SUMA 31
junio 1999, pp. 67-72

El problema de Arquímedes del rebaño de reses

Emilio Fernández Moral
Mariano Banzo Marraco

En este artículo se documenta el clásico *Arquimedes problema bovinum*, presentando una implementación en *Mathematica* de su solución, así como, en general, de la solución en mínimos enteros positivos x e y de la *ecuación de Pell* $x^2 - ny^2 = 1$, con n entero positivo dado.

AMIGO, si has heredado la sabiduría, calcula cuidadosamente a qué número ascendía la multitud de las reses del Sol que en otro tiempo pacían en las llanuras de la isla Trinacria,[1] divididos en cuatro manadas de distinto pelaje: una, de color blanco como la leche, otra de negro lustroso, una tercera oscura, la cuarta manchada. Los toros, que superaban en número a las vacas, se repartían en cada manada de la siguiente manera: imagina, amigo mío, que los toros blancos eran en igual número que la mitad y un tercio de los negros además de todos los oscuros, mientras que los negros eran en igual número que la cuarta más la quinta parte de los manchados, más todos los oscuros. Considera además que los manchados eran en igual número que la sexta más la séptima parte de los blancos, más todos los oscuros. Las vacas estaban así repartidas, por su parte: las blancas eran en igual número que la tercera más la cuarta parte de toda la manada negra, mientras que las negras eran en igual número que la cuarta más la quinta parte de toda la manada manchada; a su vez las manchadas eran en igual número que la quinta más la sexta parte de toda la manada oscura, mientras que las oscuras eran en igual número que la mitad de la tercera parte más la séptima parte de toda la manada blanca.

Amigo, si me dices cuántas eran exactamente las reses del Sol, y, en particular, cuál era el número de toros y vacas de cada pelaje, no se te podrá calificar de ignorante ni de inhábil en el manejo de los números, pero aún no podrás contarte entre los sabios. Pues atiende aún a dos distintas maneras en que las reses del Sol solían disponerse: cuando los toros blancos unían su multitud a la de los toros negros, formaban un grupo compacto de igual medida en profundidad que en anchura que llenaba enteramente las inmensas llanuras de Trinacria. Por otra parte, reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban por filas de tal manera que, estando constituida la primera por uno solo de ellos, formaban gradualmente una figura triangular, sin faltar ni sobrar ninguno. Amigo, si encuentras la relación oportuna entre todas estas cosas y, en una palabra, si concentrando tu espíritu expresas todas las cantidades correspondientes a esas manadas, podrás vanagloriarte de haber conquistado la victoria y estar convencido de ser juzgado consumado conocedor de esta ciencia.

1 Θρινακιή en el epigrama (y en Homero, ver más adelante), también Τριναχρια, es el antiguo nombre de Sicilia, por razón de los tres grandes cabos o promontorios (τριααχρα) que forma esta isla al NE. (Pelorum), al O. (Lilybaeum) y al SE. (Pachynus).

ARTÍCULOS

Este es el «problema que Arquímedes [encontró entre (algunos) epigramas/ideó, en forma de epigrama] y envió, para que fuera resuelto por quienes en Alejandría se ocupaban de estas materias, en una carta a Eratóstenes de Cirene.» (Recogemos básicamente las traducciones castellanas que dan Babini (1948, 123-125), seguramente del texto en francés de ver Eecke (1960, II, 545-547) y Vera (1970, II, 218-219); en el corchete anterior la primera posibilidad parece la traducción literal.)

