las rectas $AB$ y $AB'$, nótese que $C$ y $C'$ están claramente en las semirrectas $BA$ y $B'A$, más allá de $A$, con lo que nunca pueden cortar o ser tangentes a la región del plano delimitada por el ángulo $\angle BAB'$, en la que se encuentra $\Gamma_2$. Por lo tanto, para que $CC'$ sea tangente a $\Gamma_2$, ha de ser necesariamente $\alpha < 90°$, cosa que asumiremos en el resto de la solución.




Esquema para la solución del Problema 163.

Como los triángulos $ANC'$ y $AM'C$ son rectángulos, respectivamente, en $N$ y $M'$, con $\angle NAC' = \angle M'AC = \alpha$, tenemos que $AC = \frac{AM'}{\cos\alpha}$ y $AC' = \frac{AN}{\cos\alpha}$, con lo que al ser $\angle M'AC = \angle NAC' = \alpha$, los triángulos $CAC'$ y $M'AN$ son semejantes. Se tiene entonces que $CC' = \frac{M'N}{\cos\alpha}$.

Supongamos en primer lugar que $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ están en el mismo semiplano respecto de la recta $BB'$. La potencia de $A$ respecto de $\Gamma_1$ es $AM \cdot AN = h(2R_1 + h)$, donde $h = AK$ es la altura del triángulo isósceles $ABB'$. La mediatriz de la cuerda $MN$ pasa por el centro $O_1$ de $\Gamma_1$, luego como la proyección $P$ de $O_1$ sobre $AB$ está a una distancia $(R_1 + h)\cos\frac{\alpha}{2}$ de $A$ y coincide con el punto medio de $MN$, se tiene que $AM + AN = 2(R_1 + h)\cos\frac{\alpha}{2}$. Deducimos entonces que

$$MN^2 = (AN - AM)^2 = (AN + AM)^2 - 4AM \cdot AN = 4R_1^2 - 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}\,(R_1 + 2h)^2\,.$$

Ahora bien, por el teorema de Ptolomeo aplicado al cuadrilátero $MNN'M'$,

$$\begin{aligned} M'N^2 &= M'N \cdot MN' = MN^2 + MM' \cdot NN' = MN^2 + 4AM \cdot AN\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2} \\ &= 4R_1^2 - 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}\,(R_1 + 2h)^2 + 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}\,h(2R_1 + h) = 4R_1^2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

es decir, $M'N = 2R_1 \cos\frac{\alpha}{2}$, con lo que

$$AM' + AN - M'N = 2h\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \text{y} \qquad AC' + AC - CC' = \frac{2h\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

por la semejanza. Llamando $T$ y $T'$, respectivamente, a los puntos donde las rectas $AB$ y $AB'$ son tangentes a $\Gamma_2$, tenemos que $AT = AT' = AB + BT = AB + BK$, por ser $BB'$ tangente a $\Gamma_2$ en $K$. Ahora bien, $BK = AB\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, y $h = AB\cos\frac{\alpha}{2}$, con lo que $AC' + AC - CC' = AT + AT'$ si y sólo si

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2},$$

o, de manera equivalente,

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$

lo que nos da

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1}{2},$$

es decir, si y sólo si $\alpha = 60°$. Por el lema inicial, $CC'$ es tangente a $\Gamma_2$ si y sólo si $AC' + AC - CC' = AT + AT'$, luego si y sólo si $\alpha = 60°$, y hemos concluido.

Para el caso en que $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ estén en semiplanos opuestos respecto a la recta $BB'$, el procedimiento es análogo, sólo que se parte de que la potencia de $A$ respecto de $\Gamma_1$ es $AM \cdot AN = h(2R_1 - h)$, y se demuestra, sin pérdida de generalidad al poder invertirse $C$ y $C'$, que $AC' + CC' - AC = AT + AT'$ si y sólo si $\alpha = 60°$, concluyéndose de forma idéntica.

*También resuelto por el proponente.*

Nota. El proponente advierte que, cuando $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ están en el mismo semiplano respecto de la recta $BB'$, $\Gamma_2$ es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $ACC'$.

