Cuadrados mágicos concéntricos

Eduardo Sáez de Cabezón Irigaray

Durante siglos, los estudiosos de los cuadrados mágicos han tratado de buscar métodos generales para la construcción de cuadrados mágicos, y sus esfuerzos no han sido vanos. Hoy contamos con varios métodos para cuadrados de orden par, que son en general más difíciles de construir que los de orden impar, particularmente cuando el orden del cuadrado no es divisible por cuatro.

A lo largo de mis viajes a la tierra de los cuadrados mágicos he conocido métodos muy elegantes para resolver este problema, como el método de las diagonales para cuadrados mágicos de orden $4m$ con $m \geq 1$, o el llamado método LUX para cuadrados de orden $4m+2$, con $m \geq 1$.

Hacia finales del siglo XVII, Frénicle de Bessy propuso un método para cualquier orden par, el llamado método de la orla, que permite pasar de un cuadrado de orden n par, a otro de orden $n+2$. El método puede describirse así:

Dado un cuadrado mágico de orden n, sumemos $2n+2$ a todos los elementos del cuadrado y añadamos una orla vacía alrededor. Sólo queda distribuir adecuadamente en la orla los números que faltan (es decir, del 1 al $2n+2$ y del n^2+2n+3 al $(n+2)^2$) para obtener un cuadrado mágico de orden $n+2$. Para n pequeño, algunos tanteos bastan para rellenar la orla. Fermat, amigo de Frénicle escribió cuadrados mágicos hasta el orden 22 usando este método.

Ignoro si Frénicle propuso un método para eludir los tanteos cualquiera que sea n; en la corta bibliografía a mi alcance no he encontrado nada en este sentido. De todos modos podemos llenar este vacío matando dos pájaros de un tiro: Demostrando la validez general del método de Frénicle para cualquier n par, y haciéndolo además de una manera constructiva que nos de un método general para llenar esa orla cualquiera que sea n. La demostración que he pensado es muy sencilla e intuitiva.

Nombramos los números de la orla de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccc}
v & b_1 & b_2 & . & b_n & w \\
c_1 & & & & & c_1' \\
c_2 & & & & & c_2' \\
\dots & & & & & \dots \\
c_n & & & & & c_n' \\
w' & b_1' & b_2' & . & b_n' & v'
\end{array}$$

Aquí, denotamos por α' al complementario de α, donde complementario significa que $\alpha+\alpha'$ es igual a n^2+4n+5. Es decir, que la suma de dos complementarios es igual a la diferencia entre la constante del cuadrado de orden $n+2$ y la del cuadrado inicial de orden n.

De esta manera garantizamos que todas las sumas en filas, columnas y diagonales son iguales excepto en las filas y columnas primera y última. Ahora debemos elegir los elementos de $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ y $C=\{c_1,\dots,c_n\}$; así como v y w, de tal manera que consigamos todos los números que nos quedan por anãdir,

$$B \cup B' \cup C \cup C' \cup \{v,v',w,w'\} = \{1,\dots,2n+2\} \cup \{n^2+2n+3,\dots,(n+2)^2\},$$

y además hagan cuadrar las dos filas y columnas que nos faltan:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i + v + w = \sum_{i=1}^{n} b'_i + v' + w' = \sum_{i=1}^{n} c_i + v + w' = \sum_{i=1}^{n} c'_i + w + v$$

Si $n = 4$ podemos tomar $v = 35$, $w = 32$, $B = \{33, 7, 3, 1\}$, $C = \{29, 27, 9, 6\}$.

Si $n = 6$ tomamos $v = 1$, $w = 4$, $B = \{63, 62, 59, 58, 5, 8\}$, $C = \{56, 54, 52, 10, 12, 14\}$.

