MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Univ. de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

ESTUDIO DE UNA SUCESIÓN DE POLINOMIOS: RECURRENCIA Y CEROS

MARÍA PILAR ALFARO, MANUEL BELLO Y JESÚS M. MONTANER

En recuerdo de J. J. Guadalupe

ABSTRACT. We consider the sequence of varying measures $d\mu_n = \frac{d\mu}{|W_n(z)|^2}$, where $d\mu$ is a positive Borel measure on the unit circle and $\{W_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of polynomials whose zeros lie in $\{|z| \le 1\}$. The aim of this paper is to study some properties of zeros of the sequence of polynomials $\{\Phi_n(z)\}$ where $\Phi_n(z)$is the n-th orthogonal polynomial with respect the measure $d\mu_n$.

1. Introducción

Sea $\{d\mu_n\}$ una sucesión de medidas positivas, finitas y de Borel en $[0, 2\pi)$ con infinitos puntos en su soporte. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos con $\varphi_m(d\mu_n; z)$ el m-ésimo polinomio ortogonal respecto de la medida $d\mu_n$ con coeficiente principal $\kappa_m(d\mu_n) > 0$.

La clase de medidas variantes más estudiadas es la definida por

$$d\mu_n = \frac{d\mu}{|W_n(z)|^2}, \tag{1}$$

donde $d\mu$ es una medida positiva y de Borel sobre el intervalo $[0, 2\pi)$ cuyo soporte tiene infinitos puntos y para cada n, $W_n(z)$ es un polinomio a lo sumo de grado n con todos sus ceros en $\{|z| \le 1\}$.

Los polinomios $\{\varphi_m(d\mu_n; z)\}$ aparecen en el estudio de los aproximantes multipuntuales de Padé de las transformadas de Markov de las medidas $d\mu$ ([7]) y en dicho trabajo juega un papel importante el comportamiento asintótico de los $\varphi_n(d\mu_n; z)$. Los resultados sobre asintóticas de los polinomios $\varphi_m(d\mu_n; z)$ exigen que los ceros de $W_n(z)$ se comporten de una manera determinada, lo que puede plasmarse en la llamada condición de admisibilidad (ver, por ejemplo, [9]).

Además, los $\{\varphi_n(d\mu_n; z)\}$ juegan un papel importante en la extensión de la teoría de Szegő para funciones racionales. Como puede verse en [8] y [11] una familia de funciones ortogonales $\{\tilde{\varphi}_{n,m}\}_{m=0}^{n}$ puede expresarse en la forma

$$\tilde{\varphi}_{n,m} = \frac{\varphi_m(d\mu_n; z)}{W_n(z)},$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C05; 33C47.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, varying measures, zeroes.

La investigación del segundo autor está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI.

donde, como indica la notación empleada, $\varphi_m(d\mu_n; z)$ es el m-ésimo polinomio ortogonal respecto de la medida variante $\frac{d\mu}{|W_n(z)|^2}$.

En lo que sigue consideraremos la familia de polinomios $\{\varphi_m(d\mu_n; z)\}_{m=0}^{\infty}$, ($n \in \mathbb{N}$) asociada a la sucesión de medidas (1) donde los $W_n(z)$ vienen definidos mediante

$$W_0(z) = 1,$$
$$W_n(z) = (z - \omega_n)W_{n-1}(z), \ n \geq 1,$$

siendo $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos sobre el disco unidad, es decir $|\omega_n| \leq 1$ para todo n. Asumimos, además, que $\int d\mu_n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene pues

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_k(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m(d\mu_n; z)}\, d\mu_n(\theta) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases}; \quad z = e^{i\theta},$$

donde $\varphi_m(d\mu_n; z) = \kappa_m(d\mu_n)z^m + \cdots$; $\kappa_m(d\mu_n) > 0$. Como es habitual escribiremos

$$\Phi_m(d\mu_n; z) = \frac{1}{\kappa_m(d\mu_n)}\varphi_m(d\mu_n; z), \quad m = 0, 1, \ldots.$$

y $p_n^*(z)$ para el polinomio recíproco de $p(z)$, o sea $p_n^*(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$.

