ACOTACIÓN EN NORMA DE SERIES DE FOURIER-NEUMANN

JUAN L. VARONA MALUMBRES
Colegio Universitario de La Rioja (Universidad de Zaragoza)

Abstract. If we take $\alpha > -1$, the system $x^{-1/2}J_{\alpha+2n+1}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ is orthogonal on $(0, \infty)$. We study the boundedness on $L^p(0, \infty)$ of the partial sum operator associated with the Fourier series, which is related with its mean convergence.

Clasificación A.M.S. (1980): 42C10

Si denotamos mediante $J_\mu(x)$ la función de Bessel de orden μ y tomamos $\alpha > -1$ fijo, se verifica la relación de ortogonalidad [7]

$$\int_0^\infty J_{\alpha+2n+1}(x)J_{\alpha+2m+1}(x)x^{-1}\,dx = \frac{\delta_{nm}}{4n+2\alpha+2}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, el sistema

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{4n+2\alpha+2}{x}}J_{\alpha+2n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

es ortonormal en $L^2 = L^2((0,\infty), dx)$.

Llamemos ahora B_2 a la clausura lineal en L^2 de $\{j_n(x)\}_{n=0}^\infty$. La teoría de espacios de Hilbert demuestra que, para cada $f \in B_2$, su serie de Fourier

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(f)j_n(x), \qquad a_n(f) = \int_0^\infty j_n(x)f(x)\,dx$$

converge a f en la norma de L^2.

Del mismo modo, si llamamos B_p, $1 < p < \infty$, a la clausura lineal de $\{j_n(x)\}_{n=0}^\infty$ en $L^p = L^p((0,\infty), dx)$, nos preguntamos cuándo la serie de Fourier de cada $f \in B_p$ converge a f en la norma de L^p. Es decir, si denotamos

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^n a_k(f)j_k(x), \qquad a_k(f) = \int_0^\infty j_k(x)f(x)\,dx \tag{1}$$

queremos saber cuándo S_nf existe para cada $f \in B_p$ y $S_nf \to f$ en $\|\ \|_p$. Como los desarrollos del tipo $\sum_{m\geq 0} a_m J_{\alpha+m}(x)$ se llaman series de Neumann, a la expresión (1) la denominamos sumas parciales de la serie de Fourier-Neumann. (Un estudio de la convergencia puntual de estas series puede verse en [8] y [9].)

Es bien conocido [6] que una condición equivalente a la convergencia de S_nf en B_p es que se verifique la acotación uniforme $\|S_nf\|_p \leq C\|f\|_p$, $f \in B_p$, donde, de aquí en adelante, C denota una constante independiente de n pero que puede no ser la misma

PUBLICADO EN: *Actas XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática*, Vol. II (Évora, Portugal, 1990), 119–124, Universidade de Évora, Évora, 1991.

cada vez que aparezca. Realmente, no nos preocuparemos de describir el espacio B_p y estudiaremos una condición un poco más exigente:

$$\|S_n f\|_p \le C\|f\|_p, \qquad f \in L^p. \tag{2}$$

Es fácil demostrar por dualidad [5] que una condición necesaria para la acotación uniforme (2) es

$$\|j_n\|_p \|j_n\|_q \le C \tag{3}$$

donde $1/p + 1/q = 1$.

En primer lugar, tomando $n = 0$ en (3) es claro que obtenemos la condición necesaria

$$x^{-1/2} J_{\alpha+1}(x) \in L^p \cap L^q. \tag{4}$$

Utilizando $J_\mu(x) = O(x^{-1/2}),\ x \to \infty$, y la estimación asintótica $J_\mu(x) \sim x^\mu,\ x \to 0$, es inmediato comprobar que

$$\text{cuando } \alpha \ge -1/2, \qquad (4) \iff 1 < p < \infty, \tag{5}$$

$$\text{cuando } -1 < \alpha < -1/2, \qquad (4) \iff \frac{2}{3+2\alpha} < p < \frac{2}{-1-2\alpha}. \tag{6}$$

Además, estimaciones asintóticas más precisas para $J_{\alpha+2n+1}(x)$ permiten demostrar (como en [1])

$$(3) \Longrightarrow 4/3 < p < 4. \tag{7}$$

Una vez analizadas las condiciones necesarias para (2), vamos a dedicar nuestros esfuerzos a demostrar que estas mismas condiciones sobre α y sobre p son suficientes para que se verifique (2).