Problema 164. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Rumanía.*

Sean $a$, $b$ y $\alpha$ números reales no negativos y $\beta$ un número real positivo. Evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n^2+kn+a)^\alpha}{(n^2+kn+b)^\beta}.$$

*Solución compuesta por los editores basada en las enviadas por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, y Javier A. Múgica de Rivera, Ribadeo, Lugo.*

Si denotamos por $L$ el valor del límite requerido, veamos que

$$L = \begin{cases} \infty, & \alpha - \beta > -1/2, \\ 2(\sqrt{2} - 1), & \alpha - \beta = -1/2, \\ 0, & \alpha - \beta < -1/2. \end{cases}$$

Es obvio que cada sumando es positivo, con lo que la suma también lo es. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \geq b$. Así, para todo $n \geq a$, se tiene claramente que $3n^2 > n^2 + kn + a$ y $n^2 + kn + b > n^2$, con lo que cada sumando es mayor que $\frac{1}{3^\beta} n^{2\alpha-2\beta}$ y menor que $3^\alpha n^{2\alpha-2\beta}$. Por tanto, se cumple que

$$3^\alpha \lim_{n\to\infty} n^{2\alpha-2\beta+1} \geq L \geq \frac{1}{3^\beta} \lim_{n\to\infty} n^{2\alpha-2\beta+1}.$$

Las cotas en la estimación anterior divergen si $2\alpha - 2\beta + 1 > 0$ y tienden a cero si $2\alpha - 2\beta + 1 < 0$. Nos resta tan sólo estudiar el caso en el que $\alpha - \beta = -\frac{1}{2}$, para el que se tiene

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn + b}} \left( \frac{n^2 + kn + a}{n^2 + kn + b} \right)^\alpha.$$

En este caso podemos hacer la descomposición $L = L_1 + L_2 + L_3$, donde

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn + b}} \left( \left( \frac{n^2 + kn + a}{n^2 + kn + b} \right)^\alpha - 1 \right),$$

$$L_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn + b}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right) \quad \text{y} \quad L_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n + k}}.$$

Para acotar $L_1$ y $L_2$ usaremos la desigualdad de Bernoulli $(1 + x)^r \leq 1 + rx$, valida para $x > -1$ y $0 \leq r \leq 1$, y su generalización

$$(1 + x)^r \leq 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots + \binom{r}{k} x^k,$$

que se cumple para $x > -1$ y $k < r \leq k + 1$. Esta generalización puede obtenerse mediante un sencillo argumento de inducción.

Usando la generalización de la desigualdad de Bernoulli, podemos asegurar la existencia de una constante positiva $C$ tal que

$$\left( \frac{n^2 + kn + a}{n^2 + kn + b} \right)^\alpha - 1 \leq \left( 1 + \frac{a - b}{n^2 + kn + b} \right)^\alpha - 1 \leq \frac{C}{n^2},$$

luego $0 \leq L_1 \leq \frac{C}{n^2}$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} L_1 = 0$. La desigualdad de Bernoulli clásica nos da que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn + b}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right| \leq \frac{C}{n^3},$$

de donde deducimos inmediatamente que $\lim_{n\to\infty} L_2 = 0$. Finalmente, a partir de las desigualdades

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}},$$

tendremos que

$$\frac{2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1})}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} < \frac{2(\sqrt{2n} - \sqrt{n})}{\sqrt{n}},$$

luego $\lim_{n\to\infty} L_3 = 2(\sqrt{2} - 1)$ y habremos acabado.

*También resuelto por A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.*

Problema 165. *Propuesto por Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sea $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Probar que la serie

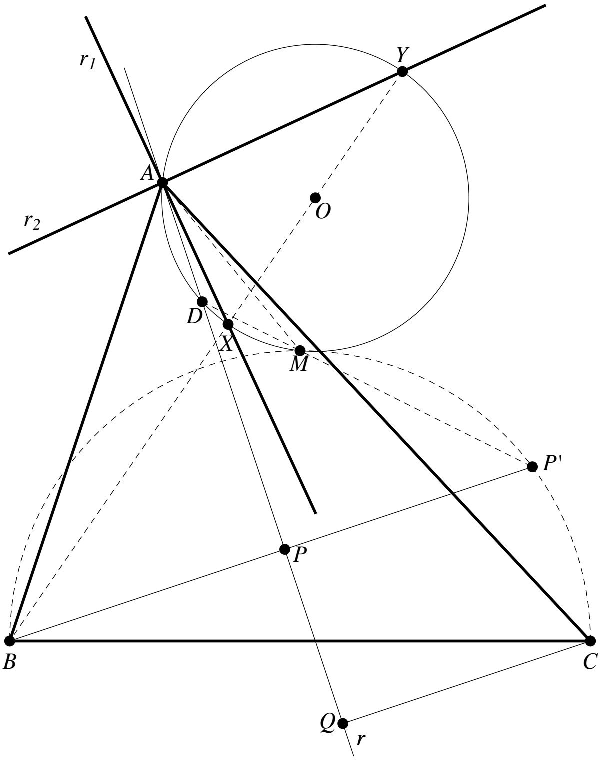
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(a_0 + \cdots + a_n)^r}$$

converge si y sólo si $r > 1$.

