MATEMÀTIQUES **3**, 135–153 (2005)
ARTICLE NO. 3

Condiciones necesarias para la convergencia de series de Fourier*

Juan Luis Varona Malumbres

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño, Spain
E-mail: jvarona@dmc.unirioja.es

Damos una descripción de los diversos métodos que se han ido empleando y se emplean actualmente para encontrar condiciones necesarias para que las series de Fourier respecto de un sistema ortogonal converjan tanto en media de orden p como débil y en casi todo punto. En la exposición se hace especial hincapié en las series de Fourier de polinomios ortogonales en $[-1, 1]$, ya que las condiciones que aquí aparecen son particularmente atractivas y sencillas de aplicar.

Key Words: Fourier series, orthogonal polynomials, Bessel functions.

Mathematics Subject Classification (2000): 42C10.

§ 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A lo largo de toda la exposición consideraremos $d\mu$ una medida positiva definida en un intervalo real $[a, b]$, acotado o no. (Aunque el intervalo lo denotaremos siempre como cerrado, puede ser abierto o semiabierto si se desea.) Tomaremos $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ un sistema ortogonal en $L^2([a, b], d\mu)$, es decir

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\, d\mu(x) = h_n\delta_{nm} \tag{1}$$

y completo, o sea $\overline{\operatorname{span}\{\phi_n(x)\}} = L^2([a, b], d\mu)$. Salvo que indiquemos lo contrario supondremos siempre que $h_n = 1$ $\forall n$ y así diremos que el sistema es ortonormal. Así mismo, para cada $f \in L^2([a, b], d\mu)$ construiremos las

* Salvo pequeñas modificaciones, el texto de este artículo coincide con el contenido de la conferencia que el autor impartió, el 18 de diciembre de 1990, en el seminario del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla.

sumas parciales de su serie de Fourier

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\phi_k(x), \qquad c_k(f) = \int_a^b f(y)\phi_k(y)\,d\mu(y). \tag{2}$$

Es bien conocido que, por ser $L^2([a,b],d\mu)$ un espacio de Hilbert, se verifica la desigualdad de Bessel

$$\|S_n f\|_{L^2([a,b],d\mu)} = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 \leq \|f\|_{L^2([a,b],d\mu)}$$

y la convergencia $S_n f \to f$ en $\| \ \|_{L^2([a,b],d\mu)}$ para cada $f \in L^2([a,b],d\mu)$. Más aún, el teorema de mejor aproximación garantiza que las sumas parciales de la serie de Fourier son las combinaciones lineales de $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ que mejor aproximan la función f en el sentido de que

$$\|S_n f - f\|_{L^2([a,b],d\mu)} \leq \Big\| \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k - f \Big\|_{L^2([a,b],d\mu)} \quad \forall \ \sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k$$

y la igualdad sólo se alcanza cuando $a_k = c_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Una medida $d\mu$ siempre puede descomponerse en su parte absolutamente continua y su parte singular, $d\mu = \mu'\,dx + d\mu_s$. Cuando $d\mu$ no tiene parte singular pondremos $d\mu(x) = \mu'(x)\,dx = w(x)\,dx$, y a la función $w(x)$ la llamaremos peso.

El ejemplo más conocido es el de las funciones trigonométricas 1, $\cos(nx)$, $\operatorname{sen}(nx)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, que forman un sistema ortogonal completo en $[-\pi, \pi]$ respecto a la medida de Lebesgue (véase [34]).

Son también muy usados los sistemas ortogonales constituidos por polinomios, esto es, cuando $\phi_n = p_n$ polinomio de grado n. Para que exista una familia $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales respecto a una medida $d\mu$ basta que dicha medida posea infinitos puntos de crecimiento efectivo y que existan todos los momentos $\int_a^b x^n\,d\mu(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Cuando tratamos con sistemas de polinomios ortogonales, el teorema de Weierstrass garantiza que, siempre que el intervalo $[a,b]$ sea acotado, el sistema es completo. Esto no es cierto en general para un intervalo cualquiera y en este caso debemos abordar la completitud por otros caminos. Cabe aquí recordar su relación con la unicidad en el problema de momentos (véase [1]). Los sistemas de polinomios ortogonales más conocidos son los clásicos

Nombre	**Intervalo**	**Peso**
Jacobi	$[-1,1]$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \alpha,\beta > -1$
Laguerre	$[0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x},\ \alpha > -1$
Hermite	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2},

así como los casos particulares de sistemas de Jacobi pero que poseen denominación propia: Legendre ($\alpha = \beta = 0$), Chebyshev de 1.ª clase ($\alpha = \beta = -1/2$), Chebyshev de 2.ª clase ($\alpha = \beta = 1/2$) y ultraesféricos ($\alpha = \beta > -1/2$). Una amplia información sobre polinomios ortogonales puede encontrarse en el libro de Szegő [30].

Otro sistema ortogonal muy utilizado y que ya no está formado por polinomios es el que constituyen las funciones $\{J_\alpha(\alpha_n x)\}_{n=0}^{\infty}$, donde $J_\alpha(x)$ es la función de Bessel de orden $\alpha > -1$ y $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sus ceros positivos ordenados en sentido creciente. Este sistema es ortogonal y completo en $L^2([0,1], x\,dx)$, satisfaciéndose

$$\int_0^1 J_\alpha(\alpha_n x) J_\alpha(\alpha_m x) x\,dx = \tfrac{1}{2} J_{\alpha+1}(\alpha_n)^2 \delta_{nm}.$$

Un extenso tratado sobre funciones de Bessel es el de Watson [32].

Volviendo a sistemas ortogonales generales, sea $p \in (1,\infty)$ tal que las combinaciones lineales de $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ son densas en el espacio $L^p([a,b], d\mu)$. El primer problema que podemos plantearnos es estudiar si

$$S_n f \to f \quad \text{en} \quad L^p([a,b], d\mu) \quad \forall\, f \in L^p([a,b], d\mu), \tag{3}$$

lo que se denomina convergencia en media de orden p. Supondremos siempre que $\phi_n \in L^q([a,b], d\mu)$, siendo q el conjugado de p, es decir $1/p + 1/q = 1$ (lo cual es necesario para que (2) tenga sentido $\forall\, f \in L^p([a,b], d\mu)$). Entonces, (3) es equivalente a la acotación uniforme

$$\|S_n f\|_{L^p([a,b],d\mu)} \le C \|f\|_{L^p([a,b],d\mu)}, \tag{4}$$

donde, aquí y a partir de ahora, utilizaremos C para denotar constantes positivas independientes de n y que pueden no ser la misma en cada ocasión. Comprobemos dicha equivalencia:

(3) $\Rightarrow$ (4): Por la desigualdad de Hölder,

$$|c_k(f)| = \left| \int_a^b \phi_k f\, d\mu \right| \le \|\phi_k\|_{L^q([a,b],d\mu)} \|f\|_{L^p([a,b],d\mu)}$$

y por tanto S_n es un operador continuo para cada n. Además,

$$\|S_n f\|_{L^p([a,b],d\mu)} \le \|S_n f - f\|_{L^p([a,b],d\mu)} + \|f\|_{L^p([a,b],d\mu)} \le K(f)$$

con $K(f)$ independiente de n. De aquí, por el teorema de Banach-Steinhauss se sigue (4).

