

A close-up, profile view of a man with a white beard and mustache, looking towards the right. He is wearing a blue and white checkered shirt. The background is a textured, greyish-blue surface.

Margarita mathematica

*en memoria de
José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández*

Luis Español y Juan Luis Varona (editores)



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
1992-2002 / DÉCIMO ANIVERSARIO

MARGARITA MATHEMATICA
EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ

EDITORES:

Luis Español y Juan L. Varona

Departamento de Matemáticas y Computación

Universidad de La Rioja

Logroño, Spain

MARGARITA MATHEMATICA

EN MEMORIA DE

JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

2001

MARGARITA mathematica en memoria de José Javier
(Chicho) Guadalupe Hernández / editores, Luis Español y
Juan L. Varona. - [Logroño]: Universidad de La Rioja,
Servicio de Publicaciones, 2001

XLIV-675 p.; 24 cm.

ISBN 84-95301-56-3

1. Matemáticas - Colecciones de escritos I. Español,
Luis II. Varona, Juan L. III. Guadalupe Hernández,
José Javier IV. Universidad de La Rioja. Servicio de
Publicaciones

51(082.2)

2000 Mathematics Subject Classification: 00B10, 01A70

© Los autores y editores

Edita: Universidad de La Rioja

Realiza: Servicio de Publicaciones

Logroño, 2001

ISBN: 84-95301-56-3

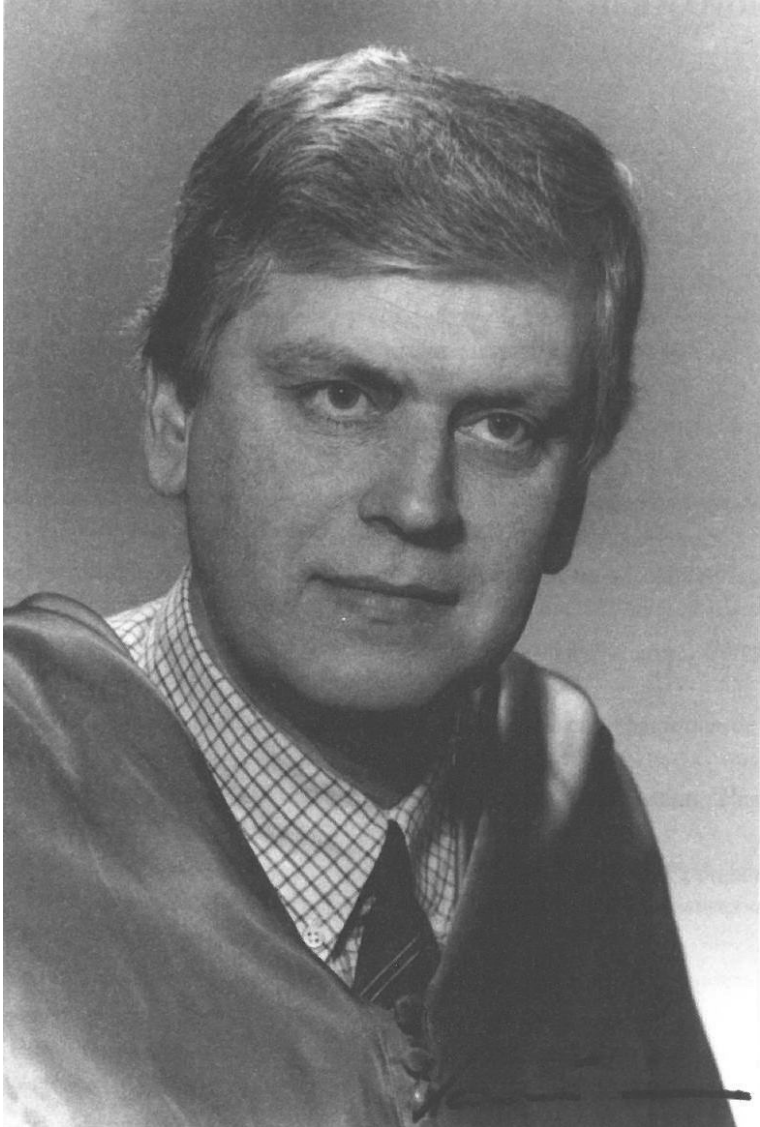
Depósito Legal: LR-387-2001

Composición: \LaTeX , a partir de los archivos proporcionados por los autores

Impresión: Gráficas Ochoa, S.A.

Impreso en España

Printed in Spain



**MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ**

ÍNDICE

| | |
|--|------|
| Índice | VII |
| Jaime Vinuesa Tejedor (Universidad de Cantabria), <i>Algo se muere en el alma cuando un amigo se va</i> | XI |
| <i>Presentación</i> | XIII |
| Javier Otal (Universidad de Zaragoza), <i>The Frattini subgroup of a group</i> | 1 |
| Antonio Martinón (Universidad de La Laguna) y Kishin B. Sadarangani (Universidad de Las Palmas de Gran Canaria), <i>Ideales de operadores e ideales de conjuntos en espacios de Banach</i> | 13 |
| Antonio Bonilla y Juan Carlos Fariña (Universidad de La Laguna), <i>Aproximación en norma L^p sobre subconjuntos cerrados del plano complejo</i> | 21 |
| Miguel A. Hernández y M. Jesús Rubio (Universidad de La Rioja), <i>Métodos tipo Secante y su aplicación a operadores no diferenciables</i> | 29 |
| M. Antonia Navascués y M. Victoria Sebastián (Universidad de Zaragoza), <i>Fórmula fractal de la energía de una señal muestreada</i> | 37 |
| Mario Pérez y Francisco J. Ruiz (Universidad de Zaragoza), <i>Perturbaciones de series de Fourier</i> | 49 |
| Fernando Chamizo y Antonio Córdoba (Universidad Autónoma de Madrid), <i>Puntos del retículo</i> | 59 |
| Francisco Marcellán (Universidad Carlos III de Madrid), Andrei Martínez-Finkelshtein y Juan J. Moreno-Balcázar (Universidad de Almería), <i>k-coherence of measures with non-classical weights</i> | 77 |
| Renato Álvarez-Nodarse (Universidad de Sevilla), <i>Los q-polinomios hipergeométricos</i> | 85 |
| Fernando Pérez-González (Universidad de La Laguna) y Julio C. Ramos (Universidad de Oriente, Venezuela), <i>Conjuntos dominantes en espacios de Bergman con peso</i> | 97 |
| Óscar Ciaurri y Juan Luis Varona (Universidad de La Rioja), <i>Ecuaciones integrales dobles con funciones de Bessel de distinto orden</i> | 111 |
| Emilio Fernández Moral (Universidad de La Rioja) y Mercedes Sánchez Benito (Universidad Complutense de Madrid), <i>El teorema de enumeración de Pólya</i> | 123 |
| José Ignacio Extremiana Aldana, Luis Javier Hernández Paricio y María Teresa Rivas Rodríguez (Universidad de La Rioja), <i>Poliedros</i> | 139 |

| | |
|--|-----|
| Manuel Bello Hernández (Universidad de La Rioja), <i>Problema de momentos de Stieltjes y convergencia de aproximantes de Padé para funciones meromorfas de Stieltjes</i> | 167 |
| Carlos Pérez (Universidad Autónoma de Madrid) y Rodrigo Trujillo-González (Universidad de La Laguna), <i>El principio de Calderón-Zygmund</i> | 177 |
| Francisco Marcellán (Universidad Carlos III de Madrid), Boris P. Osilenker (Moscow State Civil Engineering University, Rusia) y Ignacio A. Rocha (Universidad Politécnica de Madrid), <i>Problemas abiertos en series de Fourier de Jacobi-Sobolev</i> | 183 |
| Pedro J. Miana (Universidad de Zaragoza), <i>Funciones de Hermite, derivación fraccionaria y ciertas familias de operadores</i> | 191 |
| José A. Ezquerro, José M. Gutiérrez, Miguel A. Hernández y M. Amparo Salanova (Universidad de La Rioja), <i>El método de Halley: posiblemente, el método más redescubierto del mundo</i> | 205 |
| César Domínguez, Laureano Lambán, Vico Pascual y Julio Rubio (Universidad de La Rioja), <i>Instituciones: Matemáticas para la especificación en Computación</i> | 221 |
| José E. Galé (Universidad de Zaragoza), <i>Sobre espacios de Besov definidos por medias de Riesz</i> | 235 |
| Manuel Benito (Instituto Sagasta, Logroño), José Manuel Gutiérrez y Víctor Lanchares (Universidad de La Rioja), <i>El fractal de Chicho</i> | 247 |
| Javier Duoandikoetxea (Universidad del País Vasco), <i>Algunas reflexiones sobre extrapolación de pesos</i> | 255 |
| Petra M. Arnal, Jesús Laliena y Sara Sacristán (Universidad de La Rioja), <i>Algunas historias sobre álgebras no asociativas y superálgebras</i> | 265 |
| Jesús M. Aldaz (Universidad de La Rioja) y Ana Bravo (University of Michigan, EE.UU.), <i>Perspectivas en la Teoría de los Números</i> | 273 |
| Bernardo de la Calle Ysern (Universidad Politécnica de Madrid) y Guillermo López Lagomasino (Universidad Carlos III de Madrid), <i>Convergencia relativa de polinomios ortogonales variantes</i> | 283 |
| Jesús Bastero y Miguel Romance (Universidad de Zaragoza), <i>Extensiones de las desigualdades tipo Khinchine-Kahane para la bola unidad de ℓ_q^n, $0 < q < 1$</i> .. | 295 |
| Mariano Hormigón Blánquez (Universidad de Zaragoza) y M. ^a de los Ángeles Martínez García (Universidad de La Rioja), <i>Echegaray y la modernización de las matemáticas en España. Las lecciones del Ateneo</i> | 307 |
| Antonio J. Durán y Pedro López-Rodríguez (Universidad de Sevilla), <i>The matrix moment problem</i> | 333 |
| José María Almira, Naira del Toro (Universidad de Jaén) y Francisco Pérez-Acosta (Universidad de La Laguna), <i>Sobre aproximación en ciertos espacios de funciones analíticas</i> | 349 |
| José Luis Torrea (Universidad Autónoma de Madrid), <i>Algunas observaciones sobre el semigrupo de Laguerre</i> | 365 |

| | |
|--|-----|
| Luis Español y M. Carmen Mínguez (Universidad de La Rioja), <i>Cortaduras para ℓ^∞</i> | 375 |
| Krzysztof Stempak (Politechnika Wroclawska, Polonia), <i>Transferring Fourier multipliers on admissible spaces</i> | 391 |
| Juan Antonio Barceló (Universidad Politécnica de Madrid), Tomeu Barceló y Alberto Ruiz (Universidad Autónoma de Madrid), <i>Unicidad y estabilidad para el problema de conductividad inverso</i> | 401 |
| Luis Navas (Universidad de Salamanca), <i>Iteración de la composición de series formales</i> | 415 |
| Domingo Israel Cruz Báez y José Rodríguez Expósito (Universidad de La Laguna), <i>Potenciales generalizados de Bessel</i> | 433 |
| Pilar Benito (Universidad de La Rioja), Cristina Draper (Universidad de Málaga), Alberto Elduque (Universidad de Zaragoza), Fabián Martín y José M. Pérez-Izquierdo (Universidad de La Rioja), <i>Sobre álgebras triples de Lie, espacios homogéneos y álgebras no asociativas</i> | 443 |
| Víctor M. Almeida y José Rodríguez (Universidad de La Laguna), <i>Algunas notas sobre una derivada algebraica asociada al operador D^δ</i> | 453 |
| José Javier Escribano (Instituto Valle del Cidacos, Calahorra) y Luis Español (Universidad de La Rioja), <i>Un trabajo de Sixto Cámara, en 1915, sobre teoría de Galois</i> | 463 |
| Óscar Blasco (Universidad de Valencia), <i>A note on the boundedness of operators on weighted Bergman spaces</i> | 477 |
| Venancio Álvarez (Universidad de Málaga), Domingo Pestana, José M. Rodríguez y Elena Romera (Universidad Carlos III de Madrid), <i>Approximation theory for weighted Sobolev spaces on curves</i> | 487 |
| Blanca Bujanda (Universidad de La Rioja) y Juan Carlos Jorge (Universidad Pública de Navarra), <i>Estudio de la convergencia uniforme de esquemas de Pasos Fraccionarios para problemas parabólicos formulados en forma variacional</i> | 505 |
| María Pilar Alfaro (Universidad de Zaragoza), Manuel Bello (Universidad de La Rioja) y Jesús M. Montaner (Universidad de Zaragoza), <i>Estudio de una sucesión de polinomios: recurrencia y ceros</i> | 521 |
| M. José Cantero, M. Pilar Ferrer, Leandro Moral y Luis Velázquez (Universidad de Zaragoza), <i>Teoría de polinomios ortogonales y funciones semi-ortogonales</i> | 533 |
| Raquel G. Catalán (Universidad Pública de Navarra) y José Garay (Universidad de Zaragoza), <i>About band limited up to congruences wavelets</i> | 547 |
| Jorge Bustamante y Miguel Antonio Jiménez (Universidad Autónoma de Puebla), <i>Series de Fourier y funciones de Lipschitz</i> | 559 |
| Manuel Alfaro y M. Luisa Rezola (Universidad de Zaragoza), <i>Ceros de polinomios ortogonales de Sobolev</i> | 569 |
| Elías Berriochoa y Alicia Cachafeiro (Universidad de Vigo), <i>La teoría asintótica de Szegő para P.O. de Sobolev sobre el círculo unidad</i> | 577 |

| | |
|--|-----|
| José Javier Martínez (Universidad de Alcalá), <i>Polinomios ortogonales, cuadratura gaussiana y problemas de valores propios</i> | 595 |
| Gustavo Corach (Universidad de Buenos Aires, Argentina), Alejandra Maestripieri (Universidad Nacional de General Sarmiento, San Miguel, Argentina) y Demetrio Stojanoff (Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina), <i>Generalized orthogonal projections and shorted operators</i> | 607 |
| Alfredo Fundora Rolo, Héctor Pijeira Cabrera (Universidad de Matanzas, Cuba) y Wilfredo Urbina Romero (Universidad Central de Venezuela, Venezuela), <i>Asymptotic behavior of orthogonal polynomials primitives</i> | 627 |
| Esteban Andruchow y Alejandro Varela (Universidad Nacional de General Sarmiento, Los Polvorines, Argentina), <i>Fibre bundles over orbits of states</i> | 635 |
| Jorge J. Betancor, José Manuel Méndez y Lourdes Rodríguez-Mesa (Universidad de La Laguna), <i>Espacios de Besov asociados a la transformación de Hankel</i> ... | 661 |

ALGO SE MUERE EN EL ALMA CUANDO UN AMIGO SE VA

JAIME VINUESA TEJEDOR

Y eso es lo que sucedió al comienzo de la última primavera del siglo y del milenio en el mundo de la matemática española. Se fue el amigo. Para quien suscribe, el mejor que tenía. Y se fue en silencio, discretamente y sin causar molestias, como siempre quiso vivir. El centenar de personas que intervienen en este libro es sólo una muestra, restringida al ámbito profesional, del afecto que Chicho se hizo merecer en su vida, interrumpida antes de tiempo pero aprovechada al máximo en todos los aspectos.

Todas las muertes son lamentables y ninguna reparable. Y es frecuente encontrar siempre razones para valorar a las personas una vez desaparecidas con virtudes y cualidades que no siempre tuvieron o que se exageran demasiado. No es el caso en ningún modo en esta ocasión. Porque es mucho lo que a Chicho tenemos que agradecer cuantos lo conocimos, porque su esfuerzo y su labor profesional han dado fruto y permanecerán, porque nos deja un claro mensaje con el ejemplo de su comportamiento, porque su recuerdo siempre será motivo de alegría. Ahí quedan sus discípulos con el entusiasmo por la matemática que supo transmitirles, ahí quedan sus publicaciones matemáticas, ahí queda su mesa en el despacho de los jueves de la Universidad de Zaragoza, y la de la calle Menéndez Pelayo con sus libros, sus escritos y su tablero de ajedrez, ahí queda su timple y el recuerdo de tantas veladas entrañables, ahí quedan los matemáticos de países lejanos que nos trajo, ahí queda el Seminario de Matemáticas de los profesores de Enseñanza Media de Logroño, ahí quedan los Encuentros de Análisis Real y Complejo. Ahí queda su Departamento de Matemáticas y su biblioteca y ahí queda la Universidad de La Rioja. Ahí quedan, algo huérfanos, los pescadores de La Palma. Ahí queda su familia, riojana y palmera. Y aquí quedamos sus amigos, que ojalá seamos capaces de asumir y aprovechar su legado. Nada de esto es un tópico, sí lo es la afirmación tantas veces repetida de que nadie es insustituible, porque Chicho lo es, y por eso siempre estará con nosotros.

Este libro pretende ser una contribución al homenaje continuado que queremos rendir al amigo, al matemático y, sobre todo, al hombre. No es la primera manifestación de ese homenaje y en ningún modo debe ser ni será la última. Pero me parece importante que el testimonio de quienes han querido contribuir a esta publicación se conserve reunido como traducción al lenguaje matemático del afecto guardado al amigo.

Santander. Año 2001

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA, AVDA. LOS CASTROS S/N, SANTANDER 39005, CANTABRIA, SPAIN

PRESENTACIÓN

Suele decirse que realizamos nuestros actos unas veces con la cabeza y otras con el corazón. Pues bien, este libro está hecho con ambos, el corazón y la cabeza, tanto monta. El primero se nos aceleró cuando supimos que el de Chicho había detenido su pulso en las primeras horas del día 1 de abril de 2000, como consecuencia de las lesiones producidas en un accidente de tráfico ocurrido cuando marzo oscurecía. En este hecho tremendo se encuentra el origen de esta obra colectiva, cuya génesis vamos a relatar en la primera parte. Dejaremos para más tarde algunas anécdotas, con un poco de humor cordial, del proceso de edición, y dedicaremos el cuerpo central de la presentación a exponer la biografía y la obra matemática de Chicho. La lista de sus publicaciones será el necesario apéndice final, sin olvidar los agradecimientos y una despedida.

AÑO Y MEDIO DESPUÉS

El accidente sucedió cuando Chicho iniciaba el retorno a casa al término de una semana laboral habitual, iniciada en las tareas de Logroño y terminada junto a sus colegas de Zaragoza. El péndulo hebdomadario, que tantos frutos de matemáticas y amistad había dado, se paró bruscamente en un kilómetro cuyo número no queremos recordar. El lunes comenzó a difundirse la luctuosa noticia en los medios universitarios. Desde la Universidad de La Rioja se emitió una nota informativa, gestada en una reunión departamental convocada en sustitución de las clases propias de la jornada, suspendidas por el luto. Pero la reunión oficial se transformó en asamblea de matemáticos por deseo de los estudiantes, que mostraron así, con su nutrida y emocionada presencia, su profundo afecto hacia Chicho y hacia su esposa Mari Carmen Mínguez, compañera también en las tareas profesoras. El comunicado decía así:

«Reunidos los miembros del Departamento de Matemáticas y Computación y los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, hacemos partícipe a la comunidad universitaria del fallecimiento de nuestro compañero y profesor Chicho, nombre habitual del Catedrático de Análisis Matemático José Javier Guadalupe Hernández. Falleció en las primeras horas del sábado pasado como consecuencia de las lesiones producidas en un accidente de tráfico acaecido en la tarde-noche del viernes, cuando volvía del habitual seminario que mantenía cada semana con los miembros zaragozanos de su equipo de investigación.

»Estamos seguros de compartir con toda la comunidad universitaria el profundo dolor que nos embarga por la ausencia definitiva de quien fue compañero de todos nosotros. Sabemos que Chicho tenía muchos amigos fuera de la comunidad universitaria que comparten con nosotros el dolor de estos días y compartirán siempre el recuerdo. La huella de Chicho en este Departamento es honda y será duradera. Además de nuestro homenaje personal de amistad, ofrecemos a Chicho el homenaje

profesional de nuestro compromiso con el estudio, la docencia y la investigación, para hacer nuestro trabajo, ya sea de estudiantes o de profesores, como a él le gustaría.»

Poco después, el décimo día de abril, la Universidad de La Rioja realizó, presidido por el Rector, un intenso «Acto de homenaje a José Javier Guadalupe Hernández (Chicho) (Santa Cruz de La Palma 1945 – Zaragoza 2000)». El Aula Magna estuvo repleta de público, tanto local cuanto de ciudades próximas, sobre todo de Zaragoza; también de otras menos próximas, destacando entre ellas la representación canaria que vino desde La Laguna. En primera fila, Mari Carmen y Zenaida, esposa e hija, recibían el calor de los presentes y la atención preferente de los oradores. Estaban recién llegadas de entregar las cenizas de Chicho a su mar natal, que los pescadores cubrieron de flores, y de allí traían la lejana presencia de la familia palmera, una piña en torno a Zaida, la madre de Chicho. También estaba su prima Zeni, enviada años atrás a Logroño por Humberto para que estudiara al cuidado de Chicho, que así lo hizo, y se quedó en esta Universidad. Como bien recordó Jaime Vinuesa, Humberto, el tío-amigo de Chicho, había fallecido pocos meses antes, por lo que el lado canario del duelo soportaba dos ausencias insoportables, demasiado prematuras y demasiado próximas. El homenaje concitó sobre todo emociones, fue un acto de los que se hacen con el corazón. La repentina e inesperada ausencia de Chicho dejaba agujeros amplios que sólo el suspiro del tiempo podrá ir colmando de arena fina. Era un día para sentir, como allí se dijo con dos versos de su amigo Ramón Irigoyen, «todo lo que hay de humano en unos ojos/ cuando aplauden de pena las pestañas».