El manuscrito griego que contiene este texto (un epigrama de 22 dísticos jonios con la anterior cabecera) fue publicado por primera vez en 1773 por el escritor alemán Teófilo Efraím Lessing,[2] junto con otros tesoros de la Biblioteca Wolfenbüttel de Brunswick de la que fue director al final de su vida. Si no el epigrama, el problema en su forma completa es atribuible a Arquímedes (287-212) para la crítica moderna más autorizada (Krumbiegel, Tannery, Heiberg, Heath), y sería el que originó en la antigüedad referencias a un cierto «πρόβλημα βοεικήν» de Arquímedes (en un escoliasta de Platón, en Herón) como ejemplo de problema de «Λογιστικα», o a un «πρόβλημα Ἀρχιμήδειον» para glosar algo de gran dificultad (en Cicerón)[3]. La formulación bovina del problema le pudo ser sugerida a Arquímedes[4] por conocidos pasajes del Canto XII de la Odisea de Homero, el primero de los cuales es:

> Tuerce el rumbo después a la isla feraz de Trinacria
> donde pacen las vacas del Sol y sus gruesas ovejas,
> siete hatos de ovejas y siete manadas de vacas,
> de cincuenta por grey,...

Y parece que el destinatario de tan, como se verá, envenenado desafío pudo haber sido Apolonio, con quien Arquímedes mantenía ciertas desavenencias.[5]

Traslademos la formulación del problema a simbolismo algebraico, en la misma forma que Elena Martín Ortega (1990); Sean *B, N, M, O* y *b, n, m, o*, respectivamente, los números de los toros blancos, negros, manchados y oscuros y de las vacas blancas, negras, manchadas y oscuras. La primera parte del enunciado conduce a un sistema homogéneo de 7 ecuaciones lineales en esas 8 incógnitas:

$$\begin{cases} B = (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})N + O = \frac{5}{6}N + O \\ N = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})M + O = \frac{9}{20}M + O \\ M = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})B + O = \frac{13}{42}B + O \\ b = (\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(N+n) = \frac{7}{12}(N+n) \\ n = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(M+m) = \frac{9}{20}(M+m) \\ m = (\frac{1}{5}+\frac{1}{6})(O+o) = \frac{11}{30}(O+o) \\ o = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})(B+b) = \frac{13}{42}(B+b) \end{cases}$$

2 Manuscrito «77 Gud. Graec.». Publicado en *Beiträge zur Geschichte und Literatur*, Braunschweig, 1773, 421. Hay otra copia del epigrama en la Bibliothèque Nationale de París, cod. Paris Gr. 2448, saec. XIV, fol. 57.

3 Cicerón en *Cartas a Atico*: «Sed de Catone, πρόβλημα' Αρχιμήδειον *est*...» XII-iv; «Abiit illud qod tum me stimulabat cum tibi dabam πρόβλημα Ἀρχιμήδειον...» XIII-xxviii. Platón (citado por Heiberg), en *Scholia al Charmides*, 165e, (traducción de Heath): «Logística es la ciencia que trabaja con cosas contadas, no con los números que las cuentan..., que considera 3 como una terna y 10 como una decena..., es, pues, logística lo que investiga de un lado el que Arquímedes llamó problema de los bueyes...» También en Herón: *Definitiones, Opera omnia*, IV, 98. (Heiberg, Leipzig, 1899-1914).

4 Señalado por J. Struve en *Altes griechisches Epigramm mathematisches Inhalts*, Altona, 1821. También se lee antes, en el Canto XI: «...en cuanto hayas tu armónica nave atracado en la isla/ de Trinacia, escapando del ponto violáceo, y encuentres/ pastoreando a las Vacas del Sol y a las grandes ovejas/ del que nada se escapa a sus ojos y todo lo oye...». La traducción de este pasaje y del citado en el texto son de Fernando Gutiérrez, en verso, en la edición de la Odisea de Homero con intro. y notas de José Alsina, Planeta 1980, Barcelona, páginas 172 y 194, resp. Más pasajes a continuación en el mismo Canto XII.

5 Ver Dijksterhuis (1987) p. 399, que cita la opinón de Heath.

De las tres primeras resulta el sistema

$$\begin{cases} 6B - 5N = 6 \cdot O \\ 20N - 9M = 20 \cdot O \\ 42M - 13B = 42 \cdot O \end{cases}$$

de donde, con fracciones irreducibles,

$$B = \frac{742}{297}O, \quad N = \frac{178}{99}O, \quad M = \frac{1580}{891}O$$

Ya que se buscan números enteros, deberá ser O = 891·X con *X* entero, y así también B = 2226·X, N = 1602·X, M = 1580·X.

