CONVERGENCIA EN NORMA DE LA SERIE DE FOURIER-JACOBI CON PESOS LOGARÍTMICOS

José Manuel Gutiérrez y Juan Luis Varona
Colegio Universitario de La Rioja (Universidad de Zaragoza)

Abstract. In this paper we give necessary conditions and sufficient conditions for the convergence in $L^p(u)$-norm of Fourier-Jacobi series of $f \in L^p(v)$ where u and v are radial type weights multiplied by logarithms.

Clasificación A.M.S. (1980): 42C10, 44A15

En el intervalo $[-1,1]$, sea el peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ con $\alpha, \beta \geq -1/2$, y consideremos el correspondiente sistema de polinomios ortonormales $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ respecto a $w(x)$, es decir,

$$\int_{-1}^{1} p_j(x)p_k(x)w(x)dx = \delta_{jk}, \qquad j,k \in \mathbb{N},$$

donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado n. Los polinomios anteriores se denominan polinomios de Jacobi.

Si $f \in L^1([-1,1],w)$, se define la suma de Fourier n-ésima de f respecto al sistema $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ mediante

$$S_nf(x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)p_k(x), \qquad \widehat{f}(k) = \int_{-1}^{1} f(y)p_k(y)w(y)dy.$$

Es bien conocido que $S_nf \to f$ en $L^2([-1,1],w)$ $\forall f \in L^2([-1,1],w)$. Sin embargo, si tomamos $1 < p < \infty$ y dos pesos u y v en $[-1,1]$, no está resuelto en general el problema de cuándo $S_nf \to f$ en $L^p([-1,1],u)$ $\forall f \in L^p([-1,1],v)$. Si $u(x) \leq Cv(x)$, esto es equivalente a la acotación uniforme de las sumas parciales de la serie de Fourier $\|S_nf\|_{L^p([-1,1],u)} \leq C\|f\|_{L^p([-1,1],v)}, n \in \mathbb{N}$. (Tanto aquí como en adelante utilizaremos siempre C para denotar una constante cualquiera independiente de n o de $x \in [-1,1]$.)

Como generalización a lo que se hace en [7], en este trabajo tomaremos dos pesos $U(x)$ y $V(x)$ de la forma

$$U(x) = (1-x)^a(1+x)^b(-\log\tfrac{1-x}{4})^r(-\log\tfrac{1+x}{4})^s,$$
$$V(x) = (1-x)^A(1+x)^B(-\log\tfrac{1-x}{4})^R(-\log\tfrac{1+x}{4})^S$$

y nos ocuparemos de encontrar condiciones necesarias y condiciones suficientes para que

$$S_nf \to f \quad \text{en} \quad L^p([-1,1],U(x)^p) \quad \forall\ f \in L^p([-1,1],V(x)^p),$$

lo cual es equivalente a la acotación uniforme

$$\|S_nf(x)U(x)\|_p \leq C\|f(x)V(x)\|_p, \quad n \in \mathbb{N}$$

(no nos preocuparemos de la desigualdad $U(x) \leq CV(x)$ que se utiliza para demostrar la equivalencia ente la acotación uniforme y la convergencia de la serie de Fourier pues veremos más adelante que esta desigualdad es necesaria para la acotación uniforme).

A continuación, enunciaremos una serie de resultados que utilizaremos más adelante.

DEFINICION 1. *Dado $p \in (1,\infty)$, un intervalo $[a,b]$ fijo $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ y dos pesos $u, v : [a,b] \to [0,\infty]$, decimos que el par de pesos $(u,v) \in A_p([a,b])$ si*

$$\left(\int_I u(x)dx\right)\left(\int_I v(x)^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} \leq C|I|^p\ , \quad I \subseteq [a,b], \quad I \text{ intervalo}.$$

PUBLICADO EN: *Actas XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática*, Vol. II (Évora, Portugal, 1990), 113–118, Universidade de Évora, Évora, 1991.

Diremos que $(u,v)\in A_p^\delta([a,b])$ *si* $(u^\delta,v^\delta)\in A_p([a,b])$.