Los $\{\Phi_m(d\mu_n; z)\}$ y sus recíprocos satisfacen las fórmulas de recurrencia

$$\Phi_0(d\mu_n; z) = 1,$$
$$\Phi_{m+1}(d\mu_n; z) = z\Phi_m(d\mu_n; z) + \Phi_{m+1}(d\mu_n; 0)\Phi_m^*(d\mu_n; z), \ m \geq 0,$$
$$\Phi_0^*(d\mu_n; z) = 1,$$
$$\Phi_{m+1}^*(d\mu_n; z) = \Phi_m^*(d\mu_n; z) + \overline{\Phi_{m+1}(d\mu_n; 0)}z\Phi_m(d\mu_n; z), \ m \geq 0.$$

El núcleo reproductor $K_m(d\mu_n; z, y)$ se define, como es usual

$$K_m(d\mu_n; z, y) = \sum_{j=0}^{m} \overline{\varphi_j(d\mu_n; y)}\varphi_j(d\mu_n; z), \quad y \in \mathbb{C},$$

siendo

(2) $$K_m(d\mu_n; z, 0) = \kappa_m(d\mu_n)\varphi_m^*(d\mu_n; z).$$

Para $z\bar{y} \neq 1$, son válidas la siguientes relaciones de Christoffel-Darboux

(3) $$K_{m-1}(d\mu_n; z, y) = \frac{\varphi_m^*(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m^*(d\mu_n; y)} - \varphi_m(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m(d\mu_n; y)}}{1 - z\bar{y}},$$

(4) $$K_m(d\mu_n; z, y) = \frac{\varphi_m^*(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m^*(d\mu_n; y)} - z\bar{y}\varphi_m(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m(d\mu_n; y)}}{1 - z\bar{y}},$$

las cuales, para $y = z$, $|z| \neq 1$, se pueden reescribir en la forma

(5) $$K_{m-1}(d\mu_n; z, z) = \frac{|\varphi_m^*(d\mu_n; z)|^2 - |\varphi_m(d\mu_n; z)|^2}{1 - |z|^2},$$

(6) $$K_m(d\mu_n; z, z) = \frac{|\varphi_m^*(d\mu_n; z)|^2 - |z|^2|\varphi_m(d\mu_n; z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Por otra parte, dos medidas consecutivas de la sucesión $\{d\mu_n\}$ están relacionadas mediante

$$d\mu_n = \frac{d\mu_{n-1}}{|z-\omega_n|^2}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (d\mu_0 \equiv d\mu).$$

Por ello, los polinomios ortogonales respecto de estas medidas satisfacen la relación (ver [6]):

$$\begin{aligned}(7) \quad \varphi_m(d\mu_n; z) = {} & \frac{\kappa_m(d\mu_n)}{\kappa_m(d\mu_{n-1})}(z-\omega_n)\varphi_{m-1}(d\mu_{n-1}; z) \\ & + \frac{\varphi_m(d\mu_n; \omega_n)}{K_{m-1}(d\mu_n; \omega_n, \omega_n)} K_{m-1}(d\mu_n; z, \omega_n), \quad n > 0,\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}(8) \quad \Phi_m(d\mu_n; z) = {} & (z-\omega_n)\Phi_{m-1}(d\mu_{n-1}; z) \\ & + \frac{\varphi_m(d\mu_n; \omega_n)}{K_{m-1}(d\mu_n; \omega_n, \omega_n)} K_{m-1}(d\mu_n; z, \omega_n), \quad n > 0,\end{aligned}$$

ambas con la condición

$$\frac{K_{-1}(d\mu_n; z, \omega_n)}{K_{-1}(d\mu_n; \omega_n, \omega_n)} = 1.$$

En lo que sigue nos centraremos en el estudio de la sucesión $\{\varphi_n(d\mu_n; z)\}_{n=0}^{\infty}$ (ó $\{\Phi_n(d\mu_n; z)\}_{n=0}^{\infty}$) que denotaremos simplemente $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ (ó $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$); asimismo escribiremos $\kappa_n = \kappa_n(d\mu_n)$ para todo n.

2. Fórmulas de Recurrencia

Es sabido que los coeficientes conductores de los polinomios $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ortogonales con respecto a una medida fija $d\mu$, verifican la relación

$$\kappa_{n+1}^2 - \kappa_n^2 = |\psi_{n+1}(0)|^2$$

(ver [5], Ch. 1, p. 7).

La proposición siguiente, establece la relación «análoga» de la anterior para los coeficientes de los $\varphi_n(z)$:

Proposición 2.1. *Los coeficientes conductores de los polinomios $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfacen la relación*

$$\kappa_{n+1}^2 - \kappa_n^2 = \kappa_n^2 \frac{|\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})|^2}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})}. \tag{9}$$

Demostración. Escribamos la fórmula (7) para $m = n$ e índice $n+1$:

$$\begin{aligned}(10) \quad \varphi_{n+1}(z) = {} & \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}(z-\omega_{n+1})\varphi_n(z) \\ & + \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})} K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1}), \quad n > 0.\end{aligned}$$