Sustituyendo estos valores en las otras cuatro ecuaciones se obtiene ahora el sistema

$$\begin{cases} 12b - 7n = 11214 \cdot X \\ 30m - 11o = 9801 \cdot X \\ 20n - 9m = 14220 \cdot X \\ 42o - 13b = 28938 \cdot X \end{cases}$$

de donde, con fracciones irreducibles,

$$b = \frac{7206360}{4657}X$$
$$n = \frac{4893246}{4657}X$$
$$m = \frac{3515820}{4657}X$$
$$o = \frac{5439213}{4657}X$$

Deberá ser entonces X = 4657·x, con *x* entero positivo, y entonces los valores de las ocho incógnitas expresados como múltiplos enteros de la variable auxiliar *x* son los siguientes: (los menores números resultan para x = 1)

$$\begin{cases} B = 10366482 \cdot x \\ N = 7460514 \cdot x \\ M = 7358060 \cdot x \\ O = 4149387 \cdot x \\ b = 7206360 \cdot x \\ n = 4893246 \cdot x \\ m = 3515820 \cdot x \\ o = 5439213 \cdot x \end{cases}$$

y el número total de reses en la manada, A = 50389082x.

El manuscrito griego va seguido por la solución de un escoliasta, que es la misma anterior para x = 80. Pero esos números no verifican las otras dos condiciones del problema.

Estas dos condiciones de la segunda parte del enunciado son:

$$B+N = \text{cuadrado},\ M+O = \text{triangular}$$

$B+N = 2^2{\cdot}3{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}4657{\cdot}x$ es un cuadrado perfecto si y solo si $x = 3{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}4657{\cdot}u^2$ con u entero. Queda la última condición,

$$M+O = 7{\cdot}353{\cdot}4657{\cdot}x =$$
$$= 3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}353{\cdot}4657^2{\cdot}u^2 = q{\cdot}(q+1)/2$$

Poniendo $2q + 1 = v$, ésta se convierte en

$$v^2–1 = 4q(q + 1) =$$
$$= 2^3{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}353{\cdot}4657^2{\cdot}u^2 =$$
$$= 410286423278424{\cdot}u^2\ ,$$

luego todo se «reduce» a calcular el menor valor entero positivo de *u* que satisface la ecuación (con *v* también entero)

$$v^2–410286423278424{\cdot}u^2 = 1 \qquad [1]$$

para obtener los números de vacas y toros del rebaño más pequeño que cumple todas las condiciones de Arquímedes. Por ejemplo, el número total de reses en el rebaño sería, con dicho valor de *u*,

$$A = 50389082{\cdot}x =$$
$$= 50389082{\cdot}3{\cdot}11{\cdot}29{\cdot}4657{\cdot}u^2 \qquad [2]$$

La ecuación [1] es una ecuación de Pell, así denominadas las ecuaciones diofánticas del tipo $x^2–M{\cdot}y^2 = 1$, (en general igual a *n*), reinventadas por Fermat en el siglo XVII y estudiadas de modo completo por Euler y Lagrange en el XVIII. Para todo M que no sea un cuadrado perfecto tienen infinitas soluciones en enteros positivos. Bien pudo Arquímedes haber tratado con ecuaciones de este tipo, para números M pequeños sin duda, por ejemplo cuando buscaba aproximaciones racionales para la raíz cuadrada de 3 en la «medida del círculo», aunque no ha llegado ninguna otra evidencia de ello. El problema con la ecuación [1] es concretamente el tamaño de su mínima solución *u*: sus 103266 cifras seguramente desbordaban la capacidad de cálculo alejandrina del siglo III a.C.