(4) $\Rightarrow$ (3): Dado $\varepsilon > 0$, sea $P = \sum_{k=0}^{m} a_k \phi_k$ tal que $\|P - f\|_{L^p([a,b],d\mu)} < \varepsilon$. Por ser $S_n P = P$ $\forall n \geq m$, se tiene

$$\begin{aligned}\|S_n f - f\|_{L^p([a,b],d\mu)} &\leq \|S_n f - S_n P\|_{L^p([a,b],d\mu)} + \|S_n P - f\|_{L^p([a,b],d\mu)} \\ &= \|S_n (f - P)\|_{L^p([a,b],d\mu)} + \|P - f\|_{L^p([a,b],d\mu)} \\ &\leq (C+1)\|f - P\|_{L^p([a,b],d\mu)} \leq (C+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

lo que implica (3).

Cuando $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema ortonormal respecto a un peso $w(x)$ en un intervalo $[a,b]$, es claro que el nuevo sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ definido mediante $\psi_n(x) = w(x)^{1/2}\phi_n(x)$ es ortonormal en el mismo intervalo $[a,b]$ pero respecto a la medida de Lebesgue. Esto da lugar a poder estudiar la convergencia de los dos sistemas ortonormales. Por ejemplo, Pollard [27] estudia la convergencia en media de series de Fourier de polinomios de Jacobi y Wing [33] la de sus correspondientes funciones $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ modificadas como indicamos anteriormente.

Pero no nos detenemos aquí a la hora de encontrar un nuevo sistema ortonormal a partir de uno dado, sino que si tomamos $r \in \mathbb{R}$ y hacemos $\psi_n(x) = w(x)^{(1-r)/2}\phi_n(x)$ entonces $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortonormal en $L^2([a,b], w(x)^r\,dx)$. Más aún, si tomamos una función $r(x)$ cualquiera y $\psi_n(x) = r(x)\phi_n(x)$, esta vez tendremos que $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortonormal en $L^2([a,b], \frac{w(x)}{r(x)^2}\,dx)$.

Esta última modificación se puede aplicar incluso aunque la medida no provenga de un peso. En efecto, si $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortonormal en $L^2([a,b], d\mu)$ entonces el sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, con $\psi_n(x) = r(x)\phi_n(x)$, es ortonormal en $L^2([a,b], r(x)^{-2}\,d\mu)$. Además, las series de Fourier respecto a uno y otro sistema se pueden relacionar fácilmente. Para ello, denotemos s_n y S_n a las sumas parciales de las series de Fourier respecto de $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ respectivamente, y sea así mismo $g \in L^p([a,b], r(x)^{-2}\,d\mu)$. Entonces

$$\begin{aligned}s_n(g,x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b \phi_k(y)r(y)g(y)r(y)^{-2}\,d\mu(y)\right)\phi_k(x)r(x) \\ &= S_n(gr^{-1},x)r(x).\end{aligned}$$

Más aún, si llamamos $f(x) = g(x)/r(x)$ es inmediato comprobar que

$$\begin{aligned}&\|s_n g\|_{L^p([a,b],r(x)^{-2}d\mu)} \leq C\|g\|_{L^p([a,b],r(x)^{-2}d\mu)} \\ &\qquad\iff \|S_n f\|_{L^p([a,b],u(x)^p d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p([a,b],u(x)^p d\mu)}\end{aligned}$$

con $u(x) = r(x)^{1-2/p}$, lo cual a su vez se traduce en que

$$(5) \qquad S_n f \to f \text{ en } L^p([a,b], u(x)^p\,d\mu) \quad \forall\, f \in L^p([a,b], u(x)^p\,d\mu).$$

Así, podemos prescindir de las series s_n puesto que su convergencia puede estudiarse en términos de las S_n.

Si no es cierta la convergencia (5), podemos tomar un peso $v(x)$ mayor ($u(x) \le Cv(x)$ $d\mu$-a.e.) y preguntarnos si $S_n f \to f$ en $L^p([a,b], u(x)^p\, d\mu)$ para cada $f \in L^p([a,b], v(x)^p\, d\mu)$. Análogamente a como se demuestra la equivalencia entre (3) y (4), y suponiendo que $\phi_n \in L^p([a,b], u^p\, d\mu) \cap L^q([a,b], v^{-q}\, d\mu)$, es fácil ver que esto es equivalente a que

$$\|S_n f\|_{L^p([a,b],u(x)^p d\mu)} \le C\|f\|_{L^p([a,b],v(x)^p d\mu)}. \tag{6}$$

Utilicemos ahora el resultado de interpolación que asegura que, dados $1 \le r < s \le \infty$ y dos medidas $d\alpha$, $d\beta$, si T es un operador tal que $T : L^r(d\alpha) \to L^r(d\beta)$ acotado y $T : L^s(d\alpha) \to L^s(d\beta)$ acotado, entonces $T : L^p(d\alpha) \to L^p(d\beta)$ acotado $\forall p \in (r, s)$ y su norma como operador depende sólo de la norma de los otros dos. (Véase [29].)

En nuestro caso, como

$$\|S_n f\|_{L^p([a,b],u^p d\mu)} \le C\|f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)} \iff \|uS_n(v^{-1}h)\|_{L^p([a,b],d\mu)} \le C\|h\|_{L^p([a,b],d\mu)}$$

(donde $h = fv$), el resultado anterior de interpolación asegura que los valores de p para los cuales se satisface la acotación (6) constituyen un intervalo.