Multiplicamos ambos miembros de (10) por $\overline{W_{n+1}(z)}$, escribimos $z = e^{i\theta}$ e integramos con respecto a $d\mu_{n+1}$. Las integrales que resultan se calculan usando la ortogonalidad de $\varphi_{n+1}(z)$ con respecto a la familia $\{\frac{z^k}{W_n(z)} : k = 0, 1, \ldots, n\}$ en $L^2(\mu)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{n+1}(z)\overline{W_{n+1}(z)}\, d\mu_{n+1} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\kappa_{n+1}}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi_{n+1}(z)\kappa_{n+1}\overline{W_{n+1}(z)}}{|W_{n+1}(z)|^2}\, d\mu = \frac{1}{\kappa_{n+1}},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z-\omega_{n+1})\varphi_n(z)\overline{W_{n+1}(z)}\, d\mu_{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi_n(z)}{W_n(z)}\, d\mu = \frac{1}{\kappa_n},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1})\overline{W_{n+1}(z)}\, d\mu_{n+1} = \frac{-1}{\kappa_{n+1}}\overline{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}.$$

Finalmente, se obtiene

$$\frac{\kappa_{n+1}^2}{\kappa_n^2} = 1 + \frac{|\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})|^2}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})}, \tag{11}$$

o su equivalente (9). □

Corolario 2.2. $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión no decreciente de números positivos.*

Corolario 2.3. *Supongamos que* $\lim\limits_{n\in\Lambda} |\omega_{n+1}| \neq 1$*, donde* Λ *es una sucesión de índices en* $\mathbb{N}$*. Entonces,*

(i) $\dfrac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \underset{n\in\Lambda}{\to} 1 \iff \dfrac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \underset{n\in\Lambda}{\to} 0.$

(ii) $\dfrac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \underset{n\in\Lambda}{\to} 0 \iff \left|\dfrac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}\right| \underset{n\in\Lambda}{\to} 1.$

Demostración. Si escribimos (11) en la forma

$$\frac{\kappa_{n+1}^2}{\kappa_n^2} = \frac{K_{n+1}(\omega_{n+1}, \omega_{n+1})}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})},$$

para n suficientemente grande podemos utilizar (5) y (6) para obtener

$$\frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} = \frac{1 - \left|\frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}\right|^2}{1 - |\omega_{n+1}|^2 \left|\frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}\right|^2},$$

de donde se deduce inmediatamente (ii).

Además, si $\left|\dfrac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}\right|^2 \underset{n\in\Lambda}{\to} 0$, entonces $\dfrac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \underset{n\in\Lambda}{\to} 1$.

Recíprocamente, si $\dfrac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \underset{n\in\Lambda}{\to} 1$, a partir de (11) y (5),

$$\frac{|\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})|^2(1-|\omega_{n+1}|^2)}{|\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})|^2 - |\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})|^2} = \left|\frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}\right|^2 \frac{1-|\omega_{n+1}|^2}{1 - \left|\frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}\right|^2} \to 0.$$

Esto implica que $\left|\dfrac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}\right| \underset{n\in\Lambda}{\to} 0$ ya que, según (ii), si $\dfrac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \underset{n\in\Lambda}{\to} 1$, entonces $\left|\dfrac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}\right| \underset{n\in\Lambda'}{\not\to} 1$ para toda subsucesión Λ' de Λ. □

Nota 2.3.1. *Si $\omega_n = 0$ para todo n,*

$$\left|\frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi^*_{n+1}(\omega_{n+1})}\right| = \left|\frac{\psi_{n+1}(0)}{1}\right|.$$

Por ello, el resultado anterior se corresponde con el clásico para P.O. respecto de medida fija:

$$\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \to 1 \iff |\psi_{n+1}(0)| \to 0.$$

En [11] se obtienen relaciones de recurrencia para los polinomios $\Phi_n(z)$ a partir de las correspondientes para los núcleos de funciones racionales ortogonales.

Sin embargo, las fórmulas de recurrencia para estos polinomios pueden obtenerse sin salir del espacio de los polinomios.

Proposición 2.4. *Para la sucesión $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ son válidas las siguientes relaciones:*

(12)
$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}\left(z - \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2}\omega_{n+1}\right)\varphi_n(z) + \left(\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\kappa_n} + \omega_{n+1}\frac{\varphi_n(0)}{\kappa_{n+1}}\right)\varphi_n^*(z),$$

(13)
$$\varphi^*_{n+1}(z) = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}\left(1 - \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2}\overline{\omega_{n+1}}z\right)\varphi_n^*(z) + \left(\frac{\overline{\varphi_{n+1}(0)}}{\kappa_n} + \overline{\omega_{n+1}}\frac{\overline{\varphi_n(0)}}{\kappa_{n+1}}\right)z\varphi_n(z).$$

Demostración. Como el polinomio

$$\varphi_{n+1}(z) - \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}z - \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\omega_{n+1}\right)\varphi_n(z)$$

tiene a lo más grado n, podemos escribir

$$\varphi_{n+1}(z) - \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}z - \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\omega_{n+1}\right)\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^{n}\lambda_{n,j}\varphi_j(d\mu_n; z),$$

donde los coeficientes se obtendrán de la manera habitual:

(14)
$$\lambda_{n,j} = \langle\varphi_{n+1}(z) - \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}z - \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\omega_{n+1}\right)\varphi_n(z)\, ,\, \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_n}, \quad 0 \le j \le n.$$

Basta, pues, calcular:

(i) $\langle\varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_n}$.
(ii) $\langle z\varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_n}$.
(iii) $\langle\varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_n}$.