Lo mejor que humanamente puede hacerse[6] para acercarse a la solución de [1] lo hizo A. Amthor en 1880.[7] Podemos recrear un resumen:

En primer lugar, como

$$410286423278424 = 4729494{\cdot}2^2{\cdot}4657^2,$$

el problema se reduce a encontrar la mínima solución entera positiva *u* de la ecuación de Pell

$$v^2–4729494{\cdot}u^2 = 1 \qquad [3]$$

que sea divisible por 2 y por 4657.

La solución mínima de [3] es la siguiente:

$$v_1 = 109931986732829734979866232821433543901088049$$
$$u_1 = 50549485234315033074477819735540408986340$$

Y la solución general de [3] viene dada por

$$v_n + u_n\sqrt{M} = (v_1 + u_1\sqrt{M})^n$$

donde $M = 4729494$, lo que da en particular la siguiente ley de recurrencia para calcular las sucesivas u_n:

$$u_2 = 2u_1v_1,\quad u_{n+2} = 2v_1u_{n+1} - u_n\quad (n > 1)$$

Como u_1 es par, u_n es siempre par; el primer u_n que es divisible por 4657 es u_{2329}; este es el valor de *u* que interesa, la menor solución de la ecuación [1].

Amthor pudo llegar entonces, tras arduo trabajo, a la conclusión de que B = 1598<206541>, donde <206541> indica que siguen otras 206541 cifras, y que, con la misma notación, A = 7766<206541>. Añade Amthor:

> Fácil es comprobar que una esfera que tuviera el diámetro de la Vía Láctea, que la luz tarda diez mil años en atravesar, podría contener tan sólo una parte de este enorme número de animales, aunque cada uno de ellos tuviera el tamaño de la menor bacteria... Imprimir los ocho números de la solución, a 2500 cifras por página, requeriría un volumen de en torno a 660 páginas.

Después de Amthor, en 1895, tras cuatro años de duro y no remunerado trabajo de cálculo, A.H.Bell y los otros dos únicos miembros del denominado «Hillsboro Mathematics Club» de Hillsboro, Illinois, publicaron 30 o 31 de las primeras cifras y 12 de las últimas de cada uno de los ocho números incógnita de toros y vacas y del número total del rebaño. Este número en concreto comenzaba 7760271..., en desacuerdo con el mucho más modesto cálculo de Amthor.[8] «Eso abría», ironiza[9] E.T.Bell (sin relación de parentesco, como él mismo señala, con A.H.Bell) en (1990), pp. 152-153, «un campo de comprobaciones y mejoras más ancho aún que las llanuras de Trinacria» del que ya no tenemos más noticias.

Tras la aparición de ordenadores cada vez más capaces, el cálculo efectivo de la solución del problema pasaba a ser una trivialidad. En 1965 se hizo por primera vez el

6 K. B. Mollweide, que nació en Wolfenbüttel, se cita como autoridad para la afirmación de que su amigo personal K. F. Gauss resolvió completamente el problema del rebaño. Para E. T. Bell (1990) «eso es muy improbable, por decirlo suavemente».

7 A. Amthor, «Das Problema bovinum des Archimedes», *Zeitschr.für Math.und Phys.*, Hist.literar.Abt.,Leipzig, 1880, vol. 25, 153-171. Este artículo está precedido, en 121-136 por una traducción alemana del manuscrito y una discusión filológica de B.Krumbiegel.

8 De hecho es A = 7760<206541>, como corrigió a Amthor el Club de Matemática de Hillsboro. Ver las referencias de estos trabajos en el artículo de Archibald citado en la bibliografía del final, 414.

9 Dice Bell: «Ya señaló un cínico que mientras haya un problema sin resolver, algún mentecato intentará resolverlo, sobre todo si es irresoluble, y al Hillsboro Mathematics Club de Hillsboro le faltó poco para encajar en la observación cínica».