Es claro que

$$S_n(f,x) = \int_0^\infty K_n(x,y) f(y)\, dy,$$

donde

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^n j_k(x) j_k(y) = x^{-1/2} y^{-1/2} \sum_{k=0}^n (4k + 2\alpha + 2) J_{\alpha+2k+1}(x) J_{\alpha+2k+1}(y).$$

La expresión anterior no nos permite estudiar directamente el comportamiento de la serie de Fourier-Neumann, sino que necesitamos una descomposición del núcleo $K_n(x,y)$ adecuada para nuestros propósitos:

LEMA 1. *Se verifica*

$$K_n(x,y) = \frac{x^{1/2} y^{1/2}}{x^2 - y^2} \left\{ x J_{\alpha+1}(x) J_\alpha(y) - y J_\alpha(x) J_{\alpha+1}(y) \right\}$$

$$+ \frac{x^{1/2} y^{1/2}}{x^2 - y^2} \left\{ x J'_{\alpha+2n+2}(x) J_{\alpha+2n+2}(y) - y J_{\alpha+2n+2}(x) J'_{\alpha+2n+2}(y) \right\}.$$

Demostración. En [8] se prueba que

$$\phi_\mu(x,y) = \sum_{k=0}^\infty (4k + 2\mu + 2) J_{\mu+2k+1}(x) J_{\mu+2k+1}(y)$$

cumple

$$\phi_\mu(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}\left\{xJ_{\mu+1}(x)J_\mu(y)-yJ_\mu(x)J_{\mu+1}(y)\right\}$$

y es claro que

$$K_n(x,y)=(xy)^{-1/2}\left\{\phi_\alpha(x,y)-\phi_{\alpha+2n+2}(x,y)\right\}.$$

Ahora, usando $J'_{\alpha+2n+2}(t)=\frac{\alpha+2n+2}{t}J_{\alpha+2n+2}(t)-J_{\alpha+2n+3}(t)$ obtenemos

$$\phi_{\alpha+2n+2}(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2}\left\{J_{\alpha+2n+2}(x)yJ'_{\alpha+2n+2}(y)-J_{\alpha+2n+2}(y)xJ'_{\alpha+2n+2}(x)\right\},$$

y de aquí se sigue el lema.

Esto nos permite expresar las sumas parciales de la serie de Fourier-Neumann mediante

$$S_n(f,x)=T_1(f,x)-T_2(f,x)+T_{3,n}(f,x)-T_{4,n}(f,x)$$

siendo

$$T_1(f,x)=\int_0^\infty x^{1/2}y^{1/2}\frac{xJ_{\alpha+1}(x)J_\alpha(y)}{x^2-y^2}f(y)\,dy,$$

$$T_2(f,x)=\int_0^\infty x^{1/2}y^{1/2}\frac{yJ_\alpha(x)J_{\alpha+1}(y)}{x^2-y^2}f(y)\,dy,$$

$$T_{3,n}(f,x)=\int_0^\infty x^{1/2}y^{1/2}\frac{xJ'_\nu(x)J_\nu(y)}{x^2-y^2}f(y)\,dy,$$

$$T_{4,n}(f,x)=\int_0^\infty x^{1/2}y^{1/2}\frac{yJ_\nu(x)J'_\nu(y)}{x^2-y^2}f(y)\,dy$$

y donde hemos denotado $\nu=\alpha+2n+2$.

De aquí que para demostrar (2) bastará con que probemos

$$\|T_if\|_p\le C\|f\|_p,\qquad i=1,2 \tag{8}$$

y

$$\|T_{i,n}f\|_p\le C\|f\|_p,\qquad i=3,4. \tag{9}$$

Es de destacar que los operadores $T_{3,n}f$ y $T_{4,n}f$ son muy parecidos a los que aparecen en [1] y [2], aunque el método que se utiliza aquí permite estudiar su acotación uniforme de modo más sencillo. Siguiendo nuestro método se pueden simplificar fácilmente las demostraciones de [1] y [2].