(i) Se tiene

$$\begin{aligned}\langle\varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_n} &= \langle(z-\omega_{n+1})\varphi_{n+1}(z), (z-\omega_{n+1})\varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_{n+1}}\\ &= -\overline{\omega_{n+1}}\langle z\varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_{n+1}}\\ &\quad - \begin{cases}0, & \text{si } j < n,\\ \omega_{n+1}\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}, & \text{si } j = n.\end{cases}\end{aligned}$$

Si escribimos

$$\varphi_j(d\mu_n; z) = \sum_{h=0}^{j} \alpha_{n,h} z^h \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha_{n,j} = \kappa_j(d\mu_n), \\ \alpha_{n,0} = \varphi_j(d\mu_n; 0) \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle z\varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_{n+1}} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z\varphi_{n+1}(z)\overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)}\, d\mu_{n+1} \\ &= \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z\varphi_{n+1}(z)\, d\mu_{n+1} \\ &= \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} I_{n+1}, \end{aligned}$$

donde $I_{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z\varphi_{n+1}(z)\, d\mu_{n+1}$. De aquí,

$$\langle \varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_n} = -\overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)}\overline{\omega_{n+1}} I_{n+1} - \begin{cases} 0, & \text{si } j < n, \\ \omega_{n+1}\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}, & \text{si } j = n. \end{cases}$$

(ii) Utilizando técnicas semejantes:

$$\langle z\varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_n} = \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} I_n.$$

(iii)

$$\langle \varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z)\rangle_{d\mu_n} = \begin{cases} 0, & \text{si } j < n, \\ 1, & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Con estos resultados, (14) se reduce a

$$\lambda_{n,j} = -\overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)}\left(\overline{\omega_{n+1}} I_{n+1} + \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} I_n\right), \quad 0 \le j \le n \tag{15}$$

y sólo falta calcular I_n. Pero

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} I_n &= \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z\varphi_n(z)\, d\mu_n \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}(z - \omega_{n+1})\varphi_n(z)\right)(1 - z\overline{\omega_{n+1}})\, d\mu_{n+1} \end{aligned}$$

y podemos utilizar (10), donde pondremos

$$G_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} I_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{n+1}(z)(1 - z\overline{\omega_{n+1}})\, d\mu_{n+1} \\ &\quad - G_{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - z\overline{\omega_{n+1}})K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1})\, d\mu_{n+1} \\ &= -\overline{\omega_{n+1}} I_{n+1} - G_{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - z\overline{\omega_{n+1}})K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1})\, d\mu_{n+1}, \end{aligned}$$

donde la integral se calcula haciendo uso de (3), obteniéndose

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-z\overline{\omega_{n+1}})K_n(d\mu_{n+1};z,\omega_{n+1})\,d\mu_{n+1}=\frac{1}{\kappa_{n+1}}\overline{\varphi^*_{n+1}(\omega_{n+1})}.$$

Sustituyendo $\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}I_n$ en (15) se sigue

$$\lambda_{n,j}=-\overline{\varphi_j(d\mu_n;0)}\frac{1}{\kappa_{n+1}}\overline{\varphi^*_{n+1}(\omega_{n+1})}G_{n+1}=\frac{1}{\kappa^2_{n+1}}\overline{\varphi_j(d\mu_n;0)}G_{n+1}K_{n+1}(0,\omega_{n+1})$$

y de nuevo teniendo en cuenta (2), (10) evaluada en $z=0$, y (11), obtenemos

$$\lambda_{n,j}=\overline{\varphi_j(d\mu_n;0)}\frac{1}{\kappa_n}\left(\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\kappa_n}+\omega_{n+1}\frac{\varphi_n(0)}{\kappa_{n+1}}\right),$$

lo que prueba (12).