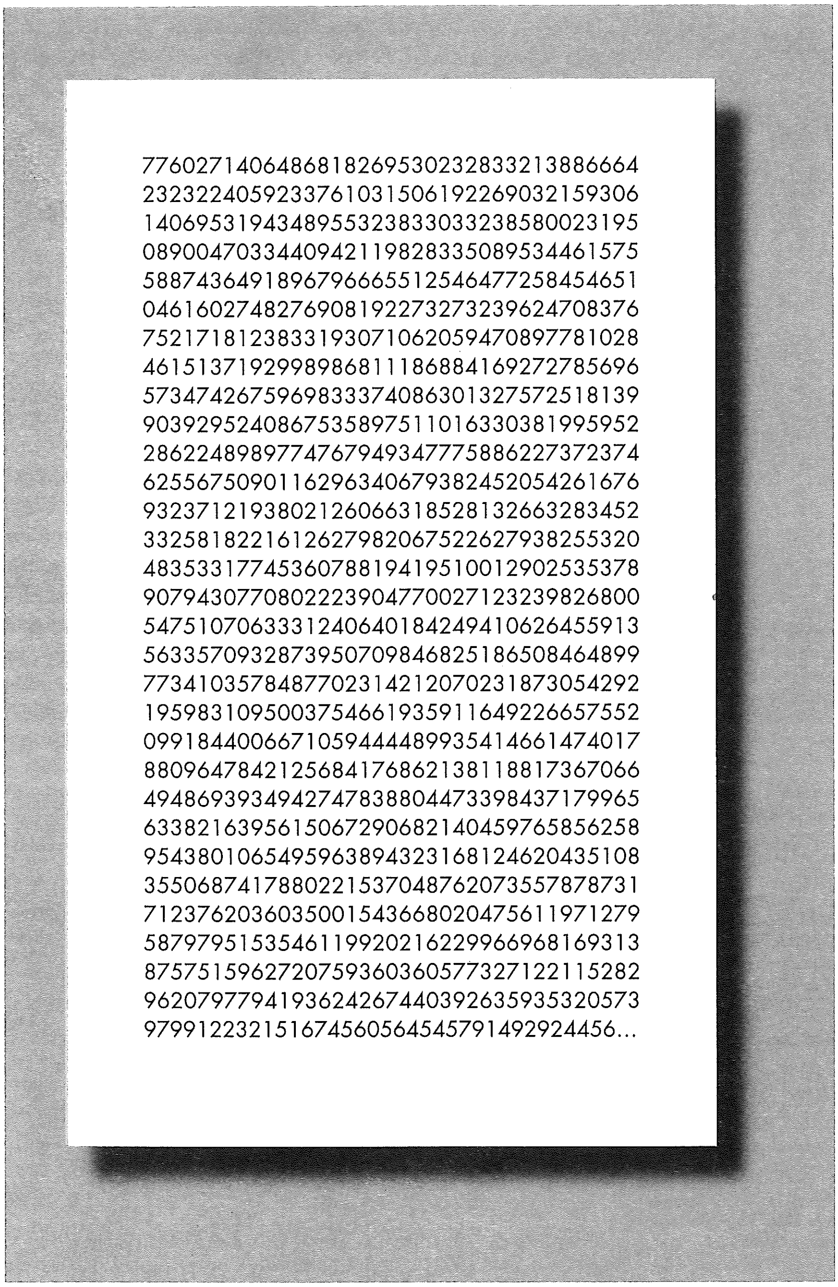
7760271406486818269530232833213886664
2323224059233761031506192269032159306
1406953194348955323833033238580023195
0890047033440942119828335089534461575
5887436491896796665512546477258454651
0461602748276908192273273239624708376
7521718123833193071062059470897781028
4615137192998986811186884169272785696
5734742675969833374086301327572518139
9039295240867535897511016330381995952
2862248989774767949347775886227372374
6255675090116296340679382452054261676
9323712193802126066318528132663283452
3325818221612627982067522627938255320
4835331774536078819419510012902535378
9079430770802223904770027123239826800
5475107063331240640184249410626455913
5633570932873950709846825186508464899
7734103578487702314212070231873054292
1959831095003754661935911649226657552
0991844006671059444489935414661474017
8809647842125684176862138118817367066
4948693934942747838804473398437179965
6338216395615067290682140459765856258
9543801065495963894323168124620435108
3550687417880221537048762073557878731
7123762036035001543668020475611971279
5879795153546119920216229966968169313
8757515962720759360360577327122115282
9620797794193624267440392635935320573
9799122321516745605645457914929244 56...