Unas palabras del Rector clausuraron el acto que había iniciado el Director del Departamento; en ambos casos, los discursos institucionales propios de las autoridades rezumaron recuerdos personales, especialmente intensos para el segundo. Recuerdos que se redoblaron en el resto de las intervenciones, a cargo de amigos de alma y aula de Chicho. Unas fueron dichas en directo y otras, enviadas por escrito, leídas; todas ellas glosaron la forma de ser de Chicho desde experiencias personales que se remontaron a sus años de estudiante en la Universidad de Zaragoza, que entonces, en la prodigiosa década de los sesenta, era muy cosmopolita en el ámbito hispano. En el relato de su origen matemático zaragozano no faltaron ni el recuerdo al veterano Luis Vigil, con quien Chicho inició su carrera profesoral e investigadora en el viejo Departamento de Teoría de Funciones, ni la mención al llorado José Luis Rubio de Francia, el joven y aventajado amigo que lo llevó hacia el análisis matemático de vanguardia desde la tesis doctoral. Pero la mayor parte de las anotaciones se referían a los aspectos privados de Chicho, desde que fuera estudiante antifranquista y *penene* díscolo en Zaragoza —cuando ser así era un honra—, pasando por su concentración en el trabajo matemático desde finales de los setenta, en el Colegio Universitario de Logroño, hasta la fundación de la Universidad de La Rioja en 1992, de la que muy pronto fue su primer catedrático de matemáticas. Más que repasar su currículo profesional, se recordó en tal ocasión su permanente capacidad para la amistad, ya fuera en el entorno de la actividad académica o en otros círculos, en una u otra ciudad, virtud que fue ejemplificada con una variada gama de anécdotas. Se recordaron muchos momentos con Chicho y se enumeraron múltiples razones para echarle en falta, para vivir con el recuerdo una vez perdida la compañía.

No dejó de mencionarse una faceta arisca que podría apreciarse en su recio carácter, capaz de transmitir mensajes contradictorios que eran amplificadas por su destacada presencia física. Un genio que a veces le sirvió para enfrentarse con dureza a situaciones injustas y que casi siempre se disolvía con facilidad en su gran humanidad. Se oyeron otros versos de Ramón Irigoyen que explican la posible apariencia de un espíritu sensible: «El poeta es una almendra garrapiñada./ El poeta es dulce e incomediblemente duro,/ tierno y seco como el esparto,/ porque necesita proteger el corazón de la almendra/ de las gentes de sordo paladar». Allí estábamos, congregados por el corazón de la almendra.

Y sobresalió otro rasgo constante, su ser canario rezumando por los cuatro costados, inalterable a pesar de los muchos años de residencia peninsular —real, que nunca legal—, embajador oficioso de su isla, La Palma, y del archipiélago. Porque las raíces de Chicho eran árbol entero, profundas sí, hincándose en lo más racial canario, pero floreciendo frondosas una o dos veces por año, cuando recalaba con los suyos en vacaciones. Tenían sus viajes un añadido contenido económico nada despreciable, no sólo en beneficio de las compañías del avión y el teléfono, sino, sobre todo, por el fomento del pequeño comercio ultramarino de manjares delicados, de cuyas importaciones (aguacates, mojo picón, queso, cigarros,...) hacía partícipes a los amigos de acá. El Rioja hacía el viaje inverso. Canarias era una fuente de inspiración musical para los días, con sus noches, de parranda. Todos llevamos de algún modo nuestro pasado a cuestas, pero ello era muy explícito en Chicho, que se instaló como profesor en Logroño sin dejar nunca de estar en Zaragoza y, si nos lo disputamos entre los ribereños del Ebro, acabaremos reconociendo que era simplemente de su isla bonita; un esbelto canario que como otros congéneres, poseídos por Narciso y Prometeo, han conquistado territorios más vastos sin dejar de ser isleños. Por eso con sus breves pero frecuentes retornos a casa lograba algo más que su regocijo personal y familiar, ganaba una cuota de felicidad que a la vez era una dosis periódica necesaria para la supervivencia cotidiana.

Mientras surcaban el aire del aula estas imágenes de una persona tan singular, la congregación allí reunida iniciaba el tiempo del recuerdo pero, sobre todo, intentaba ofrecer a Mari Carmen y a Zenaida un entorno de afecto y amistad para su inevitablemente nueva vida cotidiana. Eladio Domínguez, colega matemático y amigo, traía «Sosiego», un breve poema cuyos versos finales cantan que lo cotidiano, «siendo que será pasado en el futuro,/ siendo que es futuro del pasado,/ os ayudará a contemplar sin pánico el futuro,/ os permitirá mirar sin miedo el pasado». Apenas podrá este bello unguento de algebrista soldar tan tremenda fractura, pero les fue ofrecido en nombre de todos, dispuestos a aplicarlo con las atenciones más esmeradas hacia ellas.

El calendario galopaba impertérrito por el mes de abril del Año Mundial de las Matemáticas, llegó la conmemoración prevista para primeros de mayo, la silla quedó vacía, no se oyó su potente voz en los coloquios, faltó en los corrillos de los descansos y en la horas de refrigerio; pero nos animó a cumplir con la tarea propuesta y la semana matemática riojana tuvo todos los ingredientes para un éxito huérfano. Pronto quiso el Departamento perpetuar el nombre de Chicho en sus cuarteles, para que la memoria individual percedera se prolongara en la historia,

que es la memoria colectiva perdurable. Uno de los Seminarios lleva ahora el nombre de quien fue organizador, primer director y primer catedrático del Departamento. También, por unanimidad con los colegas de la enseñanza secundaria, la Olimpiada Matemática, en su fase regional riojana, se convoca y se seguirá convocando al abrigo de su nombre.

Para completar las dos iniciativas que acabamos de mencionar, el Departamento tomó, al filo de las vacaciones veraniegas, una tercera, más atrevida y laboriosa, que recibió de inmediato el respaldo imprescindible del Rectorado. Se trataba de culminar el homenaje a Chicho, más allá del territorio departamental y riojano, editando un libro de colaboraciones matemáticas dedicadas a su memoria. El Departamento nos encargó la tarea de editores, que debíamos iniciar a la vuelta del verano. A primeros de octubre se lanzó la convocatoria, que en sus párrafos principales decía así:

«El Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja anuncia la edición de una (co/se)lección de trabajos matemáticos en honor del Catedrático de Análisis Matemático de este Departamento Dr. José Javier Guadalupe Hernández, conocido por Chicho, fallecido en accidente de tráfico durante un viaje de trabajo el pasado mes de abril. La obra pretende ofrecer a sus colegas la oportunidad de rendir homenaje a su memoria y, de este modo, presentar un panorama de la actividad matemática que le rodeó.

»Con este fin, invitamos a participar en esta obra colectiva a los compañeros de estudios o de ejercicio profesional que tuvo en sus Universidades de La Laguna, Zaragoza y La Rioja, así como a cuantos compartieron su trabajo matemático en equipos de investigación, reuniones científicas, en los Simposia de Polinomios Ortogonales, Encuentros de Análisis Real y Complejo, Conferencias de Análisis Armónico, etc.; sin olvidar a los colegas de enseñanzas medias del Seminario de Actualización Matemática del Profesorado que Chicho mantenía en Logroño.

»Las colaboraciones, de uno o varios autores, han de ser trabajos de interés relacionados con la investigación en cualquier rama de las matemáticas y con cualquier tipo de enfoque.»

Pusimos el énfasis en que fueran «trabajos matemáticos», acompañados quizás de algún comentario personal o dedicatoria, pero con la matemática como argumento. Queríamos reducir las páginas de recuerdos personales a un breve texto que solicitamos a Jaime Vinuesa, en representación de los muchos afectos que Chicho reunía, y a los fragmentos de esta introducción en los que se relata la génesis del libro. Nos parecía llegado el momento de completar con el cerebro lo que ya había sido hecho y seguía haciéndose con el corazón. Teníamos la convicción de que así complacíamos a Chicho, amigo de poner las matemáticas sobre la mesa y de reservar cada intimidad en su porción del espacio-tiempo.

En los párrafos anteriores se han ido deslizando detalles de su vida y su carácter, ya es hora de que nos ciñamos más al guión de su vida. Aparcamos el proceso de edición y entramos en el cuerpo central de nuestra intervención, dedicado a exponer la biografía y la obra matemática de Chicho. Otros compañeros y amigos lo han hecho antes en crónicas más próximas al fatal suceso. Dos miembros de su grupo de investigación zaragozano y de su círculo íntimo, Mario Pérez y Francisco J. Ruiz,

escribieron «In memoriam José Javier Guadalupe», *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **3** (2000), 257–271. Como cabía esperar de los autores, la parte biográfica está llena de sensibilidad, y la matemática de eficacia técnica. Casi con el mismo título, «In memoriam José Javier Guadalupe Hernández, “Chicho”», apareció un artículo de José M. Méndez, Catedrático de Análisis Matemático en La Laguna, en *Números* **42** (2000), 11–14, la revista de didáctica de las matemáticas que edita la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas. Éste es más breve, pero añade datos sobre la infancia y primera juventud canarias de Chicho, antes de su salto a la península en la edad universitaria. Recomendamos la lectura de ambos. Algo de lo que escribiremos a continuación se alimenta de estas dos fuentes. Por otra parte, Manuel Alfaro, uno de los fundadores del grupo maño, difundió una breve nota en un noticiario internacional dirigido a los especialistas en polinomios ortogonales y funciones especiales («Memorial Note about José Javier (Chicho) Guadalupe (1945–2000)», *Orthogonal Polynomials and Special Functions Newsletter*, Vol. 10, n.º 3 (2000), 1–2). El mismo autor, junto con otros dos queridos colegas de Chicho, Francisco Marcellán y María Luisa Rezola, de las universidades Carlos III de Madrid y de Zaragoza respectivamente, han escrito «In Memoriam Professor José Javier Guadalupe “Chicho” (1945–2000)», todavía no publicado (aparecerá en *Proceedings SIAG-SIAM Summer School on Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Laredo, Cantabria, 2000, edición de Nova Science Publisher que están preparando R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán y W. Van Assche. Esta reunión de Laredo estuvo dedicada a la memoria de Chicho). Citemos también a Juan Francisco Pons, que en su boletín de mayo insertó unas líneas recordando a Chicho cuando acudía a su librería a consultar novedades y a charlar. Es posible que no tengamos noticia de alguna otra iniciativa destinada a comunicar el óbito y glosar la figura de un universitario muy apreciado entre los que le conocieron.

BIOGRAFÍA

Chicho nació el 5 de septiembre de 1945 en Santa Cruz de La Palma, la capital de la isla noroccidental canaria. Allí estaba asentada la familia de su madre, Zaida Hernández Guardia, hija de un empresario del transporte de pasajeros por las difíciles rutas del agreste perfil isleño. El padre, José Guadalupe Durán, había llegado desde el otro extremo del archipiélago, Lanzarote, una isla tan opuesta en coordenadas como en paisaje. Era perito agrícola y ejerció como Delegado del Ministerio de Agricultura en La Palma durante muchos años hasta su jubilación. El matrimonio Guadalupe Hernández tuvo ocho hijos, de los que Chicho era el mayor; los demás, por orden de edad y con el nombre familiar, son Falo, Berto, Carlos Mario, Mari Carmen, Pilar, Chachi y Michel. Tan amplia prole significó un nutrido aporte al grupo familiar palmero, muy unido, del que los abuelos maternos fueron el referente patriarcal durante la mayor parte de la vida de Chicho. Como en otras familias de estirpe canaria, debido a la edad temprana en que las mujeres alcanzan allí la madurez, los espacios generacionales se comprimen y de ese modo Chicho fue, a la vez que el mayor de una larga lista de hermanos, algo así como un hermano de sus tíos, menor en edad que unos pero mayor incluso que otros. La influencia

materna modeló tal vez más su personalidad en los aspectos de la sensibilidad y las relaciones humanas, correspondiendo al influjo paterno los rasgos dominantes de la componente racional, en la que habría que inscribir la vocación matemática a la que el padre le inclinó desde niño, tal vez, como era frecuente entonces, para que más tarde el muchacho se hiciera ingeniero.

Asistió a la escuela de Doña Pepita Sosa en su ciudad natal y empezó el bachillerato en el colegio San Ildefonso de Santa Cruz de Tenerife, donde sólo realizó el primer curso. Durante el resto del bachillerato y el curso preuniversitario, fue alumno del Instituto de Santa Cruz de La Palma. De allí pasó a La Universidad de La Laguna en 1962, donde se matriculó en el Curso Selectivo de Ciencias, al que no le dedicó la atención necesaria. El año siguiente se trasladó a la Universidad de Zaragoza para seguir los estudios de Matemáticas en la prestigiosa Facultad de Ciencias aragonesa. En aquellos años Zaragoza era la capital de un distrito universitario muy amplio; en su campus y en el entorno urbano se aglutinaba una población estudiantil numerosa y bastante cosmopolita, entendiéndose el calificativo a escala nacional. Ello supuso un importante cambio de ambiente para el joven canario.

No obstante este alejamiento relativamente temprano de sus islas y de su familia, Chicho no dejaría nunca de ser muy canario y muy familiar. Ya hemos mencionado su permanente contacto con su origen y la fuerte raigambre en su temperamento de la personalidad isleña. Es difícil decir que se conoce a alguien completamente, pero lo que sí podría decirse es que nadie pudo conocer suficientemente a Chicho sin degustarlo en su salsa canaria.

Chicho se incorporó a la promoción aragonesa que ingresaba en 1963, en la que coincidieron un puñado de buenos estudiantes que además eran bizarros luchadores en el movimiento estudiantil antifranquista. Esta circunstancia política, característica de la universidad española del momento, no sólo le exigió el derroche de muchas energías sino que le costó la interrupción de los estudios cuando ya los terminaba. Chicho llegó a ser Delegado de Facultad y de Distrito, un puesto para el que reunía cualidades favorables, además del imprescindible marchamo de izquierdas. Por una parte era alto, de físico llamativo y voz potente, tenía una buena imagen de líder, gusto por la escena y habilidades en ella. Por otra, no estaba afiliado a ninguno de los muchos grupos clandestinos existentes, era partisano de la causa general pero neutral en la casuística de tácticas y estrategias que diferenciaban y enfrentaban a unos y otros. Dio la cara y los encargados de la represión se fijaron en ella. Fue detenido varias veces por la Brigada de Investigación Social de Zaragoza, que lo llevó ante el Juzgado de Orden Público de Madrid acusado de reunión ilegal. El tristemente famoso tribunal sobreyó su causa en abril de 1968, pero a la represión le quedaban otros recursos. Poco después, en junio, cuando sólo le faltaban los exámenes para terminar la carrera, las autoridades militares le comunicaron que había sido suspendida la prórroga, que disfrutaba como la mayoría de los estudiantes. Le ordenaron incorporarse urgentemente al CIR de Tenerife, de donde salió hacia el Batallón de Cabrerizas, unidad disciplinaria ubicada en el Tercio Sahariano D. Juan de Austria 3.º de La Legión. El Tercio estaba acuartelado en El Aaiún, en la zona norte de la entonces provincia del Sáhara Español, frente a Canarias. Gracias a gestiones familiares pudo, desde la Navidad, continuar el servicio militar en Lanzarote, en un

Regimiento de Infantería asentado en dicha isla y en la de Fuerteventura. No volvió amargado de este trance, ni le gustaba alardear de él una vez superado, pero tal vez le indujo a tomar una cierta distancia respecto a los roles públicos. No dejó de ser una persona activa en los posicionamientos progresistas y comprometidos, pero siguió ejerciéndolos de un modo más personal. También es natural que se dedicara preferentemente, tras la represalia, a terminar la carrera bruscamente interrumpida. Llegó a tiempo para realizar algunos exámenes en septiembre de 1969 y otros en febrero de 1970. En definitiva, terminó la carrera junto con la promoción que empezara en 1965, dos años más tarde que él. En esta promoción más joven había una inusual lista de estudiantes brillantes, algunos también militantes, entre ellos Mari Carmen, con la que había iniciado antes de la mili una relación que sería definitiva. De dicha promoción era Jaime Vinuesa, enseguida compañero analista y gran amigo de Chicho. En el curso siguiente progresaba la poderosa figura de José Luis Rubio de Francia, que más tarde jugó un papel principal en la biografía científica y personal de Chicho.

Cuando éste empezó en Zaragoza, la corte matemática estaba formada por Rafael Rodríguez Vidal, que enseñaba análisis matemático y álgebra, con Antonio Plans impartiendo geometría analítica y topología, mientras que Juan Sancho San Román ocupaba la intersección de la geometría y el álgebra; Rafael Cid Palacios era el astrónomo y, más allá de las estrellas, la cúspide de la formación matemática era el análisis de los últimos años, a cargo de Baltasar Rodríguez Salinas. Naturalmente, además de estos catedráticos, otros profesores completaban el plantel docente, entre ellos los físicos, pues al menos tres asignaturas de física completaban la formación de los matemáticos. La enseñanza era más bien clásica, pero iniciaba una modernización hacia la matemática estructural, la misma orientación que por entonces se adueñaba de las enseñanzas medias. El paradigma de este cambio eran la nueva álgebra y la algebrización de la geometría. En esa década, Pedro Abellanas publicaba en Madrid sus libros de texto, muy influyentes en la recepción nacional del nuevo estilo; por su parte, Rodríguez Vidal traducía dos libros, primero el de Birkhoff y Mac Lane, luego el de Dubreil. Por entonces llegó a Zaragoza un joven catedrático, José Luis Viviente, que venía de la mismísima patria de Bourbaki. Chicho estuvo desplazado a la fuerza entre la incorporación al elenco del ya maduro Luis Vigil, antiguo discípulo de Barinaga que provenía del exilio sudamericano, y el traslado a Madrid de Rodríguez Salinas, el más fino analista. El final de la década de los sesenta fue el lapso preparatorio de la nueva ley de educación del gobierno tecnocrático, de 1970, que hizo frente a su manera a la llamada masificación estudiantil. La reforma trajo un aluvión de nuevos profesores, auspició nuevos planes de estudios y promovió la investigación y los becarios; todo ello en medio de la convulsión política que provocaba un tardofranquismo que a muchos empezaba a parecer eterno.

Acabada la licenciatura, Chicho inició la profesión de profesor universitario. En un primer periodo, 1970-74, sufrió su sambenito político y la condición de *penene*, expresión popular fabricada con las iniciales de una categoría profesional, los Profesores No Numerarios (en su caso Profesor Ayudante), tan doliente como su propia definición negativa permite suponer. Pero también fueron unos años de vida intensa y apasionante. Chicho se incorporó al departamento de Teoría de Funciones que

dirigía Vigil, gracias a que éste hizo oídos sordos a cuantos desaconsejaban, o algo peor que desaconsejar, contratar a jóvenes manifiestamente contrarios al régimen. La incipiente creación de grupos de investigación le llevó a integrarse en el de Polinomios Ortogonales, que en los años siguientes dio lugar a varias tesis doctorales dirigidas por Vigil, así la de Manuel Alfaro y la de Jaime Vinuesa, ambas en 1973. En el grupo entró también Rubio de Francia, que muy pronto inició vuelos propios en contacto con la matemática internacional más avanzada, y siguieron otras incorporaciones. Chicho, además de a sus clases (en la Escuela de Ingenieros Técnicos Industriales y en la Facultad de Ciencias) se dedicaba a profundizar en el estudio del tema que ocupaba al grupo, pero sin definir todavía una línea personal de trabajo en la que programar su tesis doctoral.

En 1973, el año de Chile y de Carrero, se produjo en la enseñanza militar una novedad con repercusión universitaria. La Academia General Militar de Zaragoza inició un procedimiento de ingreso que consistía en reclutar a un grupo de aspirantes a cadetes y reunirlos durante un año académico en un acuartelamiento, en el que recibían preparación militar y las enseñanzas del Primer Curso de Físicas; los mejor calificados engrosarían la siguiente promoción de cadetes del Ejército de Tierra. Parte importante de la novedad fue que los profesores serían mayoritariamente civiles, con la posibilidad incluso de que hubiera profesoras, que las hubo. La tarea de proponer al profesorado, que debería pertenecer a las diversas especialidades científicas, fue adjudicada al físico José Savirón, que realizó la misión con el método del momento, convocatorias boca a boca y selección a dedo. El número de profesores necesarios no era despreciable, pues el curso se dividía en varios grupos. Entre los solicitantes de los puestos para matemáticos estaban Chicho y Mari Carmen, que fueron rechazados por sus antecedentes políticos, especialmente notorios en el caso de Chicho. Algo similar les sucedió en otro frente. Por entonces, las grandes empresas contrataban con frecuencia a licenciados en ciencias e ingenieros para reciclarlos hacia la gestión, a menudo relacionada con la informática, que se empezaba a introducir en gran escala. Mari Carmen y Chicho obtuvieron puntuaciones óptimas en las pruebas realizadas por la Seat de Barcelona, pero no fueron aceptados; oficiosamente supieron que habían sido rechazados por razones políticas. Estos incidentes tuvieron su influencia a la hora de que la pareja dirigiera su mirada, como pronto veremos, hacia la oferta que llegaba, también boca a boca y a dedo, del Colegio Universitario de Logroño.