El siguiente teorema puede verse en Muckenhoupt-Wheeden [3] y Neugebauer [4]:

TEOREMA 2. *Si existe* $\delta>1$ *tal que* $(u,v)\in A_p^\delta([a,b])$, *entonces la transformada de Hilbert* $H: L^p([a,b],v)\to L^p([a,b],u)$ *está acotada.*

Este teorema puede encontrarse en Varona [7]:

TEOREMA 3. *Sean* $\varepsilon>0$ *y* u_1, u_2, v_1 *y* v_2 *pesos en* $[-1,1]$ *tales que* $u_1\sim v_1\sim cte$ *en* $[-\varepsilon,1]$, $u_2\sim v_2\sim cte$ *en* $[-1,\varepsilon]$. *Entonces*

$$(u_1,v_1)\in A_p([-1,0]),\ (u_2,v_2)\in A_p([0,1]) \quad\Rightarrow\quad (u_1u_2,v_1v_2)\in A_p([-1,1]).$$

No es muy difícil, utilizando la definición 1, probar el siguiente

TEOREMA 4. *Si consideramos pesos de la forma*

$$u(x)=x^a(-\log x)^r,\qquad v(x)=x^A(-\log x)^R,$$

entonces, para $1<p<\infty$, $(u,v)\in A_p([0,1/2])$ *si y sólo si se satisface alguna de las condiciones siguientes*

i) $a=A=-1,\quad r<-1\quad y\quad r+1\le R$
ii) $a=A=p-1,\quad R>p-1\quad y\quad r\le R-p+1$
iii) $a>-1,\quad A<p-1\quad y\quad A<a$
iv) $a=-1,\quad r<-1\quad y\quad A<a$
v) $A=p-1,\quad R>p-1\quad y\quad A<a$
vi) $a=A,\quad r\le R\quad y\quad -1<a=A<p-1.$

Además, $(u,v)\in A_p^\delta([0,1/2])$ *para algún* $\delta>1$ *si y sólo si* iii) *ó* vi).

LEMA 5. *Sean* α, $\beta\ge -1/2$, $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ *y los correspondientes polinomios de Jacobi* $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Entonces*

$$|p_n(x)|\,w(x)^{1/2}(1-x^2)^{1/4}\le C.$$

Este resultado puede verse en Szegő [6].

La siguiente descomposición del núcleo de la serie de Fourier es debida a Pollard [5].

LEMA 6. *Sea el núcleo* $K_n(x,y)=\sum_{j=0}^n p_j(x)p_j(y)$. *Existen constantes* r_n *y* s_n *tales que*

$$K_n(x,y)=r_nT_1(n,x,y)+s_nT_2(n,x,y)+s_nT_3(n,x,y)$$

donde $T_1(n,x,y)=p_n(x)p_n(y)$, $T_2(n,x,y)=(1-y^2)\frac{p_n(x)q_{n-1}(y)}{x-y}$, $T_3(n,x,y)=T_2(n,y,x)$ *y* $q_n(x)$ *son los polinomios ortonormales respecto a la medida* $(1-x^2)w(x)dx$. *Además,* r_n *y* s_n *están acotadas por una constante que sólo depende de* α *y* β.

TEOREMA 7. *Sea la distribución* $d\mu=\mu(x)dx+d\mu_s$, $sop(d\mu)\subset[-1,1]$, $\mu>0$ a.e. *en* $[-1,1]$. *Sean* $U(x)$, $V(x)$ *funciones medibles Borel no nulas en* $[-1,1]$, $V(x)$ *finita en un conjunto con medida de Lebesgue positiva.*

Si se verifica la acotación uniforme

$$\|S_nf(x)U(x)\|_{L^p([-1,1],d\mu)}\le C\|f(x)V(x)\|_{L^p([-1,1],d\mu)}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

entonces

i) $U(x) \in L^p([-1,1], d\mu)$

ii) $V(x)^{-1} \in L^q([-1,1], d\mu)$

iii) $\int_{-1}^{1} \mid \frac{U(x)}{\nu(x)} \mid^p \mu(x)dx < \infty$

iv) $\int_{-1}^{1} \mid V(x)\nu(x) \mid^{-q} \mu(x)dx < \infty$

v) $U(x) \leq C\ V(x) \quad d\mu - a.e.$

donde $\nu(x) = (\mu(x)\sqrt{1-x^2})^{1/2}$ *y* $1/p + 1/q = 1$.

Los apartados i), ii), iii) y iv) pueden verse en Máté-Nevai-Totik [2]; v) se encuentra en Guadalupe-Pérez-Ruiz-Varona [1].