Figura 1. Primeras cifras del número de 206.545 dígitos que es solución del problema para M = 31.

cálculo completo de las 206545 cifras de la respuesta total pero no se imprimió. Harry Nelson (1980-1981) recalculó y publicó la solución impresa (con cifras de pequeño formato). Nelson quería usar este cálculo como prueba para un nuevo ordenador, pero encontró que la máquina acababa las cuentas demasiado rápidamente como para disponer con esto de un buen test. Entonces hizo que su máquina calculase sucesivas soluciones del problema. Con las del orden de 1 millón de cifras el trabajo parece que era más a la medida de las posibilidades.

Hoy día el reto arquimediano lo puede afrontar con éxito un ordenador personal. Nosotros hemos realizado el cálculo de la solución mínima u_1 de la ecuación «grande» (la ecuación [1]) del problema del rebaño de reses en un «Pentium 166». Solamente hemos hecho que se calculara e imprimiese el número total de las reses, no u_1 ni los otros ocho números del rebaño.

Hemos utilizado el algoritmo usual de Lagrange (versión Rey Pastor (1981)) para el cálculo de la solución mínima (v_1,u_1) de $v^2 - M \cdot u^2 = 1$ como la fracción reducida convergente

$$(p_n, q_n) \equiv \frac{p_n}{q_n}$$

de la fracción contínua del número

$$\sqrt{M} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_m}\right],$$

$(a_m = 2a_0)$, con $n = m-1$ si m es par o $n = 2m-1$ si m es impar. Cálculos previos más rápidos nos aseguraban que para nuestro M la longitud del período de la fracción contínua de $\sqrt{M}$ es par (de hecho, 203254) y que por consiguiente había que parar el programa en la reducida de orden $m-1$ (cuando $a_m = 2a_0$ por primera vez) y así, $u_1 = q_{m-1}$.

Hemos desarrollado el algoritmo además con las siguientes fórmulas de recurrencia (a_i son los cocientes incompletos, p_i y q_i el numerador y el denominador de la reducida de orden i, los corchetes indican parte entera):

$$\begin{cases}
a_0 = \left[\sqrt{M}\right] \\
B_0 = 0 \\
D_0 = 1 \\
p_0 = a_0 \\
q_0 = 1 \\
B_n = a_{n-1} \cdot D_{n-1} - B_{n-1} \\
D_n = (M - B_n^2)/D_{n-1} \\
a_n = \left[(a_0 + B_n)/D_n\right] \\
p_1 = a_1 \cdot a_0 + 1 \\
p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2} \\
q_1 = a_1 \\
q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}
\end{cases}$$

Así por ejemplo, para M = 31:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	0	5	1	4	5	5	4	1	5
D_n	1	6	5	3	2	3	5	6	1
a_n	**5**	1	1	3	5	3	1	1	**10**
p_n	5	6	11	39	206	657	863	**1520**	
q_n	1	1	2	7	37	118	155	**273**	

Se tiene:

$$\sqrt{31} = \left[5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}\right] = 5 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{10+\ldots}$$

El período de los cocientes incompletos es de longitud 8 (par), alcanzado cuando $a_n = 2 \cdot a_0 = 2 \cdot 5 = 10$.

La séptima reducida,

$$5 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+} = \frac{1520}{273}$$

y se tiene $1520^2 - 31 \cdot 273^2 = 1$. De hecho, (1520, 273) es la solución mínima en enteros positivos de $v^2 - 31 \cdot u^2 = 1$.