Finalmente, utilizando el operador $*_n$ en (12), se deduce (13). □

Corolario 2.5. *Las fórmulas de recurrencia para los polinomios mónicos pueden escribirse en la forma*

$$\Phi_{n+1}(z)=(z-h_{n+1})\Phi_n(z)+A_{n+1}\Phi^*_n(z),\tag{16}$$

$$\Phi^*_{n+1}(z)=(1-\overline{h_{n+1}}z)\Phi^*_n(z)+\overline{A_{n+1}}z\Phi_n(z),\tag{17}$$

donde

$$h_{n+1}=\frac{\kappa_n^2}{\kappa^2_{n+1}}\omega_{n+1},\tag{18}$$

$$A_{n+1}=\Phi_{n+1}(0)+h_{n+1}\Phi_n(0).\tag{19}$$

La fórmula de recurrencia a tres términos, se obtiene ahora en la forma usual:

Proposición 2.6. *Los polinomios $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos:*

$$\begin{aligned}A_n\Phi_{n+1}(z)=&\left[(z-h_{n+1})A_n+(1-\overline{h_n}z)A_{n+1}\right]\Phi_n(z)\\&+\left[z|A_n|^2-(1-\overline{h_n}z)(z-h_n)\right]A_{n+1}\Phi_{n-1}(z),\end{aligned}\tag{20}$$

donde los coeficientes A_n y h_n son los definidos en (18) y (19).

Demostración. Eliminando $\Phi^*_n(z)$ a partir de (16) y (17) se tiene

$$(1-\overline{h_{n+1}}z)\Phi_{n+1}(z)=A_{n+1}\Phi^*_{n+1}(z)+\left((1-\overline{h_{n+1}}z)(z-h_{n+1})-|A_{n+1}|^2z\right)\Phi_n(z).\tag{21}$$

La fórmula (20) se obtiene eliminando $\Phi^*_n(z)$ entre (16) y (21) reescritas para grado n. □

Un primer resultado de las relaciones de recurrencia es el que establece la

Proposición 2.7. *Si $\omega_n\neq 0$ para algún n. Entonces los polinomios $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ no son ortogonales con respecto a ninguna medida fija sobre la circunferencia unidad.*

Demostración. Si la sucesión $\{\Phi_n(z)\}$ fuera de polinomios ortogonales respecto a alguna medida fija, tendría que satisfacer

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, además de (16). En consecuencia

$$h_{n+1}\Phi_n(z) = (A_{n+1} - \Phi_{n+1}(0))\Phi_n^*(z)$$

es decir,

$$h_{n+1}\Phi_n(z) = h_{n+1}\Phi_n(0)\Phi_n^*(z).$$

Pero esta igualdad implica que $h_{n+1} = 0$ (ver [10]) y por tanto $\omega_{n+1} = 0$. □

3. Ceros de los Polinomios

Es bien conocido que los ceros de los polinomios $\Phi_n(z)$ están en $\{z : |z| < 1\}$. En cuanto a la existencia de ceros comunes, los $\Phi_n(z)$ se comportan de forma parecida a los polinomios ortogonales respecto de una medida fija.

Proposición 3.1. *Sean $\Phi_n(z)$ y $\Phi_{n+1}(z)$ dos polinomios consecutivos.*

(i) *Si $\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) = 0$, sus n ceros restantes son los de $\Phi_n(z)$.*
(ii) *Si $\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) \neq 0$, $\Phi_n(z)$ y $\Phi_{n+1}(z)$ carecen de ceros comunes.*

Demostración. (i) Supongamos $\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) = 0$. Entonces de (11) se sigue que $\frac{\kappa_{n+1}^2}{\kappa_n^2} = 1$ y la fórmula (16) evaluada en $z = \omega_{n+1}$ da $A_{n+1}\Phi_n^*(\omega_{n+1}) = 0$ y por tanto $A_{n+1} = 0$. Dicha fórmula se reduce a

$$\Phi_{n+1}(z) = (z - \omega_{n+1})\Phi_n(z),$$

lo que prueba (i).

(ii) Supongamos que $\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) \neq 0$ y que existe ρ, cero común a los polinomios $\Phi_n(z)$ y $\Phi_{n+1}(z)$. De (8) escrita para $n = m$ e índice $n+1$ y evaluada en $z = \rho$ deducimos

$$\Phi_{n+1}(\omega_{n+1})\frac{K_n(d\mu_{n+1}; \rho, \omega_{n+1})}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})} = 0$$

y además $K_n(d\mu_{n+1}; \rho, \omega_{n+1}) = 0$. Utilizando la fórmula de Christoffel-Darboux (4), obtenemos

$$\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \rho)\overline{\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})} = \rho\overline{\omega_{n+1}}\varphi_n(d\mu_{n+1}; \rho)\overline{\varphi_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})}.$$

Y de esta y su relación conjugada,

$$|\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \rho)|^2|\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})|^2 = |\rho|^2|\omega_{n+1}|^2|\varphi_n(d\mu_{n+1}; \rho)|^2|\varphi_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})|^2,$$

es decir,

$$1 = |\rho|^2|\omega_{n+1}|^2\left|\frac{\varphi_n(d\mu_{n+1}; \rho)}{\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \rho)}\right|^2\left|\frac{\varphi_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})}{\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})}\right|^2.$$

Pero esta igualdad es imposible, ya que el segundo miembro es un producto con dos factores iguales o menores que uno y otros dos son estrictamente menores que 1. □

