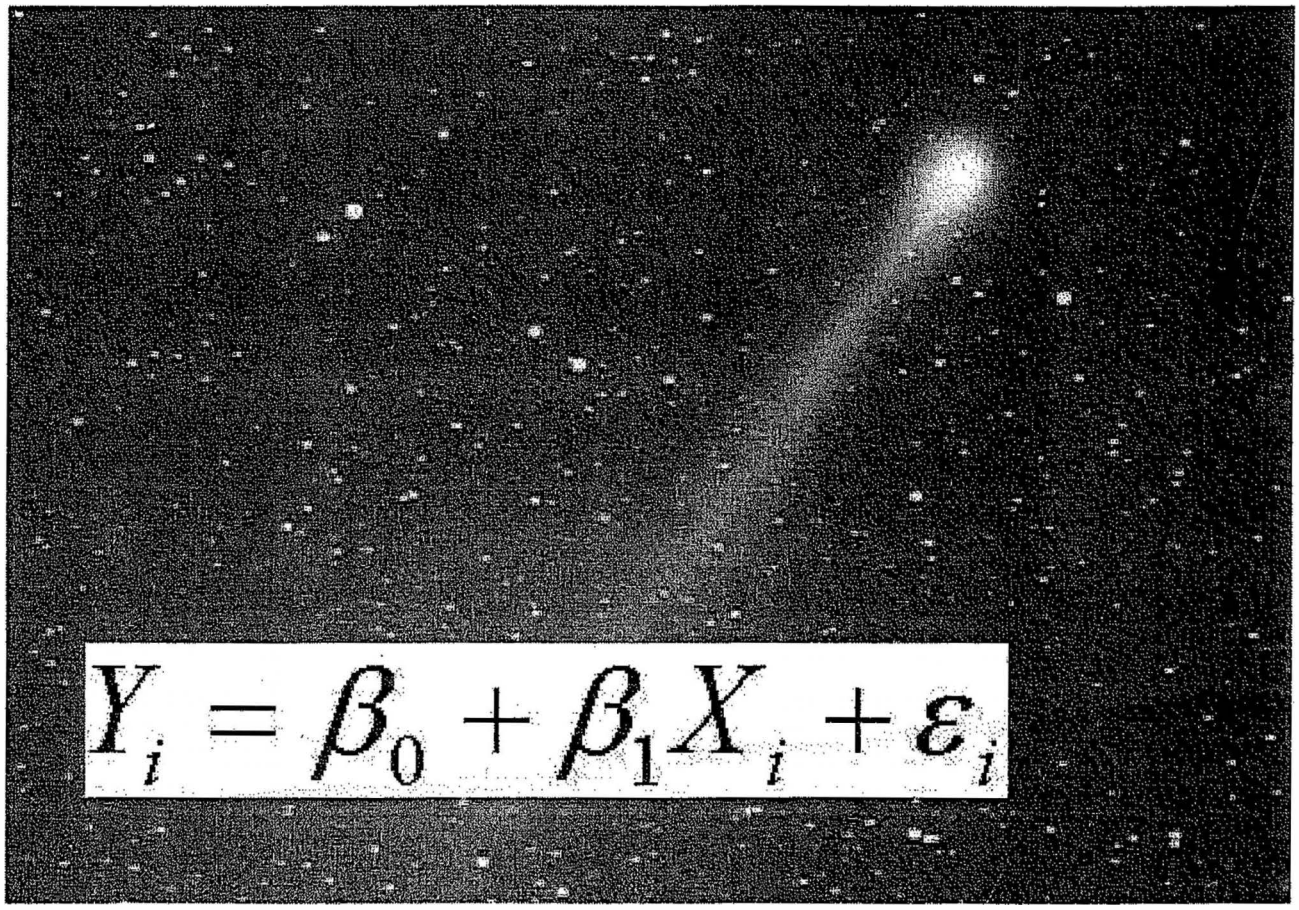
CUESTIONES Y EJERCICIOS DE ECONOMETRÍA

Fernando Antoñanzas Villar

Roberto Rodríguez Ibeas



CUESTIONES Y EJERCICIOS DE ECONOMETRÍA

Fernando Antoñanzas Villar
Doctor en CC Económicas, 1983
(Universidad Autónoma de Madrid)
Máster of Arts, 1985
(The University of Chicago)

Roberto Rodríguez Ibeas
PhD Economics, 1999
(University of Michigan)

Reservados todos los derechos. El contenido de esta obra está protegido por la Ley, que establece penas de prisión y/o multas, además de las correspondientes indemnizaciones por daños y perjuicios para quienes reprodujeren, plagiaren, distribuyeren o comunicaren públicamente, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica, o su transformación, interpretación o ejecución artística fijada en cualquier tipo de soporte o comunicada a través de cualquier otro medio, sin la preceptiva autorización

© Fernando Antoñanzas Villar
Roberto Rodríguez Ibeas

Depósito legal: LR-37-2007
ISBN: 978-84-611-4892-4

Impreso en Copy Laser S.L.
Calvo Sotelo 56
Logroño (La Rioja)
ESPAÑA

ÍNDICE

	Pág
ENUNCIADOS DE CUESTIONES TEÓRICAS	**1**
1- Modelo de regresión lineal simple	3
2- Modelo de regresión lineal general	5
3- Autocorrelación	7
4- Heteroscedasticidad	8
5- Variables ficticias, medidas con error, omitidas e irrelevantes	9
6- Multicolinealidad	10
7- Regresores estocásticos	11
8- Modelos de ecuaciones simultáneas	12
9- Miscelánea	13
ENUNCIADOS DE EJERCICIOS NUMÉRICOS	**15**
A- Modelo de regresión lineal simple	17
B- Modelo de regresión lineal general	21
PROPUESTAS DE SOLUCIÓN PARA LAS CUESTIONES TEÓRICAS	**27**
1- Modelo de regresión lineal simple	*29*
2- Modelo de regresión lineal general	*36*
3- Autocorrelación	*40*
4- Heteroscedasticidad	*46*
5- Variables ficticias, medidas con error, omitidas e irrelevantes	*49*
6- Multicolinealidad	*55*
7- Regresores estocásticos	*57*
8- Modelos de ecuaciones simultáneas	*60*
9- Miscelánea	*63*
PROPUESTAS DE SOLUCIÓN PARA LOS EJERCICIOS NUMÉRICOS	**67**
a. Modelo de regresión lineal simple	*69*
b. Modelo de regresión lineal general	*82*

PREFACIO

Los métodos y modelos econométricos constituyen elementos imprescindibles para la investigación económica. Su conocimiento y el desarrollo de habilidades en estas materias facilitan la búsqueda de relaciones entre las variables económicas, permite su cuantificación y ayuda a elaborar predicciones acerca de sus valores futuros, todo lo cual redunda en un mejor conocimiento de la realidad económica. En las licenciaturas de Economía y de Administración y Dirección de Empresas, las asignaturas de Econometría requieren una especial dedicación por precisar la integración de varios conocimientos –matemáticos, estadísticos, de teoría económica, y de programación informática, fundamentalmente-. La asimilación de los métodos econométricos requiere conjugar los elementos teóricos con sus aplicaciones prácticas, de hecho, en estas aplicaciones es donde más patente se hace la solidez de los conocimientos adquiridos.

El objetivo del presente libro es fomentar el aprendizaje de la Econometría mediante el planteamiento de ciertos enunciados acerca de los métodos y modelos econométricos respecto de los cuales el lector habrá de responder si le parecen ciertos, falsos o dudosos. Se han propuesto más de 80, de modo que abarcan los temas habitualmente incluidos en las licenciaturas antes referidas. Esta necesidad de calificación de los enunciados propuestos persigue crear una cierta inquietud, nacida de la curiosidad seguramente, de manera que se busquen y se relacionen los elementos necesarios para conseguir abordar la cuestión planteada y construir una respuesta coherente. Habrá algunos enunciados cuya calificación no presente apenas dudas acerca de su falsedad o veracidad; sin embargo, en otras cuestiones, las soluciones ofrecidas en esta obra se han basado en aproximar la cuestión desde ciertas perspectivas, que pueden no coincidir con las del lector y de ahí que pueda surgir un desacuerdo con los resultados. El epíteto de dudoso abunda en esta obra y promoverá a veces la reacción del lector indagando, quizás, nuevas aproximaciones al asunto.

El libro también incluye las propuestas y soluciones de más de 30 ejercicios numéricos sobre el modelo lineal simple y el modelo lineal general a fin de familiarizar al lector con los cálculos matemáticos. No obstante, se ha dejado para una próxima edición el desarrollo de otros ejercicios referentes a los problemas generados por el incumplimiento de las hipótesis básicas, que precisarían del apoyo mediante programas informáticos para su resolución.

Las cuestiones y ejercicios numéricos contenidos en el libro han ido surgiendo durante los años que los autores han impartido docencia en las asignaturas de Econometría del segundo ciclo de la licenciatura en Administración y Dirección de Empresas. La mayor parte de este material didáctico procede de los exámenes y de las prácticas de aula correspondientes a dichas asignaturas. El número de ejercicios para cada tema o agrupación de temas es variable en función de sus características y los criterios de los autores para su selección. Su número se sitúa entre 5 y 15.

La estructura del libro es como sigue: en primer lugar, clasificados por materias, se presentan los enunciados, cuya calificación de verdaderos, falsos o dudosos se ha de establecer; luego, y también clasificados, se proponen los ejercicios numéricos. El apartado de soluciones indica el calificativo elegido y muestra su justificación mediante el desarrollo de una argumentación. Cada solución empieza por mostrar el apartado o

tema al que corresponde para facilitar su localización en el libro y establece con las siglas V, F, o D el correspondiente carácter verdadero, falso o dudoso del enunciado. Seguidamente, se muestran las soluciones a los ejercicios, para lo cual se han redactado con profusión los pasos de las formulaciones empleadas, se ha justificado la selección de los modelos utilizados y, cuando es aplicable, se han interpretado los resultados.

Finalmente, nos gustaría describir la portada elegida para esta obra. Se trata de una noche estrellada por la cual atraviesa un cometa que muestra la conocida expresión de una recta de regresión. Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) aplicó, allá por 1801, el método de los mínimos cuadrados para calcular la trayectoria de un cometa que un astrónomo, Piazzi, había perdido por motivo de una enfermedad, que le mantuvo alejado de su telescopio por un tiempo. Las fuerzas gravitatorias de los cuerpos celestes atraían al cometa de diferente manera, las cuales complicaban la determinación de su curso. Gauss propuso la aplicación de su célebre principio de modo que la trayectoria pasase por "el medio" de dichas fuerzas haciendo mínima la suma de los cuadrados de los errores de ajuste. Ese método ya lo había ideado Gauss unos seis años antes, aunque fue publicado en 1809, en latín como lenguaje científico de la época, dentro de una obra referida a la astronomía (***Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*** (Teoría del movimiento de los cuerpos celestes que giran alrededor del Sol con secciones cónicas). Desde entonces, las aplicaciones de su método de estimación han seguido extendiéndose a todas las ciencias, siendo unas de las más abundantes las de la Econometría.

Fernando Antoñanzas Villar Roberto Rodríguez Ibeas

Universidad de La Rioja, Logroño, 2007

LISTA DE ABREVIATURAS

ECM	Error Cuadrático Medio
ELIO	Estimador Lineal Insesgado Óptimo
MCO	Mínimos Cuadrados Ordinarios
MRLG	Modelo de Regresión Lineal General
MRLS	Modelo de Regresión Lineal Simple
STC	Suma Total de Cuadrados
SEC	Suma Explicada de Cuadrados
SCR	Suma de los Cuadrados de los Residuos
STCR	Suma Total de Cuadrados del modelo Restringido
SECR	Suma Explicada de Cuadrados del modelo Restringido
SCRR	Suma de los Cuadrados de los Residuos del modelo Restringido

ENUNCIADOS DE CUESTIONES TEÓRICAS

1- EL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas

1. En el Modelo de Regresión Lineal Simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,...,n$, el estimador mínimo-cuadrático del parámetro β_1 es una variable aleatoria ya que depende de los valores muestrales de la variable independiente.

2. La distribución de probabilidad del estimador mínimo-cuadrático del parámetro β_1 está centrada en β_1.

3. Bajo el supuesto de normalidad de las perturbaciones, los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros β son insesgados, aunque no son eficientes ya que, según el teorema de Gauss-Markov, sólo los estimadores mínimo-cuadráticos son eficientes.

4. El estimador máximo-verosímil de la varianza de las perturbaciones es sesgado pero asintóticamente insesgado.

5. En el Modelo de Regresión Lineal Simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1,2,...,n$, el estimador mínimo-cuadrático del parámetro β_0 es insesgado.

6. En el Modelo de Regresión Lineal Simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1,2,...,n$, se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 0$ al nivel de significación α si el intervalo de confianza $\left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$ contiene el valor 0.

7. En el Modelo de Regresión Lineal Simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,...,n$, para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 0$ sólo se puede utilizar un estadístico de contraste que se distribuye como una F de Snedecor.

8. El estadístico de contraste que se utiliza para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 0$ depende del coeficiente de determinación, ya que éste nos indica la bondad del ajuste de la línea de regresión.

9. En el Modelo de Regresión Lineal Simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1,2,...,n$, el ajuste de la línea de regresión de Y sobre X pasa por el punto de medias muestrales $(\overline{Y}, \overline{X})$.

10. Los parámetros desconocidos del modelo de regresión lineal simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ se estiman seleccionando los valores de β_0 y β_1 que hacen que la suma de los residuos sea igual a cero. Estos valores se denominan estimaciones mínimo-cuadráticas.

11. En el modelo de regresión lineal simple, la línea de regresión poblacional se obtiene a partir de las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo y expresa la relación entre los valores ajustados de la variable dependiente y la variable independiente.

12. En el modelo de regresión lineal simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,..,n$, las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo se obtienen a partir de las ecuaciones normales. Dichas ecuaciones implican que los residuos mínimo- cuadráticos tienen covarianza muestral nula con la variable dependiente.

13. Cuando en el modelo de regresión lineal simple se predice el valor de la variable dependiente se comete un error de predicción, el cual es debido al error muestral. Dicho error de predicción es una variable aleatoria cuya media es cero. Su varianza es más pequeña cuanto menor sea el tamaño muestral y cuanto mayor sea la dispersión de la variable explicativa en la muestra.

14. En el modelo de regresión lineal simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,..,n$, las variables $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ son independientes e idénticamente distribuidas.

15. En el modelo de regresión lineal simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,..,n$, para contrastar la hipótesis de que no hay relación entre la variable independiente y la variable dependiente se puede utilizar el estadístico de contraste $\dfrac{STC}{SCR/n-2}$, donde STC denota la suma total de cuadrados de la variable Y y SCR la suma de los cuadrados de los residuos. Dicho estadístico se distribuye como una t de Student con $n-2$ grados de libertad.

16. En el modelo de regresión simple, los residuos tienen covarianza muestral nula con la variable independiente y con los valores ajustados de la variable dependiente.

2- EL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL GENERAL

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas.

1. En el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$, $i = 1,2,...n$, para contrastar la hipótesis $\beta_1 = \beta_2$ y $\beta_3 = 1$ se utiliza un estadístico de contraste que sigue una distribución t de Student.

2. En el Modelo de Regresión Lineal General $Y = X\beta + \varepsilon$ se cumple $X'e = 0$, donde e es el vector $(n \times 1)$ de residuos. Por lo tanto, la suma de los residuos es cero. Además, existe correlación muestral nula entre los residuos y las variables explicativas del modelo.

3. El coeficiente de determinación corregido o ajustado $\overline{R}^2$ no puede ser negativo.

4. El coeficiente de determinación corregido o ajustado $\overline{R}^2$ siempre es menor que el coeficiente de determinación R^2. Sin embargo, cuando se incluye en la ecuación del modelo una variable explicativa adicional que está muy correlacionada con la variable dependiente, el coeficiente $\overline{R}^2$ es mayor que el coeficiente R^2.

5. En el Modelo de Regresión Lineal General $Y = X\beta + \varepsilon$ con n observaciones y k variables explicativas, el número de filas de la matriz X es el número de parámetros del modelo. La primera fila de X está formada por unos. Por consiguiente, cada elemento de la primera fila de la matriz $X'X$ recoge la suma de los valores de cada variable explicativa.

6. En el Modelo de Regresión Lineal General se supone que $E\varepsilon\varepsilon' = \sigma_\varepsilon^2 I_n$, donde E denota el operador esperanza matemática, ε es el vector $n \times 1$ de perturbaciones aleatorias y I_n es la matriz identidad de orden n. Dicho supuesto significa que las perturbaciones aleatorias están idénticamente distribuidas ya que su varianza es la misma.

7. Cuando se estima un modelo de regresión lineal sujeto a un conjunto de restricciones lineales, la suma de los cuadrados de los residuos del modelo estimado siempre es más pequeña que la suma de los cuadrados de los residuos del modelo no restringido. Esto se debe a que los estimadores mínimo-cuadráticos restringidos cumplen las restricciones y por lo tanto, las variables explicativas del modelo restringido explican, conjuntamente, mejor el comportamiento de la variable dependiente.

8. Un investigador, interesado en analizar la relación entre los beneficios agregados de las empresas del sector de electrodomésticos Y y sus gastos en publicidad X durante los últimos 20 años, ha postulado un modelo de regresión lineal simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$. Sospechando que ha habido un cambio estructural (el intercepto y el coeficiente del regresor cambian) en los últimos 12 años, realiza el contraste de Chow para un nivel de significación del 5 %.

Los resultados que obtiene para la suma de cuadrados de los residuos del modelo restringido y no restringido son, respectivamente, 38 y 26. A la vista de estos resultados, concluye que no ha habido cambio estructural.

9. Bajo el supuesto de normalidad de las perturbaciones aleatorias, el estimador de máxima-verosimilitud de la varianza de las perturbaciones viene dado por $\frac{e'e}{n-k-1}$, donde k es el número de variables explicativas incluidas en la ecuación del modelo. Dicho estimador es insesgado, ya que los estimadores-máximo verosímiles son siempre insesgados.

10. En el modelo de regresión lineal general $Y = X\beta + \varepsilon$, la matriz de las variables explicativas debe tener rango completo por columnas. En caso contrario, no se podrían obtener las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo.

3- AUTOCORRELACIÓN

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas.

1. Las estimaciones de un modelo lineal general en presencia de perturbaciones autocorrelacionadas son inconsistentes.

2. La predicción en el MLG en presencia de autocorrelación positiva de segundo orden difiere en su formulación de la predicción en ausencia de dicha autocorrelación.

3. La estimación mediante el método de Cochrane-Orcutt no tiene un carácter exacto, sino que se basa en diferentes supuestos simplificadores de la regla general de mínimos cuadrados generalizados.

4. En presencia de autocorrelación de las perturbaciones, la elección del tamaño de la muestra tiene consecuencias importantes en la varianza de los estimadores.

5. En modelos de sección cruzada, la presencia de autocorrelación es imposible, por lo que la matriz de varianzas y covarianzas siempre será diagonal.

6. La zona de indeterminación de la prueba de Durbin-Watson es debida a la presencia de autocorrelación de órdenes superiores a la unidad.

7. La autocorrelación de órdenes superiores a uno en el modelo lineal general obedece a que la estructura de retardos de las variables no ha sido diseñada adecuadamente.

8. El método de Cochrane-Orcutt se basa en los residuos de un modelo estimado por MCO para resolver el problema de la autocorrelación.

9. La autocorrelación es una característica propia de los modelos de series temporales.

10. La presencia de autocorrelación en un modelo lleva a que los estimadores dejen de ser eficientes.

11. La autocorrelación de las perturbaciones puede tener su origen en la existencia de más variables endógenas en el modelo uniecuacional.

12. El problema que introduce el hecho de que la $E(\varepsilon\varepsilon')$ sea distinta de $\sigma^2 I$ es que para n observaciones de la variable dependiente e independientes hay $0{,}5(n+1)n^2$ elementos distintos de la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}$, lo cual hace inviable la estimación mínimo-cuadrática.

13. La transformación mediante la matriz P del modelo para evitar los problemas de la autocorrelación puede inducir colinealidad.

4- HETEROSCEDASTICIDAD

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas.

1. La presencia de heteroscedasticidad puede deberse a la omisión de variables relevantes en el modelo.

2. La heteroscedasticidad en el modelo afecta a los estimadores porque los convierte en sesgados e inconsistentes.

3. Las pruebas de heteroscedasticidad utilizan contrastes basados en la distribución Ji-cuadrado.

4. A partir del contraste de Glesjer sólo se tiene una idea aproximada de la naturaleza del problema del incumplimiento de una hipótesis básica del modelo, pero es preciso completar los resultados del contraste con los procedentes del de Durbin-Watson para obtener una mayor seguridad acerca de cómo especificar el modelo.

5. El contraste de Glesjer tiene el inconveniente de que necesita un supuesto *a priori* acerca de cuál es la variable influyente en la heteroscedasticidad del modelo.

6. El empleo de datos de sección cruzada frecuentemente genera problemas de heteroscedasticidad, cuya solución pasa por partir del modelo para agrupaciones de observaciones.

5- VARIABLES FICTICIAS

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas.

1. La presencia de variables irrelevantes en el modelo genera estimadores de valor esperado igual a cero para los parámetros que acompañan a dichas variables.

2. En el caso de que tanto la variable dependiente como la independiente sean medidas con error, el estimador MCO subestima al verdadero valor del parámetro.

3. La omisión de variables relevantes en el modelo genera aumentos en la varianza de los estimadores cuando tales variables omitidas están correlacionadas con las incluidas.

4. La inclusión de variables irrelevantes en el modelo induce multicolinealidad.

5. La contrastación de un cambio estructural puede efectuarse con los métodos propuestos por Chow o, alternativamente, mediante el diseño de un modelo que contenga variables ficticias.

6. La inclusión de variables irrelevantes en el modelo induce heteroscedasticidad.

7. El análisis de los residuos de un modelo lineal general facilita el diseño de las variables ficticias más adecuadas.

8. La autocorrelación puede eliminarse mediante la introducción de variables ficticias adecuadas.

9. La introducción de variables ficticias en un modelo está condicionada por la existencia de fenómenos anómalos que influyen en la variable endógena.

10. Las variables ficticias contribuyen a reducir la varianza residual, pero pueden inducir heteroscedasticidad y multicolinealidad.

6- MULTICOLINEALIDAD

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas.

1. Cuando ninguna de las estimaciones de los coeficientes de un modelo lineal general es estadísticamente significativa, se debe exclusivamente a la presencia de multicolinealidad.

2. La detección de multicolinealidad se basa fundamentalmente en el cálculo de la varianza de los estimadores.

3. Los métodos estadísticos para estudiar el problema de la multicolinealidad de los regresores han de complementarse con el conocimiento del sentido económico de dichos regresores.

4. La prueba de Ridge sirve para detectar la presencia de alta varianza en los estimadores.

5. La transformación del modelo que tenga multicolinealidad mediante tasas de variación es una solución al problema.

7- REGRESORES ESTOCÁSTICOS

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas.

1. La presencia de regresores estocásticos en el modelo invalida las propiedades ELIO de la regresión por MCO.

2. La existencia de regresores estocásticos puede venir causada por una incorrecta especificación del modelo que omite variables.

3. La inclusión de la variable renta de los consumidores como variable exógena en un modelo con datos de sección cruzada puede afectar a los estimadores haciéndolos sesgados e inconsistentes.

4. El análisis de los residuos es fundamental en la determinación de los regresores estocásticos.

5. Un regresor estocástico provoca estimadores ineficientes.

6. Cuando una variable exógena es dicotómica puede captar con más facilidad la presencia de regresores estocásticos.

7. Cuando la variable endógena está retardada, la correlación con la perturbación aleatoria impide aplicar el procedimiento de mínimos cuadrados ordinarios.

8. Los regresores estocásticos debidos a la presencia de errores en las variables inducen heteroscedasticidad en las perturbaciones y, por tanto, los estimadores de los parámetros no tendrán mínima varianza.

9. La estimación mediante variables instrumentales es simple y ayuda a resolver el problema de las variables omitidas de un modelo uniecuacional.

8- MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas.

1. El diseño de modelos econométricos necesita el conocimiento previo de cuáles variables son endógenas y cuáles exógenas.

2. Los modelos de ecuaciones simultáneas facilitan la estimación de parámetros en el caso de que las variables exógenas estén interrelacionadas.

3. La identificación de las ecuaciones de los modelos de ecuaciones simultáneas ha de conjugar los criterios económicos con los puramente algebraicos.

4. La estimación mediante mínimos cuadrados indirectos coincide con la aplicación de MCO en la forma reducida.

5. La solución de mínimos cuadrados bietápicos no garantiza la insesgadez de los estimadores.

6. En los modelos de ecuaciones simultáneas, la estimación de una ecuación de la forma reducida mediante mínimos cuadrados ordinarios genera estimaciones consistentes, por lo que siempre es posible el cálculo de los coeficientes de la forma estructural.

7. La solución mediante mínimos cuadrados bietápicos es una solución de variables instrumentales al problema de la inconsistencia de estimar mediante mínimos cuadrados ordinarios una ecuación estructural cualquiera.

8. La identificación de los modelos de ecuaciones simultáneas persigue encontrar una solución única al valor del estimador.

9. Cuando un regresor puede estar influido por la variable dependiente, los estimadores son inconsistentes y es preciso buscar una solución distinta a la mínimo-cuadrática ordinaria para lograr resultados fiables.