(Se tiene

$$\frac{1520}{273} - \sqrt{31} \cong 0{,}0000012,$$

y no hay una fracción con menor denominador que dé mejor aproximación que ésta a la $\sqrt{31}$. Si la longitud del período es impar, la «primera vez» se llega a una solución (p, q) de la ecuación $v^2 - M \cdot u^2 = -1$, y la solución mínima (P, Q) de $v^2 - M \cdot u^2 = 1$ se obtiene a partir de

$$(p^2 - M \cdot q^2)^2 = P^2 - M \cdot Q^2 = 1.$$

Nuestra implementación, al objeto de que la salida del programa sea ya directamente el número total de reses del rebaño en un fichero recuperable luego desde un procesador de textos, ha sido la función *keytel* para *Mathematica* que se puede examinar en el Apéndice, donde recogemos también una función *solucionPell* que da la solución mínima de una ecuación de Pell; esta función se puede aligerar para dar solamente la longitud del período de la fracción continua de la $\sqrt{M}$. Escribiendo las funciones *cattle* y *keytel* como In[1] e In[2], con la entrada In[3]:=keytel, a los 32 minutos en la pantalla se lee:

```
El numero tiene 206545 cifras
Out[3]={1895.81 Second, Null}
```

y el número, recuperado luego del fichero también denominado *keytel*, empieza, de acuerdo con el Club de Hillsboro, 7760271... y acaba 55081800. Nuestro ordena-

...9609583666197257779148498129837280
76813420717092864850110832038027695
08892080619047365346640166033665713
54957498618546305966264566434434133
70576736741796162068746587816251381
96865029045509264704958936719606399
41784645640029927367860809417910917
74287931170123369601874070857769922
44787836231541880275807433007001270
27460322767270524056001245771481341
21289815481942572853969039302280155
44927432077964133952391787622639882
49740977373188153440673325018542305
57590615418068647327661594587408623
80424902449274447501046932922489527
09916982033631671932713388117289351
93059808866128626705017161220339911
02832889509474495599283178351133874
69470777738533466752569357352799830
43872817995021779644625917412057100
67837492280129466557319149912947044
25345255843200604565060174992051799
24220271972472512501269010986437364
56215434422571452101831188776880686
30298971337856633004406809998551939
17424466337493894703903752457792566
99660303265435652072678728835138492
56166954389604815500599463014429250
0354883118973723406626719455081800

Figura 2. Últimas cifras del número de 206.545 dígitos que es solución del problema para M = 31.

dor ha conquistado la victoria. Y el trabajo, realizado con energía eléctrica industrial, empieza en realidad en el apéndice posterior a la bibliografía.

Bibliografía

ARCHIBALD, R.C. (1918): «The Cattle Problem of Archimedes», *Amer. Math. Monthly*, XXV, pp. 411-414.

BABINI, J. (1948): Arquímedes, Austral Serie Marrón, Espasa Calpe, Buenos Aires.

BELL, E.T. (1990): *The Last Problem*, revised and updated by U. Dudley, The Mathematical Association of America, U.S.A.

BLACHMAN, N. (1993): *Mathematica. Un enfoque práctico*, Ariel Informática. Madrid.

DIJKSTERHUIS, E. J. (1987): *Archimedes*, Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey.

Emilio Fernández
IES Práxedes Mateo Sagasta.
Logroño
Mariano Banzo
IES Práxedes Mateo Sagasta.
Logroño
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo».

DÖRRIE, H. (1965): *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, New York.

HEATH, T. (1981): *A history of Greek Mathematics*, 2 vol., reimp. Dover, New York.

MARTÍN ORTEGA, E. (1990): *La ecuación de Pell*, Monografías del B.I., Instituto Sagasta, Logroño. (Sin publicar.)

NELSON, H. (1980-1981): «A solution to Archimedes' cattle problem», *Journal of Recreational Maths.*, 13, 162-176.