Hay que hacer notar aquí que, cuando $u = v = 1$, y si tomamos $f \in L^p([a,b], d\mu)$ y $g \in L^q([a,b], d\mu)$, $1/p + 1/q = 1$, es fácil ver que

$$\int_a^b g(S_n f)\, d\mu = \sum_{k=0}^n c_k(f)c_k(g) = \int_a^b f(S_n g)\, d\mu.$$

De esta igualdad y de la dualidad entre $L^p([a,b], d\mu)$ y $L^q([a,b], d\mu)$ se deduce que la norma de cada S_n como operador en $L^p([a,b], d\mu)$ es la misma que como operador en $L^q([a,b], d\mu)$. Este hecho junto con el anterior resultado de interpolación nos llevan a la conclusión de que en este caso los extremos del intervalo de acotación son siempre conjugados.

Por otra parte, si dada una medida $d\alpha$ definimos la norma p-débil

$$\|f\|_{L^p_*(d\alpha)} = \sup_{\lambda>0} \left(\lambda^p \int_{|f|>\lambda} d\alpha\right)^{1/p},$$

es inmediato comprobar que $\|f\|_{L^p_*(d\alpha)} \le \|f\|_{L^p(d\alpha)}$. Entonces, cuando no se satisface (6) podemos preguntarnos si es cierta la acotación débil

$$\|S_n f\|_{L^p_*([a,b],u(x)^p d\mu)} \le C\|f\|_{L^p([a,b],v(x)^p d\mu)}. \tag{7}$$

Esto es equivalente a que $S_n f \to f$ en $L^p_*([a,b], u^p\, d\mu)$ para cada $f \in L^p([a,b], v^p\, d\mu)$. Análogamente podíamos habernos decidido por estudiar si

$$\|u(S_n f)\|_{L^p_*([a,b],d\mu)} \le C\|f\|_{L^p([a,b],v(x)^p d\mu)}. \tag{8}$$

En ambos casos, generalizaciones del resultado de interpolación citado anteriormente permiten asegurar que estas acotaciones sólo son posibles, además de en el intervalo de p's para los que ya se satisface (6), en sus extremos.

Más aún, las acotaciones (7) y (8) pueden verse como casos particulares de

$$\|u_1(S_n f)\|_{L^p_*([a,b],u_2(x)^p d\mu)} \le C\|f\|_{L^p([a,b],v(x)^p d\mu)}, \tag{9}$$

donde u_1 y u_2 son dos nuevos pesos definidos en $[a,b]$. Es claro que (6) implica (9) siempre que $u = u_1 u_2$.

Sea cual sea el sistema ortogonal utilizado, el estudio de todos estos tipos de acotaciones, que conducen a su correspondiente convergencia, siempre se realiza siguiendo un mismo método que esencialmente necesita tres hechos: (a) tener buenas descomposiciones del núcleo (tipo Pollard [25]); (b) conocer estimaciones adecuadas de los polinomios o funciones ortonormales; y (c) utilizar la acotación de diversos operadores singulares (sobre todo la trasformada de Hilbert) entre espacios de tipo L^p con pesos, para lo cual la teoría A_p de pesos (véanse [15] y [31]) es una herramienta fundamental.

En este campo podemos destacar entre otros los trabajos de Pollard [25–27], Wing [33], Muckenhoupt [20] y Badkov [3–6] para polinomios de Jacobi y sus generalizaciones, Askey-Wainger [2] y Muckenhoupt [21, 22] para Laguerre y Hermite, y Wing [33] y Benedek-Panzone [7, 8] para Bessel.

Tal como describimos anteriormente, el método usado para encontrar condiciones suficientes para la convergencia el media es esencialmente el mismo desde los primeros trabajos de Pollard, aunque cada vez con mayor complicación para probar la acotación de los operadores singulares que aparecen. Sin embargo, y quizás paradójicamente pues el problema parece más fácil, las condiciones necesarias que han ido empleando los diversos autores han ido perfeccionándose y haciéndose más sencillas de aplicar. Tanto es así que en los primeros artículos que aparecieron sobre la convergencia en media siempre se dejaba en duda si había convergencia o no en los extremos de un intervalo en el que sí se había logrado probar la convergencia, resolviéndose el problema más adelante siempre con respuesta negativa.

Como consecuencia de esto, parece interesante estudiar la evolución de los métodos destinados a encontrar condiciones necesarias para la convergencia en media, y a esto es a lo que principalmente nos dedicaremos a lo largo de esta exposición. En particular, veremos las condiciones necesarias que se aplican a sistemas ortogonales generales y, en la última parte, nos dedicaremos a analizar las que se utilizan actualmente para diversos sistemas ortogonales entre los que se encuentran los polinomios ortogonales sobre el intervalo $[-1, 1]$.

Antes de abordar todo esto, veamos otro tipo de convegencia que podemos plantearnos: la convergencia en casi todo punto o convergencia a.e., para la que también nos preocuparemos más adelante de encontrar condiciones necesarias. Los antecedentes de este estudio se remontan a 1915 cuando Lusin conjeturó que las series de Fourier trigonométricas cumplían $S_n f \to f$ a.e. para cada $f \in L^2([-\pi, \pi], dx)$. La demostración la efectuó Carleson [10] en 1966 y más adelante Hunt [16] mostró que también era cierto para funciones en $L^p([-\pi, \pi], dx)$ con $p > 1$.

En cuanto a la convergencia a.e. de series de Fourier de polinomios ortogonales hay diversos articulos de Badkov [3–6] y Pollard [28] que tratan el tema. Y para series de Fourier de funciones de Bessel puede verse el trabajo de Benedek y Panzone [9]. Gran parte de las demostraciones de la existencia de convergencia a.e. consisten en utilizar los resultados de Carleson y Hunt sobre series trigonométricas y aplicar diversos teoremas de equiconvergencia de [30].

En definitiva se trata de ver si las series de Fourier respecto a un sistema ortogonal $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfacen $S_n f \to f$ a.e. para cada $f \in L^p([a, b], v^p\, d\mu)$. Si suponemos $\overline{\operatorname{span}\{\phi_n(x)\}} = L^p([a, b], v^p\, d\mu)$ y denotamos

$$S^*(f, x) = \sup_{n\geq 0} |S_n(f, x)|$$

(S^* se denomina operador maximal de la serie de Fourier), una condición suficiente para dicha convergencia, pero no necesaria, es que

$$\|S^* f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)}. \tag{10}$$

Veamos que (10) es, efectivamente, suficiente. Basta con que comprobemos

$$\|\limsup_{n\to\infty} |S_n(f, x) - f(x)|\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)} = 0. \tag{11}$$

Para ello, es claro que

$$\|S_k f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)} \leq \|S^* f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)}$$

luego $\|S_k f - f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Además, por ser $S_n(S_k f) = S_k f$ $\forall n \geq k$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} |S_n(f,x) - f(x)| \\
&\qquad \leq \limsup_{n\to\infty} \{|S_n(f,x) - S_k(f,x)| + |S_k(f,x) - f(x)|\} \\
&\qquad = \limsup_{n\to\infty} \{|S_n(f - S_k f, x)| + |S_k(f,x) - f(x)|\} \\
&\qquad \leq |S^*(f - S_k f, x)| + |S_k(f,x) - f(x)|
\end{aligned}$$

de donde, tomando normas $\| \ \|_{L^p([a,b],v^p d\mu)}$, se sigue (11).