10. Los estimadores MCO de la forma reducida en un modelo de ecuaciones simultáneas son insesgadas e inconsistentes.

9- MISCELÁNEA

Indique si los siguientes enunciados son verdaderos, falsos o dudosos, justificando las respuestas.

1. Los estimadores mediante el procedimiento de Hildreth-Lu facilitan el cálculo cuando existe un regresor estocástico.

2. La omisión de variables relevantes ocasiona heteroscedasticidad en las perturbaciones.

3. La sesgadez de los estimadores se produce en los siguientes casos: modelos heteroscedásticos, modelos con errores en la variable dependiente, modelo con autocorrelación.

4. La omisión de una variable exógena relevante hace que los estimadores del modelo sean inconsistentes.

5. La inclusión de variables ficticias en un modelo puede inducir heteroscedasticidad.

6. El incumplimiento de las hipótesis básicas del modelo lineal general lleva a una reducción en el coeficiente de determinación del modelo estimado.

7. La introducción de variables ficticias en un modelo econométrico es incompatible con la existencia de varias ecuaciones a causa de los problemas de identificación.

8. La heteroscedasticidad puede influir en los regresores de modo que tengan el carácter de estocásticos.

9. El diseño de modelos econométricos necesita el conocimiento previo de cuáles variables son endógenas y cuáles exógenas.

10. La propiedad de la consistencia se hace especialmente relevante cuando los estimadores son sesgados en pequeñas muestras.

ENUNCIADOS DE EJERCICIOS NUMÉRICOS

A- EL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

1) Un investigador ha estimado un modelo de regresión lineal simple con una muestra de 100 observaciones y ha obtenido que $\hat{Y}_i = 3{,}2 + 2X_i$, $i = 1,2,...,100$, siendo el coeficiente de determinación $0{,}80$. Además, se sabe que $\sum X_i^2 = 164$ y $\overline{X} = 1{,}2$. ¿Le parecen coherentes estos resultados si $\sum e_i^2 = 10$?

2) La línea de regresión estimada por mínimos cuadrados a partir de 22 observaciones viene dada por: $Y_i = 10 + 5\,X_i + e_i$, siendo el coeficiente de determinación $R^2 = 0{,}8$. Realice el contraste de la existencia de relación entre la variable X e Y utilizando el contraste de la t de Student y el contraste de la F de Snedecor. Utilice un nivel de significación de 5 % para ambos contrastes. (Calcule en ambos casos el estadístico de contraste)

3) La Cámara de Comercio de La Rioja está interesada en analizar para el sector del calzado la relación entre el valor de la producción X y el de las exportaciones Y, estando ambas variables medidas en miles de euros. Para ello, se formula el siguiente modelo: $Y_i = \beta_0 + \beta_1\, X_i + \varepsilon_i$. Se dispone de la siguiente información correspondiente a los últimos 5 años:

$$\Sigma X_i = 2.240 \qquad \Sigma\, Y_i = 440$$

$$\Sigma\, X_i Y_i = 198.360 \qquad \Sigma\, x_i^{\,2} = 6.880 \quad \Sigma\, y_i^{\,2} = 248$$

donde las letras minúsculas indican que las variables están medidas en desviaciones con respecto a sus medias muestrales.

a) Con una confianza del 95 %, ¿entre qué límites se encontrará la pendiente de la línea de regresión?

b) Construya un intervalo de confianza para la varianza del término de perturbación aleatoria. Utilice un nivel de confianza del 95 %.

c) ¿Cuál es la bondad del ajuste? ¿Considera que el nivel de producción es una variable significativa en la explicación del nivel de exportaciones?

d) Si una mejora en la productividad hace que el nivel de producción sea el año próximo 540 miles de euros, ¿cuál será el nivel esperado de exportaciones? Construya un intervalo de confianza para esta predicción. Utilice un nivel de confianza del 95 %.

4) Se tienen datos sobre el precio X_i y la cantidad de naranjas Y_i vendidas en una tienda durante 12 días. Se postula la función de demanda $Y_i = \beta_0 + \beta_1\, X_i + \varepsilon_i$. Estimar los coeficientes del modelo por el método mínimo-cuadrático sabiendo que:

$$\overline{X} = 70 \qquad \Sigma x_i y_i = -3550$$

$$\overline{Y} = 100 \quad \Sigma x_i^2 = 2250$$

Estime la elasticidad de la demanda en el punto del precio medio.

5) Una compañía aérea dispone de la siguiente información sobre horas de vuelo (X) y consumo de combustible en miles de litros (Y) que ha obtenido en 24 trayectos distintos:

$$\sum Y_i = 219{,}72 \qquad \sum X_i = 36 \qquad \sum X_i^2 = 59$$

$$\sum X_i Y_i = 349{,}58 \qquad \sum Y_i^2 = 2100$$

y considera el siguiente modelo lineal: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$. Se pide:

a) Las estimaciones mínimo-cuadráticas de β_0 y β_1.

b) La descomposición de la suma total de cuadrados: STC, SEC y SCR.

c) El coeficiente de determinación y la estimación de la varianza de las perturbaciones.

d) ¿Considera que la variable número de horas es significativa dado que el valor crítico de la distribución t de Student es $t_{22,0,025} = 2{,}074$?

e) ¿Entre qué límites estaría el consumo para un vuelo de una hora con un nivel de confianza del 95 %?

6) Un investigador dispone de la siguiente información sobre los precios X_i y las cantidades Y_i de manzanas vendidas en un supermercado durante 12 días consecutivos:

$$\sum x_i y_i = -3550 \qquad \sum Y_i^2 = 126.300 \qquad \overline{Y} = 100$$

a) El investigador postula que la función de demanda es de la forma $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$. Si al estimar la función obtiene que $\hat{\beta}_0 = 210{,}6$ y que el coeficiente de determinación es 0,89, ¿cuál es el precio medio de las manzanas en la muestra utilizada?

b) Encuentre un intervalo de confianza para la pendiente de la demanda. Utilice un nivel de confianza del 95 %.

c) La teoría de la demanda excluye los valores positivos para una función de demanda. Teniendo en cuenta esto, ¿es significativa la variable precio? Utilice un nivel de significación del 5 %.

d) ¿Qué cantidad demandada predice el modelo para un precio de 110? Indique, con una confianza del 95 %, entre que valores estará la verdadera cantidad demandada.

7) Para el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ se ha tomado una muestra de 15 observaciones obteniéndose la siguiente información:

$$\sum X_i = 75 \qquad \sum Y_i = 3.000 \qquad \sum X_i Y_i = 27.000$$
$$\sum X_i^2 = 975 \qquad \sum Y_i^2 = 900.000$$

a) Encuentre las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo. ¿Cuál es la bondad del ajuste?

b) Suponga que se obtiene una observación adicional de la variable X. Sea esta observación $X_p = 10$. Encuentre un intervalo de predicción para el valor de la variable dependiente para un nivel de confianza del 95 %.

c) Realice el contraste de la hipótesis $H_0 : \beta_1 = 25$. Utilice un nivel de significación del 5 %.

8) Considere el siguiente modelo $Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$ para el que satisfacen los supuestos del modelo de regresión lineal simple. Se proponen dos estimadores: $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$ y $\hat{\beta}_2 = \dfrac{\overline{Y}}{\overline{X}}$. Muestre que los dos estimadores son insesgados. Derive la varianza de cada estimador y determine cuál tiene varianza menor.

9) Un analista ha estimado el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ con la siguiente información muestral:

$$\sum x_i y_i = 15 \qquad \sum x_i^2 = 10 \qquad \overline{Y} = 8 \qquad \overline{X} = 4$$

y ha obtenido que la estimación del parámetro β_0 es 3. ¿Le parece coherente este resultado? Razone la respuesta.

10) Se ha estimado el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1,..,n$, a partir de la siguiente información:

$$n = 10 \qquad \sum x_i^2 = 576 \qquad \sum x_i y_i = 956$$
$$\sum y_i^2 = 1.634 \qquad \overline{Y} = 57 \qquad \overline{X} = 18$$

a) Encuentre el coeficiente de determinación.

b) Contraste la significatividad del parámetro β_1 usando el estadístico F. Utilice un nivel de significación del 5 %.

c) Encuentre la varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$.

d) Realice el contraste del apartado b) utilizando el estadístico t. Use un nivel de significación del 5 %.

B- EL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL GENERAL

1) Dado el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$ de la función de demanda de un bien, donde X_1 representa la renta disponible y X_2 el precio relativo del bien respecto al índice general de precios al consumo, se tiene la siguiente información muestral (las letras minúsculas denotan las variables expresadas en desviaciones con respecto a la media):

$$n = 13 \qquad \begin{array}{lll} \sum x_{1i}^2 = 100.000 & \sum x_{2i}^2 = 850 & \sum y_i^2 = 670 \\ \sum x_{1i} x_{2i} = 9.000 & \sum x_{1i} y_i = 8.000 & \sum x_{2i} y_i = 700 \\ \overline{Y} = 54 & \overline{X}_1 = 300 & \overline{X}_2 = 30 \end{array}$$

a) Encuentre las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo, así como la estimación de la varianza de la perturbación aleatoria.

b) Un investigador afirma que la renta disponible no debería incluirse como regresor en la ecuación del modelo. ¿Está de acuerdo con esta afirmación?

c) ¿Es el modelo globalmente significativo?

d) De acuerdo con la teoría económica, las funciones de demanda son homogéneas de grado cero. Por consiguiente, si la renta disponible y el precio aumentan en la misma proporción no se produce ningún cambio en la cantidad demandada. ¿Está de acuerdo con lo que predice la teoría económica?

2) Se postula el modelo lineal de dos variables $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ y se obtienen a partir de una muestra de 20 observaciones en un área urbana y otra de 10 observaciones de un área rural, los datos siguientes:

Área urbana $\quad X'X = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix} \quad X'Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \quad Y'Y = 30$

Área rural $\quad X'X = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \quad X'Y = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \quad Y'Y = 18$

Se quiere verificar la hipótesis de que tanto en el área urbana como en la rural se mantiene la relación postulada.

a) Estime el modelo no restringido (los parámetros de la relación pueden ser distintos en las dos áreas) y encuentre la suma de los cuadrados de los residuos.

b) Estime el modelo restringido (los parámetros no cambian en las dos áreas) y encuentre la suma de los cuadrados de los residuos.

c) Realice el contraste de la no existencia de cambio estructural.

3) Dado el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, donde Y representa el precio en euros de un bien, X_1 el coste en euros de las materias primas usadas en su producción y X_2 el coste en euros del input trabajo, se tiene la siguiente información muestral (las letras minúsculas denotan las variables expresadas en desviaciones con respecto a la media):

$$n = 21 \qquad \sum x_{1i}^2 = 10 \qquad \sum x_{2i}^2 = 5 \qquad \sum y_i^2 = 2000$$
$$\sum x_{1i} x_{2i} = 5 \qquad \sum x_{1i} y_i = 100 \qquad \sum x_{2i} y_i = 90$$

Además, se sabe que las medias muestrales son $\overline{Y} = 40$, $\overline{X}_1 = 3$ y $\overline{X}_2 = 2$.

a) Encuentre las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo.

b) ¿Cuál es la suma de los cuadrados de los residuos?

c) ¿Es el modelo globalmente significativo?

d) Un investigador afirma que un aumento de un euro en ambos costes de producción aumenta el precio del producto en 15 euros. ¿Está de acuerdo con esa afirmación?

4) Dado el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, se tiene la siguiente información muestral:

$$X'X = \begin{bmatrix} 33 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 \\ 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \qquad X'Y = \begin{bmatrix} 132 \\ 24 \\ 92 \end{bmatrix} \qquad \sum \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 150$$

a) ¿Se debería incluir X_1 cómo variable explicativa en el modelo?

b) Responda a la pregunta anterior utilizando el modelo restringido (imponiendo *a priori* la hipótesis adecuada) y examinando la diferencia en las sumas de los cuadrados de los residuos del modelo restringido y no restringido.

5) Un investigador, interesado en estimar una función de producción Cobb-Douglas para la economía española, postula la siguiente relación $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, donde Y_i denota el logaritmo de la producción en el año i-ésimo, X_{1i} el logaritmo del factor capital en el año i-ésimo y X_{2i} el logaritmo del factor trabajo en el año i-ésimo. Para la estimación del modelo, recoge la siguiente información muestral durante 23 años (la información viene medida en desviaciones con respecto a las medias):

$$\sum x_{1i}^2 = 12 \qquad \sum x_{2i}^2 = 12 \qquad \sum x_{1i} x_{2i} = 8 \qquad \overline{X}_1 = 6 \quad \overline{X}_2 = 4$$
$$\sum x_{1i} y_i = 10 \qquad \sum x_{2i} y_i = 8 \qquad \sum y_i^2 = 10 \qquad \overline{Y} = 10$$

a) Encuentre las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros β_1 y β_2.

b) Determine las varianzas estimadas de los estimadores mínimo-cuadráticos de los parámetros β_1 y β_2.

c) ¿Es el modelo globalmente significativo?

d) El investigador considera que puede imponer *a priori* la hipótesis de que existen rendimientos constantes a escala en la función de producción de la economía española. En ese caso, ¿cuál sería la estimación restringida del parámetro β_1 ?

e) Determine la suma de los cuadrados de los residuos del modelo restringido estimado en el apartado anterior.

f) Verifique la hipótesis del apartado d) utilizando la suma de cuadrados de residuos del modelo restringido y no restringido.

g) Verifique la hipótesis del apartado d) sin utilizar el modelo restringido.

6) Un investigador dispone de la siguiente información sobre consumo agregado (Y) y renta nacional (X) en miles de millones de euros para una determinada economía durante dos periodos de tiempo:

	1955-1974	1975-2004	1955-2004
n	20	30	50
$\sum x_i^2$	80	100	180
$\sum x_i y_i$	60	70	130
$\sum y_i^2$	50	60	158

Se supone que la relación entre las dos variables es lineal: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$. El investigador afirma que no ha habido cambio estructural (los valores del intercepto y de la pendiente son los mismos para los dos periodos). ¿Está de acuerdo con esta afirmación? Razone su respuesta.

7) Considere el modelo de regresión, expresado en forma de desviaciones, $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{21} + \varepsilon_i$ con datos muestrales:

$$\sum x_{1i}^2 = 30 \quad \sum x_{2i}^2 = 4 \quad \sum x_{1i} x_{2i} = 10$$
$$\sum x_{1i} y_i = 60 \quad \sum x_{2i} y_i = 22 \quad \sum y_i^2 = 168 \quad n = 45$$

a) ¿Considera que la variable X_2 es significativa?

b) ¿Considera que el modelo es globalmente significativo?

c) Contraste la hipótesis $2\beta_1 = \beta_2$.

8) Un investigador, al estimar el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, $i = 1,2,....,n$ ha obtenido que $R^2 = 0{,}80$ y $\overline{R}^2 = 0{,}76$. Al contrastar la significatividad individual de la variable X_1, decide no rechazar la hipótesis nula. Por consiguiente, estima el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$ y obtiene que $R^2 = 0{,}82$ y $\overline{R}^2 = 0{,}77$. ¿Le parecen coherentes estos resultados? Razone la respuesta.

9) Un investigador, interesado en analizar la demanda agregada de libros en la Comunidad de la Rioja, postula la siguiente relación $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, donde Y_i denota la cantidad de libros vendidos (en miles) en el mes i-ésimo, X_{1i} el precio medio de un libro (en euros) en el mes i-ésimo y X_{2i} la renta media disponible (en miles de euros) en el mes i-ésimo en la Comunidad de La Rioja. Para la estimación del modelo, recoge la siguiente información muestral durante 23 meses (la información viene medida en desviaciones con respecto a las medias):

$$\sum x_{1i}^2 = 30 \qquad \sum x_{2i}^2 = 100 \qquad \sum x_{1i} x_{2i} = 50$$
$$\sum x_{1i} y_i = 20 \qquad \sum x_{2i} y_i = 45 \qquad \overline{X}_1 = 6 \qquad \overline{X}_2 = 10$$

a) Encuentre las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a los regresores.

b) Sea $Y'Y = 600$ e $\overline{Y} = 5$. Determine la bondad del ajuste. ¿Cuál es el coeficiente de determinación ajustado o corregido?

c) ¿Debería incluirse la variable renta en la ecuación del modelo?

d) Verifique la hipótesis que el efecto del precio y de la renta en la variable dependiente es de igual magnitud, pero de signo contrario.

e) Suponga que impone *a priori* en el modelo la restricción de la hipótesis del apartado anterior. Encuentre la estimación mínimo-cuadrática restringida de β_2.

f) Verifique la hipótesis del apartado d) utilizando la suma de cuadrados de residuos del modelo restringido y no restringido.

10) Considere el modelo de función de producción $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, donde Y es el logartitmo del nivel de producción, X_1 es el logaritmo del input trabajo y X_2 es el logaritmo del input capital. Se ha obtenido la siguiente información a partir de una muestra aleatoria de 23 empresas:

$$x'x = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \qquad x'y = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad y'y = 10$$

donde toda la información viene medida en desviaciones con respecto a las medias muestrales. Contraste para un nivel de significación del 5 % la hipótesis conjunta

$$H_0 : \beta_1 = 1 \;\; y \;\; \beta_2 = 0$$
$$H_A : H_0 \; no \; es \; cierta$$

¿Cambia su respuesta si el nivel de significación es del 1 %?

11) Suponga que el verdadero modelo de regresión es $Y = X_1\beta_1 + \varepsilon$, pero que un investigador utiliza la siguiente especificación $Y = X^*\beta + \varepsilon$, donde la matriz $X^* = [X_1 \vdots X_2]$, siendo X_1 una matriz de orden $(n \times k)$, X_2 una matriz de orden $(n \times s)$ y $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ es un vector columna de orden $k + s$. Demuestre que el estimador $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{e'e}{n-k-s}$ es un estimador insesgado de la varianza de las perturbaciones.

12) Para el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, $i = 1,..,n$, donde Y es el logaritmo de la cantidad demandada de café, X_1 es el logaritmo del precio del café y X_2 es el logaritmo del precio del té, se tiene la siguiente información:

$$n = 13 \qquad \sum x_{1i}^2 = 4 \qquad \sum x_{2i}^2 = 10 \qquad \sum y_i^2 = 30 \qquad \sum x_{1i}x_{21} = 6$$

$$\sum x_{1i}y_i = 9 \qquad \sum x_{2i}y_i = 16 \qquad \overline{Y} = 4 \qquad \overline{X}_1 = 2 \qquad \overline{X}_2 = 1$$

a) Encuentre las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo.

b) ¿Es el modelo globalmente significativo?

c) ¿Está de acuerdo con la afirmación de que la elasticidad-precio de la demanda de café es –1,2?

d) Si se asume *a priori* que la elasticidad-precio de la demanda de café es $-1{,}2$, ¿cuál es la estimación restringida de la elasticidad-precio cruzada de la demanda de café?

13) Para el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, $i = 1,..,n$, donde Y es la demanda de D.O.C. Rioja (en miles de litros), X_1 es el precio medio del vino (en euros) y X_2 es el gasto en publicidad de las bodegas (en cientos de euros), se tiene la siguiente información (en desviaciones con respecto a la media):

$$\sum x_{1i}^2 = 60 \quad \sum x_{2i}^2 = 200 \quad \sum x_{1i}x_{2i} = 100 \quad \overline{X}_1 = 3 \quad \overline{X}_2 = 10$$
$$\sum x_{1i}y_i = 10 \quad \sum x_{2i}y_i = 40 \quad \sum y_i^2 = 20 \quad \overline{Y} = 5 \quad n = 8$$

a) Encuentre las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo.

b) Contraste la hipótesis conjunta $H_0 : \beta_1 = -1{,}2 \; y \; \beta_2 = 0{,}8$.

c) Si se asume *a priori* que $\beta_1 = -1{,}2$, ¿cuál es la estimación restringida del parámetro β_2?

d) Contraste la hipótesis $H_0 : \beta_1 = -1{,}2$ de dos maneras distintas: i) utilizando el modelo no restringido, y ii) utilizando el modelo restringido y no restringido. ¿Cuál es la relación entre los valores de los estadísticos de contraste encontrados en cada caso?

PROPUESTAS DE SOLUCIÓN PARA LAS CUESTIONES TEÓRICAS

CUESTIONES DEL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE (MRLS): SOLUCIONES PROPUESTAS

Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

MRLS 1- (F) Todo estimador es una variable aleatoria. La expresión matemática del estimador depende de los valores muestrales de las variables dependiente e independiente. En nuestro modelo, se asume que la variable independiente no es aleatoria. Por consiguiente, la afirmación que el estimador del parámetro β_1 es una variable aleatoria debido a su dependencia de los valores de X es falsa. El estimador $\hat{\beta}_1$ depende asimismo de los valores de la variable Y, que es aleatoria debido al carácter estocástico del modelo econométrico.

MRLS 2- (V) La distribución de probabilidad del estimador $\hat{\beta}_1$ esta centrada en β_1. Por consiguiente, el estimador $\hat{\beta}_1$ es insesgado. La esperanza matemática del estimador es el verdadero valor del parámetro: $E\hat{\beta}_1 = \beta_1$. El estimador $\hat{\beta}_1$ se puede expresar como:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum k_i Y_i$$

donde $x_i = X_i - \overline{X}$ y $k_i = \dfrac{x_i}{\sum x_i^2}$. Teniendo en cuenta la ecuación del modelo, se puede escribir:

$$\hat{\beta}_1 = \sum k_i Y_i = \sum k_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \beta_0 \sum k_i + \beta_1 \sum k_i X_i + \sum k_i \varepsilon_i \quad (1)$$

De la expresión de k_i se sigue:

$$\begin{aligned} \sum k_i &= \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right) = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} = 0 \\ \sum k_i X_i &= \sum \left(\frac{x_i X_i}{\sum x_i^2} \right) = \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Nótese que la suma de los valores de una variable X medida en desviaciones con respecto a su media muestral $\overline{X}$ es cero:

$$\sum x_i = \sum (X_i - \overline{X}) = \sum X_i - \sum \overline{X} = \sum X_i - N\overline{X} = \sum X_i - \sum X_i = 0$$

Además:

$$\sum x_i X_i = \sum x_i (x_i + \overline{X}) = \sum x_i^2 + \overline{X} \sum x_i = \sum x_i^2$$

Teniendo en cuenta (2), (1) se puede escribir como $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum k_i \varepsilon_i$, y tomando esperanzas matemáticas, se sigue:

$$E\hat{\beta}_1 = E\left(\beta_1 + \sum k_i \varepsilon_i\right) = E\beta_1 + E\left(\sum k_i \varepsilon_i\right) = \beta_1 + \sum E\left(k_i \varepsilon_i\right) = \beta_1 + \sum k_i E\varepsilon_i = \beta_1$$

ya que la esperanza matemática de la suma de variables aleatorias es la suma de las esperanzas, la esperanza matemática de una constante es la misma constante y la esperanza de cada perturbación aleatoria ε_i se supone que es cero para todo i.

Alternativamente:

$$E\hat{\beta}_1 = E\left(\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}\right) = E\left(\frac{\sum x_i \left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum x_i^2}\right) = E\left(\frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}\right) = E\left(\frac{\sum x_i \left(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i\right)}{\sum x_i^2}\right)$$
$$= \frac{\beta_0 \sum x_i}{\sum x_i^2} + \frac{\beta_1 \sum x_i X_i}{\sum x_i^2} + \frac{\sum (x_i E\varepsilon_i)}{\sum x_i^2} = \beta_1$$

ya que $\sum x_i X_i = \sum x_i^2$, $\sum x_i = 0$ y $E\varepsilon_i = 0 \ \ \forall i$.

MRLS 3- (D) Bajo el supuesto de normalidad de las perturbaciones, los estimadores máximo- verosímiles de los parámetros β coinciden con los estimadores mínimo-cuadráticos. Dado que los estimadores mínimo-cuadráticos son insesgados, se sigue que los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros β son insesgados. Según el teorema de Gauss-Markov, los estimadores mínimo-cuadráticos son los estimadores lineales insesgados más eficientes. Por consiguiente, los estimadores máximo-verosímiles son eficientes.

MRLS 4- (V) El estimador máximo-verosímil de la varianza de las perturbaciones es sesgado. Se puede demostrar que dicho estimador es $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,MV} = \frac{\sum e_i^2}{n}$, donde e_i denota los residuos mínimo-cuadráticos y n es el tamaño muestral. Tomando esperanzas matemáticas, se obtiene:

$$E\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,MV} = \frac{E\sum e_i^2}{n} = \frac{(N-2)\sigma_\varepsilon^2}{n} \neq \sigma_\varepsilon^2$$

Sin embargo, el estimador máximo-verosímil de la varianza de las perturbaciones es asintóticamente insesgado:

$$\lim_{n\to\infty} E\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,MV} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-2)\sigma_\varepsilon^2}{n}\right) = \sigma_\varepsilon^2$$

MRLS 5- (V) Se debe demostrar que la esperanza matemática del estimador $\hat{\beta}_0$ es el verdadero valor del parámetro β_0. La expresión para $\hat{\beta}_0$ se obtiene teniendo en cuenta que la recta de regresión muestral pasa por el punto de medias muestrales $(\overline{Y}, \overline{X})$: $\overline{Y} = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 \overline{X}$. Por consiguiente, $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$. Tomando esperanzas matemáticas en esta expresión, y teniendo en cuenta la ecuación del modelo, se puede escribir:

$$E\hat{\beta}_0 = E\left(\overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}\right) = E\overline{Y} - E\hat{\beta}_1 \overline{X} = E\left(\frac{\sum Y_i}{n}\right) - \overline{X}E\hat{\beta}_1 = \frac{E\left(\sum Y_i\right)}{n} - \overline{X}\beta_1$$

$$= \frac{\sum EY_i}{n} - \overline{X}\beta_1 = \frac{\sum E\left(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i\right)}{n} - \overline{X}\beta_1$$

$$= \frac{\sum E\beta_0}{n} + \frac{\sum E\left(\beta_1 X_i\right)}{n} + \frac{\sum E\varepsilon_i}{n} - \overline{X}\beta_1$$

$$= \frac{n\beta_0}{n} + \frac{\beta_1 \sum X_i}{n} - \overline{X}\beta_1 = \beta_0 + \overline{X}\beta_1 - \overline{X}\beta_1 = \beta_0$$

En el desarrollo anterior se ha tenido en cuenta que el estimador $\hat{\beta}_1$ es insesgado (Ver pregunta 2) y que $E\varepsilon_i = 0 \quad \forall i$.