En nuestro estudio emplearemos las siguientes acotaciones para funciones de Bessel [7]

$$\alpha\ge-1/2\quad\Longrightarrow\quad|J_\alpha(x)|\le Cx^{-1/2},\quad|J_{\alpha+1}(x)|\le Cx^{-1/2}, \tag{10}$$

$$-1<\alpha<-1/2\quad\Longrightarrow\quad|J_\alpha(x)|\le Cx^{-1/2}(1+x^{\alpha+1/2}),\quad|J_{\alpha+1}(x)|\le C\frac{x^{-1/2}}{1+x^{\alpha+1/2}}. \tag{11}$$

Además,

$$|J_\nu(x)|\le Cx^{-1/4}\left(|x-\nu|+\nu^{1/3}\right)^{-1/4},\quad|J'_\nu(x)|\le Cx^{-3/4}\left(|x-\nu|+\nu^{1/3}\right)^{1/4} \tag{12}$$

donde, de nuevo, $\nu=\alpha+2n+2$. En todas ellas, la constante C sólo puede depender de α. Estas últimas acotaciones son fáciles de deducir de las que se utilizan en [1] y [2] y su expresión final resulta más manejable.

Como última herramienta, necesitamos introducir la teoría A_p de pesos (ver [3]). Dado $p \in (1, \infty)$, decimos que un peso w definido en un intervalo (a, b) está en $A_p(a, b)$ si

$$\left(\int_I w(x)\,dx\right)\left(\int_I w(x)^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} \leq C|I|^p$$

con C independiente de I intervalo, $I \subseteq (a, b)$.

La importancia de la teoría A_p radica en su relación con la acotación de la transformada de Hilbert

$$H(f, x) = V.P. \int_a^b \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

(generalmente, omitimos $V.P.$ en su notación). En efecto, en [4] se demuestra que

$$H : L^p((a, b), w) \longrightarrow L^p((a, b), w) \text{ acotada} \Longleftrightarrow w \in A_p(a, b).$$

Además, la norma como operador de la transformada de Hilbert y la constante de la definición de A_p dependen únicamente una de la otra, lo cual nos va a permitir utilizar la teoría A_p uniforme.

Supongamos que una familia de pesos $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ definidos en un mismo intervalo (a, b) cumplen la condición A_p con una misma constante C (en este caso diremos que $w_n \in A_p(a, b)$ uniformemente). Entonces la familia de transformadas de Hilbert $H : L^p((a, b), w_n) \longrightarrow L^p((a, b), w_n)$ es uniformemente acotada.

Es bien conocido y sencillo de probar directamente el siguiente resultado

$$x^\beta \in A_p(0, 1) \Longleftrightarrow x^\beta \in A_p(1, \infty) \Longleftrightarrow -1 < \beta < p - 1. \tag{13}$$

Además, mediante el cambio de variable $x = r_n z$ se demuestra fácilmente que cuando $r_n \searrow 0$ entonces

$$(|x| + r_n)^\beta \in A_p(-1, 1) \text{ uniformemente} \Longleftrightarrow -1 < \beta < p - 1. \tag{14}$$

Veamos a continuación varios resultados que utilizaremos más adelante:

LEMA 2.

i) $-1 < \alpha \leq \dfrac{-1}{2},\ p > \dfrac{2}{3+2\alpha} \Longrightarrow x^{p/2-1/2}\left(1 + x^{\alpha/2+1/4}\right)^{-p} \in A_p(0, \infty)$

ii) $-1 < \alpha \leq \dfrac{-1}{2},\ p < \dfrac{2}{-1-2\alpha} \Longrightarrow x^{-1/2}\left(1 + x^{\alpha/2+1/4}\right)^{p} \in A_p(0, \infty)$

iii) $\alpha > -1,\ p > \dfrac{4}{3},\ 0 < s_n \nearrow \infty \Longrightarrow x^{3p/8-1/2}\left(|x^{1/2} - s_n| + s_n^{1/3}\right)^{p/4} \in A_p(0, \infty)$ *unif.*

iv) $\alpha > -1,\ p < 4,\ 0 < s_n \nearrow \infty \Longrightarrow x^{p/8-1/2}\left(|x^{1/2} - s_n| + s_n^{1/3}\right)^{-p/4} \in A_p(0, \infty)$ *unif.*