Si $n = 4m$, $m \geq 2$ podemos tomar $v = n^2 + 3n + 7$, $w = n^2 + 3n + 4$,

$$B = \{n^2 + 3n + 5, n + 3, n - 1, n - 3\}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\frac{n-8}{4}} \{n - 7 - 4k, n - 4 - 4k, n^2 + 3n + 10 + 4k, n^2 + 3n + 11 + 4k\},$$

$$C = \{n^2 + 3n + 1, n^2 + 3n - 1, n + 5, n + 2\}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\frac{n-8}{4}} \{n + 7 + 4k, n + 10 + 4k, n^2 + 3n - 3 + 4k, n^2 + 5n - 4 + 4k\}$$

Si $n = 4m + 2$, $m \geq 2$ tomamos $v = n - 5$, $w = n - 2$,

$$B = \{n^2 + 3n + 9, n^2 + 3n + 8, n^2 + 3n + 5, n^2 + 3n + 4, n - 1, n - 2\}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\frac{n-10}{4}} \{n - 6 - 4k, n - 9 - 4k, n^2 + 3n + 12 + 4k, n^2 + 3n + 13 + 4k\},$$

$$C = \{n^2 + 3n + 2, n^2 + 3n, n^2 + 3n - 2, n + 4, n + 6, n + 8\}$$

$$\bigcup_{k=0}^{\frac{n-10}{4}} \{n + 9 + 4k, n + 12 + 4k, n^2 + 3n - 5 - 4k, n^2 + 3n - 6 - 4k\}.$$

De esta manera, empezando con un cuadrado mágico de orden 4, podemos construir cuadrados mágicos de orden par, tan grandes como queramos, tales que todos los subcuadrados centrales son también mágicos.

Sólamente queda hacer una observación sobre este método. Al hacer las asignaciones para los b_i y para los c_i sin importarnos el orden de los números disponibles, hemos obtenido $(n!)^2$ cuadrados distintos (en realidad hay más intercambiando los números de las esquinas). Además, la asignación propuesta es sólamente una de las muchas posibles, habiendo otras igualmente válidas, con lo que el número de cuadrados se multiplica.

79	31	47	101
53	71	61	73
89	59	67	43
37	97	83	41

Por último, respecto a los cuadrados mágicos de orden cuatro formados por números primos por los que preguntaba en su sección; los hay, y muchos; el cuadrado de la izquierda que pongo como ejemplo, tiene además la particularidad de que está formado por primos consecutivos.

Eduardo Sáenz de Cabezón Irigaray, c/ Beratúa 38, 3 izda- Logroño.
e-mail: eduardo.saenz-de-cabezon@alum.unirioja.es

Cuadrados mágicos de primos

Jose Javier López Peña

El método que he utilizado para encontar cuadrados mágicos primos de orden tres ha consistido en hallar un número primo a, y dos enteros distintos b y c, múltiplos de 6 verificando que $a+b, a+c, a-b, a-c, a+b-c, a-b+c, a-b-c$ y $a+b+c$ son también números primos.

Con una tabla de primos en la mano he encontrado el cuadrado de primos de la izquierda, que posiblemente sea el de menor número central. Con el mismo método, pero con ayuda de medios más fuertes, también he encontrado el "monstruo"de la derecha:

17	89	71
113	59	5
47	29	101

2147453557	2147512771	2147484613
2147514703	2147483647	2147452591
2147482681	2147454523	2147513737

Para hallar cuadrados de primos de 4×4 he obtenido primero la forma genérica de los cuadrados mágicos de 4×4:

$a-c+e$	$a+b-d+g$	$a+d+f$	$a+c+h$
$a+f$	$a+c+d+h$	$a-c-d+g$	$a+b+e$
$a+g+h$	$a-c+d+e+f$	$a+b+c-d$	a
$a+b+c$	$a-d$	$a+d+e+h$	$a-c+g+f$

43	31	59	71
47	83	7	67
61	73	41	29
53	17	97	37

Observar que tienen estructura de espacio vectorial de dimensión 8. Con ayuda de esta forma genérica he obtenido el cuadrado mágico de la izquierda, que está formado completamente por números primos.