MRLS 6- (F). Si cero pertenece a dicho intervalo, se sigue:

$$\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} < 0$$

$$\hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} > 0$$

Por consiguiente, $-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} < t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$, o lo que es lo mismo $\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| < t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$. Pero esto significa que el estadístico de contraste $\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ que se utiliza para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 0$ cae dentro de la región de no rechazo de la hipótesis nula.

MRLS 7- (D) Si se interpreta la pregunta en su sentido literal, se entendería que sólo hay un estadístico de contraste disponible para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 0$. La afirmación sería falsa, ya que además de un estadístico que sigue una distribución F de Snedecor, se puede utilizar un estadístico que se distribuye como una t de Student. Dicho estadístico viene dado por el cociente entre la estimación del parámetro β_1 y la desviación típica estimada del estimador $\hat{\beta}_1$. Sin embargo, dado que el estadístico de contraste que sigue una distribución F es el cuadrado del estadístico que sigue una distriubución t, se podría interpretar que, en realidad, solamente hay un estadístico de contraste.

MRLS 8- (V) El estadístico de contraste que sigue una distribución F de Snedecor con 1 grado de libertad en el numerador y $n-2$ grados de libertad en el denominador depende del coeficiente de determinación, y viene dado por la expresión:

$$\frac{R^2(n-2)}{(1-R^2)} \tag{3}$$

donde R^2 es el coeficiente de determinación. Alternativamente, dicho estadístico se puede escribir como:

$$\frac{SEC(n-2)}{SCR} \tag{4}$$

donde SEC denota la suma de cuadrados explicada por la regresión y SCR la suma de los cuadrados de los residuos. La hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 0$ se rechaza si el valor del estadístico de contraste es suficientemente grande (mayor que el valor crítico de la distribución $F_{1,n-2}^{\alpha}$, donde α es el nivel de significación del contraste). El valor del estadístico de contraste será elevado si el numerador de (3) es grande, o lo que es lo mismo, si el coeficiente de determinación es grande. Pero esto implica que la variable explicativa del modelo explica una parte importante de la variación de la variable dependiente, con lo que dicha variable debería formar parte de la ecuación del modelo. Por consiguiente, el parámetro que acompaña a la variable explicativa no puede ser igual a cero. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula.

Alternativamente, si el valor del estadístico de contraste es alto, de (4) se sigue que la suma de cuadrados explicada por la regresión es grande y que la suma de los cuadrados de los residuos es pequeña. Por tanto, la variable explicativa debe formar parte del modelo ya que explica el comportamiento de la variable dependiente.

El razonamiento contrario justificaría el no rechazo de la hipótesis nula.

MRLS 9- (V) Si la suma de los residuos es igual a cero, entonces la línea de regresión muestral pasa por el punto de medias muestrales. Los residuos e_i vienen dados por la diferencia entre los valores observados de la variable dependiente y los valores de la variable dependiente ajustados por la línea de regresión:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \tag{5}$$

donde $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$. Si se suman los residuos, de (5), se puede escribir:

$$\sum e_i = \sum (Y_i - \hat{Y}_i) = \sum Y_i - \sum (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i) = \sum Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum X_i \tag{6}$$

Si la suma de residuos es igual a cero, dividiendo (6) por n se obtiene:

$$0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \overline{X} \quad \Rightarrow \overline{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

MRLS 10- (F) Si se seleccionan los parámetros del modelo de forma que la suma de residuos sea igual a cero, tendríamos (ver pregunta 9):

$$\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X}$$

En otras palabras, se elegirían los valores de los parámetros que cumplen esta ecuación. Pero esto implica que existen infinitos pares de valores de los parámetros que satisfacen la ecuación. Por consiguiente, tendríamos infinitas líneas de regresión, es decir, infinitos valores para las estimaciones de los parámetros a partir de una muestra concreta de X y de Y y no tendríamos un criterio para elegir una de ellas.

MRLS 11- (F) La línea de regresión poblacional viene dada por:

$$E(Y|X) = \beta_0 + \beta_1 X$$

Su significado es el siguiente: la relación lineal entre las variables que postula el modelo se cumple en promedio. Esta línea nunca se conocerá ya que los verdaderos valores de los parámetros β_0 y β_1 son desconocidos. La línea de regresión muestral es la estimación de la línea de regresión poblacional, y viene dada por:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

donde $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros desconocidos del modelo. Ésta es la línea que se obtiene a partir de las estimaciones de los parámetros del modelo y expresa los valores ajustados de la variable dependiente como una función lineal de los valores de la variable independiente.

MRLS 12- (D) La primera parte de la afirmación es cierta mientras que su parte final es incorrecta. Las ecuaciones normales en el modelo de regresión lineal simple se derivan a partir de la minimización de la suma de los residuos al cuadrado:

$$Min \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

Las condiciones de primer orden de dicho problema constituyen las ecuaciones normales:

$$\sum Y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum X_i$$
$$\sum Y_i X_i = \beta_0 \sum X_i + \beta_1 \sum X_i^2$$

Los estimadores mínimo-cuadráticos de los parámetros del modelo son la solución a las dos ecuaciones normales. La primera implicación de las ecuaciones normales es que la suma de los residuos es igual a cero. Está implicación se deriva de la primera ecuación normal. La segunda implicación es que los residuos no están correlacionados con la variable explicativa: $\sum e_i X_i = 0$. Asimismo, se puede demostrar que los residuos y los valores ajustados de la variable dependiente están incorrelados (ver pregunta 16). Lo que no es cierto es que los residuos y la variable dependiente tengan correlación muestral nula.

MRLS 13- (D) La pregunta se ha calificado como dudosa ya que algunas afirmaciones son verdaderas y otras son falsas. Es cierto que cuando en el modelo de regresión lineal simple se predice el valor de la variable dependiente se comete un error de predicción, pero no es cierto que dicho error se deba sólo al error muestral, sino que es también debido al error inherente al mecanismo por el que se generan los valores de Y (tanto los valores muestrales como los extramuestrales). Nótese que la variable Y es aleatoria porque la relación postulada en el modelo depende de la perturbación aleatoria, mientra que la variable X se supone que es fija en el muestreo. Dado un valor X_p de la variable explicativa, la predicción puntual o por punto de Y, denotada por $\hat{Y}_p$, viene dada por:

$$\hat{Y}_p = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_p$$

El error de predicción e_p es la diferencia entre el valor real de la variable dependiente Y_p y el valor predicho:

$$e_p = Y_p - \hat{Y}_p = \left(Y_p - E(Y_p)\right) + \left(E(Y_p) - \hat{Y}_p\right) = \varepsilon_p + E(Y_p) - \hat{Y}_p$$

El primer sumando es la perturbación aleatoria que junto con la parte sistemática del modelo correspondiente a la observación X_p genera el valor observado de Y_p. Este componente del error de predicción no se puede reducir y es inherente al mecanismo de generación de los valores de la variable dependiente. El segundo sumando si se puede reducir si se estima el modelo con una muestra mayor. Nótese que el error de predicción es una variable aleatoria ya que depende de Y_p. Además, su media es igual a cero:

$$Ee_p = E\left(\varepsilon_p + E(Y_p) - \hat{Y}_p\right) = E\left(\varepsilon_p + \beta_0 + \beta_1 X_p - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_p\right) = 0$$

ya que la perturbación aleatoria ε_p se supone que tiene esperanza matemática nula y los estimadores mínimo-cuadráticos son insesgados. La varianza del error de predicción viene dada por:

$$\sigma_p^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_p - \overline{X}\right)^2}{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2} \right]$$

Es falso que la varianza del error de predicción sea más pequeña cuanto más pequeño sea el tamaño muestral. Sin embargo, es cierto que cuanto mayor sea la dispersión de la variable explicativa en la muestra más pequeña será la varianza del error de predicción. La dispersión de la variable explicativa viene recogida por el denominador del tercer sumando de la expresión anterior.

MRLS 14- (F) Dados los supuestos estocásticos del modelo, se sigue que las variables Y_i, $i = 1,2,...,N$ son independientes, aunque no idénticamente distribuidas.

$$EY_i = E\left(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i \qquad \forall i$$
$$\operatorname{cov}\left(Y_i, Y_j\right) = E\left[\left(Y_i - \overline{Y}\right)\left(Y_j - \overline{Y}\right)\right] = E\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = 0 \qquad \forall i \neq j$$
$$\operatorname{var}\left(Y_i\right) = E\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = E\varepsilon_i^2 = \operatorname{var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 \qquad \forall i$$

Además, las variables Y_i se distribuyen normalmente, ya que la perturbación aleatoria sigue una distribución normal. Las variables aleatorias distribuidas normalmente cuya covarianza es nula son estadísticamente independientes. Por consiguiente, las variables Y_i son independientes. Sin embargo, aunque todas ellas tienen la misma varianza, no están idénticamente distribuidas ya que tienen diferentes medias.

MRLS 15- (F) El numerador del estadístico de contraste no es SCT sino SCR. Además, el estadístico no sigue una distribución t de Student sino una distribución F de Snedecor con 1 grado de libertad en el numerador y $n-2$ grados de libertad en el denominador.

MRLS 16- (V)

$$Cov(X,e) = \frac{1}{n}\sum\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\left(e_i - \overline{e}\right)\right] \qquad \textit{Definición de covarianza muestral}$$

$$= \frac{1}{n}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)e_i \qquad \textit{Primera ecuación normal} \Rightarrow \textit{media de residuos es cero}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum X_i e_i - \overline{X}\sum e_i\right] = 0 \quad \textit{Segunda ecuacion normal} \Rightarrow \sum X_i e_i = 0$$

$$Cov\left(\hat{Y},e\right) = Cov\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X, e\right) = \hat{\beta}_1 Cov\left(X,e\right) = 0$$

CUESTIONES DEL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL GENERAL (MRLG): SOLUCIONES PROPUESTAS

Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

MRLG 1- (F) La hipótesis del enunciado es conjunta, y, por consiguiente, para realizar el contraste, no se puede utilizar un estadístico que se distribuye como una t de Student. Para contrastar una hipótesis conjunta $H_0 : R\beta = r$ se utiliza el siguiente estadístico de contraste:

$$\frac{\dfrac{\left(R\hat{\beta}-r\right)\left[R\left(X'X\right)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta}-r\right)}{q}}{\dfrac{e'e}{\left(n-k-1\right)}}$$

que se distribuye como una F de Snedecor con q grados de libertad en el numerador (número de hipótesis objeto de contrastación) y $n-k-1$ grados de libertad en el denominador. En la expresión del estadístico, q es el número de filas de la matriz R, k es el número de variables explicativas y $\hat{\beta}$ es el vector de estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros del modelo. En nuestro caso particular, la matriz R y el vector r vienen dados por:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que $R\beta = r \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 \; y \; \beta_3 = 1$, donde β es el vector de parámetros del modelo. Los grados de libertad de la distribución F de Snedecor son $\left(2, n-4\right)$. Para realizar el contraste de la hipótesis conjunta, se estima el modelo para obtener el vector de estimaciones mínimo-cuadráticas $\hat{\beta}$ y se calcula la suma de los cuadrados de los residuos $e'e$. Con esa información, se obtiene el valor del estadístico de contraste y se compara con el valor crítico de la distribución. La hipótesis nula se rechaza si el valor del estadístico está por encima del valor crítico.

MRLG 2- (V)

$$\begin{aligned} X'e &= X'\left(Y-\hat{Y}\right) && \textit{Definición de e} \\ &= X'Y - X'\hat{Y} = X'Y - X'X\hat{\beta} && \textit{Definición de vector de valores ajustados de Y} \\ &= X'Y - X'X\left(X'X\right)^{-1}X'Y = X'Y - X'Y = 0 && \textit{ya que } \hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1}X'Y \end{aligned}$$

Nótese que $X'e$ es un vector columna con $k+1$ filas. La primera fila es la suma de los residuos ya que la primera fila de la matriz X' contiene solamente unos. Por consiguiente, la suma de los residuos es igual a cero.

La fila j-ésima recogería la suma de los productos de cada variable explicativa con los residuos: $\sum_i X_{ji} e_i$, $j = 1,..,k$. De acuerdo con la demostración anterior, estos sumatorios serían igual a cero, lo que significa que las variables explicativas y los residuos están incorrelados.

MRLG 3- (F) El coeficiente de determinación corregido o ajustado por los grados de libertad viene definido por:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SCR}{n-k-1}}{\frac{STC}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}\left(1 - R^2\right) \qquad (1)$$

El coeficiente de determinación corregido sí puede ser negativo. Para que esto ocurra, el coeficiente de determinación R^2 tiene que ser suficientemente pequeño ($R^2 < \frac{k}{n-1}$). De (1), se sigue:

$$\overline{R}^2 < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{n-1}{n-k-1}\left(1 - R^2\right) \Leftrightarrow R^2 < 1 - \frac{n-k-1}{n-1} = \frac{k}{n-1}$$

Nótese que, si el coeficiente de determinación es cero, $\overline{R}^2 = -\frac{k}{n-k-1} < 0$. Por consiguiente, $\overline{R}^2 \in \left[-\frac{k}{n-k-1}, 0\right] \Leftrightarrow R^2 \in \left[0, \frac{k}{n-1}\right]$.

MRLG 4- (D) La primera parte de la afirmación es verdadera mientras que la segunda parte es falsa. De la definición del coeficiente de determinación corregido dada en (1) se sigue:

$$\overline{R}^2 - R^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}\left(1 - R^2\right) - R^2 = \frac{-k}{n-k-1} + \frac{R^2 k}{n-k-1} = \frac{k}{n-k-1}\left(R^2 - 1\right) \leq 0$$

Por consiguiente, el coeficiente de determinación corregido siempre va a ser menor que el coeficiente de determinación excepto cuando este último sea igual a uno. En ese caso, ambos coeficientes son iguales.

La segunda parte de la afirmación es falsa, ya que el coeficiente de determinación corregido nunca es mayor que el coeficiente de determinación.

MRLG 5 (F). En el modelo de regresión lineal general con n observaciones y k variables explicativas, la matriz X tiene n filas y $k+1$ columnas. La primera columna es una columna de unos (si se incluye en la ecuación del modelo un término independiente) y las restantes columnas recogen la información muestral de las variables explicativas.

La primera fila de la matriz $X'X$ tiene $k+1$ elementos. El primer elemento es el tamaño muestral. El resto de los elementos recogen la suma de los valores de cada variable explicativa:

$$n \quad \sum X_{1i} \quad \sum X_{2i} \quad \sum X_{3i} \quad ..... \quad \sum X_{ki}$$

MRLG 6- (F) El supuesto $E\varepsilon\varepsilon' = \sigma_\varepsilon^2 I_n$ significa que la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones del modelo es diagonal. Los elementos de la diagonal principal son todos iguales, lo que significa que las perturbaciones aleatorias ε_i tienen la misma varianza: $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 \ \forall i = 1,..,n$. Los elementos fuera de la diagonal principal son cero, lo que significa que las perturbaciones aleatorias están no correlacionadas entre sí: $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $\forall i \neq j, i = 1,...,n$.

MRLG 7- (F) Cuando se estima un modelo de regresión lineal sujeto a un conjunto de restricciones lineales, la suma de los cuadrados de los residuos del modelo estimado siempre es mayores que la suma de los cuadrados de los residuos del modelo no restringido. Dado que las estimaciones mínimo-cuadráticas deben cumplir las restricciones, se sigue que se está limitando el espacio paramétrico al que deben pertenecer las estimaciones. Como consecuencia de ello, los errores o residuos van a ser mayores que los que se obtendrían si se estima el modelo sin imponer ningún tipo de restricción en los valores que deben tomar los parámetros.

El hecho de que las estimaciones mínimo-cuadráticas cumplan las restricciones no significa que las variables explicativas expliquen mejor el comportamiento de la variable dependiente. Lo único que significa es que estamos exigiendo que las restricciones se cumplan.

MRLG 8- (F) La hipótesis de no existencia de cambio estructural (el intercepto y la pendiente de la línea de regresión no cambian) se contrasta utilizando el estadístico de contraste:

$$\frac{\dfrac{SCRR - SCR}{q}}{\dfrac{SCR}{n - 2(k+1)}}$$

donde $SCRR$ denota la suma de los cuadrados de los residuos del modelo restringido (se impone la hipótesis nula en el modelo original), SCR denota la suma de los cuadrados de residuos del modelo no restringido (se permite que el intercepto y la pendiente cambien en cada periodo), q es el número de restricciones en la hipótesis nula y k es el número de variables explicativas del modelo original. En nuestro caso particular, $q = 2$ y $k = 1$. Dicho estadístico de contraste se distribuye como una F de Snedecor con q grados de libertad en el numerador y $n - 2(k+1)$ en el denominador. Sustituyendo la información dada en la expresión del estadístico tendríamos:

$$\frac{\dfrac{38 - 26}{2}}{\dfrac{26}{20 - 4}} = 3{,}6923$$

El valor crítico de una distribución F de Snedecor con 2 grados de libertad en el numerador y 16 en el denominador para un nivel de significación del 5 % es 3,63. Como el valor del estadístico de contraste está por encima del valor crítico de la distribución, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que ha habido cambio estructural.

MRLG 9- (F) El estimador de máxima-verosimilitud de la varianza de las perturbaciones viene dado por $\frac{e'e}{n}$. El estimador $\frac{e'e}{n-k-1}$ es insesgado y, de hecho, esta formulación corresponde al estimador mínimo-cuadrático de la varianza de las perturbaciones. Los estimadores máximo-verosímiles no son siempre insesgados. De hecho, el estimador $\frac{e'e}{n}$ es sesgado.

MRLG 10- (V) La matriz X debe tener rango completo por columnas. El rango de la matriz X es $k+1$. Esto significa que las variables explicativas son linealmente independientes. Si esto no fuera así, y alguna o algunas de las variables explicativas fueran combinaciones lineales de otras, no se podrían obtener las estimaciones de los parámetros del modelo. El vector de estimaciones mínimo-cuadráticas es:

$$\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

Si el rango de la matriz X no fuera completo por columnas, la matriz $X'X$ sería singular (su determinante sería 0), y por consiguiente, no se podría calcular su matriz inversa, con lo que sería imposible determinar $\hat{\beta}$.

CUESTIONES DE AUTOCORRELACIÓN (AUT):
SOLUCIONES PROPUESTAS

Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

AUT 1- (F) La autocorrelación de las perturbaciones implica que el estimador por MCO mantiene las propiedades de linealidad e insesgadez, pero no así la de su optimalidad o varianza mínima (a esta propiedad se le llama también de eficiencia) dentro de la clase de estimadores lineales e insesgados. De esta suerte,

$$\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{MCO}\right) = E\left\{\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]'\right\} =$$

$$= E\left\{\left[\hat{\beta} - \beta\right]\left[\hat{\beta} - \beta\right]'\right\} = E\left\{\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]\right\} =$$

$$= (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \neq \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$$

Sin embargo, la propiedad de la consistencia se refiere a que el plim $\hat{\beta} = \beta$ o lo que es lo mismo, que el límite en probabilidad del estimador cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente, converge al verdadero valor del parámetro.
Para examinar esta propiedad habría que comprobar que

$$p\lim \hat{\beta} = p\lim(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon) = \beta + p\lim\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right) =$$

$$= \beta + p\lim\left[\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right)\right] = \beta$$

que se cumple en presencia de autocorrelación, dado que $p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right) = 0$, por ser X no estocástica.

AUT 2- (V) La predicción con perturbaciones cuyas autocovarianzas no sean nulas deja de aplicar la fórmula tradicional de $\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1}\hat{\beta}$ para incorporar la información contenida en los residuos, de manera que si, por ejemplo, se tratase de un modelo con autocorrelación de primer orden, la nueva fórmula del predictor sería $\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1}\hat{\beta} + F_1 e_n$, donde F_1 es el parámetro de la autocorrelación de primer orden y e_n los errores de ajuste del último periodo de las observaciones. Si el modelo presenta autocorrelación de segundo orden, puede interpretarse que las autocovarianzas de las perturbaciones contemporáneas (periodo i) están relacionadas con las de hace dos periodos (n-2). De esta forma, la fórmula del predictor pasaría a ser $\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1}\hat{\beta} + F_2 e_{n-1}$, donde F_2 es el parámetro de la autocorrelación de 2º orden y e_{n-1} el error de ajuste del penúltimo periodo de observaciones.

Otra interpretación válida de esta pregunta sería que la autocorrelación de orden 2 presupone también la de orden 1, de modo que $\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1}\hat{\beta} + F_1 e_i + F_2 e_{n-1}$. En la práctica, F_1 y F_2 son desconocidos y han de ser estimados por diferentes técnicas para obtener $\hat{Y}_{n+1}$.

AUT 3- (V) El procedimiento de Cochrane-Orcutt es un procedimiento iterativo que linealiza las derivadas parciales de primer orden no lineales de una expresión cuadrática

$$\sum e_i^2 = \min \sum \left[(Y_i - \rho Y_{i-1}) - \beta_0 (1-\rho) - \beta_1 (X_i - \rho \quad X_{i-1}) \right]^2$$

Esta linealización y la asignación arbitraria de un valor inicial pueden interpretarse como supuestos simplificadores de la regla general MCO. Además, la expresión cuadrática anterior procede de una simplificación de las transformaciones del modelo con autocorrelación de primer orden, mediante la matriz P^{-1}

de la forma $P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & -\rho & 1 \end{pmatrix}$

a la cual se le habría eliminado la primera fila, de manera que en el modelo transformado se eliminaría el siguiente vector $\left(\sqrt{1-\rho^2} \quad \sqrt{1-\rho^2} X_{2,1} \quad .... \quad \sqrt{1-\rho^2 X}_{k,1} \right)$

AUT 4- (D) La fórmula correcta para la varianza de los estimadores pasa a ser $\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_{MCG}) = \hat{\sigma}^2_{MCG} (X' \Omega^{-1} X)^{-1}$ donde $\hat{\sigma}^2_{MCG} = \dfrac{e'_{MCG} \Omega^{-1} e_{MCG}}{n-k-1}$, siendo e_{MCG} el vector de residuos procedente de la aplicación del método de mínimos cuadrados generalizados. Si el tamaño de la muestra crece, la varianza $\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_{MCG})$ tenderá a disminuir, como sucede en el MLG sin autocorrelación.

La calificación de Dudosa a esta cuestión se justifica porque la última matización de "en presencia de autocorrelación de las perturbaciones" no añade nada específico a la primera parte del enunciado. También podría ser valorada como Verdadera si no se tiene en cuenta dicha matización.

AUT 5- (F) Este enunciado es falso porque la autocorrelación significa que las autocovarianzas de las perturbaciones son no nulas o, lo que es lo mismo, que existe una asociación estadística entre ellas, de primer, segundo, tercer, cuarto, ..., t-ésimo orden. Así pues, en datos de sección cruzada, si las unidades de observación de la muestra son empresas, por ejemplo, y si la variable dependiente es las ventas anuales, la autocorrelación significaría que existe relación entre los componentes de la variable dependiente no explicados por las variables exógeneas (o por la parte sistemática del modelo) con los de otra empresa. Lo cual, en el ejemplo sería interpretado como que la parte no explicada de las ventas de la compañía "i" están relacionados con la parte no explicada por las variables exógenas de la compañía "j" (quizás las de una empresa líder y otra seguidora, en la realidad económica).

AUT 6- (F) En realidad, esta zona de indeterminación es debida a la imposibilidad de calcular una distribución de probabilidad del estadístico "d" ya que depende de los valores presentes de X en una muestra dada. Entonces, ya no se dispone de un valor crítico como en las pruebas conocidas basadas en la t de Student o en la F que implique el rechazo o no rechazo de la hipótesis nula. Para resolver este problema, Durbin y Watson buscaron un límite superior e inferior para que si el valor de su estadístico "d" caía fuera de esos valores pudiese tomarse una decisión acerca de la autocorrelación de primer orden. Dichos límites solo dependen del número de observaciones y del de variables explicativas, pero no de sus correspondientes valores.

AUT 7- (F) Puede obedecer a esta cuestión, pero también a otras. Además, no es característica de la autocorrelación de orden superior a 1 sino que también puede ser aplicado a la autocorrelación de primer orden. Entre otras razones por las que puede suceder que la autocorrelación sea de órdenes mayores que 1 cabe citar el hecho de que el carácter lineal del modelo no capte adecuadamente la evolución temporal de la variable dependiente y como consecuencia de ello las perturbaciones puede que presenten autocorrelación (tanto de órdenes ≥ 1) y a la existencia de componentes estacionales en la variable dependiente no captados o explicados por las variables exógenas.