Demostración. i) y iii) son análogos a ii) y iv) respectivamente, luego vamos a probar únicamente estos dos últimos.

ii) Si llamamos $w(x) = x^{-1/2}\left(1 + x^{\alpha/2+1/4}\right)^p$, no es difícil demostrar que basta con comprobar $w \in A_p(0, 1)$ y $w \in A_p(1, \infty)$. Además, es claro que $w(x)$ se comporta como $x^{-1/2}$ en $(0, 1)$ y como $x^{-1/2+p/4+\alpha p/4}$ en $(1, \infty)$ con lo cual, usando (13) se sigue el resultado.

iv) Haciendo el cambio de variable $x = s_n^2 z$ en la definición de A_p, es fácil ver que iv) es equivalente a demostrar

$$z^{p/8-1/2}\left(|z^{1/2} - 1| + s_n^{-2/3}\right)^{-p/4} \in A_p(0, \infty) \text{ unif.}$$

De acuerdo al comportamiento de esta expresión en los intervalos $(0,1/2)$, $(1/2,3/2)$ y $(3/2,\infty)$, basta con que probemos

$$z^{p/8-1/2} \in A_p(0,\tfrac{1}{2}), \quad \left(|z^{1/2}-1| + s_n^{-2/3}\right)^{-p/4} \in A_p(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}), \quad z^{-1/2} \in A_p(\tfrac{3}{2},\infty).$$

El primero y el tercero son cierto $\forall p \in (1,\infty)$ por (13), y el segundo se deduce para $p < 4$ usando $|z^{1/2}-1| \sim |z-1|$ y haciendo un cambio de variable en (14).

Con todo esto, ya estamos en condiciones de abordar nuestro teorema principal

TEOREMA. *Sean $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$ y $S_n f$ las sumas parciales de la serie de Fourier-Neumann de f. Entonces, la acotación uniforme*

$$\|S_n f\|_p \le C\|f\|_p, \qquad f \in L^p$$

es equivalente a que se verifiquen las desigualdades

$$4/3 < p < 4 \quad \textit{cuando} \quad \alpha \ge -3/4$$

o

$$\frac{2}{3+2\alpha} < p < \frac{2}{-1-2\alpha} \quad \textit{cuando} \quad \alpha < -3/4.$$

Demostración. De (5), (6) y (7) se sigue que las desigualdades sobre α y p son necesarias para la acotación uniforme. Veamos que también son suficientes, es decir, que se verifican (8) y (9). Analizaremos únicamente $T_1 f$ y $T_{4,n} f$ ya que $T_2 f$ y $T_{3,n} f$ son análogos. En toda la demostración emplearemos siempre que sea necesario los cambios de variable $x_1 = x^2$ y $y_1 = y^2$. Para estudiar $T_1 f$ hay que distinguir los casos $\alpha \ge -1/2$ y $\alpha < -1/2$. Empecemos con el caso $\alpha \ge -1/2$. Si denotamos $g(y_1) = f(y_1^{1/2}) y_1^{-1/4} J_\alpha(y_1^{1/2})$ y empleamos sucesivamente la segunda acotación de (10), $x^{p/2-1/2} \in A_p(0,\infty)$ y la primera acotación de (10) tenemos