TEOREMA 8. *Sean* $\alpha,\ \beta > -1/2$, *el peso* $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ *y los correspondientes polinomios de Jacobi* $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Sean* $1 < p < \infty$ *y* $a, b, r, s, A, B, R, S \in \mathbb{R}$. *Entonces las relaciones*

(I) $-a + \frac{\alpha+1}{2} - 1/p < 1/4$ *ó* $-a + \frac{\alpha+1}{2} - 1/p = 1/4$ *y* $r < -1/p$

(II) $-b + \frac{\beta+1}{2} - 1/p < 1/4$ *ó* $-b + \frac{\beta+1}{2} - 1/p = 1/4$ *y* $s < -1/p$

(III) $A - \frac{\alpha+1}{2} + 1/p < 1/4$ *ó* $A - \frac{\alpha+1}{2} + 1/p = 1/4$ *y* $R > 1 - 1/p$

(IV) $B - \frac{\beta+1}{2} + 1/p < 1/4$ *ó* $B - \frac{\beta+1}{2} + 1/p = 1/4$ *y* $S > 1 - 1/p$

(V) $A < a$ *ó* $A = a$ *y* $r \leq R$

(VI) $B < b$ *ó* $B = b$ *y* $s \leq S$

son necesarias para la acotación uniforme

$$\|S_n f(x)U(x)\|_p \leq C\|f(x)V(x)\|_p \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

donde

$$U(x) = (1-x)^a(1+x)^b(-\log\frac{1-x}{4})^r(-\log\frac{1+x}{4})^s,$$

$$V(x) = (1-x)^A(1+x)^B(-\log\frac{1-x}{4})^R(-\log\frac{1+x}{4})^S.$$

TEOREMA 9. *Con la notación del teorema 8, las condiciones*

(I') $-a + \frac{\alpha+1}{2} - 1/p < 1/4$	(IV') $B - \frac{\beta+1}{2} + 1/p < 1/4$
(II') $-b + \frac{\beta+1}{2} - 1/p < 1/4$	(V') $A < a$ *ó* $A = a$ *y* $r \leq R$
(III') $A - \frac{\alpha+1}{2} + 1/p < 1/4$	(VI') $B < b$ *ó* $B = b$ *y* $s \leq S$

son suficientes para la acotación (1).

Demostración.

CONDICIONES NECESARIAS. (1) es equivalente a probar la acotación

$$\int_{-1}^{1} \mid S_n f(x)U_1(x) \mid^p w(x)dx \ \leq C \int_{-1}^{1} \mid f(x)V_1(x) \mid^p w(x)dx$$

con $U_1(x) = (1-x)^{a-\alpha/p}(1+x)^{b-\beta/p}(-\log\frac{1-x}{4})^r(-\log\frac{1+x}{4})^s$,

$V_1(x) = (1-x)^{A-\alpha/p}(1+x)^{B-\beta/p}(-\log\frac{1-x}{4})^R(-\log\frac{1+x}{4})^S$.

Aplicando el teorema 7 tenemos las condiciones necesarias

i) $U_1(x) \in L^p([-1,1], w)$, que se tiene si

$ap > -1$ ó $ap = -1$ y $rp < -1$
y
$bp > -1$ ó $bp = -1$ y $sp < -1$

ii) $V_1(x)^{-1} \in L^q([-1,1], w)$, que es cierto si

$(\alpha/p - A)q + \alpha > -1$ ó $(\alpha/p - A)q + \alpha = -1$ y $-Rq < -1$
y
$(\beta/p - B)q + \beta > -1$ ó $(\beta/p - B)q + \beta = -1$ y $-Sq < -1$

iii) $\int_{-1}^{1} \left| \frac{U_1(x)}{\nu(x)} \right|^p w(x)dx < \infty$, lo que ocurre cuando

$(a - \alpha/2 - 1/4)p > -1$ ó $(a - \alpha/2 - 1/4)p = -1$ y $rp < -1$
y
$(b - \beta/2 - 1/4)p > -1$ ó $(b - \beta/2 - 1/4)p = -1$ y $sp < -1$

iv) $\int_{-1}^{1} | V_1(x)\nu(x) |^{-q} w(x)dx < \infty$, que se verifica si

$(\alpha/p - A - \alpha/2 - 1/4)q + \alpha > -1$ ó $(\alpha/p - A - \alpha/2 - 1/4)q + \alpha = -1$ y $-Rq < -1$
y
$(\beta/p - B - \beta/2 - 1/4)q + \beta > -1$ ó $(\beta/p - B - \beta/2 - 1/4)q + \beta = -1$ y $-Sq < -1$

v) $U_1(x) \leq C\ V_1(x)$, inmediato por (V) y (VI).

Se comprueba fácilmente que las restantes condiciones necesarias son equivalentes a (I), (II), (III) y (IV).