AUT 8- (D) El método de Cochrane-Orcutt se basa en linealizar las condiciones de primer orden de una función cuadrática y en obtener los estimadores de β y de ρ mediante un procedimiento iterativo. Bajo esta consideración, el enunciado sería Falso. No obstante, como la función cuadrática que se optimiza calculando su mínimo es la suma de cuadrados de los residuos, desde esta perspectiva podría interpretarse el enunciado como Verdadero.

Sea el modelo lineal simple

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

$$\underline{\rho Y_{i-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 x_{i-1} + \rho\varepsilon_{i-1}}$$

$$Y_i - \rho Y_{i-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_i - \rho x_{i-1}) + \eta_i$$

con $\varepsilon_i - \rho\varepsilon_{i-1} = \eta_i$, donde η_i tiene las propiedades ideales de esperanza nula y ausencia de autocorrelación.

Si consideramos $\sum e_i^2 = \sum\left[(Y_i - \rho Y_{i-1}) - \beta_0(1-\rho) - \beta_1(x_i - \rho x_{i-1})\right]^2$, al calcular $\frac{\partial\sum e_i^2}{\partial\rho}, \frac{\partial\sum e_i^2}{\partial\beta_0}, \frac{\partial\sum e_i^2}{\partial\beta_1}$, para obtener las condiciones de primer orden, resulta que las derivadas son no lineales y no hay solución única. Para solucionar este problema, Cochrane-Orcutt dan a ρ un valor inicial $\rho = r_0$ y así linealizan la expresión para que no aparecezcan productos de la forma $\rho\beta_0$, etc. De esta forma se minimiza $\sum e^2$ respecto de β_0 y β_1 en la primera fase, lo cual genera como resultado $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$, que no tienen por qué ser óptimos. Entonces con los valores de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ en la primera fase se calcula un nuevo $\min\sum e^2$ respecto de ρ, lo cual genera el valor de $\hat{\rho} = r_1$ Así, sucesivamente, con r_1 de nuevo se calcularía el mínimo de $\sum e^2$ respecto de β_0 y β_1 en una segunda fase, para luego introducir sus correspondientes estimaciones en la suma de los cuadrados de los residuos que se haría mínima respecto de ρ.

Este proceso se daría por acabado cuando se hubiesen realizado un número determinado de iteraciones, por ejemplo 10, o cuando $\sum e_i^2$ sea menor que un valor fijado, por ejemplo, una diezmilésima.

AUT 9 (F) La autocorrelación significa que las perturbaciones del MLG tienen covarianzas no nulas, o que presentan asociaciones estadísticas. Dichas perturbaciones son variables aleatorias pertenecientes cada una a las diferentes "n" unidades de observación de la ecuación MLG. Si estas unidades de observación son diferentes momentos del tiempo, el modelo será de datos de series temporales. Si las unidades de observación acontecen en un periodo determinado, pero corresponden a diferentes agentes económicos, empresas, por ejemplo, formarán un modelo de datos de sección cruzada, por lo que la autocorrelación no es una característica propia de los modelos de series temporales. Sin perjuicio de lo anterior, cabe decir que en la práctica suele encontrarse con más frecuencia la autocorrelación en modelo de series temporales y que algunos contrastes estadísticos se diseñaron inicialmente para modelos de esa índole (por ejemplo, el de Durbin-Watson).

AUT 10- (V) Los estimadores serán lineales e insesgados, pero no óptimos o eficientes, ya que la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}$ pasa de ser $\sigma^2(X'X)^{-1}$ en el caso de ausencia de autocorrelación a

$$\begin{aligned}
&\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{MCO}\right) = E\left\{\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]'\right\} = \\
&= E\left\{\left[\hat{\beta} - \beta\right]\left[\hat{\beta} - \beta\right]'\right\} = E\left\{\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]'\right\} = \\
&= (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \neq \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}$$

AUT 11- (D) El hecho de que haya más variables endógenas en el MLG de carácter uniecuacional llevaría a que alguno de los regresores fuese estocástico (ya que no se habría determinado exógenamente al propio modelo o a la propia ecuación). Entonces habría que estimar el modelo mediante variables instrumentales, pero, en principio, la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}$ no se vería afectada por la autocorrelación, por lo que la respuesta sería Falso.

No obstante, podría ocurrir que la mala especificación del modelo que ha incluido indebidamente alguna variable endógena ocasionase que las perturbaciones en un periodo variasen conjuntamente con las de otros. Sea el verdadero modelo $Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, pero se especifica $Y = \alpha + \beta x + \gamma Z + \varepsilon$, donde Z es una variable endógena o lo que es lo mismo, afectada por una perturbación aleatoria. Recuérdese que si Z es endógena podrá explicarse por un conjunto de variables exógenas más la correspondiente perturbación aleatoria. Sea este término aleatorio u. Entonces, el modelo quedaría como

$$Y = \alpha + \beta x + \gamma(Z^* + u) + \varepsilon = \alpha + \beta x + \gamma Z^* + \gamma u + \varepsilon$$

donde $Z = Z^* + u$ siendo Z^* la parte sistemática de la variable Z (esto es, la parte no influida por la perturbación aleatoria).

Si sobre u se especifica que var-cov(u) $=\sigma^2 I$, y que es independiente de ε cuya $\text{var}-\text{cov}(\varepsilon)=\sigma_\varepsilon^2 \text{I}$, entonces ocurriría que la suma de dos variables aleatorias $(\gamma u+\varepsilon=V)$ generaría otra variable aleatoria de media nula y $\text{var}-\text{cov}(V)=\sigma_V^2 \text{I}$, por lo que el modelo continuaría sin autocorrelación. En caso contrario, esto es, cuando no pueda establecerse que $\text{var}-\text{cov}(V)=\sigma_V^2 \text{I}$, como consecuencia de la no independencia estadística entre u y ε entonces se habría introducido autocorrelación en el modelo de la mano de una mala especificación, que condujo a la introducción de una variable endógena en su parte sistemática.

AUT 12- (F) $E(\varepsilon\varepsilon)\neq\sigma^2 \text{I}_{nxn}$ Si hay "n" observaciones de cada una de las variables del modelo, en la matriz de $\text{var}-\text{cov}(\varepsilon)=\sigma^2\Omega$ de orden n x n hay en la primera fila "n" elementos diferentes, en la segunda fila hay "n-1" diferentes, en la tercera fila "n-2" y así sucesivamente, hasta que en la última fila hay un único elemento diferente de los anteriores. Esto constituye una progresión aritmética de razón 1, cuya suma viene dada por $\frac{n+1}{2}n$, que no coincide con el término del enunciado.

AUT 13- (F) La matriz P se diseña de tal forma que diagonalice a Ω de manera que $P^{-1}\Omega(P^{-1})'=\text{I}_{nxn}$ donde $\Omega=PP'$. Mediante P se transforma el modelo que tiene autocorrelación de modo que $P^{-1}Y=P^{-1}X\beta+P^{-1}\varepsilon$ quedando $Y^*=X^*\beta+\varepsilon^*$ donde $\text{var}-\text{cov}(\varepsilon^*)=\sigma^2\text{I}$ permitiendo entonces aplicar MCO a este modelo con garantías de que los estimadores serán ELIO (lineales, insesgados y óptimos). Por la forma que adopta la matriz

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$ al multiplicarla por X, el resultado

$$P^{-1}X=\begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2}X_{2,1} & \cdots & \sqrt{1-\rho^2}X_{K,1} \\ 1-\rho & X_{2,2}-\rho X_{2,1} & \cdots & X_{K,2}-\rho X_{K,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\rho & X_{2,n}-\rho X_{2,n-1} & \cdots & X_{K,n}-\rho X_{K,n-1} \end{pmatrix}$$ no tiene por qué ser una matriz de vectores colineales.

CUESTIONES DE HETEROSCEDASTICIDAD (HET): SOLUCIONES PROPUESTAS

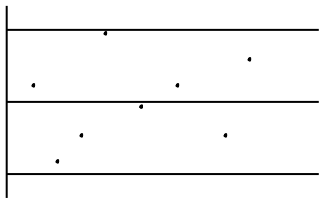
Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

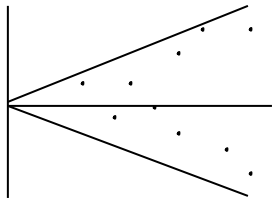
HET 1- (V) La omisión de variables relevantes en un modelo significa que si el modelo correcto es $Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$ se estima en su lugar $Y = X_1\beta_1 + v$ de modo que $\hat{\beta}_1 = (X_1^{'}X_1)X_1^{'}Y = (X_1^{'}X_1)^{-1}X_1^{'}(X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon) = \beta_1 + (X_1^{'}X_1)X_1^{'}X_2\beta_2 + (X_1^{'}X_1)^{-1}X_1^{'}\varepsilon$ donde $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + (X_1^{'}X_1)^{-1}X_1^{'}X_2\beta_2$ es decir que genera estimadores sesgados y no eficientes.

Por otra parte, $v = X_2\beta_2 + \varepsilon$ puede ser de tal modo que su estructura aleatoria tenga diferentes varianzas en cada momento del tiempo o unidad de observación debido al posible diferente tamaño de X_2.

Más aún, los residuos de una estimación en la que se ha omitido alguna variable relevante pueden indicar que la varianza del error no es constante, mientras que, si las variables omitidas son incluidas en el modelo, el perfil gráfico de los residuos del ajuste aparece como el correspondiente a un modelo homoscedástico.

Ejemplo, el perfil gráfico sería





HET 2-(F) La heteroscedasticidad hace que la aplicación de MCO al modelo genere estimadores insesgados y no eficientes. Se demuestra que $E(\hat{\beta}) = E(X'X)^{-1}X'Y = E(X'X)^{-1}X(X\beta + \varepsilon) = \beta + E(X'X)X'\varepsilon = \beta$ por ser $E(\varepsilon) = 0$. Sin embargo, la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores, $\text{var}-\text{cov}(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} =$
$= \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \neq \sigma^2(X'X)^{-1}$, lo cual implica que $\hat{\beta}$ no es eficiente.

La propiedad de la consistencia se refiere a que $p\lim\hat{\beta} = \beta$, lo cual, si las X son fijas en el muestreo, se cumplirá, ya que:

$$p\lim\hat{\beta} = p\lim\left[(X'X)^{-1}X(X\beta + \varepsilon)\right] = p\lim(X'X)^{-1}X'X\beta + p\lim\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right] =$$
$$= \beta + p\lim(X'X)^{-1}X'p\lim\varepsilon = \beta + p\lim(X'X)^{-1}X'0 = \beta$$

HET 3-(V) Por ejemplo, la prueba de Goldfeld-Quandt se basa en las sumas de los cuadrados de los residuos (SCR) de dos regresiones separadas una vez que se han ordenado las observaciones según el tamaño del regresor que se sospecha ha causado la heteroscedasticidad del modelo.

El cociente $R = \frac{SCR_2}{SCR_1} \approx F_{(n-c-2k/2,\ (n-c-2k)/2)}$ siendo SCR_2 y SCR_1 las sumas de los cuadrados de los residuos de cada una de las dos regresiones mencionadas, respectivamente, y donde "c" es el número de las observaciones centrales que se han eliminado antes de llevar a cabo las estimaciones de los parámetros en cada una de las submuestras. El número de "c" suele ser pequeño (1, 2, 3, 4, 5). El cociente R se distribuye según una F, bajo la hipótesis nula de homocedasticidad, donde la distribución de la F está derivada de la Ji-cuadrado.

Por otra parte, la prueba de la razón de verosimilitud aplicada a datos de sección cruzada consiste en clasificar los datos de la variable dependiente Y en sus "m" clases, según el tamaño de Y, para luego calcular el cociente

$\lambda = \prod_{i=1}^{m} \frac{(S_i / n_i)^{\frac{n_i}{2}}}{\left(\frac{\sum S_i}{\sum n_i}\right)^{\frac{\sum n_i}{2}}}$ donde $S_i = \sum_{j=1}^{n} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2$ siendo n_i el número de observaciones de la i-ésima clase con $\sum n_i = n$. Entonces se sigue que $-2\ln\lambda \approx \chi^2_{m-1}$ bajo la hipótesis nula de homocedasticidad.

HET 4-(F) La prueba de Glesjer propone que se realicen varias regresiones con los residuos de la estimación por MCO tales como

$$|\hat{u}_i| = a_0 + a_1 x_{1i}$$
$$|\hat{u}_i| = a_0 + a_1 (x_{1i})^{-1}$$
$$|\hat{u}_i| = a_0 + a_1 (x_{1i})^{1/2}$$

de modo que las decisiones respecto a la homoscedasticidad se tomarán a partir de la significatividad estadística de a_0 y a_1, proporcionando este contraste una idea aproximada de la naturaleza del incumplimiento de la hipótesis de homocedasticidad, lo cual orienta la reformulación del modelo, transformando los datos o especificándolo de otra manera. Sin embargo, la segunda parte del enunciado no es cierta ya que la prueba de Durbin-Watson es aplicable para la autocorrelación de primer orden.

HET 5-(V) La prueba de Glesjer consiste en efectuar varias regresiones con los residuos del modelo estimado mediante MCO para averiguar la relación entre dichos residuos y alguna variable responsable de generar la heteroscedasticidad del modelo. A partir de las diversas formas funcionales que pueden adoptar los modelos y de la significatividad de sus estimaciones se reformulará el modelo para evitar los problemas causados por la heteroscedasticidad.

$$|\hat{u}_i| = a_0 + a_1 x_{1i}$$
$$|\hat{u}_i| = a_0 + a_1 (x_{1i})^{-1}$$
$$|\hat{u}_i| = a_0 + a_1 (x_{1i})^{1/2}$$

El analista ha de partir de algún supuesto *a priori* para estimar las regresiones de los residuos con respecto a alguna variable. De lo contrario, tendría infinidad de posibilidades y no sería operativa la aplicación del contraste.

HET 6- (D) El carácter de los datos de sección cruzada o de series temporales no es determinante para la existencia de heteroscedasticidad en el modelo. Si bien es frecuente que el diferente tamaño de las unidades de investigación influye en buena medida en las variables endógenas, (por ejemplo, las provincias, las CCAA, las empresas, etc.) y que esos valores tan diferentes de la variable endógena según la unidad de observación no sean totalmente explicados por las variables exógenas. Por esta razón, las perturbaciones aleatorias podrían tener varianzas diferentes según el tamaño de dichas unidades de investigación. Así, por ejemplo, habría una varianza de las perturbaciones correspondiente a las empresas grandes, otra varianza a las empresas medianas y otra a las pequeñas. De esta suerte, el problema de "n" varianzas diferentes, imposibles de estimar con "n" observaciones, se reduciría a estimar tres varianzas para que el modelo pudiese ser estimado mediante MCG o bien mediante MCO aplicados a un modelo transformado por una matriz P^{-1} tal que $PP' = \Omega$

CUESTIONES DE VARIABLES FICTICIAS, MEDIDAS CON ERROR, OMITIDAS E IRRELEVANTES (VF): SOLUCIONES PROPUESTAS

Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

VF 1-(V) Si el modelo correcto es $Y = X_1\beta_1 + \varepsilon$ pero estimamos $Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$ se obtiene que $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$. Por lo tanto, genera un estimador insesgado para el coeficiente de la variable del modelo correctamente especificado. Sin embargo, la $E(\hat{\beta}_2) = 0$ ya que:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}\begin{pmatrix} -\sum x_1 x_2 & \sum x_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum x_1 Y \\ \sum x_2 Y \end{pmatrix} = \frac{\sum x_1^2 \sum x_2 Y - \sum x_1 x_2 \sum x_1 Y}{\Delta} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\sum x_1^2 \sum x_2 (x_1\beta_1 + \varepsilon) - \sum x_1 x_2 \sum x_1 (x_1\beta_1 + \varepsilon) =$$

$$= \frac{\sum x_1^2 \sum x_2 x_1 \beta_1 + \sum x_1^2 \sum x_2 \varepsilon - \sum x_1 x_2 \sum x_1^2 \beta_1 - \sum x_1 x_2 \sum x_1 \varepsilon}{\Delta}$$

donde $\Delta = \sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2$. Se sigue que $E(\hat{\beta}_2) = 0$, ya que el operador esperanza matemática aplicado a los dos sumandos del numerador que tienen componentes aleatorios ε (por ser el denominador Δ no aleatorio) produce el resultado de cero, por ser $E(\varepsilon) = 0$ uno de los supuestos del MLG.

VF 2- (V) En este caso, observamos $Y = y + v$, $X = x + u$, donde u y v son los errores de medida. El verdadero modelo sería $y = x\beta + \varepsilon$ donde cov(u,v) = cov (u,x) = cov(y,u) = cov(x,u) = cov(u,y) = 0, resultando $Y - v = \beta(X - u) + \varepsilon$ o bien $Y = \beta X + w$ donde $w = \varepsilon + v - \beta u$.

Además $\text{cov}(w, x) = \text{cov}(-\beta u,\ x + u) = -\beta\sigma_u^2$. Por tanto, no se puede aplicar MCO a $Y = \beta X + w$. Si sólo Y se mide con error, no hay problema puesto que $\text{cov}(w, x) = 0$. Pero si sólo x se mide con error $y = \beta(X - u) + \varepsilon = \beta X + \underbrace{\varepsilon - \beta u}_{w} = \beta X + w$ con $\text{cov}(w, x) = 0$ y $\text{cov}(\varepsilon - \beta u, x + u) = -\beta\sigma_u^2$. Si aplicamos MCO en $Y = \beta X + w$, se obtiene que

$\hat{\beta} = \dfrac{\sum xy}{\sum x^2} = \dfrac{\sum (x+u)(y+v)}{\sum (x+u)^2}$, por lo que $p\lim \hat{\beta} = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x) + \text{var}(u)} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 + \sigma_u^2}$ ya que los productos cruzados se cancelan. Aplicando $\beta = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ resulta que $p\lim \hat{\beta}_x = \dfrac{\beta}{1 + \dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2}}$. Por tanto, $\hat{\beta}$ subestima a β.

Si hay sólo una variable explicativa medida con error y las otras se miden sin error, los resultados anteriores se mantienen, es decir, la dirección del sesgo del coeficiente de la variable medida con error es ciertamente a la baja. En cuanto a los coeficientes de las otras variables medidas sin error, la dirección del sesgo es incierta, pero puede calcularse (para ello se requiere el conocimiento de la matriz de var-cov de las observaciones). Si todas las variables se miden con error, las expresiones se hacen muy complicadas.

VF 3-(V) Sea el modelo verdadero $Y = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \varepsilon$, pero se especifica incorrectamente $Y = x_1\beta_1 + u$. Al estimar el modelo, se obtiene:
$\hat{\beta}_1 = (x_1'x_1)x_1'Y = (x_1'x_1)^{-1}x_1'(x_1\beta_1 + x_2\beta_{2+}\varepsilon) =$
$= \beta_1 + (x_1'x_1)^{-1}x_1'x_2\beta_2 + (x_1'x_1)^{-1}x_1'\varepsilon$
El estimador $\hat{\beta}_1$ es sesgado y no eficiente ya que:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + (x_1'x_1)^{-1}x_1'x_2\beta_2 \qquad (3)$$

El término $(x_1'x_1)^{-1}x_1'x_2$ en (3) se parece al conocido de $(x_1'x_1)^{-1}x_1'Y$ en el modelo $Y = x\beta + \varepsilon$, por lo que se puede interpretar como el estimador MCO de un coeficiente hipotético γ en el modelo $x_2 = \gamma x_1 + v$. Si el valor estimado de γ, con unos datos concretos fuese cero, entonces tendríamos que el sesgo sería nulo y no habría aumento en la varianza de $\hat{\beta}_1$.

VF 4-(V) La inclusión de variables irrelevantes lleva a que el nuevo regresor pueda estar relacionado estadísticamente con los ya existentes en el modelo verdadero. Si esta relación estadística es alta y lineal, el coeficiente de correlación entre dos variables tendrá valores cercanos a más-menos 1. Además, la relación lineal puede ser entre varios regresores de manera que una combinación lineal de ellos resulte en otro regresor. Esta multicolinealidad puede ser exacta o aproximada. Al añadir más variables irrelevantes se aumenta la probabilidad de que existan relaciones colineales entre las variables exógenas, o, dicho de otro modo, de que la información aportada por un regresor sea similar a la aportada por otro.

VF 5-(V) El cambio estructural en un modelo se puede comprobar mediante el análisis de las sumas de los cuadrados de los residuos (SCR) del modelo general con todas las observaciones y de otros modelos en los que intervienen la primera y segunda parte de ellas, respectivamente.

Ejemplo: Sea (1) $SCR_1 \rightarrow Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_{2i} + u_{1i}$ i = 1, ... n_1
(2) $SCR_2 \rightarrow Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + u_{2i}$ i = 1, ... n_2
(3) $SCR \rightarrow Y_i = \lambda_1 + \lambda_2 x_i + u_i$ para i = 1, ... n donde $n = n_1 + n_2$

donde k = 2 por el número de parámetros estimados en cada regresión. El estadístico del contraste propuesto por Chow es

$$F = \frac{\dfrac{[\text{SCR - } (\text{SCR}_1 + \text{SCR}_2)]}{\text{k}}}{\dfrac{[\text{SCR}_1 + \text{SCR}_2]}{n_1 + n_2 - 2k}} \approx F^{k}_{n_1+n_2-2k}$$

bajo la hipótesis nula de igualdad de las regresiones (1) y (2), lo cual significa ausencia de cambio estructural.

Si se emplean las variables ficticias, habría que diseñarlas de tal modo que a partir del periodo en el que se supusiera que tenía lugar el cambio estructural, la variable ficticia pasase a valer, por ejemplo, 1, siendo 0, en los periodos anteriores.

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{nx1}$$

Entonces, $Y_i = a_1 + (a_2 - a_1)F_1 + b_1 x_i + (b_2 - b_1)F_1 X_i + u_i$. O bien, reparametrizando el anterior modelo, $Y_i = c_1 + c_2 F_1 + c_3 x_i + c_4 F_1 X_i + u_i$, pudiendo contrastar la significatividad de las estimaciones de los coeficientes individuales c_2 y c_4 mediante la prueba de la t de Student o bien conjuntamente con la prueba de la F. Estas pruebas permiten caracterizar la existencia y la clase de cambio estructural ya que indican si ha cambiado la ordenada en el origen, la pendiente angular (coeficiente c_2 y coeficiente c_4, respectivamente) o bien ambas, en cuyo caso la hipótesis nula conjunta sería H_0: $c_2 = c_4 = 0$

VF 6-(F) La heteroscedasticidad significa que la varianza de las perturbaciones aleatorias es diferente. Su presencia en el MLG viene motivada, esencialmente, por la posible falta de alguna variable relevante en el modelo, por la diferente especificación a la lineal asumida habitualmente, y por los posibles errores de medida en la variable dependiente. Dado que el enunciado se refiere a la inclusión de una variable irrelevante en el modelo, este fenómeno no tiene por qué inducir heteroscedasticidad.

VF 7-(V) Antes de crear e introducir una variable ficticia es necesario conocer la estructura de los residuos MCO del modelo de referencia, así como la naturaleza de los hechos que derivaron dicha estructura (por ejemplo, unos hechos aislados en el tiempo y cuyos efectos sobre la variable endógena no perduraron –como los representados en la Figura A-, o, por el contrario, unos hechos que implicaron un cambio permanente en la variable endógena –Figura B-).

La variable ficticia será de la forma impulso, si la situación tiene efectos aislados en el tiempo, y dicha variable podría adoptar estos valores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{nx1}$$

incluyendo el valor de 1 para el momento del tiempo o para la unidad de investigación (empresa, por ejemplo) cuyo residuo fuese anómalo.

La variable ficticia será de la forma escalón, y podría presentar estos valores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{nx1}$$

donde la variable estaría formada por ceros hasta un determinado instante, y luego unos para las observaciones restantes, tras haberse producido un cambio permanente.

La inspección gráfica de los residuos permite identificar la duración del fenómeno anómalo que las variables exógenas no han captado en el modelo, por lo que aparecen valores atípicamente grandes o pequeños (en general, mayores que $\pm 2\,\hat{\sigma}_e$) que se salen de las hipotéticas bandas situadas en el clásico $\pm 2\ \sigma$ (lo cual significaría que de cada 100 observaciones esperaríamos que, aproximadamente, 5 residuos estuvieran fuera de las bandas con una probabilidad del 95%; se dice "aproximadamente" ya que en la distribución normal, la abscisa que deja dos colas simétricas con una masa de probabilidad conjunta de 5% es la correspondiente a ± 1,96).

Figura A

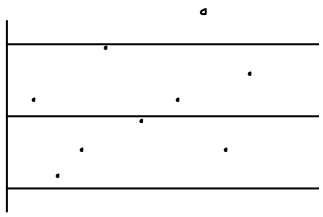
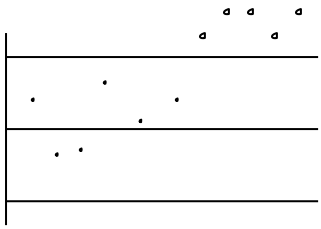


Figura B



VF 8-(V) La existencia de autocorrelación en un modelo puede comprobarse mediante el análisis de los residuos del modelo. A veces esta autocrrelación adopta perfiles gráficos que sugieren la existencia de una tendencia de la variable endógena no captada por las variables exógenas.