Cuando una medida $d\mu$ es finita (como es el caso de los polinomios ortogonales), si $S_n f \to f$ a.e. para cada $f \in L^p([a,b], d\mu)$, esto también será cierto para cada $f \in L^r([a,b], d\mu)$, $r > p$, pues $L^r([a,b], d\mu) \subset L^p([a,b], d\mu)$. De aquí que muchas veces en la práctica baste simplemente con analizar el caso $p \leq 2$ en (10). Esto lleva a que la condición (10), pese a que está lejos de ser necesaria, es, junto con equiconvergencia con series trigonométricas, fundamental en el estudio de la convergencia a.e.

§ 2. CONDICIONES NECESARIAS GENERALES

Dado $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ sistema ortogonal respecto a $d\mu$ en $[a,b]$ y S_n el operador de las sumas parciales de la serie de Fourier, el primer método que se utilizó para demostrar que no había en general convergencia $S_n f \to f$ fue encontrar un contraejemplo. Para ello, es inmediato que

$$S_n f \to f \text{ en } L^p([a,b], u^p\, d\mu) \implies c_n(f)\phi_n \to 0 \text{ en } L^p([a,b], u^p\, d\mu).$$

Por ejemplo, Pollard [25] demuestra que las series de Fourier de polinomios de Legendre $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ no convergen en general en media de orden p si $p > 4$ o $p < 4/3$. Por dualidad, puede suponer simplemente $p < 4/3$. Los polinomios de Legendre normalizados satisfacen $\int_{-1}^1 |p_n(x)|\, dx \geq C$ (véase [30]), y además, por la desigualdad de Hölder,

$$\int_{-1}^1 |p_n(x)|\, dx \leq 2^{1/q} \left(\int_{-1}^1 |p_n(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Entonces, toma la función $f(x) = (1-x)^{-3/4} \in L^p([-1,1], dx)$, $1 < p < 4/3$, para la cual $c_n(f) \geq C$ (véase [30]). Con todo esto es claro que

$$c_n(f) \left(\int_{-1}^1 |p_n(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \geq 2^{-1/q} c_n(f) \int_{-1}^1 |p_n(x)|\, dx \geq C$$

y por tanto $c_n(f)\|p_n\|_{L^p([-1,1],dx)} \not\to 0$ luego la serie de Fourier no puede converger.

El mismo Pollard empleó este procedimiento sucesivamente con polinomios ultraesféricos [26] y de Jacobi (con $\alpha, \beta \geq -1/2$) [27], y también le sirvió para demostrar que las series de Fourier de polinomios de Laguerre y Hermite sólo convergían en media para $p = 2$ [25]. Análogamente Wing [33] encontró resultados similares para funciones obtenidas de los polinomios de Jacobi mediante $\psi_n(x) = w(x)^{1/2}p_n(x)$ (también con $\alpha, \beta \geq -1/2$) y para series de Fourier de funciones de Bessel con $\alpha \geq -1/2$.

El método tenía como desventaja que dejaba en duda qué es lo que ocurría en los extremos del intervalo de convergencia en media (por ejemplo, en el caso de Legendre no permitía demostrar que tampoco había convergencia para $p = 4/3$ ó 4).

Para solucionar este problema se buscaron condiciones necesarias más exigentes. Para ello, y tal como veremos más adelante, Newman y Rudin [23] demuestran que

$$\|S_n f\|_{L^p([a,b],d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p([a,b],d\mu)} \\ \implies \|\phi_n\|_{L^p([a,b],d\mu)}\|\phi_n\|_{L^q([a,b],d\mu)} \leq C$$

y a partir de esta nueva condición y adecuadas estimaciones de los polinomios de Jacobi y funciones de Bessel logran demostrar que no hay convergencia en media para ninguno de los valores de p que permanecían en duda. Este mismo método fue el utilizado por Askey-Wainger y Muckenhoupt para series de Fourier de polinomios de Jacobi (con $\alpha, \beta > -1$), Laguerre y Hermite, así como por Badkov para polinomios de Jacobi generalizados (ortogonales respecto al peso (13)).

La dificultad que surge ahora es que hay que encontrar cotas inferiores para las funciones ortonormales y esto no es sencillo. Además, para los sistemas en los que sí que se conocen estimaciones, la labor de cálculo que hay que realizar, aunque elemental, suele ser laboriosa. Por ejemplo, para el caso de polinomios ortogonales se demuestra que todas sus raíces son reales y distintas y están en el intervalo (a, b), luego no puede haber cotas inferiores positivas. Como muestra, la estimación asintótica que se utiliza para polinomios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (nótese que no están normalizados) es (véase [30])

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n^{-1/2}k(\theta)\left\{\cos(N\theta + \gamma) + (n \operatorname{sen}\theta)^{-1}O(1)\right\} \\ \text{unif. en } \frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{n},$$

donde $N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$, $\gamma = -\frac{(2\alpha+1)\pi}{4}$ y $k(\theta) = \pi^{-1/2}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2} \times \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-1/2}$.