La vida del *penene progre* (también había de los otros) era en esos años jovial e intensa. Chicho se volcó en ella con la peculiar fuerza de su carácter. Sacaba tiempo para el trabajo y el estudio, el seguimiento de la vida política, los amigos, las canciones, mucha música de América Latina, y la gastronomía. Desde que compartieron piso de estudiantes con el químico Toño Ara, Chicho y José (Pep) Llombart adquirieron habilidades culinarias que no dejaron de perfeccionar con el tiempo, llegando ambos a ser apreciables cocineros. Al deporte se dedicaba más como espectador (sobre todo baloncesto) que como actor, pero no dejó de participar en esporádicos partidos de fútbol en un solar junto a la Facultad, donde el músculo ya desentrenado hacía más lo que podía que lo que quería. Y a última hora de la tarde al fútbolín, vivido intensamente por un grupo de matemáticos que en otros momentos

parecían más serios. Era grande y a la par delicado, no fuerte, de peso variable, a veces con una poblada barba que junto a su acento canario y sus opiniones le hacían parecer un perfecto castrista. En esos años hizo gala de su capacidad para la amistad más variada, iniciando algunas de las que ya le acompañarían siempre. En 1972 Mari Carmen y Chicho se casaron en la palmera Ermita de las Nieves, allí en lo alto, donde la virgen se cobija hasta que baja para ser jaleada cada lustro con entusiasmo popular. La crisis del petróleo del 73 se dejó sentir en la economía de los *penenes*, su escueto salario ya no permitía las alegrías relativas de los primeros años. Lo notó «Salvatore», que vio menos frecuentado su local, en cuya carta se podía seleccionar la «Pizza Chicho», que tenía como ingrediente esencial la cebolla, mucha cebolla bien asadita.

Los Colegios Universitarios provinciales surgieron, en la ley de educación del 70, como resultado de la confluencia de dos intereses, el de los entes locales que demandaban en nombre de sus ciudadanos enseñanza universitaria superior (no les bastaba que la ley hubiera declarado universitarias a las Escuelas de Magisterio y de Peritos) y el de la administración central, deseosa de evitar la gran concentración de universitarios que se producía en las capitales de distrito tradicionales. En 1972 se había creado el Colegio Universitario de Logroño, adscrito a la Universidad de Zaragoza, con enseñanzas de Ciencias y de Letras en sus primeros ciclos de tres años. El profesorado se seleccionó a través de las cátedras de Zaragoza o en Pamplona. La oferta económica era tentadora y el reto profesional atractivo para los profesores jóvenes. Chicho y Mari Carmen se incorporaron en octubre de 1974. Esta vez no hubo censura, no faltaron advertencias pero el placet fue dado. De hecho, en esos primeros años el Colegio reunió a varios jóvenes profesores nada simpatizantes del régimen agonizante (Pedro Arrarás, Aurelio Arteta y Ramón Irigoyen en Letras, Luis Español en Ciencias, entre otros). Finalizaban su primer curso riojano cuando en mayo nació Zenaida. Acababa el año cuando Franco tuvo el detalle de morir. Después de un primer curso de tímido asentamiento en su nuevo destino, a partir del 1975–76 iniciaron una nueva etapa de su vida profesional y familiar instalados en Logroño.

Como sus colegas, daba abundantes clases y se ocupaba de la intendencia académica en un centro que, si bien era pequeño, tenía elevadas aspiraciones y en el que todo estaba por hacer. La actividad de extensión universitaria era intensa, destacando la cultural literaria y el foro político de la transición que se estableció en el Aula Magna del Colegio, sobre todo para los reaparecidos partidos de izquierdas, que se debatían entre el cambio de régimen con reforma o con ruptura. Con los amigos antes citados, participó en la movida política y cultural aglutinada en el Colegio; la intervención de Chicho fue decisiva a la hora de incorporar Logroño al circuito nacional del teatro independiente, tan brillante y tan militante. La crisis del petróleo llegó también al Colegio Universitario de Logroño, que fue perdiendo su frescura económica y entró en un terraplén que alcanzó a la mayoría de los Colegios repartidos por el país. Se planteó su extinción y la lucha por su futuro quedó ligada a la de la autonomía regional cuando ya las corporaciones locales eran democráticas. Al principio no fue Logroño un lugar provinciano y tranquilo donde preparar la tesis doctoral, sino una fragua en la que se gestaba una nueva ciudad y una nueva

región en el marco de la transición política española. La tesis no avanzaba, los polinomios ortogonales no acababan de engarzar con el análisis de Fourier y Vigil andaba más por las dependencias de la gestión y menos por las pizarras, aunque no las abandonaba; con todo, Chicho frecuentaba el grupo zaragozano los últimos días de la semana y seguía con su preparación. Y el sábado al baloncesto antes de volver a Logroño, viviendo el partido desde la primera fila con la intensidad de un entrenador.

La reaparición en esos momentos de José Luis Rubio de Francia fue decisiva. José Luis pasó dos años en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (EE.UU.), donde alcanzó la madurez matemática que cabía esperar de su genio, su disciplina en el trabajo y de tan buenas compañías. En 1977 estaba de vuelta en Zaragoza después de un año en Madrid tras ganar la cátedra. Poco tardó en tomar a su cargo la dirección de la investigación de Chicho, al tiempo que crecía entre ellos una gran amistad. El grupo de polinomios ortogonales de Zaragoza se reactivó y Chicho se fue concentrando en sus pasiones íntimas, la familia, los amigos, las matemáticas, el baloncesto y el ajedrez. Inició así una nueva época profesional que duró aproximadamente hasta 1985–86. Investigó sobre cuestiones de polinomios ortogonales formuladas en la teoría de Szegő y defendió su tesis doctoral en marzo de 1980. Ese mismo año apareció su primera publicación en las actas de las VII Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas.

La culminación de la tesis se vio favorecida por la estancia de Rubio de Francia en el Colegio Universitario, gracias a una cesión anual de sus servicios por la Facultad de Ciencias de Zaragoza, durante el curso 1979–80. El apoyo de Vigil a esta cesión fue decisivo, no sólo porque era el responsable del departamento, sino por la influencia que tenía en la gestión universitaria. Al interesado le convino el cambio temporal de residencia por motivos familiares, pero la razón académica era que el trabajo con Chicho era entonces una de sus prioridades. La relación matemática y personal entre ellos fue especialmente intensa durante ese curso. Además, la capacidad de convocatoria de José Luis sirvió para que se pusiera en marcha un seminario informal en el que profesores universitarios y de instituto se contaran cosas matemáticas de vez en cuando. El seminario arrancó en diciembre de 1979. El primer curso dieron charlas varios profesores del Colegio: Luis Español, José Luis, Chicho y también un profesor de instituto, Mariano Banzo. José Luis y Chicho intervinieron por primera vez en enero de 1980, con una charla sobre el concepto de área y el tema de la tesis doctoral respectivamente. El curso siguiente se animaron a participar otros profesores de instituto: Joaquín Hernández, Emilio Fernández y Manuel Benito. Aquel seminario, con algunos cambios de formato pero con el mismo objetivo general de mantener el contacto matemático entre los profesores de universidad y los de bachillerato, se ha celebrado sin interrupción y sigue activo. Primero fue minoritario, luego ganó público y en los noventa llegó a recibir alguna ayuda oficial. Casi todos los profesores que han pasado por Logroño en visitas de investigación han dado además una charla divulgativa en dicho seminario, otros fueron directamente invitados para ello. Especialmente emotivo fue escuchar a los exalumnos que acudieron a contar sus primeros trabajos o tesis doctorales. Chicho fue el mantenedor de este seminario desde 1980 hasta que nos dejó cuando andaba recomponiendo el índice de las charlas

impartidas durante los primeros veinte años. Consideraba este seminario como una buena labor en sí misma, pero también como deber contraído con José Luis y un homenaje a su memoria desde que falleciera prematuramente en 1988. Ahora, por José Luis y por Chicho juntos, el seminario sigue celebrándose con otros compañeros ejerciendo de mantenedores.

A la vez que Chicho se doctoraba, el futuro del Colegio quedó despejado y, ya en los ochenta, los esfuerzos se dirigieron primero a gestionar su reconocimiento como centro público y luego hacia la universidad regional. En 1982 Chicho se sumó a la celebración del acceso al gobierno de los socialistas, y un año después a la de la promulgación de la nueva ley universitaria que abría mejores horizontes. También hacia el cambio de década, Mari Carmen encontró condiciones favorables y contactos internacionales que le permitieron reactivar una tesis doctoral en geometría diferencial que estaba en dique seco; formando grupo de trabajo con Luis Español, reorientó la investigación y alcanzó el doctorado en 1985 bajo la dirección de Gonzalo E. Reyes, matemático chileno-canadiense afincado en la Universidad de Montréal, siendo ponente el catedrático zaragozano José Luis Viviente. Entre tanto, Chicho seguía investigando y publicando en la línea que había iniciado con la tesis y manteniendo el contacto habitual con el grupo de Zaragoza. Durante el trienio 1981–83 el grupo disfrutó de un proyecto de investigación subvencionado por la CAICYT, titulado «Desarrollos ortogonales y análisis de Fourier. Aplicaciones», el primer proyecto oficial en el que Chicho participó, seguido después por muchos otros sucesivos. Cuando José Luis se trasladó a la Universidad Autónoma de Madrid en el otoño de 1981, Chicho sumó a sus viajes habituales otros más esporádicos a Madrid, para mantener el contacto personal con José Luis y conocer el intenso trabajo de análisis que se realizaba en dicha universidad, por la que sentía gran admiración. Allí estrechó su relación con otros discípulos de Rubio de Francia, como José Luis Torrea, también procedente de Zaragoza, o Javier Duoandikoetxea.

Después de la tesis ocurrieron dos hechos importantes. Uno profesional, Chicho ganó en octubre de 1982 las oposiciones a Profesor Adjunto de Universidad en la disciplina de Análisis Matemático II (Facultad de Ciencias). Otro institucional, el Colegio Universitario de La Rioja culminó en 1986 su integración en la Universidad de Zaragoza como un centro público más. Chicho obtuvo la plaza en Alicante, pero no llegó a incorporarse, manteniendo una condición de supernumerario hasta que, a primeros de 1985, se le autorizó el destino en la Universidad de Zaragoza, a la espera de que la integración del Colegio le permitiera incorporarse al mismo como Profesor Titular de Universidad. Estas situaciones estaban favorecidas por la entrada en vigor de la ley de 1983, que dotaba de autonomía a las universidades. Otra etapa profesional se abría ante Chicho, ya asentado en su propia carrera y en un centro consolidado, al que se iban incorporando nuevos profesores jóvenes, algunos de ellos exalumnos, dispuestos a iniciarse en la investigación matemática.

Su interés por conocer la actividad de los demás le llevó en 1983 a organizar un encuentro pionero entre especialistas en polinomios ortogonales. Ése ha sido, el interés por los problemas de los demás, llevado siempre de un modo reservado, un rasgo de su carácter aplicado en numerosas ocasiones con todo tipo de personas de su entorno. Por entonces, en 1984, se realizó en Zaragoza un libro de colaboraciones

matemáticas en honor de Vigil, que cumplió setenta años. Chicho participó con un trabajo firmado con María Luisa Rezola, que también era discípula de José Luis. Durante unos años, Chicho y Marisa investigaron en estrecho contacto y publicaron varios artículos juntos. A partir de 1986 y hasta el final de sus días, la investigación de Chicho se centró en el problema de la convergencia de la serie de Fourier de polinomios ortogonales, que le había sido sugerido y orientado por Rubio de Francia.

En este punto llegamos a una historia paralela muy triste. En diciembre de 1986 José Luis estuvo en Logroño para participar en un curso de historia de la ciencia en torno a Julio Rey Pastor. Se fijó en las conferencias de Rey Pastor en el Ateneo de Madrid (*Introducción a la matemática superior*, 1915) y de una de ellas sacó el tema de las funciones de línea, unos funcionales asociados a varios problemas físicos. Su intervención, titulada *El problema de Dirichlet y la medida armónica*, trazó la historia matemática del tema desde el siglo XIX hasta los teoremas más recientes. Pocos meses después se declaró la enfermedad que apenas le dio respiro hasta su muerte en febrero de 1988. A pesar de que llegaba anunciada, produjo una gran conmoción, por supuesto familiar, pero también en el mundo matemático, sobre todo en su entorno más próximo. A Chicho le afectó profundamente. El despacho de Chicho en el Departamento fue siempre austero, paredes limpias con pocos adornos, pero junto a su asiento pegó el pequeño y sencillo cartel en gama de grises, con el rostro joven de José Luis a toda página, que anunciaba el congreso celebrado en honor a su memoria (El Escorial, 1989). Chicho nunca se separó de ese pequeño cartel. La devoción hacia José Luis se convirtió en el acicate esencial para continuar con la tarea universitaria en todas sus facetas.

En los ochenta Chicho había recorrido ya cada rincón de La Rioja, hasta donde se podía llegar en coche y un poco más. Conocía los vinos igual de bien que los productos de sus islas. Era un buen catador, como el amigo Carmelo Cunchillos, con quien también compartía los puros de La Breña. A veces parecían demasiado exigentes, resistiéndose a aceptar plenamente un vino magnífico porque no igualaba a aquel otro mítico de imposible olvido. En Fuenmayor encontraban a Manuel en su «Donal», a Chema, el que mimaba las viñas, y . . . mucha amistad y buena mesa. En el cambio de década, nuevas campanadas tristes mermaron el universo afectivo de Chicho. En 1990 murió su padre, todavía pronto; un año después llegó, a una edad más natural, la hora del abuelo materno. En los noventa Chicho empezó a cuidarse de modo más sistemático, a vigilar su peso. Se fue volviendo canoso mientras la barba seguía siendo de quita y pon, pero ya siempre arreglada. Era más bien hipocondríaco, tenía mejor salud de la que manifestaba pero no dejaba de regar el riñón con agua fresca por si acaso; vigilaba una tensión que nunca subió demasiado y acudía puntual a su fisioterapeuta para retocar hoy este hombro, mañana aquella cervical.

Decíamos unos párrafos antes que Chicho inició una nueva etapa de investigación en 1986, con un tema nuevo y la atención dirigida hacia los más jóvenes. En el interludio entre una y otra temática, ayudó en sus trabajos doctorales a su antiguo alumno Miguel Ángel Hernández, con el que publicó un par de artículos al margen de su tema principal de investigación. Pero lo más decisivo es que comenzó a tomar responsabilidades dentro de su grupo, en el que dirigió dos tesis doctorales, la de Juan Luis Varona y la de Mario Pérez, esta última codirigida por Francisco J. Ruiz Blasco,

otro discípulo de José Luis. La tesis de Juan Luis, defendida en 1988, fue realizada en Logroño pero defendida en la Universidad de Cantabria por anómalas razones administrativas que no vale la pena mencionar. Pero sí aprovechamos para hacer notar que Chicho llevó allí el expediente porque estaba Jaime Vinuesa. También eran frecuentes sus escapadas con Mari Carmen a Santander, con Jaime y Angelines, con otros colegas y amigos de allá; y, como le gusta decir a Jaime, para ver el mar, algo que Chicho necesitaba de vez en cuando.

En este periodo, desde el final de la década de los ochenta, el trío que hemos mencionado, Pérez, Ruiz y Varona, o mucho mejor, Mario, Pacho y Juan Luis, comparte con Chicho buena parte de su investigación y la autoría de numerosos trabajos. Han compartido mucho más que eso. Juan Luis era en Logroño el apoyo de Chicho para muchas cosas. Pacho y Mario le esperaban en Zaragoza cada jueves, cuando llegaba a la facultad, quizás después de la visita a Fernando Montes. La diferencia de edad daba un matiz especial a su afecto mutuo, pero no impedía una gran camaradería entre ellos. Chicho y Pacho alcanzaron un grado especial de amistad, compartida por Mari Carmen y Palmira, la hermana de José Luis y esposa de Pacho. Terminado el trabajo en la pizarra del seminario, el final de la tarde era el momento de alternar con un puñado de amigos por los bares habituales, a mitad de camino entre la facultad y la casa de la suegra de Chicho, su domicilio en la capital aragonesa. Palmira se sumaba a la pandilla habitualmente, Mari Carmen siempre que iba a Zaragoza; también Juan Luis en ocasiones, acompañado entonces por Mario, menos adicto a estos alborotos.

Tiene su hueco en la historia de Chicho el encuentro entre las calles zaragozanas Santa Teresa y Barbasán, con sus locales que cobijaron, desde los sesenta hasta hoy mismo, tanta convivencia. Cuando Franco murió, Chicho paseó por ellas deleitándose con un ostentoso veguero provisto de un delicado crespón negro. Entre los locales, mencionemos sobre todo al histórico «Vinos Rubio», un clásico desde los años estudiantiles, con unos dueños encantadores que se hacían mayores a la vez que Chicho; más moderno es el «Soleá», donde Chicho y Pacho siempre tenían a su disposición una guitarra.

Durante la década de los noventa, Chicho fue el investigador principal en los proyectos del grupo de Polinomios Ortogonales y Análisis de Fourier de Zaragoza y La Rioja, que se integraba con otros análogos de diferentes universidades. Desde que se implantaron, fue consiguiendo todos los sexenios que incentivan económicamente la labor investigadora. Actuó con frecuencia como árbitro en revistas internacionales de prestigio y siguió participando en numerosos congresos nacionales e internacionales, siendo con frecuencia miembro de la organización o del comité científico. Especial relevancia tuvo la organización en 1994 de los primeros Encuentros de Análisis Real y Complejo, celebrados en Ezcaray, un hermoso pueblo riojano al pie de la sierra. Esta reunión tuvo gran acogida y nuevos Encuentros se sucedieron periódicamente; el último, en abril del presente año, fue en la ciudad natal de Chicho y estuvo dedicado a su memoria. Entre los organizadores figuraban Fernando Pérez González, José Manuel Méndez y José Rodríguez, tres pilares de las relaciones universitarias de Chicho en Canarias. El primero de ellos pronunció unas palabras de bienvenida a los asistentes seguidas de una hermosa semblanza de Chicho y de la influencia que

ejerció en el propio orador; de su papel como impulsor de unas reuniones científicas con estilo propio y de algunos lugares de la isla llenos de recuerdos compartidos.

Mencionemos ahora que, el pasado mes de septiembre, se ha celebrado en Ezcaray, en las mismas instalaciones que Chicho promocionó hace siete años, otra reunión matemática, el EACA 2001. El recuerdo que habitaba en el ambiente quedó reflejado por los organizadores en el motivo central del cartel y de la portada del libro de actas (Julio Rubio (Ed.), *Actas del VII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones*, Universidad de La Rioja, Logroño, 2001). Eligieron el «Fractal de Chicho», un llamativo dibujo en color obtenido por ordenador a partir de ciertas ecuaciones (ver, en este volumen, pp. 247–254, el trabajo del mismo título de M. Benito, J. M. Gutiérrez y V. Lanchares). Chicho y Manuel Benito [34] realizaron un trabajo de artistas explicando cómo se dibujan los fractales con el ordenador y ejecutando media docena de ejemplos muy bellos. Muy recientemente, en 1999, disfrutó en el congreso celebrado en la isla caribeña de Guadalupe, donde departió con colegas hispanos de la orilla americana.

Retomando el cauce biográfico, señalemos un acontecimiento que quizás sea el más relevante de este periodo final de la vida de Chicho, la creación de la Universidad de La Rioja. Entre otras cosas, le supuso la dirección de un departamento y le permitió el acceso a la cátedra sin mediar cambio de residencia. Una vieja aspiración de finales de los setenta, recogida en el reto «Hoy Colegio, mañana Universidad», se hacía realidad al fin, gracias a la confluencia de la política universitaria socialista con el desarrollo autonómico, que tenía la Universidad como una de sus prioridades. Ya a finales de 1988, el Rector de la Universidad de Zaragoza, Vicente Camarena, había dispuesto un Vicerrectorado del Campus de La Rioja; el objetivo era propiciar el contacto y la coordinación entre el Colegio y las Escuelas Universitarias radicadas en Logroño, impulsar la puesta en marcha de nuevas titulaciones en el campus riojano e ir favoreciendo una cierta gestión autónoma en la medida que la legislación vigente lo permitía. La creación de la Universidad de La Rioja llegó en 1992. Chicho y Mari Carmen estuvieron siempre a favor del proceso y de la onda política que lo impulsaba. En el momento de la creación, cuando el personal podía por razón legal elegir ente Zaragoza y Logroño, optaron por quedarse. Una vez que la Comisión Gestora, encabezada por Pedro Campos, comenzó a organizar la Universidad, ambos fueron llamados a asumir responsabilidades: Mari Carmen al frente del Centro Científico-Técnico, a cargo de Chicho la puesta en marcha de una nueva unidad que llegaría a ser el actual Departamento de Matemáticas y Computación. La tarea añadida de Chicho fue ardua: había que preparar instalaciones, la administración departamental, planes de estudio para la licenciatura propia y para las asignaturas de matemáticas de otras titulaciones; planificar y luego iniciar una expansión de la plantilla de profesores, etc. Todos los compañeros se volcaron en dicha tarea trabajando en armonía, siendo Chicho quien ejerció un papel directivo claro en todo el proceso. Aun sintonizando con la línea general de la gestión, fue exigente con las primeras autoridades académicas cuando se trataba de defender la parcela de sus responsabilidades, no dudando en sostener algunas tensiones ocasionales.