En otras ocasiones, la autocorrelación viene inducida por varios residuos seguidos en el tiempo mayores que ± dos veces la desviación típica de los residuos. En estos casos, el diseño de variables ficticias de tendencia o para captar esa situación acontecida durante varios periodos, respectivamente, sirve para corregir la autocorrelación.

Ejemplo de variable ficticia de tendencia aplicada al modelo lineal simple: $Y = \alpha + \beta x + \gamma VFT + \varepsilon$

$$VFT = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \vdots \end{pmatrix}_{nx1}$$

VF 9(V) De hecho, una de las justificaciones para introducir variables ficticias en un modelo proviene de que existen fenómenos anómalos (atípicos o extraordinarios) que influyen en la variable endógena pero que no son captados adecuadamente por las variables exógenas. Por esta razón, en la distribución de los residuos aparecen algunos valores mayores que ±2 veces la desviación típica de los residuos, los cuales causan un aumento indebido de la varianza residual y, por tanto, de la desviación típica de las estimaciones. Este hecho tiene importantes implicaciones en la calidad del modelo, ya que aparecerán como no relevantes algunas de las variables debido a que la aplicación de los contrastes de los cocientes "t" individuales a los coeficientes del modelo lleva a no rechazar la hipótesis nula de que $\beta_i = 0$.

$$\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_i)} = t \text{, donde } t \approx t_{n-k} \text{ grados de libertad}$$

VF 10-(F) Aunque la primera parte del enunciado es correcta según se justificó en la cuestión anterior, el segundo apartado referente a la inducción de la heteroscedasticidad y multicolinealidad no es cierto. De este modo, no tiene por qué suceder que las variables ficticias induzcan heteroscedasticidad, ya que la diferente varianza de las perturbaciones es independiente de la introducción de variables ficticias.

La posible inducción de colinealidad existe al introducir variables ficticias. Un ejemplo característico son las variables ficticias diseñadas de manera que sean complementarias unas de otras. Sea el caso de un modelo con observaciones semestrales. Si se desease captar la influencia de que los datos corresponden a uno u otro semestre, podría pensarse en la creación de dos variables ficticias de modo que

$$VF_1(1^{er}\ semestre) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ y } VF_2(2^{do}\ semestre) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$, siendo la suma de

$VF_1+VF_2=i$, donde i es el vector de unos que acompaña al término independiente, formando estas tres variables un conjunto perfectamente colineal.

CUESTIONES DE MULTICOLINEALIDAD (MULT): SOLUCIONES PROPUESTAS

Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

MULT 1-(D) La multicolinealidad puede ser estricta, en cuyo caso |X´X| = 0, o aproximada de modo que |X´X| ≈ 0. En el caso estricto, no es viable la aplicación directa de la regla mínimo cuadrática para la obtención de las estimaciones del modelo. En los casos de multicolinealidad aproximada, una de las consecuencias es la alta varianza de los estimadores. Recuérdese que para calcular la $\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_i) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}_{ii}$ es preciso obtener la varianza de los residuos y multiplicarla por el coeficiente de la matriz $(X'X)^{-1}$ de la fila y columna i-ésimas. Dado que ha habido que calcular la matriz inversa de X´X ha sido necesario obtener el determinante asociado a (X´X). Entonces si su valor es cercano a cero, el coeficiente de la posición i-ésima de esa matriz tendrá un valor muy grande, por lo que la $\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_i)$ será anormalmente grande. Al aplicar los contrastes individuales a las estimaciones obtenidas del modelo, resultará que $\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{d\hat{t}(\hat{\beta}_i)} \to 0$ bajo la H_0: $\beta_i = 0$, o lo que es lo mismo, no se rechazará que el coeficiente es nulo. Bajo este criterio, el enunciado sería verdadero. No obstante, puede haber otros casos en que no exista multicolinealidad y que tampoco sean las estimaciones estadísticamente significativas, por ejemplo, en el caso de una inadecuada selección de las variables exógenas para explicar la endógena (o mala especificación de la forma funcional, por ejemplo, cuando el verdadero modelo es no lineal y se especifica un modelo lineal).

MULT 2-(D) La detección de la multicolinealidad puede efectuarse de diferentes modos, si bien es cierto que un primer signo de que pueda estar presente en el MLG es la alta varianza de los estimadores. Bajo este criterio el enunciado sería verdadero. Sin embargo, si por detección se entiende el conjunto de técnicas estadísticas disponibles para comprobar las posibles relaciones lineales entre las variables, entonces, el enunciado no sería del todo correcto, de ahí, la calificación de dudoso. Recuérdese que los coeficientes de correlación simples, múltiples y parciales entre las variables exógenas y los coeficientes de determinación de diversas regresiones efectuadas entre las variables exógenas (sin la endógnea) son algunos de los métodos sencillos para detectar la multicolinealidad, además de otros más sofisticados que incluyen elementos de inferencia o de contrastación de hipótesis.

MULT 3-(V) El análisis de la multicolinealidad en un modelo no puede efectuarse automáticamente mediante el empleo solo de técnicas estadísticas. El analista ha de conocer *a priori* la posible relación entre las variables exógenas de su modelo y justificar adecuadamente su presencia en el modelo por postulados de la Teoría Económica o por otras razones. Este conocimiento *a priori* de la posible existencia de multicolinealidad orientará la aplicación de las técnicas de detección y facilitará el proceso de especificación o reformulación del modelo.

MULT 4-(F). No se trata de una prueba sino de un método de regresión aplicado al caso de la multicolinealidad. Consiste en evitar la singularidad de la matriz $X'X$ (que su determinante deje de ser nulo) mediante la multiplicación de los elementos de la diagonal principal por un coeficiente "λ", elegido como un valor pequeño (generalmente, inferior a 1). De este modo si $|X'X| \approx 0$ entonces mediante la transformación quedaría $|X'X - \lambda \mathrm{I}| \neq 0$ y el antiguo $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1} X'Y$ pasa a ser ahora $\hat{\beta}_R = (X'X - \lambda \mathrm{I})^{-1} X'Y$.

La conjugación de los criterios de sesgo y de varianza del estimador para cada λ elegido permite seleccionar el estimador de menor error cuadrático medio (ECM).

Nota: $ECM(\hat{\beta}_R) = sesgo^2(\hat{\beta}_R) + \mathrm{var}(\hat{\beta}_R)$

MULT 5-(V) Las tasas de variación transforman cada una de las variables del modelo en otras nuevas de forma que

$$TV(x)_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}}$$

Al haber transformado todos los datos es poco probable que la nueva matriz de observaciones X contenga vectores colineales en la forma en que sucedía con las variables originales. No obstante, esta transformación obliga a cambiar la interpretación de los resultados de la estimación del modelo ya que la explicación de las relaciones entre los niveles de las variables exógenas pasa a ser relaciones entre las tasas de variación de dichas variables, para las cuales, puede ser, que no haya una teoría económica de soporte o a la que estén referidos los resultados.

CUESTIONES DE REGRESORES ESTOCÁSTICOS (RE): SOLUCIONES PROPUESTAS

Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

RE 1-(V) El hecho de que uno o varios regresores no sean fijos en el muestreo y que tengan componentes aleatorios implica que los estimadores mínimos cuadráticos no cumplen las propiedades habituales. Por ejemplo, el estimador $\hat{\beta}$ no es insesgado, ya que:

$$E(\hat{\beta}) = E\left[(X'X)^{-1}X'Y\right] = E(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon) = E(X'X)^{-1}X'X\beta + E(X'X)^{-1}X'\varepsilon =$$
$$= \beta + E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]$$

porque el segundo sumando no se anula al suceder que los componentes aleatorios de *x* no tienen por qué carecer de relación estadística con ε . Esto es, la covarianza de *x* con ε será diferente de cero.

No hay ningún supuesto del MLG que garantice la no asociación estadística de *x*, siendo estocástica, con ε, de forma general y para cualesquiera variables *x* y ε .

Por otra parte, la optimalidad, esto es, la mínima varianza dentro de los estimadores de su clase (supuestamente los lineales e insesgados) ya no da lugar su comprobación por no cumplirse la insesgadez. En el ámbito de las grandes muestras, la propiedad de la consistencia (cuando el tamaño de n tiende a infinito, el estimador converge en probabilidad en el verdadero valor del parámetro) muy deseable por respaldar el hecho de que se procuren tomar muestras de tamaño grande y de que su mayor coste está justificado por estimar más certeramente el valor del parámetro desconocido, tampoco se cumple:

$$p\lim\hat{\beta} = p\lim(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon) = \beta + p\lim\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1}\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right) =$$
$$= \beta + p\lim\left[\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right)\right]$$

que sin garantías de que $p\lim\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right) = 0$, no puede resultar igual a β.

RE 2- (F) La presencia de regresores estocásticos en un modelo puede obedecer a varias causas como es la existencia de variables endógenas retardadas, la inclusión de variables medidas con error o la estimación de una ecuación que pertenece en realidad a un modelo más extenso de ecuaciones simultáneas.

RE 3-(D) Para contestar a esta pregunta vale la pena pensar en un ejemplo concreto. Sea un modelo de consumo de un determinado bien, como los automóviles, especificado con datos de sección cruzada, en función del precio del bien, del precio del bien complementario (combustible) y de la renta de los consumidores. Entonces, si esta renta se mide mediante entrevistas en los puntos de venta, puede estar medida con error por ser una variable que los individuos no gustan de contar al entrevistador. Entonces estaríamos ante un caso de variables estocásticas, lo cual afectaría a la calidad estadística del modelo.

Por otra parte, puede haber casos en que se conozca por otra fuente (por ejemplo, en estudios hechos por una empresa con sus propios empleados, descartando otras fuentes de ingresos no salariales) el ingreso de los individuos y entonces esta variable ya no sería un regresor estocástico, y de ahí que los estimadores no serían insesgados ni inconsistentes.

RE 4-(D) En principio, para determinar si un regresor es estocástico o no, se suele considerar si el modelo especificado corresponde a alguno de los casos típicos de contener variables endógenas retardadas, de ser una ecuación concreta de un modelo de ecuaciones simultáneas (por existir una determinación conjunta de más variables), o de medir una variable exógena con error. El análisis de residuos como tal no aporta información directa para determinar el carácter estocástico de un regresor, aunque puede argumentarse que los residuos del modelo han de ser empleados como elementos integrantes de la prueba de Haussman sobre simultaneidad de las relaciones económicas, lo cual viene a ser una prueba de exogeneidad de la variable en cuestión (es decir, que no existe una simultaneidad en las relaciones económicas, por lo que estaría descartado el carácter estocástico de dicha variable por esta causa). De este modo, si no se pudiese afirmar que el regresor es exógeno y mantuviésemos una única ecuación especificada en el modelo, ese modelo contendría regresores estocásticos y ya correspondería a uno de los casos antes citados. De esta explicación, puede concluirse que el enunciado es dudoso.

RE 5-(V) Al generar estimadores sesgados la presencia de regresores estocásticos en el MLG, no puede mantenerse la propiedad de la optimalidad o eficiencia en el sentido de que los estimadores son de mínima varianza dentro de los de su clase. Por esta razón, se buscan otras propiedades deseables para los estimadores como es la consistencia, la cual hace referencia a tamaños de muestra muy grandes, cuando se estudia si en el límite converge en probabilidad el estimador al verdadero valor del parámetro.

RE 6-(F) El hecho de que una variable exógena sea dicotómica, esto es, que pueda valer cero o uno, por ejemplo, no es un elemento que lleve parejo el carácter de estocástico. Sea el caso, en un modelo de demanda, el hecho de que los consumidores sean hombres o mujeres (y que se les asignen valores cero o uno) no incorpora ningún elemento estocástico al modelo.

RE 7-(D) Este es uno de los casos en que puede haber elementos estocásticos en la parte sistemática del modelo. Por ejemplo, $Y_i = \beta_1 + \beta_2 Y_{i-1} + \varepsilon_i$ con $E(\varepsilon) = 0$ y $E(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2\Omega$ siendo $\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + a_i$ con $E(a) = 0$ y $E(aa') = \sigma_a{}^2 \mathrm{I}$. Entonces, $Y_{i-1} = \beta_1 + \beta_2 Y_{i-2} + \varepsilon_{i-1}$ donde ε_{t-1} no es independiente de ε_i, por lo que

$$p\lim \hat{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{p\lim \sum (Y_{i-1} - \overline{\overline{Y}})\varepsilon_t}{p\lim \sum (Y_{i-1} - \overline{\overline{Y}})^2} = \beta_2 + \frac{p\lim \sum (Y_{i-1} - \overline{\overline{Y}})(\rho\varepsilon_{i-1} + a_i)}{p\lim \sum (Y_{i-1} - \overline{\overline{Y}})^2} \neq \beta_2$$ porque

el numerador no se anula al estar ε_{t-1} en el primer factor como sumando integrante de Y_{i-1}, y también en el segundo factor. En la fórmula anterior, $\overline{\overline{Y}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i}{n-1}$

RE 8-(F) El carácter estocástico de los regresores no tiene por qué inducir heteroscedasticidad en las perturbaciones del MLG $Y = x\beta + \varepsilon$. El verdadero problema es que la variable medida con error será de la forma $X = x + u$ donde u es el error de medición, de manera que $Y = (X - u)\beta + \varepsilon = \beta X + w$ con $w = \varepsilon - \beta u$, siendo $\operatorname{cov}(w, X) = \operatorname{cov}(-\beta u \ , x + u) = -\beta\sigma_u^2$ que no tiene por qué ser nula, invalidando las propiedades ELIO de los estimadores mínimo cuadráticos ordinarios.
Ya no serán insesgados porque $E(\hat{\beta}) = \beta + E(x'x)^{-1}x'\varepsilon$ donde por lo anterior no se anulará el segundo sumando. Entonces no tiene sentido considerar que la varianza sea o no mínima puesto que los estimadores no pertenecen ya a la clase de insesgados.

RE 9-(F) La estimación por variables instrumentales no es simple ya que aunque en teoría la fórmula del nuevo estimador de beta es fácil $\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'Y$ donde Z es la matriz de orden n x k de las variables instrumentales, en la práctica es complicado obtener nuevos regresores correlacionados con los antiguos X y que no estén correlacionados también con la perturbación aleatoria para conseguir que

$$p\lim\hat{\beta} = p\lim(Z'X)^{-1}Z'Y = p\lim(Z'X)^{-1}Z'(X\beta + \varepsilon) = \beta + p\lim(Z'X)^{-1}Z'\varepsilon =$$

$$= \beta + p\lim\left(\frac{Z'X}{n}\right)^{-1} p\lim\frac{Z'\varepsilon}{n} = \beta$$

Además, la segunda parte del enunciado también es falsa, ya que las variables instrumentales intentan resolver el problema de los regresores estocásticos no el de las variables omitidas.

CUESTIONES DE MODELOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS (MES): SOLUCIONES PROPUESTAS

Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

MES 1-(V) Este elemento es esencial para especificar las ecuaciones adecuadamente (ya que habrá que incluir una ecuación por cada una de las variables endógneas del modelo), para analizar la identificabilidad de las relaciones o ecuaciones, así como para proceder a la estimación de los parámetros mediante los métodos más convenientes. Además de la teoría económica existen algunas pruebas estadísticas como la de Hausman que contribuyen a determinar el carácter exógeno o endógeno de las variables.

MES 2-(F) Los modelos de ecuaciones simultáneas consideran las interrelaciones entre las variables endógenas pero las exógenas y las variables endógenas retardadas, esto es, las variables predeterminadas, se supone que no mantienen relación entre sí dentro del modelo. La interrelación de las variables de un modelo de ecuaciones simultáneas tiene lugar entre las endógeneas y entre las endógenas y prederminadas, pero no solo entre estas últimas.

MES 3-(V) El proceso de identificación consiste en determinar si una ecuación del modelo puede ser caracterizada como una relación económica concreta (por ejemplo, ecuación de oferta, ecuación de demanda) para lo cual el número de variables predeterminadas excluidas de la ecuación debe ser igual o mayor que el número de variables endógenas incluidas menos uno. Dicho de otro modo, el número de variables excluidas de la ecuación debe ser igual o mayor que el de ecuaciones del modelo menos uno. Para llegar a esta situación, la teoría económica puede ayudar a conocer *a priori* qué variables tienen o no sentido que se hallen o estén omitidas en una determinada relación.

El criterio algebraico es el que se deriva de las reglas de resolución de sistemas de ecuaciones para analizar si admiten o no solución. De esta suerte, mediante el estudio de los rangos de las matrices de los coeficientes del modelo y de sus restricciones de exclusión de ciertos coeficientes en una determinada ecuación puede comprobarse si admite la estimación (ecuación identificada) y si será con una única solución (ecuación exactamente identificada) o con más soluciones (ecuación sobreidentificada).

MES 4-(F) El método de mínimos cuadrados indirectos consiste en estimar mediante MCO la forma reducida del sistema de ecuaciones simultaneas para seguidamente pasar de los parámetros de la forma reducida a los estructurales, que son los que en realidad tienen sentido económico. Para pasar de las estimaciones de la forma reducida y obtener las estimaciones de los parámetros de la forma estructural se parte de $B\prod = -\Gamma$, donde se sustituye $\prod$ por $\hat{\Pi}$, B es la matriz de orden G x G de todas las variables endógenas, $\prod$ es la matriz G x K de todas las variables predeterminadas, y $\hat{\Pi}$ es la matriz G x K de los parámetros de la forma reducida. El problema se resuelve como un sistema de ecuaciones matemático (por reducción, sustitución o igualación).

Dado que tras la estimación por MCO de la forma reducida hay que proceder a la sustitución de $\prod$ por $\hat{\Pi}$ y a la resolución del sistema planteado, no puede afirmarse que ambos métodos coinciden.

MES 5-(V) Los mínimos cuadrados bietápicos consisten en sustituir las variables endógenas de una ecuación concreta de la forma estructural por los valores ajustados de una regresión estimada por mínimos cuadráticos ordinarios formulada entre cada una de esas variables endógenas respecto de todas las predeterminadas del modelo. Es decir, se calcula $\hat{Y}_1$ (todas las endógenas de la ecuación excepto la que se ha dejado explícita o pasado al primer miembro de la ecuación referida): $\hat{Y}_1 = X(X'X)^{-1}X'Y_1$ en la primera etapa. Seguidamente, en la segunda etapa se efectúa la regresión MCO donde $\hat{Y}_1$ ya está libre de componentes aleatorios, de la variable endógena explícita respecto de $\hat{Y}_1$, X_1 , y donde X_1 es el conjunto de las variables predeterminadas de la ecuación referida.

Los estimadores resultantes de este proceso ya son bietápicos. Ahora bien, estos estimadores no son insesgados por la sustitución llevada a cabo de Y_1 por $\hat{Y}_1$ entre otras razones, (aunque lo eran los de la primera etapa respecto de los parámetros de la forma reducida) pero sí consistentes.

MES 6-(F) Los MCO aplicados a la forma reducida generan estimadores consistentes porque las variables predeterminadas son independientes de las perturbaciones. Además, los estimadores son insesgados respecto de los coeficientes de la forma estructural. Sin embargo, el hecho de que los estimadores de la forma reducida cumplan esta propiedad no garantiza el paso de los coeficientes de la forma reducida a los de la forma estructural. Para ello ha habido que analizar previamente la identificabilidad de la ecuación en cuestión. Solo cuando se haya respondido afirmativamente al carácter identificable de la ecuación se podrá partir de las estimaciones de la forma reducida para obtener mediante mínimos cuadrados indirectos (cuando la ecuación resulte ser exactamente identificada) o mediante mínimos cuadrados bietápicos (cuando sea identificada o sobreidentificada) para estimar los coeficientes de la ecuación de la forma estructural objeto de interés.

MES 7-(V) Los mínimos cuadrados bietápicos consisten en una primera etapa en depurar o eliminar de las variables endógenas de la ecuación de referencia los componentes estocásticos. Esto se hace mediante un conjunto de regresiones de Y_1 (que contiene todas las variables endógenas de la ecuación de referencia excepto la que se ha dejado explícita en el primer miembro de la ecuación) respecto de todas las variables predeterminadas del modelo. Así se sustituirá Y_1 por $\hat{Y}_1$, consistiendo $\hat{Y}_1$, precisamente, en ese conjunto de variables instrumentales que eran la solución teórica al problema de inconsistencia derivado de la aplicación de mínimos cuadrados ordinarios a una ecuación estructural cualquiera, esto es, a una ecuación cualquiera donde los regresores son estocásticos (por ser algunos de ellos variables endógenas).

MES 8-(V) La identificación de una ecuación consiste en la caracterización económica de una ecuación dada, por ejemplo, ecuación de demanda, ecuación de oferta, etc. También la identificación consiste en establecer las condiciones por las cuales será posible obtener de unas estimaciones por mínimos cuadrados ordinarios de los parámetros de la forma reducida (la única forma del sistema que evita que los regresores sean estocásticos) las estimaciones de los parámetros de la forma estructural, que es la forma que tiene sentido económico.

Si no se pueden despejar las incógnitas –los parámetros de la forma estructural- en función de los conocidos por estimación mediante mínimos cuadrados ordinarios de la forma reducida, no es viable la estimación de los parámetros de la forma estructural. Lo ideal es que esta solución sea única para que el propio proceso de la estimación tenga sentido a la hora de extraer las conclusiones. No obstante, este deseo no siempre se satisface. Si la ecuación está sobreidentificada se puede obtener más de un valor numérico para algunos parámetros de las ecuaciones estructurales.

MES 9-(V) Si un regresor está influido por la variable dependiente o endógena el modelo uniecuacional está mal especificado y habría que plantear las relaciones existentes en ese problema económica como un modelo de ecuaciones simultáneas, de modo que hubiese no solo una variable endógena sino dos. En este caso, en la ecuación adicional habría que escribir la variable exógena del modelo inicial, ahora también endógena, como función de la endógena y de otras exógenas en forma de sistema. La aplicación de mínimo cuadrados ordinarios a la ecuación inicial en estas circunstancias genera estimadores inconsistentes, además de sesgados y no óptimos. Por ejemplo, $Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$, donde x_{2i} viene influido por Y_i. Entonces la ecuación adicional sería, por ejemplo, $x_{2i} = \gamma + \lambda_1 Y_i + \lambda_2 x_{1i} + \lambda_3 x_{3i} + v_i$. Ahora sería preciso estudiar la identificabilidad del sistema antes de proceder a la estimación de sus coeficientes.

MES 10-(F) Aplicar mínimo cuadrados ordinarios a una ecuación de la forma reducida genera estimadores insesgados y consistentes, ya que las perturbaciones son independientes de las variables predeterminadas de dicha ecuación. No obstante, si mínimo cuadrados ordinarios se aplicasen directamente a las ecuaciones de la forma estructural, entonces, los estimadores serían sesgados e inconsistentes.

CUESTIONES DE MISCELÁNEA (MIS):
SOLUCIONES PROPUESTAS

Verdadero (V), Falso (F), Dudoso (D)

MIS 1-(F) El procedimiento de Hildreth-Lu es un método de estimación denominado de búsqueda, aplicable a modelos con autocorrelación. Sin embargo, dicho método no es útil para tratar el problema de regresores estocásticos para lo cual se habrían de aplicar variables instrumentales.

MIS 2-(D) Las variables omitidas generan estimadores sesgados e ineficientes (véase solución al problema VF3). La heteroscedasticidad significa que las perturbaciones del modelo no tienen idéntica varianza a lo largo de las "n" unidades de observación ("n" momentos del tiempo, o "n" empresas, por ejemplo). Si se ha omitido una variable, podría ocurrir que las pruebas de heteroscedasticidad basadas en un análisis de los residuos mostrasen varianzas distintas en ciertos grupos de unidades de observación, lo cual significaría que existía en la formulación del modelo alguna información no captada mediante las variables exógenas que se dejó para el componente aleatorio, para ε. Quizás, con la inclusión de la variable omitida, se capte esa información de *Y* pendiente de ser cuantificada mediante las estimaciones de los parámetros y desaparezca de los residuos ese fenómeno de varianzas diferentes a lo largo de las unidades de observación. De todo lo anterior, se califica el enunciado como dudoso porque puede ser la heteroscedasticidad debida a este motivo o no.

MIS 3-(F) En modelos con heteroscedasticidad, los estimadores son insesgados: $E(\hat{\beta}) = \beta + E(X'X)^{-1}X'\varepsilon$ expresión en la que no interviene el hecho de que la $\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2\Omega$ en los modelos con errores en la variable dependiente no se derivan consecuencias para la $E(\hat{\beta})$ ya que ese error de la variable dependiente se integraría o se sumaría a la propia perturbación aleatoria ε. Los modelos con autocorrelación generan estimadores insesgados por la razón señalada al principio, aunque no serán de mínima varianza por ser $E(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2\Omega$

MIS 4-(F) Esto lleva a que los estimadores no sean insesgados ni de varianza mínima (véase VF 3). La inconsistencia se refiere a que $p\lim\hat{\beta} \neq \beta$, lo cual no viene influido por la ausencia de variables relevantes sino porque alguno de los regresores sea estocástico.

MIS 5-(F) En principio, la diferente varianza de las perturbaciones no tiene por qué verse afectada por la inclusión de variables ficticias, cuya justificación en el modelo es contribuir a disminuir la varianza de los errores de ajuste al captar algún elemento anómalo de la variable dependiente *Y*, que no ha sido captado o explicado por las variables exógenas X. Aunque pudiera pensarse que la heteroscedasticidad se puede detectar mediante la observación gráfica de los residuos y que éstos puedan tener un perfil de varianza cambiante en diferentes periodos, es difícil justificarla por la presencia de variables ficticias. Más aún, si tal fuera el caso, esto conllevaría un rediseño de las variables ficticias para evitar la situación de heteroscedasticidad creada ya que, ésta, aumentaría la varianza residual, lo cual iría en detrimento de la calidad del modelo que era lo que se perseguía con la propia introducción de las variables ficticias.