CONDICIONES SUFICIENTES. Por lema 6,

$$S_n f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x,y)\ f(y)\ w(y)\ dy\ = r_n \int_{-1}^{1} T_1(n,x,y) f(y) w(y) dy$$

$$+ s_n \int_{-1}^{1} T_2(n,x,y) f(y) w(y) dy + s_n \int_{-1}^{1} T_3(n,x,y) f(y) w(y) dy.$$

Con esto, para probar la acotación (1) basta con demostrar

$$\int_{-1}^{1} \Big(\Big| \int_{-1}^{1} T_j(n,x,y) f(y) (1-y)^{\alpha} (1+y)^{\beta} dy \Big| (1-x)^a (1+x)^b (-\log \tfrac{1-x}{4})^r (-\log \tfrac{1-x}{4})^s \Big)^p dx$$

$$\leq C \int_{-1}^{1} \big(|f(x)| (1-x)^A (1+x)^B (-\log \tfrac{1-x}{4})^R (-\log \tfrac{1+x}{4})^S \big)^p dx, \qquad j = 1, 2, 3.$$

• ***j=1.*** Partimos de

$$\int_{-1}^{1} \Big| \int_{-1}^{1} f(y) (1-y)^{\alpha} (1+y)^{\beta} p_n(x) p_n(y) dy \Big|^p (1-x)^{ap}$$

$$\times (1+x)^{bp} (-\log \tfrac{1-x}{4})^{rp} (-\log \tfrac{1+x}{4})^{sp} dx.$$

Por la desigualdad de Hölder, la expresión anterior es menor ó igual que

$$\left(\int_{-1}^{1} |f(y)|^p (1-y)^{Ap} (1+y)^{Bp} (-\log \tfrac{1-y}{4})^{Rp} (-\log \tfrac{1+y}{4})^{Sp} dy \right)$$

$$\times \left(\int_{-1}^{1} |p_n(y)|^q (1-y)^{(\alpha-A)q} (1+y)^{(\beta-B)q} (-\log \tfrac{1-y}{4})^{-Rq} (-\log \tfrac{1-y}{4})^{-Sq} dy \right)^{p/q}$$

$$\times \left(\int_{-1}^{1} |p_n(x)|^p (1-x)^{ap} (1+x)^{bp} (-\log \tfrac{1-x}{4})^{rp} (-\log \tfrac{1+x}{4})^{sp} dx \right).$$

Basta ahora que veamos que las dos últimas integrales están acotadas. Nos ocupamos de la primera de ellas. Teniendo en cuenta el lema 5, esta integral estará acotada si

$$\int_0^1 (1-y)^{q(\frac{\alpha}{2}-A-\frac{1}{4})}(-\log\frac{1-y}{4})^{-Rq}dy<\infty,\ \int_{-1}^0 (1+y)^{q(\frac{\beta}{2}-B-\frac{1}{4})}(-\log\frac{1+y}{4})^{-Sq}dy<\infty$$

lo cual es cierto cuando

$$\left\{\begin{array}{c} q(\alpha/2-A-1/4)>-1 \\ \text{ó} \\ q(\alpha/2-A-1/4)=-1 \text{ y } Rq>1 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{c} q(\beta/2-B-1/4)>-1 \\ \text{ó} \\ q(\beta/2-B-1/4)=-1 \text{ y } Sq>1. \end{array}\right.$$

Ahora, para que la última integral esté acotada, tiene que ocurrir

$$\int_0^1 (1-x)^{p(a-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})}(-\log\frac{1-x}{4})^{rp}dx<\infty,\ \int_{-1}^0 (1+x)^{p(b-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4})}(-\log\frac{1+x}{4})^{sp}dx<\infty$$

que se verifica si

$$\left\{\begin{array}{c} p(a-\alpha/2-1/4)>-1 \\ \text{ó} \\ p(a-\alpha/2-1/4)=-1 \quad \text{y} \quad rp<-1 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{c} p(b-\beta/2-1/4)>-1 \\ \text{ó} \\ p(b-\beta/2-1/4)=-1 \text{ y } sp<-1. \end{array}\right.$$

• ***j=2.*** Queremos ver si las condiciones del teorema son suficientes para que se verifique la desigualdad

$$\int_{-1}^1\Big(\Big|\int_{-1}^1\frac{f(y)(1-y)^{\alpha+1}(1+y)^{\beta+1}q_{n-1}(y)}{x-y}dy\Big|\,|p_n(x)|(1-x)^a(1+x)^b(-\log\tfrac{1-x}{4})^r(-\log\tfrac{1+x}{4})^s\Big)^p dx$$

$$\leq\ C\int_{-1}^1\left(|f(x)|(1-x)^A(1+x)^B(-\log\tfrac{1-x}{4})^R(-\log\tfrac{1+x}{4})^S\right)^p dx.$$