Corolario 3.2. *Supongamos* $|\omega_n| < 1$ *y* $\Phi_n(\omega_n) = 0$ *para cada* n*. Entonces* $\Phi_n(z) = W_n(z)$ *y* $d\mu = d\theta$ *donde, como es habitual,* $d\theta$ *representa la medida normalizada de Lebesgue sobre* $[0, 2\pi)$*.*

Demostración. Se cumple, para cada $n \geq 1$,

$$\Phi_n(z) = (z - \omega_n)\Phi_{n-1}(z);$$

así que

$$\Phi_n(z) = \prod_{j=0}^{n}(z - \omega_j) = W_n(z).$$

Entonces, para cada polinomio $\Pi_n(z)$ de grado no mayor que n se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi_n(z)\, d\mu_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi_n(z)\frac{d\mu}{|W_n(z)|^2},$$

mientras que el Teorema 2.2, p.198, de [4], nos lleva a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi_n(z)\, d\mu_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Pi_n(z)}{|\Phi_n(z)|^2}\, d\theta.$$

La conclusión resulta inmediatamente. □

Es sabido que para polinomios ortogonales con respecto a una medida fija sobre la circunferencia unidad, es válido el siguiente resultado ([1]):

Proposición 3.3. *Sea* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de puntos en* $\{z : |z| < 1\}$*. Entonces, existe una única sucesión de polinomios mónicos* $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *ortogonales sobre la circunferencia unidad tal que* $\psi_n(z_n) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Por tanto, la sucesión $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ está completamente determinada si se conoce un cero de cada polinomio.

En nuestro caso, disponer de la sucesión de raíces $\{z_n\}$ no es suficiente para construir $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. La correspondiente versión de la proposición 3.3 se recoge en la proposición 3.5, mientras que 3.4 establece un resultado alternativo.

Proposición 3.4. *Sean las sucesiones* $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$*, con* $\kappa_n > 0$ *para todo* $n \geq 0$*, y* $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$*, con* $|\rho_n| < 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces, existe una única sucesión de polinomios mónicos* $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *y una medida positiva* μ *con infinitos puntos en su soporte, tal que* $\int d\mu_n < \infty$ *y*

(i) $\Phi_0(z) = 1$*;* $\Phi_n(z) = z^n + \cdots,\ n \geq 1$.

(ii) $\Phi_n(\rho_n) = 0,\ n \geq 1$.

(iii) $\Phi_n(z)$ *es el (n+1)-ésimo término de la sucesión* $\{\Phi_m(d\mu_n; z)\}$ *de polinomios ortogonales con respecto a la medida* $d\mu_n$*.*

Demostración. Construiremos la sucesión $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ utilizando un proceso inductivo a partir de la relación de recurrencia (16). Si $n = 0$, obtenemos

$$\Phi_1(z) = (z - h_1)\Phi_0(z) + A_1\Phi_0^*(z), \tag{22}$$

donde $h_1 = \frac{\kappa_0^2}{\kappa_1^2}\omega_1$ es conocido. Por otra parte,

$$\Phi_1(\rho_1) = 0 \Longrightarrow A_1 = h_1 - \rho_1,$$

lo que permite calcular $\Phi_1(z)$ en (22).

Construido $\Phi_n(z)$, volviendo a (16), donde conocemos $h_{n+1} = \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2}\omega_{n+1}$, la condición $\Phi_{n+1}(\rho_{n+1}) = 0$, da

$$A_{n+1} = (h_{n+1} - \rho_{n+1})\frac{\Phi_n(\rho_{n+1})}{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}. \tag{23}$$

Por tanto, la misma fórmula (16) determina $\Phi_{n+1}(z)$. La conclusión iii) sigue del correspondiente teorema de Favard para fracciones ortogonales demostrado en [3]. $\square$

Nota 3.4.1. *Si $\omega_n = 0$ para todo n, (23) se reduce a*

$$\Phi_{n+1}(0) = -\rho_{n+1}\frac{\Phi_n(\rho_{n+1})}{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}, \tag{24}$$

que es la relación que permite construir la sucesión de polinomios ortogonales respecto de una medida fija, cuando se conoce una raíz de cada polinomio.

Para que la sucesión$\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ quede determinada en términos de alguna de sus ceros, necesitamos conocer dos ceros de cada polinomio.

Proposición 3.5. *Consideremos dos sucesiones $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\tau_n\}_{n=2}^\infty$ de puntos en $\{z : |z| < 1\}$. Entonces, existe una única sucesión $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ de polinomios mónicos y una medida positiva μ con infinitos puntos en su soporte, tal que $\int d\mu_n < \infty$ y*

(i) $\Phi_0(z) = 1$; $\Phi_n(z) = z^n + \cdots,\ n \geq 1$.
(ii) $\Phi_n(\rho_n) = \Phi_n(\tau_n) = 0,\ n \geq 2$; $\Phi_1(\rho_1) = 0$.
(iii) $\Phi_n(z)$ *es el (n+1)-ésimo término de la sucesión* $\{\Phi_m(d\mu_n; z)\}$ *de polinomios ortogonales con respecto a la medida* $d\mu_n$.