MIS 6-(V) El coeficiente R^2 mide la parte de la varianza explicada mediante el modelo respecto de la varianza total de la variable dependiente. Si alguna de las cinco hipótesis básicas del MLG, $Y = x\beta + \varepsilon$, deja de cumplirse –linealidad, $E(\varepsilon) = 0$, $E(\varepsilon\varepsilon') \neq \sigma^2 \mathrm{I}$, $rango(x'x) = k$, x fijas en el muestreo-, puede repercutir en la calidad del ajuste. Por ejemplo, si el modelo no está correctamente especificado –porque no es propiamente lineal- a pesar de lo cual se estima por mínimo cuadrados ordinarios, no se logrará un valor tan alto del R^2 como se podría haber obtenido de otra suerte. Si se han omitido variables relevantes, la calidad del ajuste sería más baja que si se hubiese especificado el modelo correctamente. Se conoce que el coeficiente R^2 ante situaciones en que se añaden variables irrelevantes suele aumentar de forma continuada y deja de ser orientador acerca de la calidad del modelo, por lo que se ha de emplear el R^2 corregido por grados de libertad (que puede disminuir ante la presencia de regresores irrelevantes o en situaciones propicias para la multicolinealidad). En el caso de regresores estocásticos el coeficiente R^2 no se ve afectado, sino la calidad de los estimadores y la capacidad de efectuar inferencia. Las situaciones de autocorrelación y heteroscedasticidad de las perturbaciones tampoco afectan a la formulación del coeficiente R^2.

MIS 7-(F) Las variables ficticias se pueden introducir cuando su uso sea necesario para captar fenómenos anómalos sea en el modelo uniecuacional o de ecuaciones simultaneas. La identificación de las ecuaciones se verá afectada por su existencia, de manera que las restricciones de exclusión en una determinada ecuación sirven para saber si está identificada o no (el número de variables excluidas de la ecuación debe ser igual o mayor que el de variables endógenas incluidas menos uno) habrán de tener en cuenta esta adición de variables ficticias.

MIS 8-(F) La heteroscedasticidad no puede modificar el carácter de los regresores como variables fijas en el muestreo o como variables aleatorias. La heteroscedasticidad significa que las perturbaciones tienen diferentes varianzas según la unidad de observación donde se obtengan (momentos del tiempo en datos de series temporales o empresas, por ejemplo, en datos de sección cruzada) pero esta diferente varianza no influye en los regresores.

MIS 9-(V) De esta suerte, a partir del conocimiento previo se establecerá si el modelo es uniecuacional o de ecuaciones simultaneas. Se especificarán las relaciones entre las variables más adecuadas dejando explícita la variable dependiente si se trata de una única variable endógena, o se fijarán las relaciones entre las variables endógenas y predeterminadas en las diferentes ecuaciones del modelo si se tratase de relaciones simultaneas de varias variables endógenas entre sí y con las variables predeterminadas.

MIS 10-(V) Si el estimador es sesgado en pequeñas muestras suele ser habitual estudiar qué ocurriría en muestras grandes. Entonces esta propiedad de la insesgadez se sustituye por la de la consistencia y si sucede que se cumple, ello respaldaría la acción de conseguir muestras grandes para estimar el modelo, puesto que, de esta forma, los estimadores convergerían en los valores de los parámetros desconocidos. (Véase para más detalles RE 1.)

PROPUESTAS DE SOLUCIÓN PARA LOS EJERCICIOS NUMÉRICOS

A- EL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

MRLS-1)

Los resultados no son coherentes. Dado que la suma de los cuadrados de los residuos (SCR) es un dato, podemos calcular, con el resto de la información, la suma total de cuadrados (STC) y la suma de cuadrados explicada por la regresión (SEC), y ver si se cumple que $STC = SEC + SCR$.

Sabemos que la suma de cuadrados explicada por la regresión se puede expresar como: $SEC = \hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2$, donde $\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - n\overline{X}^2$. Teniendo en cuenta la información dada: $\sum x_i^2 = 164 - (100)(1{,}2)^2 = 20$. Por consiguiente, $SEC = (2^2)\,(20) = 80$, dado que $\hat{\beta}_1 = 2$.

Con la información sobre el coeficiente de determinación y sobre SEC, podemos obtener SCT:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = 0{,}80 \quad \Rightarrow \quad STC = \frac{SEC}{R^2} = \frac{80}{0{,}80} = 100$$

De la descomposición de la varianza, se tiene $SCR = STC - SEC = 100 - 80 = 20$, lo cual contradice que la suma de los cuadrados de los residuos sea 10.

MRLS-2)

<u>*Contraste de la t*</u>

Para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 0$, podemos utilizar el estadístico de contraste $t = \dfrac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ que, bajo la hipótesis nula, sigue una distribución t de Student con $n-2$ grados de libertad. Con la información dada, se necesita calcular la desviación típica estimada del estimador $\hat{\beta}_1$. La varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$ viene dada por:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon}{\sum x_i^2} = \frac{SCR/n-2}{\sum x_i^2} \qquad (1)$$

De esta expresión, sólo tenemos información sobre el tamaño muestral. Debemos encontrar alguna forma de expresar la suma de los cuadrados de los residuos SCR en función de $\sum x_i^2$:

$$SCR = STC - SEC = \frac{SEC}{R^2} - SEC = SEC\left(\frac{1}{R^2} - 1\right) =$$

$$(\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2)\left(\frac{1}{R^2} - 1\right) = 25\sum x_i^2\left(\frac{1}{0{,}8} - 1\right) = 6{,}25\sum x_i^2$$

Por tanto, de (1):

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{6{,}25\sum x_i^2}{20\sum x_i^2} = 0{,}3125$$

El estadístico de contraste es:

$$t = \frac{5}{\sqrt{0{,}3125}} = 8{,}944272$$

El valor crítico de la distribución t de Student con 20 grados de libertad al nivel de significación del 2,5 % es 2,086. La hipótesis nula se rechazaría dado que el valor del estadístico de contraste es mayor que el valor crítico de la distribución.

Contraste de la F

El estadístico de contraste viene dado por:

$$F = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2} = \frac{(0{,}8)(20)}{0{,}2} = 80$$

Nótese que el valor del estadístico de la t elevado al cuadrado coincide con el valor del estadístico de la F. El valor crítico de una distribución F con 1 grado de libertad en el numerador y 20 en el denominador al nivel de significación del 5 % es 4,35. Al igual que antes, se rechazaría la hipótesis nula ya que el valor del estadístico de contraste cae en la región de rechazo.

MRLS-3)

a) Un intervalo de confianza para β_1 al nivel de confianza $1-\alpha$ viene definido por:

$$\left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

donde $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$ denota la desviación típica estimada del estimador $\hat{\beta}_1$ y $t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ es el valor crítico de la distribución t.

La estimación mínimo-cuadrática del parámetro β_1 es:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \qquad (2)$$

donde $x_i = X_i - \overline{X}$ denota el valor de la observación i-ésima de la variable independiente medida en desviaciones con respecto a la media muestral e $y_i = Y_i - \overline{Y}$ el valor de la observación i-ésima de la variable dependiente media en desviaciones con respecto a la media muestral.

El numerador de (2) viene dado por:

$$\sum x_i y_i = \sum X_i Y_i - n\overline{XY} = 198.360 - 5\left(\frac{2240}{5}\right)\left(\frac{440}{5}\right) = 1240$$

Por consiguiente:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1240}{6880} = 0{,}18023$$

La varianza $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$ se puede obtener a partir de:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{\sum x_i^2} = \frac{\sum e_i^2}{(n-2)\sum x_i^2} = \frac{STC - SEC}{(n-2)\sum x_i^2} \qquad (3)$$

La suma total de cuadrados STC es un dato del problema ($\sum y_i^2$). La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SEC = \hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2 = (0{,}18023)^2 (6.880) = 223{,}4820$$

Por consiguiente, (3) se puede escribir como:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{248 - 223{,}4820}{(3)\ (6.880)} = 0{,}001187$$

y $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0{,}03445$.

Teniendo en cuenta que el valor crítico de una distribución t de Student con 3 grados de libertad para un nivel de significación de 2,5 % es 3,182, podemos escribir el intervalo de confianza para la pendiente de la línea de regresión como:

$$[0{,}18023 - 3{,}182\ (0{,}03445)\ ;\ 0{,}18023 + 3{,}182\ (0{,}03445)] = [0{,}0706101\ ;\ 0{,}2898499]$$

b) Un intervalo de confianza para la varianza de la perturbación aleatoria al nivel de confianza $1-\alpha$ viene dado por:

$$\left[\frac{(n-2)\,\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{\chi^2_{n-2,\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-2)\,\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{\chi^2_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

donde $\chi^2_{N-2,\frac{\alpha}{2}}$ y $\chi^2_{N-2,1-\frac{\alpha}{2}}$ son, respectivamente, los valores críticos de una distribución chi-cuadrado con $n-2$ grados de libertad que dejan a su derecha un área bajo la distribución igual a $\frac{\alpha}{2}$ y $1-\frac{\alpha}{2}$. La estimación de la varianza de las perturbaciones es:

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{STC - SEC}{n-2} = \frac{248 - 223{,}4820}{3} = 8{,}1726$$

Por consiguiente, el intervalo de confianza es:

$$\left[\frac{3\ (8{,}1726)}{9{,}348};\frac{3\ (8{,}1726)}{0{,}216}\right]=\left[2{,}62278\ ;\ 113{,}5083\right]$$

c) La bondad del ajuste viene medida por el coeficiente de determinación.

$$R^2=\frac{SEC}{STC}=\frac{223{,}4820}{248}=0{,}9011$$

Para determinar si el nivel de producción es una variable significativa en la explicación del nivel de exportaciones debemos realizar un contraste de hipótesis, siendo la hipótesis nula $H_0:\beta_1=0$ y la hipótesis alternativa $H_A:\beta_1\neq 0$ (contraste de dos colas). El estadístico de contraste es:

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}=\frac{0{,}18023}{0{,}03445}=5{,}2316$$

y el valor crítico de la distribución t es 3,182. Por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula ya que el valor del estadístico de contraste es superior al valor crítico de la distribución.

d) El nivel esperado de exportaciones correspondientes a un nivel de producción de $X_p=540$ millones viene dado por:

$$\hat{Y}_p=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\ .\ 540$$

En primer lugar, se necesita determinar la estimación mínimo-cuadrática del parámetro β_0. Teniendo en cuenta que la línea de regresión pasa por el punto de medias muestrales, se puede escribir:

$$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}=\left(\frac{440}{5}\right)-0{,}18023\left(\frac{2240}{5}\right)=7{,}25696$$

Por consiguiente,

$$\hat{Y}_p=7{,}25696+(0{,}18023)\ (540)=104{,}58116$$

El intervalo de confianza para Y_p al nivel de confianza $1-\alpha$ está definido por:

$$\left[\hat{Y}_p-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_p;\hat{Y}_p+t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_p\right]$$

donde $\hat{\sigma}_p=\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(X_p-\overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2}}$ es la desviación típica estimada del error de predicción. Teniendo en cuenta que la desviación típica estimada de la perturbación aleatoria es $\hat{\sigma}_\varepsilon=\sqrt{8{,}1726}=2{,}858776$, se obtiene, sustituyendo los valores correspondientes en dicha formula, que:

$$\hat{\sigma}_p = 2{,}858776\sqrt{1+\frac{1}{3}+\frac{(540-448)^2}{6880}} = 4{,}57722$$

El intervalo de predicción es:

$$[104{,}58116 - 3{,}182\ (4{,}57722)\ ;\ 104{,}58116 + 3{,}182\ (4{,}57722)] = [90{,}01644\ ;\ 119{,}145874]$$

MRLS-4)

La estimación del coeficiente β_1 viene dada por:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{-3550}{2250} = -1{,}57$$

Dado que la línea de regresión pasa por el punto de medias, la estimación del coeficiente β_0 es:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} = 100 + (1{,}57)\ (70) = 209{,}9$$

La elasticidad de la demanda se define como:

$$\tau = \frac{dY}{dX}\frac{X}{Y}$$

El cambio en la cantidad demandada cuando cambia el precio viene medido por la estimación del coeficiente $\hat{\beta}_1$. Nótese que la cantidad demanda al precio medio es 100. Por consiguiente, la elasticidad de la demanda evaluada en el punto del precio medio es:

$$\tau = \hat{\beta}_1 (\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}) = -1{,}57(\frac{70}{100}) = -1{,}099$$

MRLS-5)

a) La estimación mínimo-cuadrática del parámetro β_1 es:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}$$

Las medias muestrales son:

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{219{,}72}{24} = 9{,}155$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{36}{24} = 1{,}5$$

Sustituyendo la información muestral en la expresión de $\hat{\beta}_1$, se obtiene:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{349{,}58 - (24)\ (9{,}155)\ .\ (1{,}5)}{59 - (24)\ .\ (1{,}5^2)} = \frac{20}{5} = 4$$

La estimación del término independiente o intercepto es:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} = 9{,}155 - 4\,.\,1{,}5 = 3{,}155$$

b) La suma total de cuadrados viene definida por:

$$STC = \sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2 = 2100 - (24)\,(9{,}155^2) = 88{,}4634$$

La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SEC = \hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2 = 4^2\ (5) = 80$$

Por consiguiente, la suma de los cuadrados de los residuos es:

$$SCR = STC - SEC = 88{,}4634 - 80 = 8{,}4634$$

c) El coeficiente de determinación viene dado por:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{80}{88{,}4634} = 0{,}9043$$

La estimación de la varianza de las perturbaciones es:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{SCR}{n-2} = \frac{8{,}4634}{22} = 0{,}3847$$

d) Se debe contrastar la hipótesis $H_0 : \beta_1 = 0$. El estadístico de contraste es:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2}}$$

donde $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2$ es la estimación de la varianza del estimador mínimo-cuadrático del parámetro β_1. Dicha varianza viene dada por:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum x_i^2} = \frac{SCR/n-2}{\sum x_i^2} = \frac{8{,}4634/22}{5} = 0{,}07694$$

El valor del estadístico de contraste es:

$$t = \frac{4}{\sqrt{0{,}07694}} = 14{,}42 > t_{22,0,025}$$

Dado que el valor del estadístico de contraste es mayor que $2{,}074$, el valor crítico de la distribución t de Student con 22 grados de libertad, se sigue que se rechaza la hipótesis nula y, por consiguiente, la variable número de horas es significativa.

e) El consumo de combustible que el modelo predice para un vuelo de una hora viene dado por:

$$\hat{Y}_p = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_p = 3{,}155 + 4 = 7{,}155$$

Paras determinar los límites entre los que estaría el consumo para un vuelo de una hora debemos caracterizar el intervalo de predicción. Para ello, se necesita determinar la desviación típica del error de predicción. La varianza del error de predicción viene dada por:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_p - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2} \right] = 0{,}3847 \left[1 + \frac{1}{24} + \frac{\left(1 - 1{,}5\right)^2}{5} \right] = 0{,}42$$

El intervalo de predicción es:

$$\left[\hat{Y}_p - t_{22,0,025}\hat{\sigma}_p ; \hat{Y}_p + t_{22,0,025}\hat{\sigma}_p\right] = \left[7{,}155 - (2{,}074)\ (\sqrt{0{,}42})\ ; 7{,}155 + (2{,}074)\ \ (\sqrt{0{,}42})\right] = \left[5{,}8109\ ;\ 8{,}5\right]$$

MRLS-6)

a) El precio medio de las manzanas $\overline{X}$ lo podemos derivar a partir de la ecuación de medias muestrales: $\overline{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \overline{X}$. Si conociéramos la estimación mínimo-cuadrática del parámetro β_1 no tendríamos ningún problema. Por consiguiente, con la información que tenemos, debemos encontrar el valor de $\hat{\beta}_1$.

En primer lugar, podemos utilizar la información sobre el coeficiente de determinación.

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2}{\sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2}$$

El denominador de esta expresión es $126.300 - (12)\ (100^2) = 6300$. Teniendo en cuenta el valor del coeficiente de determinación, podemos escribir:

$$\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2 = (6300)\ (0{,}89) = 5607 \qquad (4)$$

Por otra parte, sabemos que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{-3550}{\sum x_i^2} \qquad (5)$$

De (4) y (5), podemos escribir: $-3550\hat{\beta}_1 = 5607$, y por consiguiente, $\hat{\beta}_1 = -1{,}58$. De la ecuación de medias muestrales:

$$\overline{X} = \frac{\overline{Y} - \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1} = -\frac{100 - 210{,}6}{1{,}58} = 70$$

b) Para encontrar el intervalo de confianza para la pendiente de la demanda se necesita calcular la varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$: $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \dfrac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{\sum x_i^2} = \dfrac{SCR/n-2}{\sum x_i^2}$.

Teniendo en cuenta que $R^2 = 1 - \dfrac{SCR}{STC}$, podemos escribir:

$$SCR = STC\left(1 - R^2\right) = 6300(1 - 0{,}89) = 693$$

Además, de la expresión para el estimador de β_1 dada en (5), tenemos:

$$\sum x_i^2 = \frac{\sum x_i y_i}{\hat{\beta}_1} = \frac{3550}{1{,}58} = 2246{,}8354$$

Por tanto:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{693/10}{2246{,}8354} = 0{,}03084$$

El intervalo de confianza para la pendiente de la demanda es:

$$\left[\hat{\beta}_1 - t_{10,0,025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} ; \hat{\beta}_1 + t_{10,0,025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right] = \left[-1{,}58 - (2{,}228)\sqrt{0{,}03084} ; -1{,}58 + (2{,}228) .\sqrt{0{,}03084}\right] =$$
$$\left[-1{,}97126 ; -1{,}18873\right]$$

c) La hipótesis nula es $H_0 : \beta_1 \leq 0$, siendo la hipótesis alternativa $H_A : \beta_1 > 0$. El contraste es de una cola. El valor del estadístico de contraste es:

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}}} = \frac{-1{,}58}{\sqrt{0{,}03084}} = -8{,}997$$

La región de aceptación para este contraste es $\left[-\infty ; -1{,}812\right]$, donde el límite superior del intervalo es el valor critico de la distribución t con 10 grados de libertad que deja a su derecha un área baja la distribución igual a $0{,}05$. Por consiguiente, no se rechaza la hipótesis nula. Una vez que hemos contrastado que la pendiente de la demanda no es positiva, deberíamos contrastar la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 = 0$ versus la alternativa $H_A : \beta_1 \neq 0$. Este es un contraste de dos colas, siendo la región de aceptación $\left[-2{,}228 ; 2{,}228\right]$. Como el valor del estadístico de contraste es el mismo que antes, se sigue que se rechazaría la hipótesis nula. Por consiguiente, la variable precio es significativa.

d) Para un precio de 110, el modelo predice una cantidad demandada de:

$$\hat{Y}_p = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_p = 210{,}6 - (1{,}58)\,(110) = 36{,}8$$

La varianza del error de predicción es:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_p - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2} \right] = 69{,}3 \left[1 + \frac{1}{12} + \frac{\left(110 - 70\right)^2}{2246{,}8354} \right] = 124{,}4244$$

Con una confianza del 95 %, la verdadera cantidad demandada pertenecerá al intervalo:

$\left[\hat{Y}_p - t_{10,0,025}\hat{\sigma}_p ; \hat{Y}_p + t_{10,0,025}\hat{\sigma}_p\right] = \left[36{,}8 - (2{,}228).\sqrt{124{,}4244}\ ;\ 36{,}8 + (2{,}228)\sqrt{124{,}4244}\right] =$
$\left[11{,}9476\ ;\ 61{,}8523\right]$

MRLS-7)

Las medias muestrales de las variables X e Y vienen dadas por:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{75}{15} = 5 \qquad \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{3.000}{15} = 200$$

La estimación mínimo cuadrática del parámetro β_1 es:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{27.000 - (15)\ (5)\ (200)}{975 - (15)(5^2)} = \frac{12.000}{600} = 20$$

La estimación mínimo cuadrática del parámetro β_0 es:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} = 200 - (20)\ (5) = 100$$

La bondad del ajuste viene definida por el coeficiente de determinación:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2}{\sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2} = \frac{(20^2)\ (600)}{900.000 - (15)\ (200^2)} = \frac{240.000}{300.000} = 0{,}8$$

b) El valor predicho de la variable dependiente viene dado por:

$$\hat{Y}_p = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_p = 100 + (20)\ (10) = 300$$

La varianza estimada de la perturbación aleatoria es:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{STC - SEC}{n-2} = \frac{300.000 - 240.000}{13} = 4615{,}3846$$

La varianza estimada del error de predicción es:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_p - \overline{X}\right)^2}{\sum x_i^2} \right] = 4615{,}3846 \left[1 + \frac{1}{15} + \frac{\left(10 - 5\right)^2}{600} \right] = 5115{,}3846$$

El intervalo de predicción para el valor de la variable dependiente para un nivel de confianza del 95 % es:

$$\left[\hat{Y}_p - t_{10,0,025}\hat{\sigma}_p ; \hat{Y}_p + t_{10,0,025}\hat{\sigma}_p\right] = \left[300 - (2{,}16)\ \sqrt{5115{,}3846}\ ; 300 + (2{,}16)\ \sqrt{5115{,}3846}\right] = \left[145{,}5126\ ; 454{,}4873\right]$$

c) Para contrastar la hipótesis $H_0 : \beta_1 = 25$, usaremos el estadístico de contraste:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 25}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}}$$

que se distribuye como una t de Student con 13 grados de libertad. La varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$ viene dada por:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{\sum x_i^2} = \frac{4615{,}3846}{600} = 7{,}7$$

Por consiguiente, el valor del estadístico de contraste es:

$$t = \frac{20 - 25}{\sqrt{7{,}7}} = -1{,}80$$

Como el valor critico de la distribución t de Student con 13 grados de libertad al nivel de significación del 2,5 % es 2,16, se sigue que no se rechaza la hipótesis nula.

MRLS-8)

El modelo no tiene término independiente. El estimador mínimo cuadrático del parámetro β es justamente $\hat{\beta}_1$ y sabemos que es insesgado.

$$E\hat{\beta}_1 = E\left(\frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}\right) = E\left(\frac{\sum X_i(\beta X_i + \varepsilon_i)}{\sum X_i^2}\right) = E\left(\frac{\beta \sum X_i^2 + \sum X_i \varepsilon_i}{\sum X_i^2}\right) =$$
$$E\left(\beta + \frac{\sum X_i \varepsilon_i}{\sum X_i^2}\right) = \beta + \frac{\sum X_i E(\varepsilon_i)}{\sum X_i^2} = \beta$$

Asímismo:

$$E\hat{\beta}_2 = E\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}\right) = E\left(\frac{\sum Y_i}{\sum X_i}\right) = E\left(\frac{\sum (X_i\beta + \varepsilon_i)}{\sum X_i}\right) = E\left(\beta + \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum X_i}\right) = \beta + \frac{\sum E(\varepsilon_i)}{\sum X_i} = \beta$$

La varianza de $\hat{\beta}_1$ viene dada por:

$$\text{var}\,\hat{\beta}_1 = E\left(\hat{\beta}_1 - E\left(\hat{\beta}_1\right)\right)^2 = E\left(\frac{\sum X_i\varepsilon_i}{\sum X_i^2}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sum X_i^2\right)^2} E\left(\sum X_i\varepsilon_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{\left(\sum X_i^2\right)^2} E\left(\sum X_i^2\varepsilon_i^2 + 2\sum_{i<j} X_iX_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum X_i^2\right)^2}\left(\sum X_i^2 E(\varepsilon_i^2) + 2\sum_{i<j} X_iX_j E(\varepsilon_i\varepsilon_j)\right) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\left(\sum X_i^2\right)}$$

ya que $E\varepsilon_i^2 = \sigma_i^2 \;\; \forall i$ y $E\varepsilon_i\varepsilon_j = 0 \;\; \forall i \neq j$.

La varianza de $\hat{\beta}_2$ viene dada por:

$$\text{var}\,\hat{\beta}_2 = E\left(\hat{\beta}_2 - E\left(\hat{\beta}_2\right)\right)^2 = E\left(\frac{\sum \varepsilon_i}{\sum X_i}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sum X_i\right)^2} E\left(\sum \varepsilon_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{\left(\sum X_i\right)^2} E\left(\sum \varepsilon_i^2 + 2\sum_{i<j} \varepsilon_i\varepsilon_j\right) = \frac{1}{\left(\sum X_i\right)^2}\left(\sum E(\varepsilon_i^2)\right) = \frac{n\sigma_\varepsilon^2}{\left(\sum X_i\right)^2}$$

La varianza de $\hat{\beta}_1$ es más pequeña ya que:

$$\text{var}\,\hat{\beta}_2 - \text{var}\,\hat{\beta}_1 = \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{n}{\left(\sum X_i\right)^2} - \frac{1}{\sum X_i^2}\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}{\left(\sum X_i\right)^2 \sum X_i^2}\right)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{n\sum X_i^2 - n^2\overline{X}^2}{\left(\sum X_i\right)^2 \sum X_i^2}\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(\frac{n\sum x_i^2}{\left(\sum X_i\right)^2 \sum X_i^2}\right) > 0$$

MRLS-9)

Dada la información muestral, se sigue que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

Por tanto, se debería cumplir que:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X} = 8 - (1{,}5)\,(4) = 2$$

Sin embargo, $\hat{\beta}_0 = 3$. Por consiguiente, el resultado no es coherente.