Por otra parte, el resultado de Newman y Rudin es fácil de demostrar, tal como vemos a continuación (ya generalizado para la acotación (6)):

TEOREMA 1. *Sean $S_n f$ las sumas parciales de la serie de Fourier respecto a un sistema $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortonormal en $L^2([a,b],d\mu)$. Entonces*

$$\begin{aligned}\|S_n f\|_{L^p([a,b],u^p d\mu)} &\le C\|f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)}\\ &\implies \|\phi_n\|_{L^p([a,b],u^p d\mu)}\|\phi_n\|_{L^q([a,b],v^{-q} d\mu)} \le C.\end{aligned}$$

Demostración. Si denotamos $dU = u^p\,d\mu$ y $dV = v^p\,d\mu$, sea $T_n = S_n - S_{n-1} : L^p([a,b],dV) \to L^p([a,b],dU)$ el operador que a cada $f \in L^p([a,b],dV)$ asigna $T_n f = c_n(f)\phi_n = \phi_n \int_a^b \phi_n f\,d\mu$. Entonces

$$|c_n(f)|\|\phi_n\|_{L^p([a,b],dU)} = \|c_n(f)\phi_n\|_{L^p([a,b],dU)} \le C\|f\|_{L^p([a,b],dV)}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \left(\phi_n v^{-1}\right)(fv)\,d\mu\right| &= |c_n(f)|\\ &\le C\|\phi_n\|^{-1}_{L^p([a,b],dU)}\|f\|_{L^p([a,b],dV)}\\ &= C\|\phi_n\|^{-1}_{L^p([a,b],dU)}\|fv\|_{L^p([a,b],d\mu)}.\end{aligned}$$

De aquí que, por dualidad,

$$\|\phi_n v^{-1}\|_{L^q([a,b],d\mu)} \le C\|\phi_n\|^{-1}_{L^p([a,b],dU)},$$

de donde se sigue el enunciado.

Una demostración completamente similar pero adaptada al caso de la acotación débil (9) muestra que

TEOREMA 2. *Sean $S_n f$ las sumas parciales de la serie de Fourier respecto a un sistema $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortonormal en $L^2([a,b],d\mu)$. Si*

$$\|u_1(S_n f)\|_{L^p_*([a,b],u_2^p d\mu)} \le C\|f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)}$$

entonces

$$\|u_1\phi_n\|_{L^p_*([a,b],u_2^p d\mu)}\|\phi_n\|_{L^q([a,b],v^{-q} d\mu)} \le C.$$

Es de destacar que los primeros resultados que se obtuvieron sobre la no convergencia débil de series de Fourier no se basaron en el teorema anterior. Por ejemplo, Chanillo [11] demuestra que no hay convergencia débil de las series de Fourier de polinomios de Legendre en el extremo superior del intervalo de convergencia en media $p = 4$ (con $u_1 = u_2 = v = 1$). Para ello encuentra una familia explícita de funciones $\{f_n\}$ que hace imposible que se satisfaga uniformemente la acotación $\|S_n(f_n)\|_{L^4_*([-1,1],dx)} \leq C\|f_n\|_{L^4([-1,1],dx)}$.

Para la acotación débil no se puede aplicar el mismo argumento de dualidad que se utilizaba para la convergencia en media, luego el resultado de Chanillo no proporciona ninguna información sobre el otro extremo $p = 4/3$. Y de hecho el método que sigue no se puede aplicar a $p = 4/3$. Por otra parte, el resultado de Chanillo es imposible de obtener a partir del teorema 2, ya que los polinomios de Legendre normalizados satisfacen $|p_n(x)| \leq C(1-x^2)^{-1/4}$ y de aquí es fácil deducir que sí que se cumple la condición necesaria $\|p_n\|_{L^4_*([-1,1],dx)}\|p_n\|_{L^{4/3}([-1,1],dx)} \leq C$. Por el contrario, tal como veremos en § 3, el teorema 2 sí que resulta útil para probar que tampoco hay acotación débil en el caso $p = 4/3$.

Tal como puede verse en [14], lo mismo ocurre con series de Fourier de polinomios de Jacobi: el teorema anterior no puede aplicarse en general para mostrar la no convergencia débil en el extremo superior de convergencia en media pero sí en el extremo inferior.

Hay otra condición más para que se puedan satisfacer las acotaciones uniformes (6), (7), (8) o (9). Esta condición es, esencialmente, que $u \leq Cv$ $d\mu$-a.e. o, en el caso de (9), $u_1u_2 \leq Cv$ $d\mu$-a.e. A este respecto, el resultado más general que puede obtenerse es

Teorema 3. *Sean S_nf las sumas parciales de la serie de Fourier respecto a un sistema $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ortonormal completo en $L^2([a,b],d\mu)$. Entonces*

$$\|u_1(S_nf)\|_{L^p_*([a,b],u_2^p d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)} \implies \chi_A u_1u_2 \leq Cv \ d\mu\text{-a.e.}$$

siendo $A = \{x \in [a,b] \mid \phi_n(x) \neq 0$ para algún $n\}$.

Sin embargo, por simplicidad vamos a demostrarlo únicamente para sistemas de polinomios ortogonales y en el caso (6).

Teorema 4. *Sean S_nf las sumas parciales de la serie de Fourier respecto al sistema completo de polinomios ortonormales $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $L^2([a,b],d\mu)$. Entonces*

$$\|S_nf\|_{L^p([a,b],u^p d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p([a,b],v^p d\mu)} \implies u \leq Cv \ d\mu\text{-a.e.}$$

Demostración. Tomando $n = 0$ en el teorema 1 es claro que $u \in L^p([a,b],d\mu)$ y $v^{-1} \in L^q([a,b],d\mu)$. Entonces, la función

$$f(x) = \min\left\{u(x), v(x)^{-1}, u(x)v(x)^{-1}\right\}$$

satisface $fv \in L^p([a,b],d\mu)$ ya que

$$\int_a^b |fv|^p \, d\mu \le \int_a^b u^p \, d\mu < \infty,$$

y además $f \in L^2([a,b],d\mu)$ pues

$$\begin{aligned}\int_a^b |f|^2 \, d\mu &\le \left(\int_a^b |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \\ &\le \left(\int_a^b u^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_a^b v^{-q} \, d\mu\right)^{1/q} < \infty.\end{aligned}$$

Para cada conjunto medible $E \subset [a,b]$ sea $g = f\chi_E$. Es claro que $g \in L^2([a,b],d\mu)$ luego, por ser $\{p_n\}$ completo, $S_n g \to g$ en $L^2([a,b],d\mu)$ y por tanto existe una subsucesión $S_{n_j}g$ tal que $S_{n_j}g \to g$ $d\mu$-a.e. Aplicando el lema de Fatou y la desigualdad uniforme de las hipótesis obtenemos

$$\begin{aligned}\int_E |fu|^p \, d\mu = \int_a^b |g|^p \, d\mu &\le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b |S_{n_j}g|^p u^p \, d\mu \\ &\le C^p \int_a^b |g|^p v^p \, d\mu = C^p \int_E |f|^p v^p \, d\mu,\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_E |f|^p u^p \, d\mu \le C^p \int_E |f|^p v^p \, d\mu \quad \forall E \subset [a,b] \text{ medible.} \tag{12}$$

Por lo tanto, no puede existir ningún conjunto $E \subset [a,b]$ de medida positiva tal que $u(x) > Cv(x)$ en E pues esto llevaría a una contradicción con (12).