La puesta en marcha de la Universidad trajo consigo, en cuanto fue posible, la dotación de cátedras. Se convocó una primera remesa y Chicho fue, en 1995 y en el

área de Análisis Matemático, uno de los primeros Catedráticos de la Universidad de La Rioja. También alcanzó la cátedra Carmelo Cunchillos, de Filología Inglesa. Una vez elegido el primer Rector, a la largo de su mandato Chicho mantuvo con frecuencia, en sintonía con su viejo amigo Carmelo, una actitud que debería calificarse de oposición, aunque fuera en virtud de sus propios criterios y no como resultado de una corriente organizada. Chicho permaneció al frente del Departamento hasta 1997, cuando renunció a presentarse de nuevo al cargo, aunque tenía la elección asegurada no sólo por razones normativas, al ser el único catedrático, sino porque contaba con el apoyo seguro de los compañeros. Le sucedió, y permanece con el mandato renovado, José Ignacio Extremiana, que fue uno de los primeros alumnos que Chicho tuvo en el Colegio Universitario; el relevo generacional se produjo con total cordialidad, como correspondía a un traspaso entre buenos amigos en un departamento notablemente cohesionado. Como gestor Chicho se sentía algo incómodo, tenía buenos criterios pero poca docilidad normativa y menos propensión al papeleo; algunas de sus iniciativas no casaban bien con el entorno administrativo. Especial empeño puso, con éxito, en mantener una reserva de plazas para Profesores Visitantes, sobre todo, pero no sólo, en su área de Análisis. Ello permitió un flujo de profesores, en estancias cuatrimestrales a veces renovadas, que contribuyó sin duda a fortalecer la docencia y animar la investigación. Por afinidad afectiva y solidaria, los profesores contratados de este modo procedían, todavía sucede así, de América Latina y de Europa del Este, zonas del planeta en las que había, todavía hay, muy buenos matemáticos en condiciones sociales y económicas lamentablemente desfavorables. Casi todos los que pasaron por aquí están entre los firmantes de este volumen. Con dos de ellos, el cubano Manuel Bello y el ucraniano Víctor Kolyada, Chicho llegó a publicar en colaboración.

La gestión departamental no le impidió avanzar en la investigación. En el apartado siguiente comentaremos sus trabajos publicados, algunos de ellos póstumos. Salvo unos pocos individuales al principio, Chicho publicaba artículos con uno o varios colegas. Esto era así porque en él dominaba el espíritu de equipo, la mixtura entre trabajo y amistad; es difícil imaginarlo como un matemático solitario. Además era perfeccionista y remiso a rematar la faena y ponerla en orden. Tampoco le resultaba simpática la máquina de escribir ni luego el ordenador, salvo para jugar contra él al ajedrez; en cuestión de instrumental nunca pasó del bolígrafo, que sujetaba con fuerza para realizar una letra clara, algo quebrada y nerviosa como su temperamento. No se veía reflejado en el texto monocorde e impersonal que fluye de las máquinas, cuyo manejo siempre consiguió evitar.

Sin abandonar la actividad, en los últimos años empezaba a preocuparle la retirada, de vez en cuando la mencionaba. Le iba pesando el trabajo tan intenso y se imaginaba feliz disfrutando de la vida. En Logroño ensayaba ese momento cuando acudía a sus grutas favoritas, a degustar los vinos de Raúl o de Santos en tertulias vespertinas con una magnífica cuadrilla. También era feliz cuando se reunían, de cuando en cuando, un puñado de matemáticos y químicos que se veían menos desde que la nueva universidad separó sus departamentos. Pero no pensaba quedarse anclado en la capital riojana, muchas relaciones parecidas a las anteriores y a la vez diversas le esperaban en sus otros territorios. Decía que obtener un sexenio más sería

el final de la tarea, que ese proyecto trienal recién solicitado sería el último... «y a ponerse el bañador», ésta era su frase resumen. También tenía claro que no quería terminar su carrera convertido en un profesor que hiciera rutina de sus obligaciones mínimas. No tuvo tiempo de resolver este dilema.

Llegados a esta encrucijada tenemos que terminar, no sabemos cómo se pone el punto final a la biografía de un amigo. Avanzar nos devolvería a los párrafos tristes que iniciaron este relato. Lo que sí sabemos es que Chicho era muy rico en relaciones personales, repartidas en entornos de amistad diseminados por el territorio; mucho más rico de lo que aquí hemos podido narrar. Somos conscientes de que hemos asumido el riesgo de recoger mal las relaciones que creemos conocer y de que falten otras de las que no tenemos noticias o la tenemos imprecisa. Quizás sean los entornos canarios los que peor hemos podido reflejar. En diversas universidades hay personas que tienen un sitio en la vida de Chicho y no lo han tenido, o ha sido escaso, en estas páginas, sobre todo los colegas y amigos de los grupos de Polinomios Ortogonales; pero es que la lista completa sería muy larga. Pedimos disculpas a cuantos no se encuentren a gusto, por exceso, por omisión o por mal enfoque, en el retablo que hemos trazado del mundo de Chicho, lleno de personajes que se desenvuelven —que nos desenvolvemos, nosotros también— en los diversos escenarios por los que se movía como un maestro de ajedrez ante un complejo juego de simultáneas.

OBRA MATEMÁTICA:

I. ALREDEDOR DE LA TEORÍA DE SZEGŐ

Esta nueva sección se dedicará a completar la anterior desde el punto de vista técnico, dando una descripción de los frutos de la investigación de Chicho, que hemos dividido en dos periodos. Recordemos que esta investigación comenzó propiamente en la segunda mitad de los setenta, una vez instalado en Logroño, pero integrado en el grupo de Polinomios Ortogonales (P.O.) de Zaragoza. Este grupo se originó, bajo la dirección de Luis Vigil, con Manuel Alfaro, Jaime Vinuesa, Francisco Marcellán y el propio Chicho entre otros, incorporándose más tarde María Pilar Alfaro, etc. Chicho realizó un breve trabajo con Jaime Vinuesa sobre extensiones típicas de productos escalares en el caso real, que publicaron años después [3]. También, bajo la influencia de la aproximación de Vigil a la teoría de Szegő, en [9] analiza la relación entre los P.O. sobre \mathbb{T} y distintos elementos de dicha teoría. Pero no continuó con estas líneas de investigación, así que vayamos de lleno al tronco de su labor científica.

La vuelta de José Luis Rubio de Francia de Estados Unidos dio un impulso considerable al grupo; en particular, él fue el director de tesis de Chicho [2], defendida en 1980. La idea de conectar el estudio de diversos aspectos de la teoría de P.O. con problemas modernos desde el punto de vista del Análisis de Fourier sirvió para investigar en problemas de interés del momento: aspectos generales de la teoría de Szegő, espacios de Hardy en el disco y en dominios planos con pesos —tratando de caracterizar éstos mediante la clausura de polinomios analíticos en la frontera—, relación con procesos estacionarios gaussianos, cuestiones de determinismo y su tratamiento en espacios de Orlicz, subespacios invariantes en $L^p(\mathbb{T})$ y $L^p(w)$, acotación de la función conjugada en curvas del plano complejo con pesos A_p , etc. Comentemos

algunos resultados fruto de esta investigación; varios de ellos provienen de su colaboración con María Luisa Rezola, quien, por las mismas fechas, también realizaba su tesis con José Luis.

Teoría de Szegő. [2, 7] En su formulación moderna, uno de los problemas básicos tratados en la teoría clásica de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad es el estudio de la clausura de los polinomios analíticos en el espacio de las funciones de cuadrado sumable. Más concretamente: sea μ una medida finita y positiva sobre la circunferencia unidad \mathbb{T} y consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mu) = L^2(\mathbb{T}, \mu)$. Denotemos por $H^2(\mu)$ el subespacio de $L^2(\mu)$ de las funciones aproximables por polinomios analíticos $\sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta}$ en la norma de $L^2(\mu)$. Dos cuestiones surgen de inmediato: caracterizar cuándo es estricto el contenido $H^2(\mu) \subset L^2(\mu)$ y, en ese caso, representar las funciones de $H^2(\mu)$.

La respuesta a la primera cuestión se debe a Kolmogorov, Szegő y Krein, entre otros: el contenido $H^2(\mu) \subset L^2(\mu)$ es estricto si y sólo si $\log w \in L^1(\mathbb{T})$, donde $\mu = \mu_c + \mu_s$ ($\mu_c = w d\theta$) es la descomposición de Lebesgue de μ con respecto a la medida de Lebesgue $d\theta$. Y la respuesta a la segunda cuestión es el teorema de Szegő:

$$H^2(\mu) = K \cdot H^2(\mathbb{T}) \oplus L^2(\mu_s),$$

donde K es la proyección de la función 1 sobre el ortogonal de $e^{i\theta} H^2(\mu)$, $1 - K$ el vector de mejor aproximación de 1 en $e^{i\theta} H^2(\mu)$, $H^2(\mathbb{T})$ el espacio de Hardy clásico, y $L^2(\mu_s)$ la parte singular de $L^2(\mu)$.

En su tesis [2], Chicho abordó la generalización de esta situación al espacio $L^p(\mu)$, con $1 \leq p < \infty$. Las técnicas utilizadas difieren de las hilbertianas usadas en el caso clásico, y corresponden a técnicas de mejor aproximación y ortogonalidad de James. Para el caso $1 < p < \infty$ obtiene

$$H^p(\mu) \subsetneq L^p(\mu) \iff \log w \in L^1(\mathbb{T}) \iff e^{i\theta} H^p(\mu) \subsetneq H^p(\mu).$$

La primera equivalencia expresa que, si la inclusión es estricta para un p , lo es para todos los p . La segunda indica que $H^p(\mu)$ es simplemente invariante por el operador *shift*, esto es, el definido mediante $f(e^{i\theta}) \mapsto e^{i\theta} f(e^{i\theta})$. El teorema de Szegő queda generalizado por

$$H^p(\mu) = K_p \cdot H^p(\mathbb{T}) \oplus L^p(\mu_s)$$

donde $1 - K_p$ es el vector de mejor aproximación de 1 en $e^{i\theta} H^p(\mu)$, y está caracterizado por

$$1 - K_p \in e^{i\theta} H^p(\mu), \quad |K_p|^p d\mu_c = c d\theta, \quad \frac{1}{K_p} \in H^p(\mathbb{T})$$

(siendo c una constante positiva). A partir de aquí se obtienen una serie de consecuencias; unas geométricas:

$$L^p(\mu_s) = \bigcap_{m \geq 0} e^{im\theta} H^p(\mu),$$

$$H^p(\mu) = e^{i\theta} H^p(\mu) \oplus L[K_p] \quad (e^{i\theta} H^p(\mu) \text{ es hiperplano}),$$

donde $L[K_p]$ representa el subespacio 1-dimensional generado por K_p , y otras funcionales: el espacio $H_c^p(\mu) = H^p(\mu) \cap L_c^p(\mu)$ (con $L_c^p(\mu)$ las funciones de $L^p(\mu)$ que son nulas μ_s -a.e.) verifica

$$H_c^p(\mu) = H^p(\mu_c),$$

y, además (denotando $\widehat{K}_p = \|K_p\|_{L^p(\mu)}^{-1} K_p$),

$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{T}) &\longrightarrow H_c^p(\mu) \\ h &\longmapsto \widehat{K}_p \cdot h \end{aligned}$$

es un isomorfismo isométrico.

Para el caso $p = 1$, se obtiene K_1 por convergencia en $L^1(\mu)$ de los K_p cuando $p \rightarrow 1$, y se ve que está caracterizado por las mismas propiedades. Esto permite describir

$$H^1(\mu) = K_1 \cdot H^1(\mathbb{T}) \oplus L^1(\mu_s)$$

y obtener consecuencias análogas al caso $p > 1$.

Desde otro punto de vista, y continuando con $1 < p < \infty$, $H^p(\mu)$ se puede considerar como una generalización de $H^p(\mathbb{T})$ al sustituir la medida de Lebesgue por una medida positiva μ . Esto le lleva a estudiar $H^p(\mu)$ desde la perspectiva de su relación con $H^p(\mathbb{T})$, comprobando cómo se transforman o conservan algunos resultados de éste (bases, dualidad, factorizaciones, descomposiciones, coeficientes de Fourier, etc.), y de qué manera dependen de la medida.

Un estudio similar para la clausura de los conjugados de polinomios analíticos, $\widetilde{H}^p(\mu)$, conduce a resultados del mismo tipo. Además, cabe preguntarse si, como en el caso clásico, existe un análogo al teorema de Riesz, $L^p(\mathbb{T}) = H^p(\mathbb{T}) \oplus e^{-i\theta} \widetilde{H}^p(\mathbb{T})$. La respuesta depende del peso:

$$L^p(\mu_c) = H^p(\mu_c) \oplus e^{-i\theta} \widetilde{H}^p(\mu_c) \iff w \in A_p,$$

donde A_p indica la clase de pesos de Muckenhoupt.

Relación con la teoría de predicción. [2, 5] Sea P una medida de probabilidad y $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ variables aleatorias reales en el espacio $L^2(P)$, constituyendo un proceso estacionario gaussiano con medida cero. Los $c_n = \int X_0 X_n dP$ de la función de covarianza forman una sucesión definida positiva y, por el teorema de Herglotz, son los coeficientes de Fourier de una medida finita positiva sobre \mathbb{T} .

Esto permite obtener una isometría

$$\begin{aligned} L[\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}] \subset L^2(P) &\longrightarrow L^2(\mu) \\ X_n &\longmapsto e^{in\theta} \end{aligned}$$

y el proceso $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tiene una representación espectral $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (siendo μ la medida espectral). Las σ -álgebras engendradas por $\{X_n\}_{n \leq 0}$ y $\{X_n\}_{n \geq 0}$ (el pasado y el futuro, respectivamente) tienen $\widetilde{H}^2(\mu)$ y $H^2(\mu)$ como representación espectral. El proceso se dice determinista si el pasado determina el futuro, lo que equivale a $H^2(\mu) = L^2(\mu)$.

Denotemos por Π al conjunto los polinomios trigonométricos, y

$$\Pi_+ = \{g \in \Pi : \widehat{g}(k) = 0, k \leq 0\}.$$

Una elegante fórmula de Helson-Szegő expresa

$$\inf_{g \in \Pi_+} \int |1 + g(x)|^p d\mu(x) = \exp \int \log w dx, \quad 0 < p < \infty.$$

La misma cuestión cabe preguntarse si Π_+ se sustituye por

$$\Pi_0 = \{g \in \Pi : \widehat{g}(0) = 0\}.$$

Es decir, ¿cuál es el valor de

$$d_p(\mu) = \inf_{g \in \Pi_0} \int |1 + g(x)|^p d\mu(x) ?$$

Observemos que $d_p(\mu) > 0$ indica que las constantes no se aproximan por polinomios trigonométricos que se anulan en el origen (es decir, sin término constante). En el lenguaje de la teoría de predicción, $d_p(\mu) > 0$ significa que, para un cierto proceso estocástico de medida espectral μ , el pasado y el futuro estrictos no determinan, juntos, el presente.

Cuando $p = 2$, la respuesta a esta cuestión fue dada por Kolmogorov usando argumentos hilbertianos:

$$d_2(\mu) = \left(\int w(x)^{-1} dx \right)^{-1}.$$

En particular,

$$d_2(\mu) > 0 \iff w(x) > 0 \text{ a.e. y } w^{-1} \in L^1(\mathbb{T}).$$

El tratamiento que se hace en [2, 5] permite dar una aproximación diferente al problema, que es válida para estudiar $L^p(\mu)$ en general e, incluso, espacios de Orlicz. Comentaremos en primer lugar el caso $L^p(\mu)$.

Cuando $1 < p < \infty$,

$$d_p(\mu) > 0 \iff w^{-p'/p} \in L^1(\mathbb{T}).$$

Además

$$d_p(\mu) = \left(\int w(x)^{-p'/p} dx \right)^{-p/p'}.$$

Como caso particular, para $p = 2$, se obtiene el teorema de Kolmogorov y, como corolario,

$$d_p(\mu) \rightarrow \exp \int \log w \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty.$$

Para $p = 1$, $d_1(\mu) > 0$ si y sólo si w está acotada inferiormente por una constante positiva. Además

$$d_1(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{T}} w(x).$$

Finalmente, si $p < 1$, $d_p(\mu) = 0$.

Para el caso de espacios de Orlicz, sean Φ, Ψ funciones de Young conjugadas y $L_\Phi(\mu), L_\Psi(\mu)$ los correspondientes espacios de Orlicz sobre (\mathbb{T}, μ) . Entonces,

$$\inf \left\{ \|1 + g\|_{L_\Phi(\mu)} : g \in \Pi_0 \right\} > 0 \iff w(x) > 0 \text{ a.e. y } w^{-1} \in L_\Phi(w).$$

Además, estas condiciones son equivalentes a que la función conjugada y la suma n -ésima de la serie de Fourier estén acotadas de $L_\Phi(\mu)$ en $L^1(\mathbb{T})$ -débil.

La condición $w^{-p'/p} \in L^1(\mathbb{T})$ es equivalente a $L^p(w) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T})$, y es la respuesta a otras cuestiones. Por ejemplo, es condición necesaria y suficiente para que exista algún $u > 0$ tal que la transformada de Hilbert (o el operador conjugación) esté acotada de $L^p(w)$ en $L^p(u)$.

Esto se utiliza para resolver un problema de interpolación estocástica. Es condición suficiente para que $H^p(w) \cap \tilde{H}^p(w) = \{\text{constantes}\}$, que en términos de predicción indica que la intersección del pasado y el futuro es el presente. La condición está bien ajustada en el sentido de que si $0 < q < p'/p$, existe w tal que $w^{-q} \in L^1(\mathbb{T})$ y $H^p(w) \cap \tilde{H}^p(w)$ contiene funciones no constantes.

Subespacios invariantes. [1, 4, 6, 7, 8] Con respecto al operador *shift*

$$S: L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\mu) \\ f(e^{i\theta}) \longmapsto Sf(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta}),$$

un subespacio $M \subset L^p(\mu)$ se dice doblemente invariante si $S(M) = M$, y simplemente invariante si $S(M) \not\subseteq M$. En estos términos, $H^p(\mu) = L^p(\mu)$ si y sólo si $H^p(\mu)$ es doblemente invariante; $H^p(\mu) \subsetneq L^p(\mu)$ si y sólo si $H^p(\mu)$ es simplemente invariante.

Surge así la idea de describir los subespacios simple y doblemente invariantes en $L^p(\mu)$. La respuesta es que, para $1 < p < \infty$, se tiene

$$M \text{ es dobl. inv.} \iff M = \chi_E \cdot L^p(\mu_s), \quad E \text{ medible en } \mathbb{T};$$

$$M \text{ es simpl. inv.} \iff M = q \cdot H^p(\mathbb{T}) \oplus \chi_E \cdot L^p(\mu_s),$$

donde $|q|^p w = 1$, $q = 0$ μ_s -a.e. y es única salvo factores constantes de módulo 1.

Entre otras consecuencias, resulta de nuevo el teorema de Szegő para $0 < p < \infty$. Así mismo, se prueba que

$$M \text{ es simpl. inv. en } L^p(w) \iff M = u \cdot H^p(w), \quad |u| = 1 \text{ a.e.};$$

$$M \text{ es simpl. inv. en } H^p(w) \iff M = u \cdot H^p(w), \quad u \text{ interna.}$$

Estos y otros resultados extendieron los conocidos de Beurling para el espacio $H^p(\mathbb{T})$ clásico, así como los de Srinivasan y Wang.

H^p en dominios planos con pesos. [2, 7, 10, 11, 13] Si w es un peso sobre la circunferencia unidad \mathbb{T} , podemos definir $H^p(D, w)$ como el espacio de las funciones holomorfas en el disco D tales que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^p w(\theta) d\theta < \infty, \quad z = re^{i\theta};$$

y $H^p(\mathbb{T}, w)$ como la clausura en $L^p(\mathbb{T}, w)$ de los polinomios analíticos $\sum_{k=0}^n a_k z^k$.

Si $\log w \in L^1(\mathbb{T})$ y $0 < p < \infty$, entonces $H^p(\mathbb{T}, w) = K_p \cdot H^p(\mathbb{T})$, donde $1/K_p$ es la función externa (salvo constantes de módulo 1) tal que $|K_p|^p w = 1$ en casi todo punto. Una pregunta natural es si existe un resultado análogo para $H^p(D, w)$ y, de nuevo por similitud con el caso clásico ($w = 1$), si existe un isomorfismo entre $H^p(D, w)$ y $H^p(\mathbb{T}, w)$. La respuesta a estas preguntas, para $w \in A_\infty$, es:

- (i) $H^p(D, w) = K_p \cdot H^p(D)$ donde $1/K_p$ es la única función externa tal que $|K_p|^p w = 1$ en casi todo punto.
- (ii) Si $f \in H^p(D, w)$, existe convergencia no tangencial a una función $f^* \in H^p(\mathbb{T}, w)$.
- (iii) Existe un isomorfismo entre $H^p(D, w)$ y $H^p(\mathbb{T}, w)$.
- (iv) Dualidad: $H^p(D, w)' = H^{p'}(D, w)$, $1/p + 1/p' = 1$.
- (v) Factorización: $H^p(D, w) \cdot H^q(D, w) = H^r(D, w)$, $1/p + 1/q = 1/r$.

Sea ahora Γ una curva rectificable de Jordan en el plano complejo, y denotemos por Ω la región limitada por Γ . Por un resultado de Carathéodory, cada aplicación conforme ϕ del disco unidad D en Ω tiene una única extensión a $|z| \leq 1$ y en particular su restricción a la circunferencia unidad \mathbb{T} es una parametrización de Γ . Supondremos ϕ normalizada por $\phi(0) = 0$.