Demostración. Se tiene, $\Phi_1(z) = z - \rho_1$. Supongamos que $\Phi_n(z)$ ha sido construido a partir de (16). La misma relación de recurrencia, evaluada en $z = \rho_{n+1}$ y $z = \tau_{n+1}$ sucesivamente, nos permite obtener h_{n+1} y A_{n+1} como soluciones de el sistema lineal

$$\begin{aligned}\Phi_n(\rho_{n+1})h_{n+1} - \Phi_n^*(\rho_{n+1})A_{n+1} &= \rho_{n+1}\Phi_n(\rho_{n+1}),\\ \Phi_n(\tau_{n+1})h_{n+1} - \Phi_n^*(\tau_{n+1})A_{n+1} &= \tau_{n+1}\Phi_n(\tau_{n+1}),\end{aligned}$$

con determinante

$$\Delta_{n+1} = \Phi_n(\tau_{n+1})\Phi_n^*(\rho_{n+1}) - \Phi_n(\rho_{n+1})\Phi_n^*(\tau_{n+1}).$$

Si fuera $\Delta_{n+1} = 0$,

$$\frac{\Phi_n(\tau_{n+1})}{\Phi_n^*(\tau_{n+1})} = \frac{\Phi_n(\rho_{n+1})}{\Phi_n^*(\rho_{n+1})} = \lambda, \quad |\lambda| < 1,$$

el polinomio

$$\Phi_n(z) - \lambda\Phi_n^*(z)$$

se anularía en ρ_{n+1}, τ_{n+1} y en cualquier otro cero de $\Phi_{n+1}(z)$. Por consiguiente, tendría $n+1$ ceros y en consecuencia

$$\Phi_n(z) - \lambda\Phi_n^*(z) \equiv 0.$$

En particular, debería ser $1 - \lambda\overline{\Phi_n(0)} = 0$ y como $|\lambda| < 1$, resulta

$$|\Phi_n(0)| > 1,$$

lo cual no es posible.

Como $\Delta_{n+1} \neq 0$, el sistema anterior tiene solución única (h_{n+1}, A_{n+1}),

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \frac{\tau_{n+1}\Phi_n(\tau_{n+1})\Phi_n^*(\rho_{n+1}) - \rho_{n+1}\Phi_n(\rho_{n+1})\Phi_n^*(\tau_{n+1})}{\Delta_{n+1}}, \\ A_{n+1} &= \frac{\Phi_n(\rho_{n+1})\Phi_n(\tau_{n+1})}{\Delta_{n+1}}(\tau_{n+1} - \rho_{n+1}). \end{aligned} \tag{25}$$

Llevando estos valores a (16), $\Phi_{n+1}(z)$ queda construida a partir de $\Phi_n(z)$. □

Corolario 3.6. *Los coeficientes h_{n+1} y A_{n+1} están relacionados por*

$$A_{n+1} = \frac{\Phi_n(\tau_{n+1})}{\Phi_n^*(\tau_{n+1})}(h_{n+1} - \tau_{n+1}), \tag{26}$$

o la correspondiente igualdad con ρ_{n+1} en lugar de τ_{n+1}.

Demostración. Basta notar que las fórmulas (25) pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= (\tau_{n+1} - \rho_{n+1})\frac{\dfrac{\Phi_n^*(\tau_{n+1})}{\Phi_n(\tau_{n+1})}}{\dfrac{\Phi_n^*(\tau_{n+1})}{\Phi_n(\tau_{n+1})} - \dfrac{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}{\Phi_n(\rho_{n+1})}} + \tau_{n+1}, \\ A_{n+1} &= \frac{\tau_{n+1} - \rho_{n+1}}{\dfrac{\Phi_n^*(\tau_{n+1})}{\Phi_n(\tau_{n+1})} - \dfrac{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}{\Phi_n(\rho_{n+1})}}. \end{aligned}$$

□

La relación (26) vuelve a ser la generalización de (24) para la sucesión $\{\Phi_n(z)\}$.

Las Proposiciones 3.4 y 3.5 anteriores establecen, pues, cómo se traslada al caso que nos ocupa el hecho de que una sucesión de P.O. respecto de una medida fija quede determinada al fijar un cero de cada polinomio.