En cuanto al resultado más general del teorema 3, simplemente citar que puede probarse mediante un método similar, aunque más laborioso, partiendo de las funciones

$$\begin{aligned}f_{\lambda,n}(x) = \Big(\lambda^{1/2}\chi_{\{\text{mín}\{u_1u_2, v^{-1}, u_1u_2v^{-1}\} > \lambda^{1/2}\}}(x)\Big) \\ \times \Big(\lambda^{1/2}\chi_{\{u_1 > \lambda^{1/2}\}}(x)\Big)\, u_1(x)^{-1}\phi_n(x),\end{aligned}$$

$\lambda > 0$, $n \ge 0$, en lugar de $f(x)$ y utilizando el teorema 2 en vez del 1.

Pese a la simplicidad de su enunciado, el teorema 4 no se incluye entre las condiciones que encuentran Máté, Nevai y Totik en su artículo [18] dedicado íntegramente a condiciones necesarias para la convergencia en media de series de Fourier de polinomios ortogonales en $[-1,1]$. Por otra parte, los resultados de este mismo artículo (y algunas generalizaciones) resultan de gran utilidad para todo lo que veremos en § 3.

Por último, en lo referente a la convergencia a.e. de series de Fourier de polinomios ortogonales Pollard [28] demostró que las series de Fourier de polinomios de Legendre convergía a.e. para cada $f \in L^p([-1,1],dx)$, $p > 4/3$. Por otra parte, como ya era conocido que la serie de Fourier de la función $f = (1-x)^{-3/4} \in L^p([-1,1],dx)$, $p < 4/3$, no converge a.e. (véase [30]), sólo deja en duda lo que ocurría para $p = 4/3$. Este problema lo resuelve más adelante Meaney [19], generalizándolo de paso a los polinomios de Jacobi con $\alpha, \beta \geq -1/2$.

Pero, aparentemente, para esos autores eran totalmente desconocidos los resultados de Badkov, que años antes había encontrado condiciones necesarias y suficientes para la convergencia a.e. de series de Fourier de polinomios de Jacobi generalizados. Por ejemplo, en [6] Badkov toma el peso

$$w(x) = H(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \prod_{k=1}^{m} |x - x_k|^{\gamma_k}, \quad x \in [-1,1], \tag{13}$$

con $-1 < x_1 < \cdots < x_m < 1$, $\alpha, \beta, \gamma_k > -1$, $H(x) > 0$, y estudia la convergencia en media de series de Fourier de polinomios ortonormales $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ respecto a $w(x)$. Así, para pesos $v(x)$ con una estructura similar a la de (13), y siempre que el módulo de continuidad de $H(x)$ cumpla $m(H,t)t^{-1} \in L^2((0,2),dt)$, llega a demostrar que una condición necesaria para que $S_n f \to f$ a.e. para cada $f \in L^p([-1,1], v^p w\,dx)$ es que

$$\|p_n v^{-1}\|_{L^q([-1,1],w dx)} \leq C$$

y de aquí, mediante estimaciones de los polinomios, obtiene condiciones sobre p y los pesos. En particular, los resultados de Badkov abarcan todos los de Pollard y Meaney.

En realidad, todas las condiciones necesarias que aparecen en estos trabajos pueden obtenerse de forma sencilla como casos particulares del reciente resultado de [12] que reproduciremos en el teorema 8.

§ 3. CONDICIONES NECESARIAS PARA CASOS PARTICULARES

A partir de ahora consideraremos siempre $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ sistema de polinomios ortonormales respecto a $d\mu = \mu'\,dx + d\mu_s$ medida definida en el intervalo $[-1,1]$ y que satisface $\mu'(x) > 0$ a.e. Como $[-1,1]$ es un intervalo acotado se puede garantizar que el sistema es siempre completo.

Bajo estas hipótesis Máté, Nevai y Totik [18] demuestran que, para $0 < p \le \infty$, y si g es una función medible, se tiene

$$\begin{aligned} \|\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}&\|_{L^p([-1,1],|g|^p dx)} \\ &\le C \liminf_{n\to\infty} \|p_n(x)\|_{L^p([-1,1],|g|^p dx)} \end{aligned} \tag{14}$$

siendo $C = 2^{\max\{1/p-1/2,0\}}\sqrt{\pi}$. En particular, si

$$\liminf_{n\to\infty} \|p_n(x)\|_{L^p([-1,1],|g|^p dx)} = 0$$

entonces $g = 0$ a.e.

Aplicando este resultado a las condiciones necesarias del teorema 1 obtienen de forma inmediata

Teorema 5. *Sean $S_n f$ las sumas parciales de la serie de Fourier respecto a $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ sistema de polinomios ortonormales en $L^2([-1,1],d\mu)$, con $\mu'(x) > 0$ a.e. Si*

$$\|S_n f\|_{L^p([-1,1],u^p d\mu)} \le C \|f\|_{L^p([-1,1],v^p d\mu)}$$

entonces

(i) $u^p \in L^1([-1,1],d\mu)$,

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 u(x)^p \mu'(x)^{1-p/2}(1-x^2)^{-p/4}\,dx < \infty$,

(iii) $v^{-q} \in L^1([-1,1],d\mu)$,

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^1 v(x)^{-q} \mu'(x)^{1-q/2}(1-x^2)^{-q/4}\,dx < \infty$.

Este teorema resulta tremendamente útil para nuestros propósitos pues da condiciones necesarias que son fácilmente comprobables. Además, aunque pueden encontrarse ejemplos en los que se satisfacen (i), (ii), (iii), (iv) y también $u \le Cv$ y sin embargo no hay convergencia en media (véase [14]), realmente las condiciones de integrabilidad que impone el teorema hacen coincidir gran parte de las veces las condiciones necesarias con las suficientes. Esto ocurre por ejemplo con todos los trabajos de Pollard, Muckenhoupt y Badkov. También sirve el teorema para demostrar que las series de Fourier de polinomios de Pollaczek sólo convergen en media para $p = 2$ (véase [31]).