Sea $d\mu = w ds$ una medida finita positiva sobre Γ absolutamente continua respecto a la longitud de arco ds . Representamos por $L^p(\Gamma, \mu)$, $1 < p < \infty$, el espacio de las funciones complejas definidas sobre Γ tales que $\int_{\Gamma} |f(z)|^p d\mu < \infty$, y por $H^p(\Gamma, \mu)$ el subespacio cerrado de $L^p(\Gamma, \mu)$ engendrado por los polinomios analíticos $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $z \in \Gamma$. Denotemos $L^p(\Gamma) = L^p(\Gamma, ds)$ y $H^p(\Gamma) = H^p(\Gamma, ds)$.

Si se quiere estudiar $H^p(\Gamma, \mu)$, es obvio que este espacio debe estar estrictamente contenido en $L^p(\Gamma, \mu)$, y esto requiere restringir la clase de curvas Γ . Para ello se consideran curvas denominadas arco-cuerda, que vienen definidas por la siguiente condición: existe una constante $C > 0$ tal que, para todo par de puntos $z_1, z_2 \in \Gamma$, $s(z_1, z_2) \leq C|z_1 - z_2|$, donde $s(z_1, z_2)$ es la longitud del arco más corto a lo largo de Γ que une z_1 y z_2 . Estas curvas están caracterizadas por la condición $\log \phi' \in \text{BMOA}$.

Si Γ es arco-cuerda, Ω es un dominio de Smirnov (ϕ' externa) y existe $q > 1$ tal que $|\phi'| \in A_q$, fijado dicho q imponemos al peso w que verifique $\log w \in L^q(\Gamma)$. En estas condiciones obtenemos para $H^p(\Gamma, \mu)$ la representación

$$H^p(\Gamma, \mu) = K_p \cdot H^p(\Gamma),$$

donde

$$K_p = w^{-i/p} \exp(-i(\log w) \sim)$$

y \sim indica la función conjugada sobre Γ definida por $\tilde{f} = (f \circ \phi) \sim \circ \phi^{-1}$. También se obtuvieron resultados análogos al caso clásico ($\Gamma = \mathbb{T}$) para dualidad, factorizaciones, bases, etc.

También se aborda el estudio de la función conjugada. Se define de manera natural y, como sucede en el caso del círculo unidad, si $P(z)$ es un polinomio y $f(z) = \text{Re } P(z)$, $z \in \Gamma$, entonces $\tilde{f}(z) = \text{Im } P(z)$. En el caso sin peso ($w \equiv 1$), el teorema de M. Riesz, vía transformación conforme, afirma que

$$\sim : L^p(\Gamma) \longrightarrow L^p(\Gamma) \text{ acotado} \quad \Longleftrightarrow \quad |\phi'| \in A_p;$$

por tanto, para establecer el resultado con pesos, se necesitan curvas que verifiquen esta condición.

Por ello se consideran una clase especial de curvas arco-cuerda, denominadas cuasirregulares, que verifican la siguiente condición de tipo geométrico: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $z_1, z_2 \in \Gamma$ y $|z_1 - z_2| \leq \delta$, entonces $s(z_1, z_2) \leq$

$(1 + \varepsilon)|z_1 - z_2|$. Estas curvas están caracterizadas por

$$\log \phi' \in \text{VMOA}(D) = H^1(D) \cap \text{VMO}(\mathbb{T}),$$

donde $\text{VMO}(\mathbb{T})$ es la clausura en $\text{BMO}(\mathbb{T})$ de las funciones continuas. Para esta clase de curvas se obtiene un resultado similar al clásico: dado $1 < p < \infty$, el operador conjugación está acotado en $L^p(\Gamma, w ds)$ si y sólo si $w \in A_p$.

En la demostración de este resultado sólo se usa el hecho de que $\log |\phi'| \in \overline{L^\infty_{\text{BMO}}}$. Las curvas que verifican esta condición contienen estrictamente a las cuasirregulares y están contenidas en las arco-cuerda; y están caracterizadas por la equivalencia entre la acotación del operador conjugación y la condición A_p .

Funciones cardanianas. [12, 14] A mediados de la década de los ochenta, a caballo entre los dos periodos de investigación que distinguimos, Chicho colaboró durante una temporada con Miguel Angel Hernández, compañero del Colegio Universitario, que estaba elaborando su tesis doctoral.

Su estudio trata sobre funciones enteras (analíticas en todo \mathbb{C}), y se analizan propiedades similares a las dadas por las reglas de Cardano, que relacionan los coeficientes de un polinomio con sus ceros. Las funciones enteras tienen un desarrollo en serie de potencias en torno al origen, y se trata de estudiar si entre los coeficientes de tal desarrollo y los ceros de la función aparecen relaciones que generalicen las reglas de Cardano. Se consiguen probar resultados de este tipo, en los que, además, interviene el orden exponencial de la función analítica.

II. SERIES DE FOURIER

Durante la primera parte de los ochenta, la investigación de Chicho se dedicó a los temas citados hasta ahora. Visitaba la U.A.M. frecuentemente para comentar algunos problemas con José Luis Rubio de Francia. Él le sugirió que estudiara el problema de la convergencia de la serie de Fourier de P.O., y le proporcionó la bibliografía que conocía hasta el momento: la memoria de Benedek-Panzone y los trabajos de Pollard, Wing y Muckenhoupt.

En 1985, Chicho comenzó a dirigir la tesis de Juan Luis Varona (defendida en 1988); y, un poco después, la de Mario Pérez (defendida en 1989), codirigida con su entrañable amigo Francisco J. Ruiz Blasco. Ambas tesis abordaron este tema. Esta línea de investigación, y su colaboración con ellos tres, duró hasta el final de sus días.

El planteamiento de algunos problemas de la convergencia de la serie de Fourier en el contexto de sistemas ortogonales generales es muy simple, si se considera antes el análogo clásico de la serie de Fourier trigonométrica.

Consideremos \mathbb{T} la circunferencia unidad y $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ el sistema ortogonal en $L^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T}, dx)$. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, las sumas parciales de la serie de Fourier vienen

dadas por

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = D_n * f(x), \end{aligned}$$

donde

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})t)}{\operatorname{sen}(\frac{t}{2})}$$

es el denominado núcleo de Dirichlet. Algunos resultados clásicos sobre acotación uniforme y convergencia de la serie de Fourier son:

Convergencia en $L^p(\mathbb{T})$ (M. Riesz, 1920): $S_n f \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_p$, para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$.

Sin embargo, no es cierto en general que $S_n f \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_1$. Cuando se trata, como en el caso anterior, de convergencias en norma, ésta es equivalente a la correspondiente acotación uniforme de los operadores S_n . Y es también equivalente a la acotación del operador conjugación $\sim: L^p(\mathbb{T}) \rightarrow L^p(\mathbb{T})$.

Divergencia en casi todo punto (Kolmogorov, 1926): Existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $S_n f$ diverge a.e.

Acotación $(1, 1)$ -débil (Kolmogorov, 1928): Los operadores $S_n: L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$ están uniformemente acotados.

Convergencia en casi todo punto (Carleson-Hunt, 1966-67): $S_n f \rightarrow f$ en casi todo punto, para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$. De hecho, el operador maximal $S^* f(t) = \sup_n |S_n f(t)|$ está acotado en $L^p(\mathbb{T})$ y esto implica la convergencia en casi todo punto.

Acotación en $L^p(w)$ (Hunt, Muckenhoupt y Wheeden, 1973): Los operadores $S_n: L^p(w) \rightarrow L^p(w)$ están uniformemente acotados si y sólo si w pertenece a la clase de pesos A_p de Muckenhoupt ($1 < p < \infty$).

Si ahora $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los polinomios ortonormales respecto a una medida $d\mu$ (en \mathbb{T} o en algún intervalo de \mathbb{R}), o $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es, en general, un sistema ortonormal en $L^2([a, b], d\mu)$, las anteriores cuestiones tienen su análogo aquí, y su estudio ocupó bastante parte del esfuerzo investigador de Chicho a lo largo de estos últimos años. Lógicamente, para que pueda haber convergencia de la serie de Fourier, el sistema ortonormal debe ser completo (con combinaciones lineales densas en el espacio L^p correspondiente); en principio, asumiremos este hecho sin mayores comentarios. Centrémonos en polinomios ortonormales y en problemas de convergencia en media o de acotación débil.

Los hechos fundamentales, que se desprenden de procedimientos estándar, son los que siguen:

Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ el sistema de polinomios ortonormales en $L^2(d\mu) = L^2([a, b], d\mu)$ (se pueden conseguir ortogonalizando $1, x, x^2, \dots$ por el procedimiento de Gram-Schmidt). Para una función f ,

$$a_k = \int_a^b f p_k d\mu, \quad S_n f = \sum_{k=0}^n a_k p_k$$

denotan, respectivamente, los coeficientes y las sumas parciales de la serie de Fourier de f . Por el teorema de Banach-Steinhaus, si $1 \leq p < \infty$,

$$S_n f \rightarrow f \text{ en } L^p(d\mu) \iff \|S_n f\|_p \leq C \|f\|_p$$

con C independiente de n (y donde $\|\cdot\|_p$ denota la norma en $L^p(d\mu)$).

Para $p = 2$, siempre es cierta la acotación $\|S_n f\|_2 \leq \|f\|_2$ (desigualdad de Bessel). Entonces, por dualidad e interpolación, el conjunto de los p para los que $\|S_n f\|_p \leq C \|f\|_p$ es un intervalo simétrico (respecto a la conjugación $1/p + 1/p' = 1$) en torno a $p = 2$.

En relación con esto, una serie de cuestiones que pueden abordarse son:

Problema principal: Dar condiciones necesarias y suficientes para la acotación uniforme de los operadores S_n y determinar el intervalo de los p para los que hay convergencia en $\|\cdot\|_p$. (No se conoce ningún operador que haga el papel de la transformada de Hilbert en las series trigonométricas. Es decir, un operador cuya acotación sea equivalente a la acotación uniforme de los S_n .)

Acotación con pesos: Estudiar para qué pesos U y V se tiene

$$\|S_n f\|_{L^p(U^p d\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(V^p d\mu)}$$

con C independiente de n .

Comportamiento en los extremos: El intervalo de los p donde hay acotación, ¿es abierto o cerrado? Y, en segundo lugar, si es abierto e igual a (p_0, p_1) , ¿hay acotación uniforme débil o débil restringida en los extremos p_0 y p_1 ?

La primera dificultad que se encuentra para resolver estos problemas es que se necesita tener estimaciones para los polinomios p_n que están muy lejos de conocerse en un caso general (es decir, con $d\mu$ una medida cualquiera).

La razón por la que las estimaciones para los polinomios pueden resolver el problema proviene del hecho de que S_n es un operador que viene dado por la integración contra un núcleo

$$S_n f(x) = \int_a^b K_n(x, y) f(y) d\mu(y), \quad K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n p_k(x) p_k(y).$$

Las relaciones de ortogonalidad permiten expresiones más manejables del núcleo, como la fórmula de Christoffel-Darboux

$$K_n(x, y) = \gamma_n \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}.$$

Aquí se ve la posible relación con la transformada de Hilbert aunque, desgraciadamente, no es un núcleo estándar de una integral singular. Ni tampoco si separamos

el operador en dos según sugiere inmediatamente la anterior fórmula, ya que entonces ninguno de los dos que aparecen es uniformemente acotado (al menos, en todos los ejemplos conocidos).

Esto supone una segunda dificultad, que consiste en buscar buenas descomposiciones del núcleo de manera que S_n se pueda escribir como una suma de operadores de los que se pueda estudiar, con ciertas garantías, su acotación con pesos.

Las aportaciones de Chicho en esta línea, someramente comentadas, son las siguientes:

Convergencia (acotación) en L^p . [15, 16, 17, 18, 20, 23, 24, 25, 27, 32] Se caracteriza la acotación en L^p con pesos para cierta clase de polinomios que contienen en particular a los de Jacobi generalizados, esto es, los ortogonales respecto al peso

$$w(x) = H(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{\gamma_k}, \quad x \in [-1, 1],$$

con $-1 < x_1 < \dots < x_m < 1$, $\alpha, \beta, \gamma_k > -1$, y siendo H una función positiva a la que se imponen condiciones adicionales sobre su módulo de continuidad. También se obtienen resultados para medidas cuya parte absolutamente continua es un peso de Jacobi generalizado y cuya parte singular es una suma finita de deltas de Dirac; y para la suma de un peso de Laguerre y una masa positiva en 0.

Así mismo, se aborda la acotación uniforme de las series de Fourier que provienen de otro sistema ortogonal muy utilizado, pero que ya no está formado por polinomios, el de Bessel. La relación de ortogonalidad de este sistema es

$$\int_0^1 J_\alpha(\alpha_n x) J_\alpha(\alpha_m x) x dx = \frac{1}{2} J_{\alpha+1}(\alpha_n)^2 \delta_{nm},$$

donde $J_\alpha(x)$ denota la función de Bessel de orden $\alpha > -1$, y $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ son sus ceros positivos ordenados en sentido creciente. Igualmente, se estudian las series de Fourier de otro sistema ortogonal en el que intervienen funciones de Bessel (esta vez, en $(0, \infty)$): las series de Neumann, que comentaremos más adelante.

Acotación débil y débil restringida. [17, 19, 22, 25, 26, 27] El rango de valores de p para los cuales la serie de Fourier converge es un intervalo. En sus extremos, a diferencia del caso clásico, los resultados para polinomios de Jacobi generalizados y para series de Bessel son negativos: no hay acotación débil (con o sin pesos adicionales). Tiene sentido preguntarse si hay acotación débil restringida, es decir, de $L^{p,1}(\mu)$ en $L^{p,\infty}(\mu)$; se prueba, en los casos mencionados, que sí hay acotación.

Convergencia en casi todo punto. [21, 27] Refinando un resultado de Gilbert sobre trasplatación, se prueba que el operador maximal de la serie de Fourier está acotado para series de Fourier-Jacobi y Fourier-Bessel; también, para medidas de Jacobi generalizadas (con una suma finita de deltas de Dirac). Como consecuencia, la serie converge en casi todo punto.

Por otra parte, a partir de cotas inferiores para las normas en L^p de los polinomios (o funciones) ortonormales, pueden encontrarse condiciones necesarias para la convergencia en todo punto de series de Fourier. Esto nos permite hallar condiciones

muy generales y fácilmente evaluables que, en particular, garantizan la divergencia en casi todo punto de la serie de Fourier de alguna función en todos los sistemas para los que, hasta el momento, este hecho ya era conocido.

Medidas más generales y el conmutador de la serie de Fourier. [28, 29, 31]

Todos los resultados anteriores se refieren a clases específicas de medidas, más o menos amplias. Existen condiciones necesarias para la convergencia, pero en general no son suficientes. Si $S_n(\mu)$ es el operador suma parcial n -ésima de la serie de Fourier asociada a una medida μ de partida, el estudio de la dependencia

$$b \longmapsto S_n(e^b d\mu)$$

puede proporcionar resultados acerca de la convergencia de la serie de Fourier asociada a medidas de la forma $e^b d\mu$, donde b es una *perturbación* cualquiera, aunque de norma pequeña, en algún espacio adecuado de funciones. Este problema está muy relacionado con el estudio del conmutador $[b, S_n]f = bS_n(f) - S_n(bf)$. Tanto para este conmutador como para las perturbaciones de medidas, se obtiene información en el caso de los polinomios de Jacobi o funciones de Bessel y tomando funciones $b \in \text{BMO}$.

Series de Neumann. [31, 32, 33] Si usamos J_μ para denotar la función de Bessel de orden μ , y tomamos $\alpha > -1$, se verifica la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int_0^\infty J_{\alpha+2n+1}(x)J_{\alpha+2m+1}(x) \frac{dx}{x} = \frac{\delta_{nm}}{2(2n + \alpha + 1)}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

Las series de Fourier correspondientes, $\sum_{n=0}^\infty c_n J_{\alpha+2n+1}$, se suelen denominar series de Fourier-Neumann.

El estudio de estas series resulta muy interesante, pues el sistema ortogonal tiene propiedades distintas de las habituales en otros sistemas. En particular, la clausura de las combinaciones lineales finitas de las funciones ortogonales no es el correspondiente espacio L^p ; uno de los problemas que hay que abordar consiste en identificar tal clausura. Aquí, aparece de manera natural la transformada de Hankel de orden α , la relación (vía la transformada) entre los polinomios de Jacobi y las funciones ortogonales, multiplicadores, etc.

En el estudio de estas series se incorporó al grupo investigador Óscar Ciaurri, profesor de la Universidad de La Rioja. Se probaron diversos resultados sobre la acotación uniforme de las sumas parciales de las series de Fourier-Neumann, convergencia en media y en casi todo punto, así como propiedades relacionadas con conmutadores.

Tales series se aplican para resolver, en espacios L^p con pesos, las llamadas ecuaciones integrales dobles de tipo Titchmarsh. En estas ecuaciones, que provienen de problemas físicos relacionados con el potencial y el electromagnetismo, la función incógnita debe satisfacer una ecuación integral en el intervalo $(0, 1)$ y otra distinta en el intervalo $(1, \infty)$; ambas ecuaciones se pueden describir como transformadas de Hankel.

Medidas variantes y polinomios de Stieltjes. [30, 36, 37] Otra línea de investigación de Chicho surgió a raíz de su colaboración con Manuel Bello, profesor cubano que se incorporó a la Universidad de La Rioja.

Dada una medida de Borel μ sobre \mathbb{R} tal que los polinomios son integrables, si $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ son los correspondientes polinomios ortogonales, se llaman polinomios de Stieltjes a los S_n (de grado n) que cumplen

$$\int_{\mathbb{R}} x^k S_n(x) p_{n-1}(x) d\mu(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

El interés de estos polinomios se debe fundamentalmente a su relación con las fórmulas de cuadratura de Gauss-Kronrod, para lo que es importante conocer propiedades de sus ceros. Pero también tienen aplicaciones a la aproximación racional, con polos parcialmente prefijados, de funciones de Markov; estas aplicaciones derivan de las propiedades asintóticas de los polinomios de Stieltjes. Varios de los últimos trabajos de Chicho contienen resultados en estas direcciones: propiedades de los ceros de polinomios de Stieltjes, comportamiento asintótico y velocidad de convergencia de las fórmulas de cuadratura asociadas.

Teoremas de trasplatación. [21, 35] La investigación de Chicho ya se había topado con temas relacionados con la trasplatación en series de Fourier. Había obtenido algunos resultados nuevos que se utilizaban para estudiar la convergencia en casi todo punto de algunas series.

Últimamente, y gracias a su colaboración con Víctor Kolyada, profesor visitante en la Universidad de La Rioja, había retomado el interés por el tema. Concretamente, abordan el problema de la trasplatación para series de polinomios ultrasféricos en el índice crítico (es decir, en el extremo inferior del intervalo de convergencia en media). A este respecto, obtienen algunos resultados referidos a acotación en espacios de Hardy y de Lorentz.

SOBRE LA EDICIÓN

Volvamos al relato de la gestación de este libro para contar algunos detalles finales de la edición. La convocatoria que dio el pistoletazo de salida venía encabezada por un título en principio tentativo, pero que finalmente se consolidó. Muchos nos han preguntado el porqué de «*Margarita Mathematica*». La expresión surgió como traída por el viento desde un lugar desconocido, así que nos vemos obligados a buscar una explicación que necesariamente ha de ser mucho más prolija que su simple aparición instantánea. Hay varios rótulos al uso para estas obras colectivas y dedicadas, expresiones diversas iniciadas con palabras como «contribuciones», «trabajos», «colaboraciones», etc., sacadas del vocabulario laboral y que con frecuencia incomprensible se prefieren a «miscelánea», una palabra bella y certera como las matemáticas. Pensamos en ella para la ocasión y nos vino a las mientes *Miscelánea Matemática*, de José Barinaga, 1937. Uno de nosotros, que tuvo ocasión de comprarla en una venta de lance, recordaba los comentarios de Chicho sobre su autor —«mi maestro Barinaga», que decía el maestro Vigil—, sobre su contenido y sobre

su circunstancia. El contenido, «76 notas complementarias de la cultura universitaria escolar», recopilación de notas breves y comentarios publicados en la revista *Matemática Elemental* en el trienio 1933–36, nos parecía un espléndido guión para un seminario como el que manteníamos con los colegas de medias, una rica herencia del espíritu escolar republicano. El autor, a la sazón catedrático —todavía no depurado— de la Universidad de Madrid, era además Director del Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios, aún no desaparecida en combate. El libro había sido publicado en Madrid por la Junta, cuya Comisión Delegada ya estaba en Valencia, capital de emergencia desde la que autorizó la edición. Era demasiada osadía copiar este título señero.

Más tarde, en el silencio respetuoso que siguió al recuerdo de tanta dignidad, se nos apareció la *Margarita*. No era para nosotros la perla del molusco, ni la mariposa gigante varada en el cordón isleño del Caribe, era la flor común, sencilla y popular. Buena idea una flor para Chicho, la flor de la duda bivaluada, para que vaya arrancando pétalos: Logroño, Zaragoza, Logroño, Zaragoza, . . . y en el centro la corola de brillante amarillo canario. Una flor gastada por la duda y recompuesta pétalo a pétalo por los amigos. Buena idea, pero la gente a la que hemos contado esta explicación no ha querido creerla, dicen que es un invento demasiado literario, incluso cursi. Necesitábamos una explicación más creíble por los colegas, más científica, una copia como la fallida de Barinaga o similar, que no hay nada más científico que copiar a un clásico. Encontramos al clásico entre los papeles que pueblan la mesa en función de los reclamos del momento, entre ellos los referidos al Año Mundial de las Matemáticas que nos ocupó durante el 2000. Había un proyecto, por entonces recién abortado, que pretendía instalar en el Monasterio de San Millán de la Cogolla, en una porción del recorrido seguido por los numerosos visitantes que admiran el recinto desde patrones «de letras», una exposición que mostrara la riqueza de la biblioteca monacal en obras de matemáticas.