REY PASTOR, J. (1981): *Elementos de Análisis Algebraico*, Euler Libros-Gómez Puig Ediciones, Madrid, 433 y siguientes.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos, 2 vol.* Aguilar, Madrid.

VER EECKE, P. (1960): *Oeuvres Complètes d'Archimede*, 2 vol., Blanchard, Paris.

Apéndice

```
(* La función para el número del rebaño de Arquímedes *)
cattle[m_,q_]:= Block[{b,d,a,q1,q2,au,cifras},
   b=q;d=m-q^2;a=Quotient[2 q,d];q1=0;q2=1;
   While[a != 2 q,(au=q1;q1=q2;q2=a q2+au;
      b=a d-b;d=(m-b^2)/d;
      a=Quotient[q+b,d])
      ];
   cifras=Floor[14.35 + 2 Log[10,q2+.0]]+1;
   50389082 4456749 q2^2 >>> keytel;
   Print[«El numero tiene «,cifras,» cifras»]
   ]
keytel:=Timing[cattle[410286423278424,20255528]]
(*20255528 es la parte entera de la raíz cuadrada de 4102...24.*)
(* Una función que da la solución mínima en enteros positivos de la ecuación de Pell x2 - n·y2 = 1 *)
solucionPell[n_Integer]:=
   Block[{b,d,q,a,j,lis,p1,q1,p2,q2,au1,au2,au3},
      b=0;d=1;q=Floor[Sqrt[n+.0]];
      If[n == q^2,
      Print[«sin solución no trivial,»,n,» es un cuadrado»],
      (a=Quotient[q+b,d];lis={a};j=0;p1=1;
      q1=0;p2=Quotient[q+b,d];q2=1;b=a d-b;
      d=(n-b^2)/d;a=Quotient[q+b,d];AppendTo[lis,a];
      j=1;
      While[a != 2 q,(au1=p1;au2=q1;p1=p2;q1=q2;
         p2=a p2+au1;q2=a q2+au2;
         b=a d-b;d=(n-b^2)/d;
         a=Quotient[q+b,d];AppendTo[lis,a];
         j=j+1)
         ];
   Print[«fracción continua de la raiz cuadrada de «,n,»:»,lis];
      Print[«longitud del período : «,j];
      If[OddQ[j+1],
         (Print[«X = «,p2];Print[«Y = «,q2]),
         (au3=p2;p2=p2^2+n q2^2;
         q2=2 au3 q2;Print[«Impar»];
         Print[«X = «,p2];Print[«Y = «,q2])
      ] )]]
(* Para hacer una tabla de soluciones de ecs. de Pell *)
tabPell[max_Integer]:= For[i=2,i<=max,++i,
   Block[{q},q=Floor[Sqrt[i+.0]];
   If[i==q^2,,Print[«n=»,i];
      solucionPell[i]]]]
(* Si queremos solamente la fracción continua *)
fraccontsqrt[n_Integer] := Block[{b,d,q,a,lis,j},
   b=0;d=1;q=Floor[Sqrt[n+0.]];
   a=Quotient[q+b,d];lis={a};b=a*d-b;d=(n-b^2)/d;
   a=Quotient[q+b,d];AppendTo[lis,a];j=1;
While[a!=2*q,b=a*d-b;d=(n-b^2)/d;a=Quotient[q+b,d];
   AppendTo[lis,a];j=j+1];
Print[«fraccion continua de la raiz cuadrada de «,n,»:»,lis];
Print[«longitud del periodo : «, j]]
(* Y si solamente la longitud del período de la fracción continua *)
longperfrac[n_Integer]:=Block[{b,d,q,a,j},
   q=Floor[Sqrt[n+.0]];b=q;d=n-q^2;
      a=Quotient[2*q,d];j=1;
   While[a!=2*q,b=a*d-b;d=(n-b^2)/d;
      a=Quotient[q+b,d];j=j+1];j]
```