Nuestro propósito era obtener, además, información sobre la distribución de ceros de los $\Phi_n(z)$ mediante algún resultado que pudiera considerarse un análogo del obtenido para el caso de medida fija por J. J. Guadalupe y otros ([2], Th. 1.5). La técnica allí empleada no resulta manejable en este caso. Como herramienta alternativa hemos utilizado la fórmula obtenida por Rakhmanov en ([12], p. 157), con $z_0 = \omega_{n+1}$, $\omega_{n+1}^* = \frac{1}{\overline{\omega_{n+1}}}$, que evaluada en $z = 0$ da

$$\omega_{n+1}\omega_{n+1}^*\Phi_n(0) = \Phi_{n+2}(d\mu_{n+1}; 0) + c_n\Phi_{n+1}(0) + d_n,$$

donde los coeficientes d_n y c_n son, ahora,

$$\begin{aligned} d_n &= \omega_{n+1}^*\Phi_{n+1}(d\mu_n; 0)\frac{\kappa_n^2(d\mu_{n+1})}{\kappa_n^2}, \\ c_n &= -\frac{\Phi_{n+2}(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}^*)}{\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}^*)} - d_n\frac{\Phi_n^*(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}^*)}{\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}^*)}. \end{aligned}$$

Construyendo la sucesión $\{\Phi_n(z)\}$ a partir de $(\{\kappa_n\}, \{\rho_n\})$, de acuerdo con la Proposición 3.4, se tiene además

$$h_{n+1}\Phi_n(0) + \Phi_{n+1}(0) = \frac{\Phi_n(\rho_{n+1})}{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}(h_{n+1} - \rho_{n+1}).$$

Eliminando $\Phi_n(0)$ entre estas dos últimas relaciones e imponiendo condiciones de tamaño a κ_n y ρ_n se llega a resultados parciales en el sentido del Teorema 1.5 de [2], **siempre que** $|\Phi_{n+1}(d\mu_n; 0)| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Con este planteamiento, aceptar la validez de los resultados obtenidos exige resolver previamente el siguiente problema:

Determinar condiciones para la sucesión $\{d\mu_n\}$ *(lo que se traducirá en condiciones para los* ω_n*) para que pueda garantizarse que* $\lim_{n\to\infty} \Phi_{n+1}(d\mu_n; 0) = 0$.

Referencias

[1] M. P. Alfaro y L. Vigil, Solution of a problem of P. Turán on zeros of orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory* **53** (1988), 195–197.

[2] M. Bello, J. J. Guadalupe y J. L. Varona, The zero distribution of orthogonal polynomials with respect to varying measures on the unit circle (pendiente de publicación).

[3] A. Butheel, P. González-Vera, E. Hendriksen y O. Njastad, A Favard theorem for orthogonal rational functions on the unit circle, *Numer. Algorithms* **3** (1992), 81–90.

[4] G. Freud, *Orthogonal polynomials*, Akadémiai Kiadó, Pergamon, Budapest, 1971.

[5] Ja. L. Geronimus, *Orthogonal polynomials*, Consultants Bureau, Nueva York, 1961.

[6] E. Godoy y F. Marcellán, Orthogonal polynomials and rational modifications of measures, *Cand. J. Math.* **45** (1993), 930–943.

[7] A. A. Gonchar y G. Lopes [G. López], On Markov's theorem for multipoint Padé approximations, *Mat. Sb. (N.S.)* **105(147)** (1978), 512–524. Traducción al inglés: *Math. USSR Sb.* **34** (1978), 449–459.

[8] X. Li y K. Pan, Strong and weak convergence of rational functions orthogonal on the unit circle, *J. London Math. Soc. (2)* **53** (1996), 289–301.

[9] G. López, Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures, *Constr. Approx.* **5** (1989), 199–219.

[10] F. Marcellán, Orthogonal polynomials and Toeplitz Matrices: some applications, en *Rational approximation and orthogonal polynomials* (Zaragoza, 1988), Publ. Sem. García de Galdeano, Zaragoza (1989), 31–57.

[11] K. Pan, On orthogonal system of rational functions on the unit circle and polynomials orthogonal with respect to varying measures, *J. Comp. Applied Math.* **47** (1993), 313–322.

[12] E. A. Rakhmanov, On the asymptotic properties of polynomials orthogonal on the circle with weights not satisfying Szegő's condition, *Mat. Sb. (N.S.)* **130(172)** (1986), 151–169. Traducción al inglés: *Math. USSR Sb.* **58** (1987), 149–167.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Edificio de Matemáticas, Ciudad Universitaria s/n, 50009 Zaragoza, Spain
Correo electrónico: palfaro@posta.unizar.es

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Edificio Vives, Calle Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, Spain
Correo electrónico: mbello@dmc.unirioja.es

Departamento de Matemática Aplicada (EUITIZ), Universidad de Zaragoza, Corona de Aragón 35, 50009 Zaragoza, Spain
Correo electrónico: montaner@posta.unizar.es