Teniendo en cuenta que $|q_n(x)|(1-x)^{(\alpha+1)/2}(1+x)^{(\beta+1)/2}(1-x^2)^{1/4}\leq C$ (lema 5), la desigualdad anterior es cierta si lo es

$$\int_{-1}^1 |\,H\,(g(y),x)\,|^p\,(1-x)^{p(a-\alpha/2-1/4)}(1+x)^{p(b-\beta/2-1/4)}(-\log\tfrac{1-x}{4})^{rp}(-\log\tfrac{1+x}{4})^{sp}dx$$

$$\leq C\int_{-1}^1|g(x)|^p(1-x)^{p(A-\alpha/2-1/4)}(1+x)^{p(B-\beta/2-1/4)}(-\log\tfrac{1-x}{4})^{Rp}(-\log\tfrac{1+x}{4})^{Sp}dx.$$

con $g(x)=f(x)(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}$. El problema se reduce al estudio de la acotación de la transformada de Hilbert con pesos. Por el teorema 2, sabemos que se cumple si $(u(x),v(x))\in A_p^\delta([-1,1])$ para algún $\delta>1$, donde

$$u(x)=u_1(x)u_2(x),\quad v(x)=v_1(x)v_2(x),$$

$$u_1(x)=(1-x)^{p(a-\alpha/2-1/4)}(-\log\frac{1-x}{4})^{rp},\ u_2(x)=(1+x)^{p(b-\beta/2-1/4)}(-\log\frac{1+x}{4})^{sp},$$

$$v_1(x)=(1-x)^{p(A-\alpha/2-1/4)}(-\log\frac{1-x}{4})^{Rp},\ v_2(x)=(1+x)^{p(B-\beta/2-1/4)}(-\log\frac{1+x}{4})^{Sp}.$$

Por el teorema 3, esto ocurre si

$$(u_1(x),\ v_1(x))\in A_p^\delta([0,1])\quad\text{y}\quad(u_2(x),\ v_2(x))\in A_p^\delta([-1,0])$$

que, haciendo un cambio de variable en el teorema 4, se verifica si

$$\begin{cases} p(a-\alpha/2-1/4) > -1 \\ p(A-\alpha/2-1/4) < p-1 \\ A < a \ \text{ ó } \ A = a \text{ y } r \le R \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} p(b-\beta/2-1/4) > -1 \\ p(B-\beta/2-1/4) < p-1 \\ B < b \ \text{ ó } \ B = b \text{ y } s \le S. \end{cases}$$

• ***j=3.*** Procediendo de la misma forma, obtenemos las siguientes condiciones suficientes para la acotación del tercer sumando

$$\begin{cases} p(a-\alpha/2+1/4) > -1 \\ p(A-\alpha/2+1/4) < p-1 \\ A < a \ \text{ ó } \ A = a \text{ y } r \le R \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} p(b-\beta/2+1/4) > -1 \\ p(B-\beta/2+1/4) < p-1 \\ B < b \ \text{ ó } \ B = b \text{ y } s \le S. \end{cases}$$

Por último, es sólo una comprobación ver que las condiciones (I'), (II'), (III'), (IV'), (V') y (VI') implican las condiciones suficientes anteriores.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.J. Guadalupe, M. Pérez, F.J. Ruiz y J.L. Varona, *Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series*, por aparecer.

[2] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, *Necessary conditions for weighted mean convergence of Fourier series in orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **46** (1986), 314–322.

[3] B. Muckenhoupt y R.L. Wheeden, *Two weight function norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform*, Studia Math. **55** (1976), 279–295.

[4] C.J. Neugebauer, *Inserting A_p-weights*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 644–648.

[5] H. Pollard, *The mean convergence of orthogonal series II*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 355–367.

[6] G. Szegő, *"Orthogonal Polynomials" (*$3^{a\cdot}$ *edición)*, A.M.S. Colloquium Publications **23**, Providence, Rhode Island, 1967.

[7] J.L. Varona, *"Convergencia en L^p con pesos de la Serie de Fourier respecto de algunos sistemas ortogonales"*, Tesis Doctoral, Sem. G. de Galdeano, sección 2, **n° 22**, Zaragoza, 1989.

José Manuel Gutiérrez
Departamento de Matemáticas
Colegio Universitario de La Rioja
(Universidad de Zaragoza)
Obispo Bustamante, 3
26001 Logroño, ESPAÑA

Juan Luis Varona
Departamento de Matemática Aplicada
Colegio Universitario de La Rioja
(Universidad de Zaragoza)
Obispo Bustamante, 3
26001 Logroño, ESPAÑA