MRLS10)

a) La estimación del parámetro β_1 viene dado por:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{956}{576} = 1{,}659722$$

La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SEC = \hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2 = 1586{,}7$$

Por consiguiente, el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{1586{,}7}{1634} = 0{,}9710$$

b) El estadístico de contraste es:

$$F = \frac{R^2}{\left(1 - R^2\right) / n - 2} = \frac{(8)\ (0{,}9710)}{1 - 0{,}9710} = 267{,}86$$

El valor del estadístico de contraste es muy alto, y por consiguiente, va a estar por encima del valor crítico al 5 % de nivel de significación de una distribución F de Snedecor con 1 grado de libertad en el numerador y 8 en el denominador. Por lo tanto, el regresor es significativo.

c) La varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$ viene dada por:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum x_i^2} = \frac{\sum e_i^2}{(n-2)\sum x_i^2} = \frac{SCT - SEC}{(n-2)\sum x_i^2} = \frac{1634 - 1586{,}7}{8\ .\ 576} = 0{,}010264$$

d) El estadístico de contraste es:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2}} = \frac{1{,}659722}{\sqrt{0{,}010264}} = 16{,}3823$$

Como el valor crítico de una distribución t de Student con 8 grados de libertad al nivel de significación del 2,5 % es 2,306, se sigue que se rechaza la hipótesis nula, y la variable explicativa es significativa.

B-EL MODELO DE REGRESIÓN LINEAL GENERAL

MRLG-1)

a) Dado que toda la información muestral viene medida en desviaciones con respecto a las medias muestrales, se pueden obtener primero las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a los regresores, y posteriormente encontrar la estimación para el termino independiente.

Sea x una matriz de orden $(n \times k)$ cuyas columnas son los valores de las variables explicativas en desviaciones con respecto a sus respectivas medias muestrales. Sea y un vector columna de orden $(n \times 1)$ cuyos elementos son los valores de la variable dependiente medidos en desviaciones con respecto a su media muestral. Dada la información muestral:

$$x'x = \begin{pmatrix} 100.000 & 9.000 \\ 9.000 & 850 \end{pmatrix} \qquad x'y = \begin{pmatrix} 8.000 \\ 700 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a las variables explicativas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (x'x)^{-1} x'y \qquad (2)$$

Dado que el determinante de la matriz $x'x$ es $|x'x| = 4.000.000$, la matriz $(x'x)^{-1}$ es:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{4.000.000} \begin{pmatrix} 850 & -9.000 \\ -9000 & 100.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0002125 & -0{,}00225 \\ -0{,}00225 & 0{,}025 \end{pmatrix}$$

De (1) y (2):

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0002125 & -0{,}00225 \\ -0{,}00225 & 0{,}025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.000 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

La estimación del término independiente se obtiene teniendo en cuenta que la línea de regresión pasa por el punto de medias muestrales:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 = 54 - (0{,}125)\,(300) + (0{,}5)\,(30) = 31{,}5$$

La estimación de la varianza de la perturbación aleatoria viene dada por:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{STC - SEC}{n-k-1} \qquad (3)$$

La suma total de cuadrados STC es un dato del problema. La suma de cuadrados explicada por la regresión se puede expresar como:

$$SEC = \hat{\beta}^{*'} x' x \hat{\beta}^{*} = \hat{\beta}^{*'} x' y = \begin{pmatrix} 0{,}125 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8000 \\ 700 \end{pmatrix} = 650 \qquad (4)$$

Por lo tanto, de (3) y (4):

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{670 - 650}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

b) La hipótesis objeto de contrastación es $H_0 : \beta_1 = 0$. Esta hipótesis se puede expresar como $H_0 : R\beta = r$, donde $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $r = 0$. Es una hipótesis simple que se puede contrastar utilizando un estadístico de contraste que sigue una distribución t de Student:

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{R(X'X)^{-1} R'}}$$

El denominador del estadístico es la desviación típica estimada del estimador $\hat{\beta}_1$. Teniendo en cuenta la expresión de R, el término $R(X'X)^{-1}R'$ selecciona el segundo elemento de la diagonal principal de la matriz $(X'X)^{-1}$. Se puede demostrar que la submatriz de orden (2×2) de la parte inferior derecha de la matriz $(X'X)^{-1}$ coincide con la matriz $(x'x)^{-1}$. Por consiguiente, el término $R(X'X)^{-1}R'$ será el primer elemento de la diagonal principal de la matriz $(x'x)^{-1}$.

El estadístico de contraste es:

$$\frac{0{,}125}{\sqrt{2}\sqrt{0{,}0002125}} = 6{,}0634$$

Dado que el valor critico de una distribución t con 10 grados de libertad es $2{,}228$, se rechaza la hipótesis nula y la renta disponible debe incluirse como regresor en la ecuación del modelo.

c) La hipótesis nula para un contraste de significatividad global es $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$. Esta hipótesis es una hipótesis conjunta y no puede contrastarse utilizando un estadístico que se distribuya como una t de Student. El estadístico de contraste que se puede utilizar es:

$$\frac{\dfrac{R^2}{k}}{\dfrac{1 - R^2}{n - k - 1}} \qquad (5)$$

que se distribuye como una F de Snedecor con k grados de libertad en el numerador y $n - k - 1$ en el denominador.

Teniendo en cuenta los resultados encontrados en el apartado a), el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{650}{670} = 0{,}97015$$

Sustituyendo en (5):

$$\frac{\frac{0{,}97015}{2}}{\frac{1-0{,}97015}{10}} = 162{,}50$$

El valor del estadístico de contraste es muy grande. Sin mirar en las tablas de la distribución F, se puede concluir que se rechaza la hipótesis nula y el modelo es globalmente significativo.

d) Se puede expresar lo que predice la teoría económica en forma de hipótesis contrastable, realizar el contraste y ver si se puede aceptar lo que dice la teoría. En nuestro caso, la hipótesis sería $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 0$, o $H_0 : R\beta = r$, donde $R = [0 \quad 1 \quad 1]$ y $r = 0$. Dado que la hipótesis es simple, se puede utilizar un estadístico que se distribuye como una t de Student con $n-k-1$ grados de libertad:

$$\frac{R\hat{\beta} - r}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{R(X'X)^{-1}R'}}$$

Alternativamente, se puede utilizar el estadístico

$$\frac{\frac{(R\hat{\beta} - r)[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r)}{q}}{\frac{e'e}{n-k-1}} \qquad (6)$$

que se distribuye, bajo la hipótesis nula, como una F de Snedecor con q grados de libertad en el numerador y $n-k-1$ grados de libertad en el denominador. El parámetro q es el número de filas de la matriz R. (En nuestro caso, $q = 1$)

$$R\hat{\beta} - r = [0 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} 31{,}5 \\ 0{,}125 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} = -0{,}375 \qquad (7)$$

$$R(X'X)^{-1}R' = [0 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0{,}0002125 & -0{,}00225 \\ a_{31} & -0{,}00225 & 0{,}025 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$[a_{12} + a_{13} \quad -0{,}0020375 \quad 0{,}02275]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0{,}0207125 \qquad (8)$$

donde a_{ij} denota el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz $(X'X)^{-1}$, $i, j = 1,2,3$. En el problema, no se tiene información suficiente para determinar los

valores de estos elementos. Sin embargo, como se sigue de (8), no es necesario conocerlos para realizar el contraste.

Sustituyendo (7) y (8) en (6):

$$\frac{(-0{,}375)^2}{(2)\,(0{,}0207125)} = 3{,}3946$$

Como el valor critico de la distribución F con 1 grado de libertad en el numerador y 10 grados de libertad en el denominador para un nivel de significatividad del 5 % es 4,96, no se rechaza la hipótesis nula. Por consiguiente, se estaría de acuerdo con lo que predice la teoría económica.

MRLG-2)

a) Modelo No Restringido

<u>Área urbana</u>

El determinante de la matriz $X'X$ es 100. Por tanto:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros son:

$$\hat{\beta}_U = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{0U} \\ \hat{\beta}_{1U} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} 0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La suma de cuadrados explicada por la regresión viene dada por:

$$SEC_U = \hat{\beta}_{1U}^2 \sum x_{iU}^2 = \hat{\beta}_{1U}^2 \left(\sum X_{iU}^2 - n_U \overline{X}_U^2\right) = 2^2(25-20) = 20$$

dado que la suma de los valores de la variable explicativa al cuadrado es el segundo elemento de la diagonal principal de la matriz $(X'X)$ y la media de la variable explicativa es la suma de los valores de X, que viene dada por el segundo elemento de la primera fila de la matriz $(X'X)$, dividida por el tamaño muestral.

La suma total de cuadrados es:

$$STC_U = \sum y_{iU}^2 = \sum Y_{iU}^2 - n_U \overline{Y}_U^2 = 30 - 20\,(0{,}5^2) = 25$$

dado que la media de la variable dependiente es la suma de sus valores, que viene dada por el primer elemento del vector $X'Y$, dividida por el tamaño muestral.

Por consiguiente, la suma de los cuadrados de los residuos en el área urbana es:

$$SCR_U = STC_U - SEC_U = 25 - 20 = 5$$

<u>Área rural</u>

El determinante de la matriz $X'X$ es 100. Por tanto:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros son:

$$\hat{\beta}_R = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{0R} \\ \hat{\beta}_{1R} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

La suma de cuadrados explicada por la regresión viene dada por:

$$SEC_R = \hat{\beta}_{1R}^2 \sum x_{iR}^2 = \hat{\beta}_{1R}^2 \left(\sum X_{iR}^2 - n_R \overline{X}_R^2\right) = 0{,}8^2 (20 - 10) = 6{,}4$$

dado que la suma de los valores de la variable explicativa al cuadrado es el segundo elemento de la diagonal principal de la matriz $(X'X)$ y la media de la variable explicativa es la suma de los valores de X, que viene dada por el segundo elemento de la primera fila de la matriz $(X'X)$, dividida por el tamaño muestral.

La suma total de cuadrados es:

$$STC_R = \sum y_{iR}^2 = \sum Y_{iR}^2 - n_R \overline{Y}_R^2 = 18 - 10\,(0{,}8^2) = 11{,}6$$

dado que la media de la variable dependiente es la suma de sus valores, que viene dada por el primer elemento del vector $X'Y$, dividida por el tamaño muestral.

Por consiguiente, la suma de los cuadrados de los residuos en el área rural es:

$$SCR_R = STC_R - SEC_R = 11{,}6 - 6{,}4 = 5{,}2$$

La suma de los cuadrados de los residuos del modelo no restringido es:

$$SCR = e'e = SCR_U + SCR_R = 5 + 5{,}2 = 10{,}2$$

b) Modelo Restringido

La estimación de la pendiente de la línea de regresión es:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}$$

donde, para calcular las medias muestrales y los sumatorios, se tiene en cuenta toda la muestra (urbana y rural). Por consiguiente:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{20+10}{20+10} = 1$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{10+8}{20+10} = 0{,}6$$

Por lo tanto:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(20+16)-(30)\,(1)\,(0{,}6)}{(25+20)-(30)\,(1)} = \frac{18}{15} = 1{,}2$$

La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SECR = \hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2 = 1{,}2^2\ .15 = 21{,}6$$

La suma total de cuadrados es:

$$STCR = \sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - n\overline{Y} = (30+18) - (30)\,(0{,}6^2) = 37{,}2$$

La suma de los cuadrados de los residuos es:

$$SCRR = STCR - SECR = 37{,}2 - 21{,}6 = 15{,}6$$

c) Contraste de Chow

El estadístico para el contraste de Chow es $\dfrac{\dfrac{SCTT - SCR}{k+1}}{\dfrac{SCR}{n-2(k+1)}}$, el cual sigue una distribución F de Snedecor con $k+1$ grados de libertad en el numerador y $n-2(k+1)$ grados de libertad en el denominador, donde k es el número de variables explicativas. En nuestro caso, $k=1$. Nótese que los grados de libertad del denominador son el tamaño muestral total menos el número de parámetros estimados en el modelo no restringido (en nuestro caso, se han estimado 4 parámetros). Teniendo en cuenta los resultados anteriores, el valor del estadístico de contraste es:

$$\frac{\dfrac{15{,}6-10{,}2}{2}}{\dfrac{10{,}2}{26}} = 6{,}8823$$

El valor crítico de la distribución F con 2 grados de libertad en el numerador y 26 en el denominador es más pequeño que el valor del estadístico de contraste. Por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula de que no ha habido cambio estructural.

MRLG-3)

a) Dada la información muestral, tenemos:

$$x'x = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad x'y = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a las variables explicativas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (x'x)^{-1} x'y$$

Se necesita invertir la matriz $x'x$. El determinante de dicha matriz es: $|x'x| = 25$. Por consiguiente, la matriz inversa es:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

De (9) y (10):

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

La estimación del término independiente viene dada por:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 = 40 - (2)\,(3) - (16)\,(2) = 2$$

b) La suma total de cuadrados STC es un dato del problema. La suma de cuadrados explicada por la regresión se puede expresar como:

$$SEC = \hat{\beta}^{*'} x'x \hat{\beta}^* = \hat{\beta}^{*'} x'y = \begin{pmatrix} 2 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix} = 1640$$

Por lo tanto, la suma de los cuadrados de los residuos es:

$$SCR = e'e = STC - SEC = 2000 - 1640 = 360$$

c) La hipótesis objeto de contrastación es $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$. El estadístico de contraste que se puede utilizar es:

$$\frac{\dfrac{R^2}{k}}{\dfrac{1-R^2}{n-k-1}} \qquad (11)$$

que se distribuye como una F de Snedecor con k grados de libertad en el numerador y $n-k-1$ en el denominador.

Teniendo en cuenta los resultados encontrados en el apartado a), el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{1640}{2000} = 0{,}82$$

Sustituyendo en (11):

$$\frac{\frac{0{,}82}{2}}{\frac{1-0{,}82}{18}} = 41$$

El valor del estadístico de contraste es muy grande. Sin mirar en las tablas de la distribución F podemos concluir que se rechazará la hipótesis nula, y el modelo es globalmente significativo.

d) La afirmación se puede escribir en forma de hipótesis contrastable. La hipótesis es $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 15$. Alternativamente, $H_0 : R\beta = r$, donde el vector $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $r = 15$. Dado que la hipótesis es simple, utilizaremos un estadístico de contraste que se distribuye como una t de Student con $n-k-1$ grados de libertad:

$$\frac{R\hat{\beta} - r}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{R(X'X)^{-1}R'}}$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores:

$$R\hat{\beta} - r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix} - 15 = 3$$

$$R(X'X)^{-1}R' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0{,}2 & -0{,}2 \\ a_{31} & -0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} + a_{31} & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0{,}2$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{360}{18} = 20$$

donde a_{ij} denota el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz $(X'X)^{-1}$, $i, j = 1,2,3$.

Sustituyendo en la expresión del estadístico de contraste:

$$\frac{3}{\sqrt{20 \,.\, 0{,}2}} = 1{,}5$$

Como el valor critico de la distribución t con 18 grados de libertad es 2,101, se sigue que no se rechazaría la hipótesis nula. Por consiguiente, se estaría de acuerdo con lo que predice la afirmación.

MRLG-4)

a) Se debe contrastar la hipótesis $H_0 : \beta_1 = 0$. Para ello, hay que estimar el modelo y calcular la desviación típica estimada del estimador $\hat{\beta}_1$. Si nos fijamos en la matriz $X'X$, vemos que las medias muestrales de las variables X_1 y X_2 son cero. Por consiguiente, la información muestral de las variables explicativas ya viene en desviaciones con respecto a las medias muestrales:

$$x'x = \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 20 & 60 \end{bmatrix} \qquad x'y = \begin{bmatrix} 24 \\ 92 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz $x'x$ es 2000. Por consiguiente:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{2000}\begin{bmatrix} 60 & -20 \\ -20 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}03 & -0{,}01 \\ -0{,}01 & 0{,}02 \end{bmatrix}$$

La estimación de los parámetros que acompañan a los regresores es:

$$\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (x'x)^{-1}x'y = \begin{bmatrix} 0{,}03 & -0{,}01 \\ -0{,}01 & 0{,}02 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}2 \\ 1{,}6 \end{bmatrix}$$

La varianza del estimador $\hat{\beta}_1$ viene dada por $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \,.\, a_{11}$, donde a_{11} es el elemento $(1{,}1)$ de la matriz $x'x$. Por lo tanto, se necesita primero derivar la varianza estimada de la perturbación aleatoria. Para ello, se calcula la suma de los cuadrados de los residuos. La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SEC = \hat{\beta}^{*'}x'x\hat{\beta}^* = \hat{\beta}^{*'}x'y = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 1{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 92 \end{bmatrix} = 142{,}4$$

Por consiguiente, la suma de los cuadrados de los residuos es:

$$SCR = STC - SEC = 150 - 142{,}4 = 7{,}6$$

La varianza estimada de la perturbación aleatoria es:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{SCR}{n-k-1} = \frac{7{,}6}{30} = 0{,}253$$

La varianza del estimador $\hat{\beta}_1$ es:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = 0{,}253 \,.\, 0{,}03 = 0{,}0076$$

El estadístico de contraste es:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}}} = \frac{-0{,}2}{\sqrt{0{,}0076}} = 2{,}3$$

En las tablas estadísticas de la distribución t se puede comprobar que el valor crítico de la distribución t con 30 grados de libertad es menor que el valor del estadístico de contraste. Por consiguiente, se rechazaría la hipótesis nula y la variable X_1 se debería incluir como variable explicativa.

b) El modelo restringido sería el que se obtiene si se impone en el modelo original la hipótesis $H_0 : \beta_1 = 0$: $Y_i = \beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$. Nótese que el modelo restringido solo tiene una variable explicativa y, por consiguiente, es un modelo lineal simple. La estimación restringida del parámetro β_2 viene dada por:

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\sum x_{2i} y_i}{\sum x_{2i}^2} = \frac{92}{60} = 1{,}5333$$

Nótese que la suma total de cuadrados del modelo restringido STCR es igual a la del modelo no restringido STC. Sin embargo, la suma de cuadrados explicada por la regresión en el modelo restringido es diferente:

$$SECR = \tilde{\beta}_2^2 \sum x_{2i}^2 = 1{,}53333^2 \ . \ 60 = 141{,}0666$$

Por lo tanto, la suma de los cuadrados de los residuos es:

$$SCRR = STCR - SECR = 150 - 141{,}0666 = 8{,}93334$$

Para contrastar si la variable X_1 se debería incluir en el modelo se puede utilizar el siguiente estadístico de contraste:

$$\frac{\dfrac{SCRR - SCR}{1}}{\dfrac{SCR}{n-k-1}}$$

que se distribuye como una F de Snedecor con 1 grado de libertad en el numerador (debido a que la hipótesis es una hipótesis simple y solo hay un parámetro en ella) y $n-k-1$ grados de libertad en el denominador (el número de parámetros que estimamos en el modelo no restringido). En la formula del estadístico, SCR denota la suma de cuadrados de los residuos del modelo original no restringido. Por consiguiente, el valor del estadístico de contraste es:

$$\frac{8{,}93334 - 7{,}6}{\left(\dfrac{7{,}6}{30}\right)} = 5{,}2631$$

El valor crítico de la distribución F con 1 grado de libertad en el numerador y 30 en el denominador para un nivel de significatividad del 5 % es 4,17. Por consiguiente, se rechazaría la hipótesis nula.

MRLG-5)

a) Dada la información muestral, tenemos:

$$x'x = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \qquad x'y = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a las variables explicativas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (x'x)^{-1} x'y \qquad (13)$$

Se necesita invertir la matriz $x'x$. El determinante de dicha matriz es: $|x'x| = 80$. Por consiguiente, la matriz inversa es:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}15 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

De (12) y (13):

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}15 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

La estimación del término independiente viene dada por:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 = 10 - (0{,}7)\,(6) + (0{,}2)\,(4) = 5$$

b) La estimación de la varianza de la perturbación aleatoria viene dada por:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{STC - SEC}{n-k-1} \qquad (14)$$

La suma total de cuadrados STC es un dato del problema. La suma de cuadrados explicada por la regresión se puede expresar como:

$$SEC = \hat{\beta}^{*'} x'x \hat{\beta}^* = \hat{\beta}^{*'} x'y = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = 8{,}6 \qquad (15)$$

Por lo tanto, de (14) y (15):

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{10 - 8{,}6}{20} = 0{,}7$$

Nótese que la suma de cuadrados de residuos es 1,4. Las varianzas estimadas de los estimadores mínimo-cuadráticos son:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\ a_{11} = 0{,}7\ .\ 0{,}15 = 0{,}105$$
$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\ a_{22} = 0{,}7\ .\ 0{,}15 = 0{,}105$$

donde a_{11} y a_{22} son los elementos de la diagonal principal de $(x'x)^{-1}$.

c) La hipótesis nula para un contraste de significatividad global es $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$. El estadístico de contraste que se utiliza es:

$$\frac{\dfrac{R^2}{k}}{\dfrac{1-R^2}{n-k-1}} \qquad (16)$$

que se distribuye como una F de Snedecor con k grados de libertad en el numerador y $n-k-1$ en el denominador.

Teniendo en cuenta los resultados encontrados en el apartado b), el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{8{,}6}{10} = 0{,}86$$

Sustituyendo en (16):

$$\frac{\dfrac{0{,}86}{2}}{\dfrac{1-0{,}86}{10}} = 30{,}7142$$

El valor del estadístico de contraste es muy grande. Sin mirar en las tablas de la distribución F se puede concluir que se rechazará la hipótesis nula, y el modelo es globalmente significativo.

d) La hipótesis de rendimientos constantes a escala se puede expresar como $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$. Si imponemos en el modelo dicha hipótesis, tendríamos:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + (1-\beta_1)X_{2i} + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1(X_{1i} - X_{2i}) + X_{2i} + \varepsilon_i$$

O lo que es lo mismo:

$$Y_i - X_{2i} = \beta_0 + \beta_1(X_{1i} - X_{2i}) + \varepsilon_i$$

Este sería el modelo restringido. Nótese que es un modelo lineal simple donde la variable dependiente es $Y_i - X_{2i}$ y la variable explicativa es $X_{1i} - X_{2i}$. La estimación restringida del parámetro β_1 viene dada por:

$$\widetilde{\beta}_1 = \frac{\sum (y_i - x_{2i})(x_{1i} - x_{2i})}{\sum (x_{1i} - x_{2i})^2} = \frac{\sum y_i x_{1i} - \sum y_i x_{2i} - \sum x_{1i} x_{2i} + \sum x_{2i}^2}{\sum x_{1i}^2 + \sum x_{2i}^2 - 2\sum x_{1i} x_{21}}$$
$$= \frac{10 - 8 - 8 + 12}{12 + 12 - 16} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

e) Para calcular la suma de los cuadrados de los residuos del modelo restringido, se deben determinar la suma total de cuadrados (en este caso, no coincide con la del modelo no restringido ya que la variable dependiente del modelo restringido es diferente) y la suma de cuadrados explicada por la regresión.

La suma total de cuadrados viene definida por:

$$STCR = \sum (y_i - x_{2i})^2 = \sum y_i^2 + \sum x_{2i}^2 - 2\sum y_i x_{2i} = 10 + 12 - 16 = 6$$

La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SECR = \widetilde{\beta}_1^2 \sum (x_{1i} - x_{2i})^2 = 0{,}75^2 \,.\, 8 = 4{,}5$$

Por consiguiente, la suma de residuos al cuadrado del modelo restringido es:

$$SCRR = STCR - SECR = 6 - 4{,}5 = 1{,}5$$

f) El estadístico de contraste es:

$$\frac{\dfrac{SCRR - SCR}{1}}{\dfrac{SCR}{n-k-1}} = \frac{1{,}5 - 1{,}4}{1{,}4/20} = 1{,}4285$$

El valor crítico de la distribución F con 1 grado de libertad en el numerador y 20 en el denominador al nivel de significación del 5 % es 4,35. Por consiguiente, no se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$.

g) La hipótesis nula de la existencia de rendimientos a escala se puede expresar como $H_0 : R\beta = r$, donde $R = [0 \quad 1 \quad 1]$ y $r = 1$. Para contrastar dicha hipótesis sin utilizar el modelo restringido se puede utilizar el estadístico de contraste

$$\frac{R\hat{\beta} - r}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{R(X'X)^{-1} R'}} \tag{17}$$

que se distribuye como una t de Student con $n - k - 1$ grados de libertad.

Teniendo en cuenta los resultados del apartado a):

$$R\hat{\beta} - r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0,7 \\ 0,2 \end{bmatrix} - 1 = -0,1 \qquad (18)$$

$$R(X'X)^{-1}R' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0,15 & -0,1 \\ a_{31} & -0,1 & 0,15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} + a_{31} & 0,05 & 0,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,1 \quad (19)$$

donde a_{ij} denota el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz $(X'X)^{-1}$, $i, j = 1,2,3$. Teniendo en cuenta (18) y (19) así como el valor de la estimación de la varianza de las perturbaciones encontrado en el apartado b), el valor del estadístico de contraste de (17) sería:

$$\frac{-0,1}{\sqrt{(0,7)\,(0,1)}} = -0,378$$

Dado que el valor critico de una distribución t de Student con 20 grados de libertad para un nivel de significación del 2,5 % es 2,086, se sigue que no se rechaza la hipótesis nula de existencia de rendimientos constantes a escala.