Entre los libros seleccionados estaba *Margarita Philosophica*, del cartujo alemán Reisch de Friburgo. Es un libro de texto renacentista (primera edición de 1503) de contenido elemental enciclopédico: trivium, quadrivium, filosofía natural y filosofía moral. El ejemplar del Monasterio riojano pertenece a la edición de 1535 realizada en Basilea por Oroncio Fineo —que ya había realizado otra en 1523, lo que da idea de la popularidad del libro— y cuenta con varios opúsculos añadidos por otros autores. Se le reconoce valor histórico como texto para la enseñanza humanista de la época, pero es muy conocido sobre todo porque sus ilustraciones, que separan las diferentes partes de la obra, se reproducen todavía hoy con frecuencia. La más repetida entre los matemáticos es la que representa a la deidad Aritmética, flanqueada por los nombres de Pitágoras y Boecio, presenciando un envite entre un clásico calculista con ábaco y otro moderno que usa el algoritmo árabe. Escuchada desde el olvidado latín, *Margarita* suena a perla, que tampoco es mal regalo, pero la gema pierde ante la flor en el oír vulgar. Concluyamos que hemos copiado a Reisch —humanismo clásico— en el sustantivo y a Barinaga —humanismo contemporáneo— en el adjetivo; una copia que no ha sido un simple calco, sino una composición hecha con hermosos fragmentos de historia. Éste es nuestro último argumento sobre el título.

Solventado este asunto, surgió otro no previsto. De pronto, nos dimos cuenta de que los trabajos tenían que aparecer en hilera, como los teoremas de Euclides, y no sabíamos qué método utilizar. Podíamos usar el orden alfabético con sus diversas variantes, el orden de recepción, el de incorporación definitiva al elenco después de la revisión en su caso, por universidades, por temas, ordenados a su vez por... Observamos que disponíamos precisamente de cincuenta y dos artículos y se nos ocurrió hacer con ellos una baraja.

Recordamos las intensas partidas de naipes que se jugaban años atrás en el «Bar Petit» de Zaragoza, otro establecimiento, con superficie pareja a su nombre, en la ya mencionado cruce de calles. Lo frecuentaban desde el joven Chicho hasta el veterano Sr. Cuartero, junto con otros guñoteros de similar talento. De modo que tenía mucho sentido en nuestro caso recurrir al naípe. Además, alguien nos indicó, con toda cautela, que Chicho usaba procedimientos similares, incluso menos técnicos, cuando había que sortear personas según la normativa para ciertas tareas departamentales. Esta fase de la preparación del libro sucedió en agosto, cuando los tahúres estaban de vacaciones, pero al fin encontramos uno que barajaba con primor. Ante una lista de artículos más o menos por orden de aparición, el experto separó y juntó las cartas como una máquina automática hasta dejarlas en un orden impensable, pero que a fin de cuentas tenía la misma probabilidad que cualquier otro. De este modo se asignó en biyección una carta a cada trabajo. Luego, el experto volvió a lucir sus manos para producir el ordenamiento final. Que nadie pregunte cuál era su carta, todos los materiales del sorteo —excepto el tahúr— han sido eliminados sin dejar rastro. Créannos, por favor, ha sido el azar, pero Chicho se alegrará cuando vea a su querido Javier Otal al frente de la lista.

Vamos ya terminando. Hace poco más de un año comenzaba a circular por la red la convocatoria abierta hasta la primavera, era un periodo de espera incierta pero confiada. Pronto fueron llegando colaboraciones y se inició el trajín propio de la edición. El resultado ha sido hermoso: cincuenta y dos trabajos con un total de más de cien autores. Muchas de las contribuciones son, claro, de Análisis Matemático, pero también de otras parcelas diversas de la matemática. Desde luego hay una buena representación de las tres universidades más íntimas de Chicho, pero casi todo el mapa universitario y matemático nacional está reflejado. Algunas colaboraciones pertenecen a autores de América Latina y de Europa del Este, lo que refleja una crianza ideológica y un sesgo afectivo de Chicho. También será muy de su agrado la presencia de profesores de instituto allegados a la universidad y, como todos los demás, a él mismo. Allí está Mari Carmen, siempre atenta también a las cosas matemáticas de Chicho. No está Zenaida, que es bióloga y tecnóloga de alimentos; pero, mientras se preparaba este libro, ella realizó con brillantez un trabajo de doctorado sobre la ecología de las infecciones, en el que manejó las ecuaciones de la depredación con la destreza propia de su estirpe. La obra tiene un contenido muy variado, así fue concebida, como un mosaico muy abierto del entorno matemático de Chicho. A nuestra *Margarita*, plantada en otoño, le brotaron por primavera más de cincuenta pétalos. Agradecemos mucho la labor de los jardineros. Pero que no se nos olvide mencionar que la respuesta recibida superó nuestras previsiones, en

número de trabajos y de páginas. Nos reconocemos culpables de minusvalorar el poder atractivo del imán Chicho.

También superó el grueso volumen las previsiones presupuestarias. Al Rector anterior que autorizó el proyecto, Urbano Espinosa, y a la actual Rectora, Carmen Ortiz, que no ha vacilado en mantenerlo, gracias sinceras por su apoyo. También a María Teresa Pinillos, la Vicerrectora responsable de las publicaciones en ambos equipos de gobierno, y a todos los que han intervenido.

Hemos terminado el encargo que el Departamento nos hizo a instancias de su Director, a su juicio y al de todos los involucrados nos sometemos. El buen oficio de la imprenta hará el resto, para que el volumen aparezca cuando la Universidad de La Rioja prepara la conmemoración de su X Aniversario. Así, como hemos contado, se ha hecho el libro que el lector tiene en sus manos, una obra trabajada con el corazón y la cabeza. Brillante como una perla, la *Margarita* se dejará ver en público antes de fin de año. Será un libro bueno, para muchas lecturas diferentes, ninguna de cabo a rabo. También para sostenerlo simplemente mientras la nostalgia nos acerca la sonrisa de Chicho. Él ha estado presente a lo largo de todo el trabajo, en los momentos de tarea rutinaria, cuando la emoción ha humedecido la pluma, o cuando la hemos mojado en el tintero del humor. Nos acompañará en todas las circunstancias, prendido en el entramado de nuestros recuerdos, igual cuando estemos con el ceño apretado ante un pizarrón que cuando el vino y la guitarra nos tomen cautivos.

PUBLICACIONES DE INVESTIGACIÓN DE CHICHO

- [1] J. J. Guadalupe, Subespacios invariantes en $L^p(\mu)$ sobre el toro, en *Actas de las VII JMHL* (Sant Feliu de Guíxols, 1980), *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona* **21** (1980), 191–194.
- [2] J. J. Guadalupe, *Clausura en $L^p(\mu)$ de los polinomios analíticos sobre la circunferencia unidad*, Tesis Doctoral, Publicaciones de la Universidad de Zaragoza, 1980.
- [3] J. J. Guadalupe y J. Vinuesa, Una condición adicional al teorema de equivalencia de las fórmulas fundamentales para sucesiones reales de polinomios ortogonales, *Rev. Acad. Cienc. Zaragoza (2)* **36** (1981), 53–56.
- [4] J. J. Guadalupe, Invariant subspaces in $L^p(w)$, ($0 < p < \infty$), *Rev. Acad. Cienc. Zaragoza (2)* **37** (1982), 11–14.
- [5] J. J. Guadalupe y J. L. Rubio de Francia, Some problems arising from prediction theory and a theorem of Kolmogorov, *Collect. Math.* **33** (1982), 249–257.
- [6] J. J. Guadalupe, Invariant subspaces and H^p spaces whit respect to arbitrary measures, *Boll. Un. Mat. Ital. B (6)* **1** (1982), 1067–1077.
- [7] J. J. Guadalupe y M. L. Rezola, Clausura de polinomios y subespacios invariantes en $L^p(\mu)$, en *Contribuciones matemáticas en honor de Luis Vigil*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza (1984), 203–212.
- [8] J. J. Guadalupe y M. L. Rezola, Simply invariant subspaces in $L^p(\Gamma, \mu)$, en *II Simposium de Polinomios Ortogonales y Aplicaciones* (Jaca, 1984), Universidad de Zaragoza, Zaragoza (1985), 81–87.
- [9] M. Alfaro, M. P. Alfaro, J. J. Guadalupe y L. Vigil, Correspondance entre suites de polynômes orthogonaux et fonctions de la boule unité de $H_0^\infty(D)$, *Lecture Notes in Math.* **1171** (1985), 158–163.
- [10] J. J. Guadalupe y M. L. Rezola, Closure of analytic polynomials in weighted Jordan curves, *Lecture Notes in Math.* **1171** (1985), 204–210.
- [11] J. J. Guadalupe y M. L. Rezola, Valores frontera de H^p en dominios planos con pesos, en *III Simposium sobre Polinomios Ortogonales y Aplicaciones* (Segovia, 1985), Univ. Politéc. Madrid, Madrid (1986), 117–122.

- [12] M. A. Hernández y J. J. Guadalupe, Productos infinitos de tipo Cardano, en *Actas de las XII JMHL* (Braga, 1987), Univ. Minho, Braga (1987), vol. II, 359–364.
- [13] J. J. Guadalupe y M. L. Rezola, The conjugate function in plane curves, *Canad. Math. Bull.* **31** (1988), 147–152.
- [14] J. J. Guadalupe y M. A. Hernández, Cardano type entire functions, *Extracta Mathematicae* **3** (1988), 98–101.
- [15] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Convergencia en media de la serie de Fourier respecto de polinomios asociados a la medida $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M\delta_{-1} + N\delta_1$, en *V Simposium sobre Polinomios Ortogonales y Aplicaciones* (Vigo, 1988), Universidad de Santiago, Vigo (1989), 91–99.
- [16] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and weak convergence of some orthogonal Fourier expansions by using A_p theory, *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **117** (1989), 161–169.
- [17] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, L^p -boundedness of the kernels relative to generalized Jacobi weights, en *VI Simposium sobre Polinomios Ortogonales y Aplicaciones* (Gijón, 1989), Universidad de Oviedo, Gijón (1990), 168–178.
- [18] J. J. Guadalupe y J. Vinuesa, Convergencia de los núcleos para polinomios ortogonales sobre un recinto con pesos, en *Actas de las XIV JMHL* (Puerto de la Cruz, 1989), Univ. La Laguna, La Laguna (1990), vol. I, 389–393.
- [19] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Weak behaviour of Fourier-Jacobi series, *J. Approx. Theory* **61** (1990), 222–238.
- [20] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted L^p -boundedness of Fourier series with respect to generalized Jacobi weights, *Publ. Mat.* **35** (1991), 449–459.
- [21] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Two notes on convergence and divergence a.e. of Fourier series with respect to some orthogonal systems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), 457–464.
- [22] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Weighted weak behaviour of Fourier-Jacobi series, *Math. Nachr.* **158** (1992), 161–174.
- [23] J. J. Guadalupe, J. M. Gutiérrez, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Convergencia y sumabilidad de desarrollos ortogonales, *Zubía* **10** (1992), 185–189.
- [24] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials relative to measures with mass points, *Mathematika* **40** (1993), 331–344.
- [25] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (1993), 370–389.
- [26] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Endpoint weak boundedness of some polynomial expansions, *J. Comput. Appl. Math.* **49** (1993), 93–102.
- [27] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted norm inequalities for polynomial expansions associated to some measures with mass points, *Constr. Approx.* **12** (1996), 341–360.
- [28] J. J. Guadalupe, M. Pérez y F. J. Ruiz, Estimates for commutators of orthogonal Fourier series, *J. London Math. Soc. (2)* **54** (1996), 311–322.
- [29] J. J. Guadalupe y M. Pérez, Perturbation of orthogonal Fourier expansions, *J. Approx. Theory* **92** (1998), 294–307.
- [30] M. Bello, F. Cala, J. J. Guadalupe y G. López Lagomasino, Convergence rate of Padé-type approximants for Stieltjes functions, *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 47–53.
- [31] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Commutators and analytic dependence of Fourier-Bessel series on $(0, \infty)$, *Canad. Math. Bull.* **42** (1999), 198–208.
- [32] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (1999), 125–147.
- [33] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Solving dual integral equations on Lebesgue spaces, *Studia Math.* **142** (2000), 253–267.
- [34] M. Benito y J. J. Guadalupe, Dibujando mediante iteraciones, *Números* **42** (2000), 15–28.
- [35] J. J. Guadalupe y V. I. Kolyada, A transplantation theorem for ultraspherical polynomials at critical index, *Studia Math.* **147** (2001), 51–72.

- [36] M. Bello, B. de la Calle y J. J. Guadalupe y G. López Lagomasino, Asymptotics for Stieltjes polynomials, Padé-type approximants and Gauss-Kronrod quadrature, *J. Anal. Math.*, por aparecer.
- [37] M. Bello, J. J. Guadalupe y J. L. Varona, The zero distribution of orthogonal polynomials with respect to varying measures on the unit circle, pendiente de publicación.

LOS EDITORES
LOGROÑO, NOVIEMBRE DE 2001

THE FRATTINI SUBGROUP OF A GROUP

JAVIER OTAL

ABSTRACT. In this paper, we review the behaviour of the Frattini subgroup $\Phi(G)$ and the Frattini factor group $G/\Phi(G)$ of an infinite group G having in mind the most standard results of the finite case.

Este artículo está dedicado con todo cariño a la memoria de Chicho.

Al no formar parte de tu grupo de investigación, no tuve la fortuna de relacionarme contigo por este motivo, pero sí que tuve la oportunidad de participar en algunos de los múltiples seminarios que organizabas. Por la naturaleza de mi especialidad y las características de las personas a los que aquellos se dirigían, siempre me sugerías temas que pudieran ser bien comprendidos por la audiencia, una preocupación que te caracterizó siempre. Yo quería hablar (suavemente, claro) de aspectos de Grupos y de Curvas Elípticas, ante lo que siempre ponías el grito en el cielo. Pero te hice trampas y conseguí hablar delante de ti algo de tales curvas, con la excusa de referir el teorema de Fermat y describir unas parametrizaciones con la circunferencia. Y te gustó, ¿recuerdas? Pero nunca te pude contar nada de mi especialidad ni de sus aplicaciones y es una pena que llevaré siempre conmigo.

Lamento de corazón que ahora ya no me puedas poner trabas.

1. INTRODUCTION

In studying the behaviour of the maximal subgroups of a finite group G , Giovanni Frattini [11] introduced what he called the Φ -subgroup of G , the intersection of the maximal subgroups of G . Since then, this subgroup is usually known as *the Frattini subgroup of G* and can be defined as follows. Given a group G , by definition, the Frattini subgroup of G is

$$\Phi(G) = \bigcap \{M \leq G \mid M \text{ maximal in } G\},$$

provided G has maximal subgroups. Otherwise $\Phi(G) = G$.

In order to set up clearly the contents of this survey, we begin with finite groups G . The main result of Frattini is

Theorem A. *If G is finite then $\Phi(G)$ is nilpotent.*

His proof is very simple and is a fairly application of what he knows as *the Frattini argument* and set off the importance of the normality of maximal subgroups of G , a property which characterizes the nilpotency of G . On the other hand, $\Phi(G)$ is known

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20E28; Secondary 20F18.

Key words and phrases. Maximal subgroups, chief factors, Frattini subgroup, generalized nilpotent groups.

to be the set of *non generators* of the group G , that is, the set of elements of G which can be removed in any generator system of G . As an immediate consequence, the Frattini factor group $G/\Phi(G)$ of G is cyclic if and only if G is cyclic. Gathering now, among other properties (see [17]), nilpotency of the Frattini subgroup can be characterized by the following ones.

Theorem B. *If G is a finite group then the following are equivalent:*

- (1) G is nilpotent.
- (2) $G/\Phi(G)$ is nilpotent.
- (3) Every maximal subgroup of G is normal in G .
- (4) $G' \leq \Phi(G)$.

We mention that these (and other) properties do not characterize nilpotency of infinite groups; see [28]. The main goal of this note is to give an small survey on the current state of these concepts and related ideas. Throughout, our group-theoretic notation is standard and is taken from [28]. For the reader's convenience we briefly recall here some of it.

- If A abelian, the *torsion-free rank* $r_0(A)$ of A is the cardinal of a maximal set of elements of infinite order, and if p is a prime its *p -rank* $r_p(A)$ is the cardinal of a maximal set of non-trivial elements of order a power of p . The *rank* of A is $r(A) = r_0(A) + \sum_p r_p(A)$ (see Fuchs [12]). These concepts have been naturally extended to arbitrary groups. We mention that a group G is said to have *finite abelian section rank* if every abelian section of G has finite rank, for $p = 0$ or a prime. A soluble group G has finite abelian section rank if and only if there exists a abelian subnormal series $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$ such that each $r_p(G_{i+1}/G_i) < \infty$ ($p \geq 0$).

- If \mathfrak{X} is a class of groups, a *poly- \mathfrak{X} -group* is a group G with a finite series between 1 and G with factors \mathfrak{X} -groups. Similarly is defined a *poly- \mathcal{X} -group* if \mathcal{X} is a theoretical property of groups. For example, a *soluble group* is a poly-abelian group while a *nilpotent group* is a poly-central group. On the other hand, a *minimax group* is a poly-(**Min** or **Max**) group. If we replace *finite series* by *ascending series* we obtain *hyper-* instead of *poly-*.

- A group G is said to be an $\mathfrak{X}\mathbf{C}$ -group if $G/C_G(x^G) \in \mathfrak{X}$ for all $x \in G$. Best examples of this are FC , PC , CC , and MC -groups $\mathfrak{X} = \text{finite, polycyclic-by-finite, Chernikov and minimax groups}$; see [31], [10], [1], [19].

2. CHIEF FACTORS AND MAXIMAL SUBGROUPS

In infinite groups when dealing with the Frattini subgroup, the first difficulty which appears is the non existence of maximal subgroups.

Example 1. *Let p be a prime. Then the complex p^n -roots of unity ($n \geq 0$) form a group $G = \langle x_1, x_2, \dots \mid x_1 = 1, x_i^p = x_{i-1}, i > 1 \rangle$.*

In this example, G is periodic, non finitely generated, with proper subgroups cyclic and without maximal subgroups. G is called a *Prüfer p -group*.

Example 2. *The wreath product G of a Prüfer p -group and a Prüfer q -group ($p \neq q$) is not locally nilpotent without maximal subgroups.*

The structure of the minimal normal subgroups M of a group G is known provided some local information is available and we use it (see Section B of [18]).

Theorem 2.1. *Let U be a chief factor of a group G .*

- (1) *If G is locally soluble, then U is abelian.*
- (2) *If G is locally polycyclic, then U is abelian.*
- (3) *If G is locally supersoluble, then U is cyclic of prime order.*
- (4) *If G is locally nilpotent, then U is central of prime order.*

Even in the case of locally finite groups, very little is known about general chief factors. In many cases the maximal subgroups of certain groups G used to have finite index provided the chief factors of G are finite. In 1968, Robinson [26] (Theorems C and D) achieved a result of this kind.

Theorem 2.2. *The chief factors of a hyperabelian group with finite abelian section rank are finite and its maximal subgroups have finite index.*

If G is an FC -group, each normal closure $\langle x \rangle^G$ is finite, and so a similar result holds for these groups. The same is true for PC and CC -groups ([10] and [1]) and more generally for MC -groups ([19]).

Theorem 2.3. *Let G be an MC -group. Then each chief factor of G is finite and each maximal subgroup of G has finite index.*

In this direction, Wehrfritz proved (see [33], Corollary 4.28)

Theorem 2.4. *The chief factors of a soluble-by-finite subgroup of a finitely generated linear group are finite and the maximal subgroups have finite index.*

In what it concerns to the normality of the maximal subgroups, for many years, the best result was due to McLain.

Theorem 2.5. *A maximal subgroup of a locally nilpotent group is normal.*

As a consequence of an influential result of Robinson [27] characterizing the nilpotency of a finitely generated group by that of its images, we have

Theorem 2.6. *A finitely generated hyper-(abelian or finite) group is nilpotent if and only if each of its maximal subgroups is normal.*

Recently, Franciosi and de Giovanni [8] have shown the following.

Theorem 2.7. *Let G be a soluble residually finite minimax group. Then G is finite-by-nilpotent if and only if it has finitely many maximal subgroups which are not normal in G .*

Corollary 2.7.1. *If G is a soluble minimax group with finitely many non-normal maximal subgroups, then G is Chernikov-by-nilpotent.*

3. THE NILPOTENCY OF THE FRATTINI SUBGROUP

In contrast with the celebrated result of Frattini quoted in the Introduction, just in the beginning of Section 2, we have seen an example of an infinite group G in which $\Phi(G)$ is neither locally nilpotent. Certainly, this group G is neither finitely generated nor has maximal subgroups, and these seem the basic reasons why the nilpotency of $\Phi(G)$ can fail. In his pioneer work on polycyclic groups, Hirsch (see [16]) stated the first fundamental result, which dealt with soluble finitely generated groups only.