*Comentario enviado (independientemente) por Emilio Fernández Moral, I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño, y por Perfetti Paolo, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

El resultado contenido en esta propuesta es conocido como teorema de Abel-Dini y es frecuente encontrarlo en la literatura sobre series. En el clásico *Theory and application of infinite series* de Konrad Knopp (reimpresión de 1954 de la segunda edición inglesa de 1951 y editado por Blackie & Son Limited), en la pág. 290, se comenta que la divergencia para $r \leq 1$ fue publicada por Abel en una nota aparecida en *J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal)* del año 1828, n.º 3, págs. 79–82. Para el resultado completo referencia el trabajo de U. Dini titulado *Sulle serie a termini positivi* publicado en *Annali Univ. Toscana*, n.º 9, 1867. Sin embargo, Knopp indica que Abel ya conocía previamente la convergencia para $r > 1$, puesto que entre sus escritos póstumos se encontró una prueba que apareció en el segundo volumen de sus *Œuvres complètes*, 1881, págs. 197–201. En la referencia *Inequalities* de G. Hardy, J. E. Littlewood y G. Pólya (reimpresión de 1988 de la segunda edición de 1952, editada por Cambridge University Press), lo atribuyen en exclusiva a Abel.

*Han remitido solución D. Lasaosa, J. A. Múgica, M. Omarjee, P. Perfetti, A. Stadler, J. Vinuesa y el proponente.*




Esquema para la solución del Problema 166.

PROBLEMA 166. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Por el vértice $A$ de un triángulo $\triangle ABC$ se traza una recta variable $r$. Si los vértices $B$ y $C$ se proyectan sobre $r$ en $P$ y $Q$, respectivamente, determinar la posición de $r$ para que $BP^2 + CQ^2$ sea máximo y mínimo.

*Solución enviada por el proponente.*

Desde una recta $r$ pasando por $A$, trazando la semicircunferencia de diámetro $BC$ y prolongando $BP$ hasta que la corte en otro punto $P'$, es obvio que $PP' = QC$.

Por otra parte, si giramos el punto $P'$ un ángulo de $90°$ en torno al punto $P$, obtenemos el punto $D$ de modo que $BD^2 = BP^2 + QC^2$. Los valores extremos de $BP^2 + CQ^2$ coinciden con los de $BD^2$.

Como el triángulo $PP'D$ es rectángulo e isósceles, el ángulo $\angle PP'D = 45°$ y entonces, con independencia de la elección de $r$, la hipotenusa $P'D$ corta a la semicircunferencia en un punto fijo $M$ que biseca la semicircunferencia de diámetro $BC$. De manera que $\angle ADM = 135°$ y, siendo $A$ y $M$ fijos, $D$ debe estar en el arco capaz de $135°$ respecto del segmento $AM$.

Llamando $O$ al centro de ese arco capaz, es ahora evidente que el mínimo y el máximo pedidos se alcanzan en las rectas determinadas por el punto $A$ y por los puntos de la circunferencia de centro $O$ y radio $OA$ que están, respectivamente, más cerca y más lejos del punto $B$.

De modo que si $X$ e $Y$ son los puntos de intersección de la recta $BO$ con esa circunferencia, la recta $r_1$ (que pasa por $A$ y $X$) y la recta $r_2$ (que pasa por $A$ e $Y$) son las que corresponden, respectivamente, a los valores máximo y mínimo de $BP^2 + CQ^2$.

*También resuelto por R. S. Eléxpuru, D. Lasaosa, J. A. Múgica y B. Salgueiro.*

Nota. En las soluciones recibidas se dan distintos tratamientos analíticos, todos ellos interesantes, a este bello problema, sin llegar en ningún caso a obtener la sencilla y oculta caracterización geométrica alcanzada por el proponente.

Problema 167. *Propuesto por Manuel Bello Hernández, Universidad de La Rioja, y Manuel Benito Muñoz, Logroño.*

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{P} = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : q = 4p^2 + (4a + 5)p + 2a,\ a \in \mathbb{Z}\}.$$

a) Determinar una familia de rectas concurrentes de tal forma que el conjunto de puntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cubierto por la familia de rectas coincida con $\mathcal{P}$.

b) Probar que ningún punto $(p, q)$ de $\mathcal{P}$ satisface la relación $q = p^2 + p - 1$.