$$\begin{aligned}
\|T_1 f\|_p^p &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty x^{1/2} y^{1/2} \frac{x J_{\alpha+1}(x) J_\alpha(y)}{x^2 - y^2} f(y)\, dy \right|^p dx \\
&= 2^{-p-1} \int_0^\infty |H(g,x_1)|^p \left| J_{\alpha+1}(x_1^{1/2}) \right|^p x_1^{3p/4-1/2}\, dx_1 \\
&\le C \int_0^\infty |H(g,x_1)|^p x_1^{p/2-1/2}\, dx_1 \le C_1 \int_0^\infty |g(x_1)|^p x_1^{p/2-1/2}\, dx_1 \\
&\le C_2 \int_0^\infty \left| f(x_1^{1/2}) \right|^p x_1^{-1/2}\, dx_1 = C_3 \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Para el caso $\alpha \ge -1/2$, con la misma notación para $g(y_1)$ y empleando sucesivamente la segunda acotación de (11), i) del lema 2 y la primera acotación de (11) tenemos

$$\begin{aligned}
\|T_1 f\|_p^p &= 2^{-p-1} \int_0^\infty |H(g,x_1)|^p \left| J_{\alpha+1}(x_1^{1/2}) \right|^p x_1^{3p/4-1/2}\, dx_1 \\
&\le C \int_0^\infty |H(g,x_1)|^p \left(1 + x_1^{\alpha/2+1/4}\right)^{-p} x_1^{p/2-1/2}\, dx_1
\end{aligned}$$

$$\leq C_1 \int_0^\infty |g(x_1)|^p \left(1 + x_1^{\alpha/2+1/4}\right)^{-p} x_1^{p/2-1/2}\, dx_1$$

$$\leq C_2 \int_0^\infty \left|f(x_1^{1/2})\right|^p x_1^{-1/2}\, dx_1 = C_3 \|f\|_p^p.$$

Por último, estudiemos la acotación uniforme de $T_{4,n}f$. Denotando $\nu = \alpha + 2n + 2$, $g(y_1) = f(y_1^{1/2}) y_1^{1/4} J_\nu'(y_1^{1/2})$ y utilizando sucesivamente la cota para J_ν de (12), iv) del lema 2 y la cota para J_ν' de (12) obtenemos

$$\|T_{4,n}f\|_p^p = \int_0^\infty \left| \int_0^\infty x^{1/2} y^{1/2} \frac{y J_\nu(x) J_\nu'(y)}{x^2 - y^2} f(y)\, dy \right|^p dx$$

$$= 2^{-p-1} \int_0^\infty |H(g, x_1)|^p \left|J_\nu(x_1^{1/2})\right|^p x_1^{p/4-1/2}\, dx_1$$

$$\leq C \int_0^\infty |H(g, x_1)|^p x_1^{p/8-1/2} \left(|x_1^{1/2} - \nu| + \nu^{1/3}\right)^{-p/4} dx_1$$

$$\leq C_1 \int_0^\infty |g(x_1)|^p x_1^{p/8-1/2} \left(|x_1^{1/2} - \nu| + \nu^{1/3}\right)^{-p/4} dx_1$$

$$\leq C_2 \int_0^\infty \left|f(x_1^{1/2})\right|^p x_1^{-1/2}\, dx_1 = C_3 \|f\|_p^p,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. A. Barceló y A. Córdoba, *Band-limited functions: L^p-convergence*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 655–669.

[2] A. Córdoba, *The disc multiplier*, Duke Math. Jour. **58** (1989), 21–27.

[3] J. García Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *"Weighted Norm Inequalities and Related Topics"*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[4] R. Hunt, B. Muckenhoupt y R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227–251.

[5] J. Newman y W. Rudin, *Mean convergence of orthogonal series*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 219–222.

[6] H. Pollard, *The mean convergence of orthogonal series I*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 387–403.

[7] G. N. Watson, *"A Treatise on the Theory of Bessel Functions"*, Cambridge Univ. Press, 1966.

[8] J. E. Wilkins, Jr., *Neumann series of Bessel functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 359–385.

[9] J. E. Wilkins, Jr., *Neumann series of Bessel functions. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 55–65.

Juan Luis Varona Malumbres
Departamento de Matemática Aplicada
Colegio Universitario de La Rioja (Universidad de Zaragoza)
Obispo Bustamante, 3
26001 Logroño, ESPAÑA