En cuanto a la convergencia débil, lo primero que tenemos que hacer para encontrar condiciones necesarias similares a las del teorema 5 es buscar una versión débil de (14). Para ello utilizaremos la desigualdad de Kolmogorov, la cual asegura que cuando $d\alpha$ es una medida σ-finita, $0 < r < p < \infty$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ y f es una función medible entonces

$$\|f\|_{L^p_*(d\alpha)} \leq \sup_E \frac{\|f\chi_E\|_{L^r(d\alpha)}}{\|\chi_E\|_{L^s(d\alpha)}} \leq \left(\frac{p}{p-r}\right)^{1/r} \|f\|_{L^p_*(d\alpha)},$$

donde el supremo se toma sobre todos los conjuntos medibles E tales que $0 < \alpha(E) < \infty$.

Apoyándonos en esta desigualdad y en (14) es fácil demostrar que el sistema $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ cumple (véanse [14] y [24])

$$\begin{aligned} \|\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}h(x)\|_{L^p_*([-1,1],|g|^p dx)} \\ \leq C \liminf_{n\to\infty} \|p_n(x)h(x)\|_{L^p_*([-1,1],|g|^p dx)}. \end{aligned} \tag{15}$$

A partir de (15) y de las condiciones necesarias del teorema 2 se llega a

Teorema 6. *Sean $S_n f$ las sumas parciales de la serie de Fourier respecto a $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ sistema de polinomios ortonormales en $L^2([-1,1], d\mu)$, con $\mu'(x) > 0$ a.e. Si*

$$\|u_1 S_n f\|_{L^p_*([-1,1],u_2^p d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p([-1,1],v^p d\mu)}$$

entonces

(i) $u_1 \in L^p_*([-1,1], u_2^p\, d\mu)$,
(ii) $\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}u_1(x) \in L^p_*([-1,1], u_2^p \mu'\, dx)$,
(iii) $v^{-1} \in L^q([-1,1], d\mu)$,
(iv) $\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}v(x)^{-1} \in L^q([-1,1], \mu'\, dx)$.

Además, este resultado permite demostrar

Teorema 7. *Sean $S_n f$ las sumas parciales de la serie de Fourier respecto a $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ sistema de polinomios ortonormales en $L^2([-1,1], d\mu)$, con $\mu'(x) > 0$ a.e. Si*

$$\|S_n f\|_{L^p_*([-1,1],u^p d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p([-1,1],v^p d\mu)} \tag{16}$$

y

$$\|S_n f\|_{L^q_*([-1,1],v^{-q} d\mu)} \leq C\|f\|_{L^q([-1,1],u^{-q} d\mu)} \tag{17}$$

entonces

(i) $u^p \in L^1([-1,1], d\mu)$,

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} u(x)^p \mu'(x)^{1-p/2}(1-x^2)^{-p/4}\,dx < \infty$,

(iii) $v^{-q} \in L^1([-1,1], d\mu)$,

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^{1} v(x)^{-q} \mu'(x)^{1-q/2}(1-x^2)^{-q/4}\,dx < \infty$.

Nótese que el teorema 7 impone condiciones más fuertes que el teorema 5, ya que

$$\|S_n f\|_{L^p([-1,1],u^p d\mu)} \le C\|f\|_{L^p([-1,1],v^p d\mu)}$$

es equivalente por dualidad a

$$\|S_n f\|_{L^q([-1,1],v^{-q} d\mu)} \le C\|f\|_{L^q([-1,1],u^{-q} d\mu)},$$

y de aquí se deduce obviamente (16) y (17).

Una vez encontrado el intervalo de convergencia en media, y tal como citábamos en § 2, el teorema 6 suele resultar útil para demostrar que no hay convergencia débil en el extremo inferior de ese intervalo, pero muchas veces no sirve para el extremo superior, pese a que puede probarse la no acotación débil por otros caminos. Por ejemplo, para polinomios de Legendre (y tomando todos los pesos iguales a 1) el intervalo de convergencia en media es $4/3 < p < 4$. En $p = 4/3$ es inmediato comprobar que no puede haber convergencia débil pues no se cumple iv) del teorema 7. Sin embargo, y pese a que sabemos que tampoco hay acotación débil para $p = 4$, este teorema no nos proporciona ninguna información a este respecto. En efecto: (i), (iii) y (iv) se satisfacen claramente; y para ver que también se cumple (ii) basta con que comprobemos $(1-x)^{-1/4} \in L^4_*((0,1), dx)$, ya que la integrabilidad en $(-1,0)$ es similar. Y esto es cierto pues

$$\lambda^4 \int_{x\in(0,1),\ (1-x)^{-1/4}>\lambda} dx = \lambda^4 \int_{1-\lambda^{-4}}^{1} dx = 1.$$

De todas formas, no es sorprendente que las condiciones necesarias que establecen estos teoremas no coincidan a veces con las suficientes. Realmente hay que tener en cuenta que la base de todos ellos son los teoremas 1 y 2, y si nos fijamos en sus demostraciones vemos que las condiciones necesarias que aparecen no sólo son necesarias para la acotación de la serie de Fourier, sino también de su término general, lo cual es mucho menos exigente.

Aunque para muchos sistemas ortogonales y para pesos u, u_1, u_2 y v de algún tipo particular se conocen condiciones a la vez necesarias y suficientes, no hay ningun resultado general de este tipo. El problema permanece abierto incluso si nos dedicamos simplemente a estudiar (6) con un peso $w(x)$ concreto e imponemos $u(x) = v(x)$. Es de destacar que en este último caso sí que se conocen condiciones necesarias y suficientes sobre $u(x)$ para la convergencia de series de Fourier trigonométricas (véase [17]).

Abordemos ahora un resultado que establece condiciones necesarias para la convergencia a.e. de series de Fourier. Estas condiciones son de nuevo fácilmente evaluables pues se expresan en términos de integrabilidad de los pesos implicados. Además, en todos los casos conocidos las condiciones que impone el teorema coinciden con las suficientes. Y en el caso de los polinomios de Jacobi generalizados que trata Badkov se elimina todo exigencia sobre el módulo de continuidad de $H(x)$ en (13). El resultado es el siguiente (véase [12]):

Teorema 8. *Sean $S_n f$ las sumas parciales de la serie de Fourier respecto a $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ sistema de polinomios ortonormales en $L^2([-1,1], d\mu)$, con $\mu'(x) > 0$ a.e. y sean $1 < p \leq q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Si $S_n f \to f$ $d\mu$-a.e. para cada $f \in L^p([-1,1], v^p\, d\mu)$ entonces*

$$v(x)^{-1} \in L^q([-1,1], d\mu)$$

y

$$v(x)^{-1}\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4} \in L^q([-1,1], \mu'\, dx)$$

Demostración. Por hipótesis, existe $c_0(f) = \int_{-1}^{1} f p_0\, d\mu$ para cada $f \in L^p([-1,1], v^p\, d\mu)$, luego $L^p([-1,1], v^p\, d\mu) \subset L^1([-1,1], d\mu)$. Entonces, el teorema del gráfico cerrrado y dualidad implican $v^{-1} \in L^q([-1,1], d\mu)$.