MRLG-6)

Modelo No Restringido

Con la información muestral dada, las estimaciones de las pendientes de las líneas de regresión para cada periodo, así como el cálculo de las correspondientes sumas de los cuadrados de los residuos se recogen en la siguiente tabla:

	1955-1974	1975-2004
$\hat{\beta}_1$	$\frac{60}{80} = 0,75$	$\frac{70}{100} = 0,7$
STC	50	60
SEC	$0,75^2 \,.\, 80 = 45$	$0,7^2 \,.\, 100 = 49$
SCR	$50 - 445 = 5$	$60 - 49 = 11$

Por consiguiente, la suma de los cuadrados de los residuos del modelo no restringido será igual a la suma de la suma de los cuadrados de los residuos de cada periodo:

$$e'e = 5 + 11 = 16$$

Modelo Restringido

En el modelo restringido, se considera que el intercepto y la pendiente de la línea de regresión se mantienen constantes para toda la muestra. La siguiente tabla recoge la estimación de dicha pendiente, así como la suma de los cuadrados de los residuos:

	1955-2004
$\tilde{\beta}$	$\frac{130}{180} = 0{,}7222$
STCR	158
SECR	$0{,}7222^2 \,.\, 180 = 93{,}888$
SCRR	$158 - 93{,}888 = 64{,}112$

El estadístico de contraste es:

$$\frac{\dfrac{SCRR - SCR}{k+1}}{\dfrac{SCR}{n-2(k+1)}} = \frac{64{,}112 - 16/2}{16/46} = 69{,}15$$

Dado el alto valor del estadístico de contraste, se rechazaría la hipótesis nula de que no ha habido cambio estructural, y se concluiría que no se puede aceptar que la relación entre las variables postulada en el modelo se mantenga para los dos periodos. De un periodo a otro se producen variaciones en el intercepto y la pendiente de la línea de regresión.

MRLG-7)

a) Dada la información muestral, tenemos:

$$x'x = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \qquad x'y = \begin{pmatrix} 60 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Se necesita invertir la matriz $x'x$. El determinante de dicha matriz es 20. Por lo tanto:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a los regresores son:

$$\hat{\beta}^* = (x'x)^{-1}x'y = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la variable X_2 es significativa se debe contrastar la hipótesis $H_0 : \beta_2 = 0$. Para determinar el valor del estadístico de contraste (la estimación mínimo-cuadrática del parámetro de la hipótesis nula dividida por la desviación típica estimada del estimador del parámetro), primero, debemos encontrar la varianza del

estimador $\hat{\beta}_2$, la cual viene dada por $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 a_{33}$, donde a_{33} es el tercer elemento de la diagonal principal de la matriz $(X'X)^{-1}$. Dicho elemento coincide con el segundo elemento de la diagonal principal de la matriz $(x'x)^{-1}$, que es $1{,}5$. La estimación de la varianza de las perturbaciones viene dada por:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{STC - SEC}{n-k-1} = \frac{\sum y_i^2 - \hat{\beta}^{*'} x' y}{n-k-1} = \frac{168-126}{42} = 1$$

Por consiguiente, la varianza del estimador $\hat{\beta}_2$ es $1{,}5$. El estadístico de contraste viene dado por:

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2}} = \frac{3}{\sqrt{1{,}5}} = 1{,}7320$$

El valor crítico de la distribución t de Student con 42 grados de libertad es mayor que el valor del estadístico de contraste. Por consiguiente, no se rechaza la hipótesis nula y la variable X_2 resulta ser no significativa.

b) El estadístico de contraste utilizado para contrastar la significatividad global del modelo es:

$$F = \frac{\dfrac{R^2}{k}}{\dfrac{(1-R^2)}{n-k-1}} = \frac{\dfrac{0{,}75}{2}}{\dfrac{0{,}25}{42}} = 63$$

donde se ha hecho uso de la definición del coeficiente de determinación $R^2 = \dfrac{SEC}{STC} = \dfrac{\hat{\beta}^{*'} x' y}{\sum y_i^2} = \dfrac{126}{168} = 0{,}75$. Dado el alto valor del estadístico de contraste, se rechaza la hipótesis nula que los parámetros que acompañan a los regresores son cero. Por consiguiente, el modelo es globalmente significativo.

c) $H_0 : 2\beta_1 = \beta_2$

En este caso, $R = [0 \quad 2 \quad -1]$ y $r = 0$. El estadístico de contraste es $\dfrac{R\hat{\beta} - r}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{R(X'X)^{-1} R'}}$,

donde:

$$R\hat{\beta} - r = [0 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -1$$

y

$$R(X'X)^{-1} R = [0 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0{,}2 & -0{,}5 \\ a_{31} & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [2a_{21} - a_{13} \quad 0{,}9 \quad -2{,}5] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 4{,}3$$

donde a_{ij} denota el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz $(X'X)^{-1}$, $i, j = 1,2,3$. Por lo tanto, el valor del estadístico de contraste es: $\frac{-1}{\sqrt{4,3}} = -0,4822$, que es menor en valor absoluto que el valor crítico correspondiente. Por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula.

MRLG-8)

El coeficiente de determinación aumenta con el número de variables explicativas incluidas, sean o no sean relevantes. En este caso, cuando se estima el modelo con solo una variable explicativa, el coeficiente de determinación es mayor que el que se obtiene cuando se estima el modelo con dos variables explicativas. Por consiguiente, esos valores de los coeficientes de determinación no son coherentes. Sin embargo, los valores de los coeficientes de determinación corregidos sí son coherentes. El coeficiente de determinación corregido penaliza la inclusión de variables no significativas en el modelo. En este caso, la variable X_1 no es significativa. Cuando dicha variable se incluye, el coeficiente de determinación corregido debe ser menor que cuando es excluida, y no mayor como indican los valores en el enunciado de la pregunta.

MRLG-9)

a) Dada la información muestral, tenemos:

$$x'x = \begin{pmatrix} 30 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix} \qquad x'y = \begin{pmatrix} 20 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Se necesita invertir la matriz $x'x$. El determinante de dicha matriz es 500. Por lo tanto:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{500}\begin{bmatrix} 100 & -50 \\ -50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & 0,06 \end{bmatrix}$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a los regresores son:

$$\hat{\beta}^* = (x'x)^{-1}x'y = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & 0,06 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,7 \end{bmatrix}$$

Si asumimos que la media muestral de la variable dependiente es la del apartado b), entonces:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}_1 - \hat{\beta}_2\overline{X}_2 = 5 + (0,5)\,(6) - (0,7)\,(10) = 1$$

b) Para determinar la bondad del ajuste mínimo-cuadrático, se debe calcular el coeficiente determinación. La suma explicada de cuadrados viene dada por:

$$STC = \sum y_i^2 = Y'Y - n\overline{Y}^2 = 600 - (23)\,(5^2) = 25$$

La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SEC = \hat{\beta}^{*'} x' x \hat{\beta}^{*} = \hat{\beta}^{*'} x' y = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 45 \end{bmatrix} = 21{,}5$$

Por consiguiente, el coeficiente de determinación es:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{21{,}5}{25} = 0{,}86$$

El coeficiente de determinación ajustado es:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}\left(1 - R^2\right) = 1 - \frac{22}{20}\,0{,}14 = 0{,}846$$

c) Se debe contrastar la hipótesis $H_0 : \beta_2 = 0$. La estimación de la varianza de las perturbaciones viene dada por:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{STC - SEC}{n-k-1} = \frac{25 - 21{,}5}{20} = 0{,}175$$

La varianza del estimador $\hat{\beta}_2$ es:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2 = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \,.\, a_{33} = 0{,}175 \,.\, 0{,}06 = 0{,}0105$$

donde a_{33} es el tercer elemento de la diagonal principal de la matriz $\left(X'X\right)^{-1}$, o alternativamente, el elemento segundo de la diagonal principal de la matriz $\left(x'x\right)^{-1}$.

El estadístico de contraste viene dado por:

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}^2}} = \frac{0{,}7}{\sqrt{0{,}0105}} = 6{,}8313$$

El valor crítico de la distribución t de Student con 20 grados de libertad es 2,086, que es menor que el valor del estadístico de contraste. Por consiguiente, se rechaza la hipótesis nula y la variable X_2 es significativa. La variable renta se debe incluir en la ecuación del modelo.

d) La hipótesis sería $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 0$, o $H_0 : R\beta = r$, donde $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $r = 0$. Dado que la hipótesis es simple, se puede utilizar un estadístico que se distribuye como una t de Student con $n-k-1$ grados de libertad:

$$\frac{R\hat{\beta} - r}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}\sqrt{R\left(X'X\right)^{-1}R'}}$$

$$R\hat{\beta} - r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} = 0{,}2$$

$$R(X'X)^{-1}R' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0{,}2 & -0{,}1 \\ a_{31} & -0{,}1 & 0{,}06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} & 0{,}1 & -0{,}04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0{,}06$$

donde a_{ij} denota el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz $(X'X)^{-1}$, $i, j = 1,2,3$.

Sustituyendo en la expresión del estadístico de contraste:

$$\frac{0{,}2}{\sqrt{(0{,}175)(0{,}06)}} = 1{,}9518$$

Como el valor critico de la distribución t de Student con 20 grados de libertad para un nivel de significatividad del 5 % es 2,086, se sigue que no se rechazaría la hipótesis nula. Por consiguiente, el efecto del precio y de la renta en la variable dependiente es de igual magnitud, pero de signo contrario.

e) Si se impone la hipótesis del apartado anterior en el modelo tendríamos:

$$Y_i = \beta_0 - \beta_2 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_2 (X_{2i} - X_{1i}) + \varepsilon_i$$

La estimación restringida del parámetro β_2 viene dada por:

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\sum y_i (x_{2i} - x_{1i})}{\sum (x_{2i} - x_{1i})^2} = \frac{\sum y_i x_{2i} - \sum y_i x_{1i}}{\sum x_{1i}^2 + \sum x_{2i}^2 - 2\sum x_{1i} x_{21}}$$
$$= \frac{45 - 20}{30 + 100 - 100} = \frac{25}{30} = 0{,}833333$$

f) El modelo del apartado anterior es el modelo restringido. Para calcular la suma de los cuadrados de los residuos del modelo restringido, primero, se deben determinar la suma total de cuadrados (en este caso, coincide con la del modelo no restringido ya que la variable dependiente de ambos modelos es la misma) y la suma de cuadrados explicada por la regresión.

La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SECR = \tilde{\beta}_2^2 \sum (x_{2i} - x_{1i})^2 = (0{,}833333^2)\,(30) = 20{,}83$$

Por consiguiente, la suma de residuos al cuadrado del modelo restringido es:

$$SCRR = SCT - SECR = 25 - 20{,}83 = 4{,}17$$

El estadístico de contraste es:

$$\frac{\dfrac{SCRR - SCR}{1}}{\dfrac{SCR}{n-k-1}} = \frac{4{,}17 - 3{,}5}{3{,}5/20} = 3{,}8285$$

donde se ha tenido en cuenta que la suma de cuadrados de los residuos del modelo no restringido es 3,5. El valor crítico de la distribución F con 1 grado de libertad en el numerador y 20 en el denominador al nivel de significación del 5 % es 4,35. Por consiguiente, no se rechaza la hipótesis nula.

MRLG-10)

Para contrastar esta hipótesis conjunta, primero se debe estimar el modelo. El determinante de la matriz $x'x$ es 80. Por consiguiente:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}15 \end{bmatrix}$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a los regresores son:

$$\hat{\beta}^* = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (x'x)^{-1} x'y = \begin{bmatrix} 0{,}15 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

La hipótesis nula se puede escribir como $H_0 : R\beta = r$ donde

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La primera fila de la matriz R recoge la restricción en la hipótesis nula relativa al coeficiente β_1 y la segunda fila la restricción del coeficiente β_2.

El estadístico de contraste es:

$$\frac{\dfrac{(R\hat{\beta} - r)\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}(R\hat{\beta} - r)}{q}}{\dfrac{e'e}{n-k-1}}$$

donde $q = 2$ (el número de filas de la matriz R). Dicho estadístico se distribuye, bajo la hipótesis nula, como una F de Snedecor con q grados de libertad en el numerador y $n-k-1$ en el numerador. Para obtener el valor del estadístico, se necesita conocer la suma de los cuadrados de los residuos $e'e$.

Teniendo en cuenta la estimación de los parámetros, la suma de cuadrados explicada por la regresión se puede expresar como:

$$SEC = \hat{\beta}^{*'} x' x \hat{\beta}^{*} = \hat{\beta}^{*'} x' y = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = 8{,}6 \qquad (15)$$

La suma total de cuadrados STC es un dato del problema: $y'y = 10$. Por lo tanto, la suma de cuadrados de los residuos es: $e'e = y'y - SEC = 10 - 8{,}6 = 1{,}4$.

Para el numerador del estadístico de contraste, se necesita:

$$R\hat{\beta} - r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ 0{,}7 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$R(X'X)^{-1}R' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0{,}15 & -0{,}1 \\ a_{31} & -0{,}1 & 0{,}15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{21} & 0{,}15 & -0{,}1 \\ a_{31} & -0{,}1 & 0{,}15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}15 \end{bmatrix}$$

donde a_{ij} denota el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz $(X'X)^{-1}$, $i, j = 1,2,3$.

Nótese que esta matriz de orden (2×2) es la matriz $(x'x)^{-1}$. Esto es debido a que la matriz $R = [0 \vdots I_2]$, donde I_2 es la matriz identidad de orden (2×2) y 0 es un vector columna de ceros de orden (2×1). Por consiguiente, $\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} = x'x$.

El estadístico de contraste es:

$$\frac{\dfrac{\begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}}{2}}{\dfrac{1{,}4}{20}} = \frac{6}{1{,}4} = 4{,}2857$$

El valor crítico de una distribución F con 2 grados de libertad en el numerador y 20 en el denominador al nivel de significación del 5 % es 3,49. Por consiguiente, se rechazaría la hipótesis nula. Si el nivel de significación fuera del 1 %, el valor crítico de la distribución sería 5,85 y la hipótesis nula no se rechazaría.

MRLG-11)

La suma de los cuadrados de los residuos se puede expresar como $e'e = Y'MY$, donde la matriz $M = I - X^*\left(X^{*'}X^*\right)^{-1}X^{*'}$ es idempotente con rango y traza igual a $n-k-s$. Dado que el modelo verdadero es $Y = X_1\beta_1 + \varepsilon$, se sigue que:

$$\begin{aligned} e'e &= \left(X_1\beta_1 + \varepsilon\right)'M\left(X_1\beta_1 + \varepsilon\right) = \left(\varepsilon' + \beta'_1 X'_1\right)M\left(X_1\beta_1 + \varepsilon\right) \\ &= \varepsilon' M\varepsilon + 2\beta'_1 X'_1 M\varepsilon + \beta'_1 X'_1 MX_1\beta = \varepsilon' M\varepsilon \end{aligned}$$

ya que $MX_1 = 0$. Tomando esperanzas matemáticas, se obtiene:

$$E\left(e'e\right) = E\left(\varepsilon' M\varepsilon\right) = \sigma_\varepsilon^2 \; traza\left(M\right) = \left(n-k-s\right)\sigma_\varepsilon^2$$

Por lo tanto:

$$E\left(\hat{\sigma}_\varepsilon^2\right) = E\left(\frac{e'e}{n-k-s}\right) = \frac{E\left(e'e\right)}{n-k-s} = \sigma_\varepsilon^2$$

MRLG-12)

a) Dada la información muestral, tenemos:

$$x'x = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \qquad x'y = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a las variables explicativas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \left(x'x\right)^{-1}x'y$$

Se necesita invertir la matriz $x'x$. El determinante de dicha matriz es: $\left|x'x\right| = 4$. Por consiguiente, la matriz inversa es:

$$\left(x'x\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

La estimación del término independiente viene dada por:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}_1 - \hat{\beta}_2\overline{X}_2 = 4 + (1{,}5)\;(2) - (2{,}5)\;(1) = 4{,}5$$

b) La hipótesis nula para un contraste de significatividad global es $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$. El estadístico de contraste que se utiliza es:

$$\frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{n-k-1}}$$

que se distribuye como una F de Snedecor con k grados de libertad en el numerador y $n-k-1$ en el denominador.

Para obtener el coeficiente de determinación, se necesita calcular la suma de cuadrados explicada por la regresión y la suma total de cuadrados. La suma total de cuadrados STC es un dato del problema. La suma de cuadrados explicada por la regresión se puede expresar como:

$$SEC = \hat{\beta}^{*'} x' x \hat{\beta}^* = \hat{\beta}^{*'} x' y = \begin{pmatrix} -1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix} = 26{,}5$$

El coeficiente de determinación es:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{26{,}5}{30} = 0{,}88333$$

El estadístico de contraste es:

$$\frac{\frac{0{,}88333}{2}}{\frac{1-0{,}88333}{10}} = 37{,}856$$

El valor del estadístico de contraste es muy grande. Sin mirar en las tablas de la distribución F, se puede concluir que se rechazará la hipótesis nula, y el modelo es globalmente significativo.

c) Cuando las variables del modelo vienen expresadas en logaritmos, los parámetros miden la elasticidad de la variable dependiente en relación con la variable explicativa correspondiente. En nuestro caso, la elasticidad-precio de la demanda de café es el parámetro β_1 y la hipótesis a contrastar es $H_0 : \beta_1 = -1{,}2$. El estadístico de contraste es:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 + 1{,}2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}}}$$

La varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$ es $\hat{\sigma}^2_\varepsilon \,.\, a_{22}$, donde a_{22} es el segundo elemento de la diagonal principal de la matriz $(X'X)^{-1}$, o alternativamente, el primer elemento de la diagonal principal de la matriz $(x'x)^{-1}$. La estimación de la varianza de la perturbación aleatoria viene dada por:

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{STC - SEC}{n-k-1} = \frac{30-26{,}5}{10} = 0{,}35$$

La varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\ a_{22} = 0{,}35\ .\ 2{,}5 = 0{,}875$$

Por consiguiente, el valor del estadístico de contraste es:

$$t = \frac{-1{,}5 + 1{,}2}{\sqrt{0{,}875}} = -0{,}3207$$

Un valor tan pequeño del estadístico (inferior en valor absoluto al valor crítico de una distribución t de Student con 10 grados de libertad) implica que no se rechazaría la hipótesis nula. Por consiguiente, se estaría de acuerdo con la afirmación de que la elasticidad-precio de la demanda de café es –1,2.

c) La elasticidad-precio cruzada de la demanda de café viene dada por el parámetro β_2. Si se asume *a priori* que $\beta_1 = -1{,}2$, el modelo restringido quedaría como $Y_i = \beta_0 - 1{,}2X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, que se puede escribir como:

$$Y_i + 1{,}2X_{1i} = \beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

El modelo restringido sería un modelo lineal simple donde la variable dependiente es $Y_i + 1{,}2X_{1i}$ y la variable explicativa X_{2i}. Por lo tanto, la estimación restringida de la elasticidad-precio cruzada de la demanda de café es:

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\sum (y_i + 1{,}2x_{1i})x_{2i}}{\sum x_{2i}^2} = \frac{\sum y_i x_{2i} + 1{,}2\sum x_{1i}x_{21}}{\sum x_{2i}^2} = \frac{16 + (1{,}2)\ (6)}{10} = 2{,}32$$

MRLG-13)

a) Dada la información muestral, tenemos:

$$x'x = \begin{pmatrix} 60 & 100 \\ 100 & 200 \end{pmatrix} \qquad x'y = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Las estimaciones mínimo-cuadráticas de los parámetros que acompañan a las variables explicativas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (x'x)^{-1} x'y$$

Se necesita invertir la matriz $x'x$. El determinante de dicha matriz es: $|x'x| = 2000$. Por consiguiente, la matriz inversa es:

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{2000}\begin{pmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\hat{\beta}^* = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$$

La estimación del término independiente viene dada por:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}_1 - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 = 5 + (1)\,(3) - (0{,}7)\,(10) = -0{,}7$$

b) La hipótesis nula se puede escribir como $H_0 : R\beta = r$ donde

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad r = \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

El estadístico de contraste es:

$$\frac{\dfrac{\left(R\hat{\beta} - r\right)'\left[R\left(X'X\right)^{-1}R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta} - r\right)}{q}}{\dfrac{e'e}{n-k-1}}$$

donde $q = 2$ (el número de filas de la matriz R). Dicho estadístico se distribuye, bajo la hipótesis nula, como una F de Snedecor con q grados de libertad en el numerador y $n-k-1$ en el numerador.

Para obtener el valor del estadístico, se necesita conocer la suma de los cuadrados de los residuos $e'e$. Teniendo en cuenta la estimación de los parámetros, la suma de cuadrados explicada por la regresión se puede expresar como:

$$SEC = \hat{\beta}^{*'} x' x \hat{\beta}^* = \hat{\beta}^{*'} x' y = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix} = 18$$

La suma total de cuadrados STC es un dato del problema: $y'y = 20$. Por lo tanto, la suma de cuadrados de los residuos es: $e'e = y'y - SEC = 20 - 18 = 2$.

Para el numerador del estadístico de contraste, se necesita:

$$R\hat{\beta} - r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ -1 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$R(X'X)^{-1}R' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0{,}1 & -0{,}05 \\ a_{31} & -005 & 0{,}03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{21} & 0{,}1 & -0{,}05 \\ a_{31} & -0{,}05 & 0{,}03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}03 \end{bmatrix}$$

donde a_{ij} denota el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz $(X'X)^{-1}$, $i, j = 1,2,3$.

Nótese que esta matriz de orden (2×2) es la matriz $(x'x)^{-1}$. Esto es debido a que la matriz $R = [0 \vdots I_2]$, donde I_2 es la matriz identidad de orden (2×2) y 0 es un vector columna de ceros de orden (2×1). Por consiguiente, $\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1} = x'x$.

El estadístico de contraste es:

$$\frac{\dfrac{[0{,}2 \quad -0{,}1]\begin{bmatrix} 60 & 100 \\ 100 & 200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}1 \end{bmatrix}}{2}}{\dfrac{2}{5}} = 0{,}5$$

El valor crítico de una distribución F con 2 grados de libertad en el numerador y 5 en el denominador al nivel de significación del 5 % es 5,79. Por consiguiente, no se rechazaría la hipótesis nula.

c) Si se asume *a priori* que $\beta_1 = -1{,}2$, el modelo restringido quedaría como $Y_i = \beta_0 - 1{,}2X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$, que se puede escribir como:

$$Y_i + 1{,}2X_{1i} = \beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

El modelo restringido sería un modelo lineal simple donde la variable dependiente es $Y_i + 1{,}2X_{1i}$ y la variable explicativa X_{2i}. Por lo tanto, la estimación restringida del parámetro β_2 es:

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\sum (y_i + 1{,}2x_{1i})x_{2i}}{\sum x_{2i}^2} = \frac{\sum y_i x_{2i} + 1{,}2\sum x_{1i}x_{21}}{\sum x_{2i}^2} = \frac{40 + (1{,}2)\,(100)}{200} = 0{,}8$$

La suma de cuadrados explicada por la regresión es:

$$SECR = \tilde{\beta}_2^2 \sum x_{2i}^2 = (0{,}64)\,(200) = 128$$

La suma total de cuadrados es:

$$STCR = \sum \left(y_i + 1{,}2x_{1i}\right)^2 = \sum y_i^2 + 1{,}2^2 \sum x_{1i}^2 + 2\,.\,1{,}2 \sum y_i x_{1i}$$
$$= 20 + (1{,}44)\ \ (60) + (2{,}4)\ (10) = 130{,}4$$

Por consiguiente, la suma de los cuadrados de los residuos es:

$$SCRR = 130{,}4 - 128 = 2{,}4$$

d) Para contrastar la hipótesis $H_0 : \beta_1 = -1{,}2$ utilizando el modelo no restringido, el estadístico de contraste es:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 + 1{,}2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}}}$$

La varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$ es $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\,.\,a_{22}$, donde a_{22} es el segundo elemento de la diagonal principal de la matriz $\left(X'X\right)^{-1}$, o alternativamente, el primer elemento de la diagonal principal de la matriz $\left(x'x\right)^{-1}$. La estimación de la varianza de la perturbación aleatoria viene dada por:

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{STC - SEC}{n-k-1} = \frac{20-18}{5} = 0{,}4$$

La varianza estimada del estimador $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\ a_{22} = 0{,}4\,.\,0{,}1 = 0{,}04$$

Por consiguiente, el valor del estadístico de contraste es:

$$t = \frac{-1+1{,}2}{\sqrt{0{,}04}} = \frac{0{,}2}{0{,}2} = 1$$

Un valor tan pequeño del estadístico (inferior en valor absoluto al valor crítico de una distribución t de Student con 5 grados de libertad) implica que no se rechazaría la hipótesis nula.

Si se utiliza el modelo restringido y no restringido, el estadístico de contraste es $\dfrac{SCRR - SCR}{\left(\dfrac{SCR}{n-k-1}\right)}$ que se distribuye como una F de Snedecor con 1 grado de libertad en el numerador y $n-k-1$ en el denominador. En la expresión del estadístico, SCRR es la suma de cuadrados de residuos del modelo restringido y SCR es la suma de cuadrados del modelo no restringido. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, el estadístico de contraste es:

$$\frac{2{,}4-2}{\left(\frac{2}{5}\right)}=\frac{0{,}4}{0{,}4}=1$$

El valor del estadístico de la F es el cuadrado del valor del estadístico de la t debido a la relación que existe entre las dos distribuciones. En este caso particular, los dos estadísticos coinciden ya que el estadístico de la t es igual a 1.