Theorem 3.1. *If G is a polycyclic group then $\Phi(G)$ is nilpotent.*

We recall that a polycyclic group G is a soluble group with **Max** and so all subgroups of G are finitely generated. After Hirsch's result, Itô asked whether or not there exist metabelian groups G with $\Phi(G)$ not nilpotent. The answer of this question is negative as P. Hall [15] showed.

Example 3. *If $p \equiv 1 \pmod{q^2}$ and C is a Prüfer p -group, then C has an automorphism α of order q^2 . Let $A = \langle \alpha \rangle$, $B = \langle \alpha^q \rangle$ and $G = CA$.*

The proper subgroups C_n of C are cyclic, characteristic and not maximal. Hence $\Phi(G) = CB$ is the unique maximal subgroup of G . Since $\alpha^q - 1$ represents a unit of $\text{End}(C)$, we have $[C_n, B] = C_n$ for all n and then $\Phi(G)$ is not locally nilpotent. G is a non finitely generated metabelian group, but Hall also constructed finitely generated examples ([15], Section 3.2):

Example 4. *Let G be the above group. There exists a finitely generated metabelian group H such that $\Phi(G)$ is isomorphic to a section of $\Phi(H)$.*

In the same paper, Hall found the best answer to Itô's question.

Theorem 3.2. *$\Phi(G)$ is nilpotent if G is finitely generated metanilpotent.*

If $q = 2$ and $p = 5$ or $p = 13$, then $p \equiv 1 \pmod{q^2}$ so that the above $G \leq GL(4, F)$, where F is an algebraic closed field and G is given by $p = 5$ $q = 2$, if $\text{char } F \neq 5$ or $p = 13$ $q = 2$ otherwise ([33] 2.3). Thus

Example 5. *There are periodic metabelian linear groups G (in particular locally finite linear groups) such that $\Phi(G)$ is not nilpotent.*

Moreover, O. H. Kegel has been able to construct torsion-free examples.

Example 6. *There are torsion-free metabelian residually finite linear groups whose Frattini subgroup is not nilpotent.*

Indeed, let F be an uncountable field. Then F^* contains a subgroup A isomorphic to the additive group of rational numbers with odd denominators. If α is a homomorphism of A onto a cyclic group of order 4 contained in $GL(4, F)$, let G be the split extension of four copies of A by a further copy of A that acts by permuting the first copies cyclically via α . Then G is residually finite group and its maximal subgroups have finite index. If M is a maximal then G/M_G is a finite 2-group and so $G^2 \leq M$ and $G^2 \leq \Phi(G)$. Since G^2 has a factor isomorphic to the wreath product of

C_∞ by C_2 , G^2 and $\Phi(G)$ are not locally nilpotent. By construction $G \leq GL(5, F)$. However, Platonov [24] and Wehrfritz [32] proved good results on linear groups.

Theorem 3.3. *If G is a subgroup of a finitely generated linear group, then $\Phi(G)$ is nilpotent and $G' \leq \Phi(G)$ if and only if G is nilpotent.*

Note that these G are not necessarily finitely generated. Generalizing Hall's result, Robinson [28] proved results as the following.

Theorem 3.4. *Let G be a finitely generated hyper-(abelian or finite) group. Then $\Phi(G)$ is nilpotent.*

We finally mention two results related to $\mathfrak{X}\mathbf{C}$ -groups described in [9].

Theorem 3.5. *Let G be a PC-group. Then $\Phi(G)$ is locally nilpotent.*

Theorem 3.6. *Let G be a soluble-by-finite minimax group with $D(G) = 1$. Then $\Phi(G)$ is locally nilpotent.*

Here and elsewhere $D(G)$ denotes the largest periodic divisible abelian subgroup of G . If $D(G) = 1$, the group G is said to be *reduced*.

4. FRATTINI PROPERTIES OF INFINITE GROUPS

Let \mathfrak{X} be a class of groups. A group theoretical property \mathcal{P} is said to be a *Frattini property of \mathfrak{X} -groups* provided an \mathfrak{X} -group G satisfies the following:

$$G/\Phi(G) \text{ has } \mathcal{P} \implies G \text{ has } \mathcal{P}.$$

Some authors prefer to say better that the \mathfrak{X} -groups which satisfy the property \mathcal{P} form a *saturated* class of groups, although this terminology is almost reserved for *formations* of groups. We recall that a class \mathcal{F} of groups is called a *formation* simply if it is \mathbf{Q} and \mathbf{R}_0 -closed (see [28]), that is if $\mathcal{F} = \mathbf{Q}\mathcal{F} = \mathbf{R}_0\mathcal{F}$. It is well known the influential rôle of these properties when \mathfrak{X} is the class of finite soluble groups (see [17]). A fundamental result of Gaschütz and Lubeseder [13] stated that saturated formations of finite soluble groups can be locally defined through a family $\{f(p)\}$ of formations of finite soluble groups $f(p)$, one for each prime p . Concretely, Gaschütz and Lubeseder proved that \mathcal{F} is saturated if and only if $\mathcal{F} = \bigcap \mathfrak{S}_p^* \mathfrak{S}_p^* f(p)$, where \mathfrak{S}^* is the class of finite soluble groups.

It turns out that the extension of these ideas to other classes of groups, close to finite groups, is very natural. One of the outstanding results in this direction was established by the paper of Robinson [28] who proved

Theorem 4.1. *Nilpotency is a Frattini property of reduced soluble minimax groups.*

Later on, in a series of papers, Lennox [20], [21], [22], [23] showed others Frattini properties of several groups. Lennox's results are:

Theorem 4.2.

- *Finiteness is a Frattini property of the following groups:*
 - (1) *Finitely generated hyper-(finite or locally soluble) groups.*
 - (2) *Finitely generated soluble groups.*

(3) Subgroups of finitely generated abelian-by-nilpotent groups.

• If \mathfrak{H} is the class of all finitely generated hyper-(abelian-by-finite) groups then the following are Frattini properties of \mathfrak{H} -groups:

(i) Supersolubility, (ii) Polycyclicity, (iii) Being polycyclic-by-finite, and (iv) Being finite-by-nilpotent.

Since an \mathfrak{H} -group G is polycyclic-by-finite $\iff G \in \mathbf{Max}$, we have

Corollary 4.2.1. \mathbf{Max} is a Frattini property of \mathfrak{H} -groups.

Further, the techniques of Roseblade in his report [29] allow to establish:

Theorem 4.3. Polycyclicity is a Frattini property of finitely generated metabelian groups.

Going back to above results, we remark that $\mathbf{Max-n}$, the maximal condition for normal subgroups, is not a Frattini property of \mathfrak{H} -groups. In fact there exists a finitely generated central-by-metabelian group G which does not satisfy $\mathbf{Max-n}$ as the mentioned Hall's examples show.

The paper Wehrfritz [32] also shows a Frattini property of linear groups.

Theorem 4.4. Nilpotency is a Frattini property of subgroups of finitely generated linear groups.

It follows that Lennox's results may be applied to these groups as follows. By using an idea due to Tits, it is possible to show:

Corollary 4.4.1. The following properties are Frattini properties of finitely generated linear groups: (i) Polycyclicity, (ii) Being polycyclic-by-finite, and (iii) \mathbf{Max} .

Other properties of these groups appear in the papers of Wehrfritz (see [33]). Combining his ideas with those of Huppert, we have.

Theorem 4.5. Let $G \leq GL(n, F)$.

(1) If $\text{char } F > 0$, then G is parasoluble $\iff G/\Phi(G)$ is hypercyclic.

(2) If G is finitely generated, then $G/\Phi(G)$ hypercyclic $\implies G$ supersoluble.

At the time of writing these notes, we do not know whether or not hypercyclicity is a Frattini property of arbitrary linear groups.

Extending Robinson's result mentioned above, Franciosi and de Giovanni [8] showed another interesting result:

Theorem 4.6. Nilpotency-by-finiteness is a Frattini property of the following types of groups:

(1) Soluble residually finite minimax groups.

(2) Reduced soluble-by-finite minimax groups.

In general, if G is an abelian group and $G/\Phi(G)$ is finite, we note that G is divisible-by-finite and could be infinite. It follows that there are properties of $G/\Phi(G)$ which are not inherited for G . Therefore it is natural to look for classes of groups which are *good* under this point of view. One of these is the class of

FC-groups. For example, if G is an *FC*-group and $G/\Phi(G)$ is hypercentral then G is hypercentral too. Since $\Phi(G)$ is hypercentral when G is an *FC*-group, Franciosi and de Giovanni [9] considered Frattini properties for an extension of *FC*-groups, namely *PC*-groups. More precisely, they realized the connection between the properties of the factor-group $G/\Phi(G)$ and those of $G/Z(G)$ in a *PC*-group G as they were able to show the following result

Theorem 4.7. *Let G be a *PC*-group. Then the statement*

$$G/\Phi(G) \text{ has } \mathcal{P} \implies G/Z(G) \text{ has } \mathcal{P}$$

holds provided the property \mathcal{P} is one of the following:

- (i) *Being finite,*
- (ii) *Being polycyclic-by-finite,*
- (iii) *Being soluble-by-finite minimax,*
- (iv) *Having finite abelian section rank,*
- (v) *Having finite torsion-free rank, and*
- (vi) *Being periodic.*

In the same paper they achieved some further Frattini properties:

Theorem 4.8. *The following are Frattini properties of *PC*-groups:*

- (i) *Being (locally nilpotent)-by-finite,*
- (ii) *Being finite-by-(locally nilpotent), and*
- (iii) *Being locally supersoluble.*

Similar questions could be asked for the other fairly generalization of the class of *FC*-groups, namely the class of *CC*-groups. In a private communication, Beidleman [6] has shown to me an unpublished proof of the following results

Theorem 4.9. *Let G be a *CC*-group with $G/Z(G)$ periodic. If $G/\Phi(G)$ is a minimax group then $G/Z(G)$ is a Chernikov group.*

Corollary 4.9.1. *Being a Chernikov group is a Frattini property of *CC*-groups with trivial centre.*

Beidleman also claims for other Frattini properties of *CC*-groups. However in this case we think that the relation between $G/\Phi(G)$ and $G/Z(G)$ does not exist, as the following example constructed in [14] shows.

Example 7. *If p is a prime, each element of Q can be written in the form (not unique!) $\frac{a}{b p^m}$, where $(p, b) = 1$ and $m \geq 0$. If $Z(p^\infty) = \langle x_i \rangle$ is a copy of the Prüfer p -group, a central extension C of $Z(p^\infty)$ by $Q \oplus Q$ is given by $[\frac{a}{b p^m}, \frac{c}{d p^n}] = (\frac{1}{bd})(acx_{m+n+1})$. Since each element of $Z(p^\infty)$ has a unique k^{th} -root if $(p, k) = 1$, our construction can be carried out.*

*Therefore, if Z is a copy of the Prüfer p -group and A and B are copies of the full rational group then C is a split extension of $Z \times A$ by B and $[Z, B] = [Z, A] = 1$, $[A, B] = Z$. It follows that $C' = Z = Z(C)$ and so C is a *CC*-group. Since $C/Z \cong Q \oplus Q$, C is radicable and hence $\Phi(C) = C$.*

Thus the direct product $G = \times_{n \in \mathbb{N}} C_n$ of a countably infinite number of copies of C is a divisible CC -group so that $G = \Phi(G)$ but $G/Z(G)$ is a torsion-free divisible abelian group of countable rank.

Despite these complications, we can describe the structure of a these groups with the above restrictions on its Frattini factor-group, the main goal of the paper [19].

Theorem 4.10. *If G is an MC -group with $G/\Phi(G)$ minimax, then there is $X \subseteq G$ finite with $H = \langle X \rangle^G$ is minimax and G/H is radicable nilpotent of class ≤ 2 .*

Corollary 4.10.1. *If G is a CC -group with $G/\Phi(G)$ minimax, then there is an $H = \langle X \rangle^G$ **Min-by-Max** with G/H radicable nilpotent of class ≤ 2 .*

Theorem 4.11. *If G is a reduced MC -group with $G/\Phi(G)$ minimax, then there is $X \subseteq G$ finite with $H = \langle X \rangle^G$ reduced minimax and G/H divisible abelian.*

Corollary 4.11.1. *Let G be a group such that $G/\Phi(G)$ is minimax.*

(1) *If G is a PC -group, then G contains a polycyclic-by-finite normal subgroup H such that G/H is a divisible abelian group.*

(2) *If G is an FC -group, then G contains a finitely generated abelian-by-finite normal subgroup H such that G/H is a divisible abelian group.*

Theorem 4.12. *Let G be a group such that $G/\Phi(G)$ is periodic.*

(1) *If G is an MC -group, then G is a CC -group.*

(2) *If G is a reduced MC -group, then G is an FC -group.*

Corollary 4.12.1. *Let G be a group such that $G/\Phi(G)$ has finite 0-rank.*

(1) *If G is an MC -group, then G includes a minimax normal subgroup H such that G/H is a CC -group.*

(2) *If G is a reduced MC -group, then G includes a reduced minimax normal subgroup H such that G/H is an FC -group.*

Theorem 4.13. *Let G be a PC -group. If $G/\Phi(G)$ has finite abelian section rank, then G has an ascending series of normal subgroups*

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_\omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n \leq A_{\omega+1} \leq A_{\omega+2} = G \text{ such that :}$$

(1) $A_{\omega+1} \leq Z(G)$.

(2) $Z(G)/A_{\omega+1}$ is a periodic group with finite Sylow p -subgroups. Therefore $Z(G)/A_{\omega+1}$ is a residually finite group of finite abelian section rank.

(3) A_1 is a periodic divisible abelian group.

(4) If $i > 1$, A_{i+1}/A_i is a torsion-free abelian group of rank 1.

(5) Given a prime p , there exists an integer $\ell(p)$ such that A_{i+1}/A_i is p -divisible for every $i \geq \ell(p)$. In particular $A_\omega/A_{\ell(p)}$ is p -divisible.

(6) $A_{\omega+1}/A_\omega$ is divisible.

Theorem 4.14. *Let G be a CC -group. If $G/\Phi(G)$ has finite abelian section rank, then G has an ascending series of normal subgroups*

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_\omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n \leq A_{\omega+1} \leq A_{\omega+2} = G \text{ such that :}$$

- (1) $A_1 = D(G)$.
- (2) $A_{\omega+1}/A_1 \leq Z(G/A_1)$.
- (3) $G/A_{\omega+1}$ is a periodic group with finite Sylow p -subgroups.
- (4) If $i > 1$, A_{i+1}/A_i is a torsion-free abelian group of rank 1.
- (5) Given a prime p , there exists an integer $\ell(p)$ such that A_{i+1}/A_i is p -divisible for all $i \geq \ell(p)$. In particular $A_{\omega}/A_{\ell(p)}$ is p -divisible.
- (6) $A_{\omega+1}/A_{\omega}$ is divisible.

It follows that locally nilpotency is a Frattini property of reduced MC -groups.

5. OTHER FRATTINI-LIKE SUBGROUPS

The non-existence of maximal subgroups of an infinite group G is the main reason why the Frattini subgroup $\Phi(G)$ and the Frattini factor-group $G/\Phi(G)$ are not well-behaved. In the literature there are several attempts to keep the idea involved for that subgroup. Mostly of those attempts slightly modify the definition of the Frattini subgroup in such a way a new subgroup appears and this subgroup retains some original feature of the Frattini subgroup. The purpose of this section is to review a couple of them as well as to indicate the frame in which these new subgroups have been considered.

- *The near Frattini of an infinite group.* This was introduced first by Riles [25] in 1969 as follows. If G is a group, an element $x \in G$ is said to be a *near generator* of G if there is a subset S of G such that $|G : \langle S \rangle| = \infty$ but $|G : \langle x, S \rangle| < \infty$. Hence an element x of G is a *non-near generator* of G precisely when $S \subseteq G$ and $|G : \langle x, S \rangle| < \infty$ always imply that $|G : \langle S \rangle| < \infty$. The set of all non-near generators of a group G forms a characteristic subgroup called the *lower near Frattini subgroup* of G , denoted by $\lambda(G)$.

An $M \leq G$ is *nearly maximal* in G if $|G : M| = \infty$ but $|G : N| < \infty$, whenever $M < N \leq G$. That is, M is maximal with respect to being of infinite index in G . The intersection of all nearly maximal subgroups of G is another characteristic subgroup called the *upper near Frattini subgroup* of G , denoted by $\nu(G)$ (if there are no nearly maximal subgroups, then $\nu(G) = G$). In general $\lambda(G) \leq \nu(G)$ in any group G . However

Example 8. Let G be the standard wreath product of a Prüfer p -group by a cyclic q -group, where p and q are primes. Then $\lambda(G) = 1 < G = \nu(G)$.

If $\lambda(G) = \nu(G)$, then their common value is called the *near Frattini subgroup* of G , denoted by $\Psi(G)$. Remark that we do nothing if G is finite since $\Psi(G) = G$. Even in infinite groups the case $\Psi(G) = G$ is very ample. Indeed it can occur if G is divisible abelian or G is soluble with **Min**. When G is subgroup of a free product with or without amalgamations, some authors have been able to extend many of the results proved for $\Phi(G)$ to $\lambda(G)$, $\nu(G)$ and $\Psi(G)$ by different methods (see the report [3] and its references or [2] or [34]), although the difficulties of dealing with non-near generator elements or nearly maximal subgroups still hold. Also, natural definitions of $\Psi(G)$ -free or λ -free groups have been considered as well as the *nearly splitting* of groups and the relation between these concepts.

• *The subgroup $\mu(G)$ introduced by Tomkinson [30] in 1975 by considering a class of proper subgroups of a group G , the *major subgroups*. Let U be a subgroup of a group G and consider the properly ascending chains*

$$U = U_0 < U_1 < \dots < U_\alpha = G$$

from U to G . Define $m(U)$ to be the least upper bound of the types α of all such chains. Clearly $m(U) = 1$ if and only if U is a maximal subgroup of G . A proper subgroup M of G is said to be a *major subgroup* of G if $m(U) = m(M)$ whenever $M \leq U < G$. The intersection of all major subgroups of G is denoted by $\mu(G)$. In his former paper on major subgroups, Tomkinson [30] showed that this intersection coincides with $\phi(G)$, if G is finitely generated, and that every proper subgroup is contained in a major subgroup of G so that $\mu(G)$ is always a proper subgroup of G . Tomkinson also proved some properties of $\mu(G)$ for several types of groups G .

Theorem 5.1. *Let \mathfrak{H} be the class of groups in which proper subgroups have proper normal closures. If G is a hypercentral \mathfrak{H} -group then $\mu(G) \geq G'$.*

Theorem 5.2. *Let \mathfrak{U} be the class of locally finite groups G in which the Sylow subgroups of any subgroup H of G are conjugate in H . Then:*

- (1) $\mu(G)$ is locally nilpotent.
- (2) $G/\mu(G)$ is locally nilpotent $\iff G$ is locally nilpotent.

Theorem 5.3. *Let G be a nilpotent-by-finite group. Then:*

- (1) $\mu(G)$ is hypercentral.
- (2) $G/\mu(G)$ is hypercentral $\iff G$ is hypercentral.
- (3) $G' \leq \mu(G) \iff G$ is a hypercentral \mathfrak{B} -group.

Theorem 5.4. *Let G be a soluble group with finite abelian section rank. Then:*

- (1) $\mu(G)$ is hypercentral.
- (2) $G/\mu(G)$ is hypercentral $\iff G$ is hypercentral.

Theorem 5.5. *Let G be group having a finite normal series in which the factors are abelian groups of finite rank and with Chernikov torsion subgroups (see [28]). Then $G' \leq \mu(G) \iff G$ is nilpotent.*

Theorem 5.6. *Let G be a soluble group with **Min-n**. Then*

- (1) $G/\mu(G)$ is hypercentral $\iff G$ is hypercentral.
- (2) $G' \leq \mu(G) \iff G$ is nilpotent.

In a very serious attempt to extend to certain infinite groups some of the results from the theory of saturated formations of finite soluble groups, Ballester-Bolinches and Camp-Mora [4] characterized a saturated formation via $\mu(G)$ instead of $\Phi(G)$. Certainly those results had been extended to various classes of infinite groups (see [7]), but the definition of saturated formation was made locally as indicated above. Concretely, let $c\mathcal{L}$ be the class of all countable locally finite and soluble groups satisfying *min-p* for all primes p . We recall that a group G is said to be *primitive* if it has a maximal subgroup with trivial core (Schunck) and G is said to be *semiprimitive* if it is a semidirect product $G = [D]M$, where M is a finite soluble group with trivial core and D is a divisible abelian group such that every proper M -invariant

subgroup of D is finite (Hartley). If G is a $c\bar{\mathcal{L}}$ -group and M is a major subgroup of G . Then G/M_G is a finite primitive soluble group or a semiprimitive group depending whether or not M is a maximal subgroup of G . In [4] the following extension of the Gaschütz-Lubeseder is proved:

Theorem 5.7. *Let \mathcal{F} be a $c\bar{\mathcal{L}}$ -formation. Then the following are equivalent:*

- (1) \mathcal{F} is a saturated $c\bar{\mathcal{L}}$ -formation.
- (2) \mathcal{F} satisfies the two following properties:
 - (i) A $c\bar{\mathcal{L}}$ -group G is in \mathcal{F} if and only if $G/\mu(G)$ is in \mathcal{F} .
 - (ii) A semiprimitive group G is an \mathcal{F} -group if and only if it is the union of an ascending chain $\{G_n \mid n \geq 0\}$ of finite \mathcal{F} -subgroups.