*Solución enviada por Javier A. Múgica de Rivera, Ribadeo, Lugo.*

a) Para satisfacer lo que pide este apartado basta tomar un punto con una coordenada irracional y otra racional pero no entera y unir ese punto con todos los puntos de $\mathcal{P}$. La pendiente de las rectas así formadas es irracional y por lo tanto cada una de ellas solamente pasa por un punto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Pero no se nos escapa que el enunciado realmente pregunta por otro conjunto de rectas, que a continuación hallamos. Escribimos $a - p$ por $a$ y la relación entre $p$ y $q$ queda

$$q = (4a + 3)p + 2a.$$

Sea $p' = 2p + 1$, de modo que $p'$ puede tomar valores impares:

$$q = \left(2a + \frac{3}{2}\right) p' - \frac{3}{2}.$$

Para cada valor de $a$ se tiene una recta y todas pasan por el punto $(p', q) = \bigl(0, -\frac{3}{2}\bigr)$, es decir, $(p, q) = \bigl(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\bigr)$.

b) La relación $q = p^2 + p - 1$ escrita en términos de $p'$ es

$$4q = (2p)^2 + 2\cdot 2p - 4 = (p' - 1)^2 + 2(p' - 1) - 4 = p'p' - 5$$

y la que define los pares $(p,q)$ es

$$4q = (8a+6)p' - 6,$$

de modo que

$$4q + 5 = p'p' = (8a+6)p' - 1,$$

lo cual es imposible porque el término central es múltiplo de $p'$ y el de la derecha no, salvo para $p' = 1$, pero para ese valor queda $1 = 8a - 5$, lo que también es imposible.

*También resuelto por A. Castaño, D. Lasaosa, J. Vinuesa y los proponentes.*

PROBLEMA 168. *Propuesto por E. Bendito, A. Carmona, A. M. Encinas y M. Mitjana, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean $k$ y $n$ números naturales tales que $n \geq 2$ y $0 \leq k \leq n$. Evaluar la suma

$$\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi jk}{n}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)},$$

donde $[a]$ denota el mayor entero menor o igual que $a$.

*Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.*

Vamos a probar que

$$\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi jk}{n}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)} = \begin{cases} \dfrac{k(n-k)}{2}, & n \text{ impar}, \\ \dfrac{k(n-k)}{2} + \frac{1-(-1)^k}{4}, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Denotaremos

$$F(j,k,n) = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi jk}{n}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)} \qquad \text{y} \qquad S(k,n) = \sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} F(j,k,n).$$

Se tiene entonces que, para todo $1 \leq k \leq n$,

$$F(j,k,n) - F(j,k-1,n) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi j(k-1)}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi j}{n}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j(2k-1)}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{n}\right)},$$

luego, para todo $2 \leq k \leq n$,

$$F(j,k,n) - 2F(j,k-1,n) + F(j,k-2,n) = 2\cos\left(\frac{2\pi j(k-1)}{n}\right),$$

con lo que también, para todo $2 \leq k \leq n$, se verifica

$$
\begin{aligned}
S(k,n) &- 2S(k-1,n) + S(k-2,n) \\
&= -1 + \sum_{j=-\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \exp\left(\frac{2\pi j(k-1)}{n}\right) \\
&= \frac{\exp\left(\frac{2\pi(k-1)\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}{n}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi(k-1)\left[\frac{n}{2}\right]}{n}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi(k-1)}{n}\right) - 1} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(k-1)+2\pi(k-1)\left[\frac{n}{2}\right]}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(k-1)}{n}\right)} - 1 = \begin{cases} -1, & n \text{ impar}, \\ -(1+(-1)^k), & n \text{ par}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Podemos interpretar la relación anterior como una ecuación en diferencias para $k$. La solución general para la ecuación homogénea es $S(k,n) = Ak + B$, para ciertas constantes $A$ y $B$ que pueden depender de $n$. Al mismo tiempo, se tiene claramente para todo $n$ que

$$S(0,n) = 0 \qquad \text{y} \qquad S(1,n) = \left[\frac{n}{2}\right],$$

que son las condiciones iniciales para la ecuación en diferencias.

Supongamos que $n$ es impar; una solución particular de la ecuación en diferencias es $S(k,n) = -\frac{k^2}{2}$, ya que

$$-\frac{k^2}{2} + (k-1)^2 - \frac{(k-2)^2}{2} = -1.$$

Las condiciones iniciales resultan en $B = 0$ y $A = \frac{n}{2}$, con lo que para todo $n$ impar se tiene

$$S(k,n) = \frac{k(n-k)}{2}.$$

Finalmente consideremos que $n$ es par; en este caso una solución particular es $-\frac{k^2}{2} - \frac{(-1)^k}{4}$, puesto que

$$-\frac{k^2}{2} - \frac{(-1)^k}{4} + (k-1)^2 + \frac{(-1)^{k-1}}{2} - \frac{(k-2)^2}{2} - \frac{(-1)^{k-2}}{4} = -(1+(-1)^k).$$

Aplicando las condiciones iniciales obtenemos los valores $B = \frac{1}{4}$ y $A = \frac{n}{2}$, llegando a que, para todo $n$ par,

$$S(k,n) = \frac{k(n-k)}{2} + \frac{1-(-1)^k}{4}.$$

*También resuelto por E. Fernández, J. A. Múgica, A. Stadler y los proponentes.*