Para demostrar la segunda condición definamos los operadores $T_n : L^p([-1,1], v^p\, d\mu) \to \mathbb{R}$ que a cada f le asignan $T_n f = c_n(f) = \int_{-1}^{1} f p_n\, d\mu$. Estos operadores son continuos por la desigualdad de Hölder y, por dualidad, satisfacen $\|T_n\| = \|p_n v^{-1}\|_{L^q([-1,1],d\mu)}$. Supongamos ahora que

$$v(x)^{-1}\mu'(x)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4} \notin L^q([-1,1], \mu'\, dx).$$

Por (14), $\sup \|p_n v^{-1}\|_{L^q([-1,1],d\mu)} = \infty$ luego, por el teorema de Banach-Steinhauss, existirá $f \in L^p([-1,1], v^p\, d\mu)$ tal que $\sup |T_n f| = \sup |c_n(f)| = \infty$. Por otra parte, $c_n(f) f(x) \to 0$ $d\mu$-a.e. ya que $S_n f$ converge. De aquí que forzosamente $p_n(x) \to 0$ $d\mu$-a.e. Por el teorema de Egorov, existirá un conjunto E de medida positiva y una subsucesión tal que $p_{n_j}(x) \to 0$ uniformemente en E. Por lo tanto, $\liminf \int_E |p_{n_j}|\, d\mu = 0$. Y esto lleva a una clara contradicción con (14) para $p = 1$ y $g = \mu'\chi_E$.

Para concluir, simplemente citar que también hay resultados análogos a (14) y (15), y consiguientemente a los teoremas 5, 6 y 7, para los sistemas ortogonales de Bessel que introdujimos en § 1. A este respecto puede consultarse [12, 13, 24, 31].

BIBLIOGRAFÍA

1. N. I. Akhiezer, *"The Classical Moment Problem"*, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1965.
2. R. Askey y S. Wainger, *Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series*, Amer. J. Math. **87** (1965), 695–708.
3. V. M. Badkov, *The uniform convergence of Fourier series in orthogonal polynomials*, Math. Notes **5** (1969), 174–179.
4. V. M. Badkov, *Approximation of functions by the partial sums of a Fourier series in polynomials that are orthogonal on an interval*, Math. Notes **8** (1970), 712–717.
5. V. M. Badkov, *Convergence in the mean of Fourier series in orthogonal polynomials*, Math. Notes **14** (1973), 651–657.
6. V. M. Badkov, *Convergence in the mean and almost everywhere of Fourier series in polynomials orthogonal on an interval*, Math. USSR Sb. **24** (1974), 223–256.
7. A. I. Benedek y R. Panzone, *On mean convergence of Fourier-Bessel of negative order*, Studies in App. Math. **50** (1971), 281–292.
8. A. I. Benedek y R. Panzone, *Mean convergence of series of Bessel functions*, Rev. Un. Mat. Arg. **26** (1972), 42–61.
9. A. I. Benedek y R. Panzone, *Pointwise convergence of series of Bessel functions*, Rev. Un. Mat. Arg. **26** (1972), 167–186.
10. L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. **116** (1966), 135–157.
11. S. Chanillo, *On the weak behaviour of partial sums of Legendre series*, Trans. Amer. Math. Soc. **268** (1981), 367–376.
12. J. J. Guadalupe, M. Pérez, J. F. Ruiz y J. L. Varona, *Two notes on convergence and divergence a.e. of Fourier series with respect to some orthogonal systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 457–464.
13. J. J. Guadalupe, M. Pérez, J. F. Ruiz y J. L. Varona, *Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series*, J. Math. Anal. Appl., **173** (1993), 370–389.
14. J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, *Weak behaviour of Fourier-Jacobi series*, J. Approx. Theory **61** (1990), 222–238.
15. J. García Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *"Weighted norm inequalities and related topics"*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
16. R. Hunt, *On the convergence of Fourier series*, Proc. Conf. Orthogonal Expansions and Continuous Analogues, 235–255. Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., 1968.
17. R. Hunt, B. Muckenhoupt y R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227–251.
18. A. Máté, P. Nevai y V. Totik, *Necessary conditions for weighted mean convergence of Fourier series in orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **46** (1986), 314–322.
19. C. Meaney, *Divergent Jacobi polynomial series*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 459–462.

20. B. Muckenhoupt, *Mean convergence of Jacobi series*, Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969), 306–310.

21. B. Muckenhoupt, *Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **147** (1970), 419–431.

22. B. Muckenhoupt, *Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **147** (1970), 433–460.

23. J. Newman y W. Rudin, *Mean convergence of orthogonal series*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 219–222.

24. M. Pérez, *"Series de Fourier respecto de sistemas ortogonales: estudio de la convergencia en espacios de Lebesgue y de Lorentz"*, Tesis Doctoral, Sem. Mat. García de Galdeano, sec. 2, n. 24, Zaragoza, 1989.

25. H. Pollard, *The mean convergence of orthogonal series I*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 387–403.

26. H. Pollard, *The mean convergence of orthogonal series II*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 355–367.

27. H. Pollard, *The mean convergence of orthogonal series III*, Duke Math. J. **16** (1949), 189–191.

28. H. Pollard, *The convergence almost everywhere of Legendre series*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 442–444.

29. E. M. Stein y G. Weiss, *"Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces"*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1975.

30. G. Szegő, *"Orthogonal polynomials"*, 3.ª ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.

31. J. L. Varona, *"Convergencia en L^p con pesos de la serie de Fourier respecto de algunos sistemas ortogonales"*, Tesis Doctoral, Sem. Mat. García de Galdeano, sec. 2, n. 22, Zaragoza, 1989.

32. G. N. Watson, *"A Treatise on the Theory of Bessel Functions"*, Cambridge Univ. Press, 1966.

33. G. M. Wing, *The mean convergence of orthogonal series*, Amer. J. Math. **72** (1950), 792–808.

34. A. Zygmund, *"Trigonometric Series"*, Vol. I y II, 2.ª ed., Cambridge Univ. Press, 1977.