Having in mind the same idea, Ballester-Bolinches and T. Pedraza-Aguilera [5] obtained several nice extensions of standard results, including those original of Frattini mentioned in the introduction.

Theorem 5.8. *If G is a $c\bar{\mathcal{L}}$ -group, then $\mu(G) \in \mathfrak{B}$ and the following are equivalent:*

- (1) G is a \mathfrak{B} -group,
- (2) $G/\mu(G)$ is a \mathfrak{B} -group,
- (3) $G' \leq \mu(G)$, and
- (3) every major subgroup of G is normal in G .

REFERENCES

- [1] J. Alcázar and J. Otal, Sylow subgroups of groups with Chernikov conjugacy classes, *J. Algebra* **110** (1987), 507–513.
- [2] R. B. J. T. Allenby, Some remarks on the upper Frattini subgroups of a generalized free product, *Houston J. Math.* **25** (1999), 399–403.
- [3] M. X. Azarian, On the near Frattini subgroups, in *Group theory* (Proc., Granville, OH, 1992, S. Sehgal and R. Solomon, eds.), World Sci. Publ., Singapore (1993), 21–29.
- [4] A. Ballester-Bolinches and S. Camp-Mora, A Gaschütz-Lubeseder type theorem in a class of locally finite groups, *J. Algebra* **221** (1999), 562–569.
- [5] A. Ballester-Bolinches and T. Pedraza-Aguilera, On a class of generalized nilpotent groups, preprint.
- [6] J. C. Beidleman, private letter.
- [7] M. R. Dixon, *Sylow theory, formations and fitting classes in locally finite groups*, World Sci. Publ., Singapore, 1994.
- [8] S. Franciosi and F. de Giovanni, On maximal subgroups of minimax groups, *Atti Accad. Naz. Lincei (9) Mat. Appl.* **6** (1995), 23–27.
- [9] S. Franciosi and F. de Giovanni, Frattini properties of groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes, *Bollettino Unione Mat. Ital.* **10 A** (1996), 653–659.
- [10] S. Franciosi, F. de Giovanni and M. J. Tomkinson, Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes, *Bollettino Unione Mat. Ital.* **4 B** (1990), 35–55.
- [11] G. Frattini, In torno alla generazioni dei gruppi di operazioni, *Atti. Rend. Accad. dei Lincei* **1** (1885), 281–285.
- [12] L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, Academic Press, New York, 1970/1974.
- [13] W. Gaschütz and U. Lubeseder, Kennzeichnung gesättigter formationen, *Math. Z.* **82** (1963), 198–199.
- [14] M. González, J. Otal and J. M. Peña, CC -groups with periodic central factor group, *Manuscripta Math.* **69** (1990), 93–105.
- [15] P. Hall, The Frattini subgroups of finitely generated groups, *Proc. London Math. Soc. (3)* **11** (1961), 327–352.

- [16] K. A. Hirsch, On infinite soluble groups V, *J. London Math. Soc.* **29** (1955), 290–294.
- [17] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [18] O. H. Kegel and B. A. F. Wehrfritz, *Locally finite groups*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [19] L. A. Kurdachenko and J. Otal, Frattini properties of groups with minimax conjugacy classes, *Quaderni Mat.*, to appear.
- [20] J. C. Lennox, Finite Frattini factors in finitely generated soluble groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **41** (1973), 356–360.
- [21] J. C. Lennox, A supersolubility criterion for finitely generated hyper-(abelian-by-finite) groups, *Archiv Math.* **24** (1973), 247–248.
- [22] J. C. Lennox, Polycyclic Frattini factors in certain finitely generated groups, *Archiv Math.* **24** (1973), 571–578.
- [23] J. C. Lennox, Finite-by-nilpotent Frattini factors in certain finitely generated hyper-(abelian-by-finite) groups, *Archiv Math.* **25** (1974), 463–465.
- [24] V. P. Platonov, The Frattini subgroup of linear groups with finite approximability, *Soviet Math. Dokl.* **7** (1966), 1557–1560.
- [25] J. B. Riles, The near Frattini subgroups of infinite groups, *J. Algebra* **12** (1969), 155–171.
- [26] D. J. S. Robinson, Residual properties of some classes of infinite soluble groups, *Proc. London Math. Soc.* **18** (1968), 495–520.
- [27] D. J. S. Robinson, A theorem on finitely generated hyperabelian groups, *Invent. Math.* **10** (1970), 38–43.
- [28] D. J. S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [29] J. E. Roseblade, The Frattini subgroup in infinite soluble groups, in *Three lectures on polycyclic groups*, paper no. 1, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1972.
- [30] M. J. Tomkinson, A Frattini-like subgroup, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **77** (1978), 247–257.
- [31] M. J. Tomkinson, *FC-groups*, Pitman, Boston, 1984.
- [32] B. A. F. Wehrfritz, Frattini subgroups in finitely generated groups, *J. London Math. Soc.* **43** (1968), 619–622.
- [33] B. A. F. Wehrfritz, *Infinite linear groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [34] A. Wittmore, On the near Frattini subgroup. *Trans. Amer. Math. Soc.* **141** (1969), 323–333.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS,
CIUDAD UNIVERSITARIA S/N, 50009 ZARAGOZA, SPAIN
E-mail address: otal@posta.unizar.es

IDEALES DE OPERADORES E IDEALES DE CONJUNTOS EN ESPACIOS DE BANACH

ANTONIO MARTINÓN Y KISHIN B. SADARANGANI

*En memoria del Profesor José Javier Guadalupe,
ejemplo para los canarios que estudiamos matemáticas en Zaragoza*

ABSTRACT. We introduce the set ideals in Banach spaces as families of subsets which satisfy certain properties. We relate this concept with the operator ideals and with the Hausdorff distance to a family of subsets.

1. INTRODUCCIÓN

Dado un ideal de operadores \mathcal{A} , K. Astala [1] definió la \mathcal{A} -variación $h_{\mathcal{A}}(D)$ de un subconjunto acotado D de un espacio de Banach X . Si \mathcal{A} es el ideal de los operadores compactos, entonces $h_{\mathcal{A}}$ es la medida de no compacidad de Hausdorff [2] y si \mathcal{A} es el ideal de los operadores débilmente compactos, se tiene que $h_{\mathcal{A}}$ es la medida de no compacidad débil de De Blasi [6]. La función $h_{\mathcal{A}}$ es un ejemplo especial de las llamadas *cantidades conjuntista* [4] o *medidas* (de no pertenencia) [7]. En efecto, $h_{\mathcal{A}}(D)$ es la distancia de Hausdorff de $D \subset X$ a la clase $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ de los subconjuntos de X con \mathcal{A} -variación nula [4, Theorem 5], que constituye un ejemplo de ideal de conjuntos. Es decir, a partir de un ideal de operadores \mathcal{A} se define un ideal de conjuntos $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ de tal manera que la \mathcal{A} -variación $h_{\mathcal{A}}$ es la distancia a $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$.

En este artículo procedemos a la inversa. Introducimos la noción de *ideal de conjuntos* como una clase de subconjuntos acotados que satisfacen ciertas propiedades naturales. Los principales ejemplos son las clases de los subconjuntos relativamente compactos rc , la de los relativamente débilmente compactos rwc y, más generalmente, los conjuntos de \mathcal{A} -variación nula. Dado un ideal de conjuntos \mathcal{N} se define el ideal de operadores $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ del siguiente modo: $T : X \rightarrow Y$ pertenece a $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ si la imagen de la bola unidad cerrada de X pertenece a \mathcal{N} . Entonces resulta que cualquier ideal de conjuntos \mathcal{N} es la clase de los conjuntos de $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ -variación nula. Además, probamos que $h_{\mathcal{N}} = h_{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}}$, donde $h_{\mathcal{N}}$ es la distancia de Hausdorff al ideal de conjuntos \mathcal{N} .

Notación. Los espacios de Banach serán denotados por X, Y, Z y la bola unidad cerrada de X por $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. La clausura del subconjunto C de X se denotará por \overline{C} , la envolvente convexa por $\text{conv } C$ y la envolvente convexa cerrada por $\overline{\text{conv}} C$. La clase de los subconjuntos acotados no vacíos de X es

$$b(X) := \{D \subset X : D \neq \emptyset \text{ y } D \text{ acotado}\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47L20.

Key words and phrases. Set ideal, operator ideal, Hausdorff distance.

El espacio de todos los operadores (lineales y continuos) de X en Y se denotará por $L(X, Y)$.

2. IDEALES DE CONJUNTOS

Recordemos algunas nociones y hechos sobre la distancia de Hausdorff. Para $C, D \in b(X)$ consideramos

$$h'(C, D) := \inf\{\varepsilon > 0 : C \subset D + \varepsilon B_X\}.$$

La *distancia de Hausdorff* entre C y D se define por

$$h(C, D) := \max\{h'(C, D), h'(D, C)\}.$$

La función h es una seudométrica en $b(X)$ que verifica $h(C, D) = 0 \iff \overline{C} = \overline{D}$. Es decir, h es una métrica sobre la clase

$$bc(X) := \{D \in b(X) : D \text{ cerrado}\},$$

llamada la *métrica de Hausdorff*. En los conjuntos $b(X)$ y $bc(X)$ consideraremos siempre la topología generada por h .

En la próxima proposición damos algunas propiedades de h que necesitamos más adelante. Omitimos las sencillas demostraciones. Para $C \in b(X)$ ponemos

$$\|C\| := \sup\{\|x\| : x \in C\} = h(C, \{0\}).$$

Proposición 1. Sean $T, S \in L(X, Y)$ y $C, D \in b(X)$. Entonces:

- (1) $h(TC, TD) \leq \|T\|h(C, D)$
- (2) $h(TC, SC) \leq \|T - S\|\|C\|$
- (3) $h(\text{conv } C, \text{conv } D) \leq h(C, D)$

Ahora introducimos la noción central de este artículo.

Definición 2. Un ideal de conjuntos \mathcal{N} es una clase no vacía de subconjuntos no vacíos de espacios de Banach tales que sus componentes

$$\mathcal{N}(X) := \mathcal{N} \cap b(X),$$

para todo espacio de Banach X , satisfacen las siguientes propiedades:

- (1) Existe $D \neq \{0\}$ tal que $D \in \mathcal{N}(X)$, si $X \neq \{0\}$
- (2) $\emptyset \neq M \subset P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow M \in \mathcal{N}(X)$
- (3) $M, P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow M \cup P \in \mathcal{N}(X)$
- (4) $P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow \text{conv } P \in \mathcal{N}(X)$
- (5) $\mathcal{N}(X)$ es cerrado en $b(X)$
- (6) $P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow TP \in \mathcal{N}(Y)$, para todo $T \in L(X, Y)$

El *ideal de conjuntos trivial* es la clase b de los subconjuntos acotados: $\mathcal{N}(X) = b(X)$, para cualquier espacio de Banach X . La clase rc de los conjuntos relativamente compactos es otro ideal de conjuntos. También lo es la clase rwc formada por los subconjuntos relativamente débilmente compactos.

Observación 3. La condición (5) en la Definición 2 no es esencial. De hecho, si una clase \mathcal{N} verifica las otras condiciones, entonces podemos definir $\overline{\mathcal{N}}$ por

$$\overline{\mathcal{N}}(X) := \overline{\mathcal{N}(X)},$$

tomando la clausura en $b(X)$ con la distancia de Hausdorff h . Se obtiene así que la clase $\overline{\mathcal{N}}$ es un ideal de conjuntos.

Ahora damos varias propiedades simples de los ideales de conjuntos.

Proposición 4. *Sea \mathcal{N} un ideal de conjuntos. Entonces*

- (1) $P \in \mathcal{N}(X)$ y λ escalar $\Rightarrow \lambda P \in \mathcal{N}(X)$
- (2) $M, P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow M + P \in \mathcal{N}(X)$
- (3) $R \subset X$ relativamente compacto $\Rightarrow R \in \mathcal{N}(X)$
- (4) $P \in \mathcal{N}(X) \Rightarrow \overline{P} \in \mathcal{N}(X)$

Demostración. (1) El operador λI_X , siendo I_X la identidad sobre X , aplica $P \in \mathcal{N}$ en λP , luego $\lambda P \in \mathcal{N}$.

(2) Es suficiente notar que

$$M + P = 2\left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}P\right) \subset 2 \operatorname{conv}(M \cup P) \in \mathcal{N}.$$

(3) Tomamos $P \in \mathcal{N}$ tal que $P \neq \{0\}$, luego podemos elegir $p \in P$, $p \neq 0$, luego $\{p\} \in \mathcal{N}$. Dado $x \in X$, sea $T : X \rightarrow X$ lineal y continuo tal que $TP = x$. Entonces $\{x\} \in \mathcal{N}$, para todo $x \in X$. Consecuentemente, todo subconjunto finito de X pertenece a $\mathcal{N}(X)$. Además, si $R \subset X$ es relativamente compacto y $\varepsilon > 0$, entonces existe un subconjunto finito $F \subset X$ tal que $h(R, F) < \varepsilon$, luego $R \in \mathcal{N}$ ya que $\mathcal{N}(X)$ es cerrado.

(4) Como $h(P, \overline{P}) = 0$, resulta que $\overline{P} \in \overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$. □

3. LA DISTANCIA A UN IDEAL DE CONJUNTOS

Dado un ideal de conjuntos \mathcal{N} consideramos la función distancia a \mathcal{N} :

$$h(D) = h_{\mathcal{N}}(D) := \inf\{h(D, P) : P \in \mathcal{N}\},$$

para $D \in b(X)$. Si $\mathcal{N} = rc$, los subconjuntos relativamente compactos, entonces la función h es la *medida de no compacidad de Hausdorff* [2] y si $\mathcal{N} = rwc$, los subconjuntos relativamente débilmente compactos, entonces h es la *medida de no compacidad débil de De Blasi* [6].

En la siguiente proposición resumimos las principales propiedades de la función distancia h .

Proposición 5. *Sea \mathcal{N} un ideal de conjuntos y h la distancia a \mathcal{N} . Entonces*

- (1) $h(D) = \inf\{\varepsilon > 0 : D \subset P + \varepsilon B_X, \text{ para algún } P \in \mathcal{N}\}$
- (2) $h(C \cup D) = \max\{h(C), h(D)\}$, y de aquí, $C \subset D \Rightarrow h(C) \leq h(D)$
- (3) $h(\alpha D) = |\alpha| h(D)$ para cualquier escalar α
- (4) $h(C + D) \leq h(C) + h(D)$
- (5) $h(C + P) = h(C)$, para cualquier $P \in \mathcal{N}$
- (6) $h(D) = h(\operatorname{conv} D)$

- (7) $h(D) = h(\overline{D})$
- (8) $h(B_X) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}(X) = b(X)$
- (9) $h(B_X) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{N}(X) \neq b(X)$
- (10) $h(TD) \leq h(TB_X)h(D) \leq \|T\|h(D)$

Demostración. (1) y (2) se corresponden con Theorems 1 y 2 of [3]; (3), (4), (6) son Theorem 1 (i), (ii), (iii) de [4]; (7) es Proposition 2 (iv) de [4]; (8) y (9) coinciden con Theorem 2 (iii) y (iv) de [4].

(5) Es claro que $h(C+P) \leq h(C)$. Por otra parte, sea $\varepsilon > h(C+P)$; existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $C+P \subset M + \varepsilon B_X$, luego $C \subset M + (-P) + \varepsilon B_X$ con $M + (-P) \in \mathcal{N}$; es decir, $h(C) \leq \varepsilon$, luego $h(C) \leq h(C+P)$.

(10) Dado $\varepsilon_1 > h(TB_X)$ y $\varepsilon_2 > h(D)$, existe $P_1, P_2 \in \mathcal{N}$ tal que $TB_X \subset P_1 + \varepsilon_1 B_X$ y $D \subset P_2 + \varepsilon_2 B_X$, luego $TD \subset P + \varepsilon B_X$, donde $P = TP_2 + \varepsilon P_1 \in \mathcal{N}$ y $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 > h(TB_X)h(D)$. Consecuentemente $h(TD) \leq \varepsilon$. La otra desigualdad es inmediata teniendo en cuenta que $h(TB_X) \leq \|T\|$. \square

El siguiente lema, debido a H. Rådström (1953), resulta de mucha utilidad en lo que sigue.

Lema 6 ([9, Lemma 1]). *Sean C, D y E subconjuntos no vacíos de un espacio de Banach X . Si D es cerrado convexo y E es acotado, entonces*

$$C + E \subset D + E \Rightarrow C \subset D.$$

Teorema 7. *Sea \mathcal{N} un ideal de conjuntos no trivial y h la distancia a \mathcal{N} . Entonces*

$$h(D + \varepsilon B_X) = h(D) + \varepsilon,$$

para todo $D \in b(X)$ y $\varepsilon > 0$.

Demostración. Es obvio que $h(D + \varepsilon B_X) \leq h(D) + \varepsilon$. Con el fin de probar la otra desigualdad tomamos $\delta > h(D + \varepsilon B_X)$. Como

$$\varepsilon = h(\varepsilon B_X) = h(x + \varepsilon B_X) \leq h(D + \varepsilon B_X),$$

para todo $x \in D$, resulta que $\varepsilon < \delta$. Además, existe $P \in \mathcal{N}$ tal que

$$D + \varepsilon B_X \subset P + \delta B_X = P + (\delta - \varepsilon)B_X + \varepsilon B_X,$$

luego

$$D + \varepsilon B_X \subset \overline{\text{conv}}(P + (\delta - \varepsilon)B_X) + \varepsilon B_X.$$

Del lema de Rådström obtenemos $D \subset \overline{\text{conv}}(P + (\delta - \varepsilon)B_X)$, luego $h(D) \leq h(P + (\delta - \varepsilon)B_X) = \delta - \varepsilon$, es decir $h(D) + \varepsilon \leq \delta$; consecuentemente, $h(D) + \varepsilon \leq h(D + \varepsilon B_X)$. \square

4. IDEALES DE OPERADORES

Recordemos que un *ideal de operadores* \mathcal{A} es una clase de operadores (lineales y continuos) entre espacios de Banach que satisface las siguientes propiedades, siendo

$$\mathcal{A}(X, Y) = \mathcal{A} \cap L(X, Y),$$

para todo par de espacio de Banach X e Y :

- (1) Si $T \in L(X, Y)$ tiene rango de dimensión finita, entonces $T \in \mathcal{A}(X, Y)$
- (2) $S, T \in \mathcal{A} \Rightarrow S + T \in \mathcal{A}(X, Y)$

$$(3) \quad T \in L(X, Y), S \in \mathcal{A}(Y, Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{A}(X, Z)$$

$$(4) \quad T \in \mathcal{A}(X, Y), S \in L(Y, Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{A}(X, Z)$$

Un ideal de operadores cerrado es un ideal de operadores \mathcal{A} tal que cada componente $\mathcal{A}(X, Y)$ es cerrada en $L(X, Y)$. El ideal de operadores \mathcal{A} es *suprayectivo* si para cualquier operador exhaustivo $Q \in L(Z, X)$ y cualquier operador $T \in L(X, Y)$ se sigue de $TQ \in \mathcal{A}(Z, Y)$ que $T \in \mathcal{A}$ [8].

Dado el ideal de conjuntos \mathcal{N} definimos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(X, Y) := \{T \in L(X, Y) : TB_X \in \mathcal{N}\}.$$

Teorema 8. *Si \mathcal{N} es un ideal de conjuntos, entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ es un ideal de operadores cerrado y suprayectivo.*

Demostración. Ponemos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$.

(1) Si $T \in L(X, Y)$ tiene rango de dimensión finita, entonces TB_X es relativamente compacto. Por la Proposición 4.3 podemos afirmar que $TB_X \in \mathcal{N}(Y)$, luego $T \in \mathcal{A}$.

(2) Si $S, T \in \mathcal{A}(X, Y)$, entonces SB_X y TB_X pertenecen a $\mathcal{N}(Y)$, luego $(S + T)B_X \subset SB_X + TB_X \in \mathcal{N}(Y)$ y $S + T \in \mathcal{A}$.

(3) Si $T \in L(X, Y)$ y $S \in \mathcal{A}(Y, Z)$, entonces $TB_X \subset \|T\|B_Y$ y $STB_X \subset \|T\|SB_Y \in \mathcal{N}(Z)$, luego $ST \in \mathcal{A}$.

(4) Si $T \in \mathcal{A}(X, Y)$ y $S \in L(Y, Z)$, entonces $TB_X \in \mathcal{N}(Y)$ y $STB_X \in \mathcal{N}(Z)$, luego $ST \in \mathcal{A}$.

(5) \mathcal{A} es cerrado. En efecto, sea una sucesión $(T_n) \subset \mathcal{A}(X, Y)$ tal que $T_n \rightarrow T \in L(X, Y)$ ($n \rightarrow \infty$). De Proposition 1.2 obtenemos $h(T_n B_X, T B_X) \leq \|T_n - T\|$, luego $T_n B_X \rightarrow T B_X$, siendo $T_n B_X \in \mathcal{N}(Y)$, y tenemos que $T B_X \in \mathcal{N}(Y)$. Esto es, $T \in \mathcal{A}$.

(6) \mathcal{A} es suprayectivo. En efecto, sea $Q \in L(Z, X)$ un operador exhaustivo y $T \in L(X, Y)$ tal que $TQ \in \mathcal{A}(Z, Y)$. Entonces $\delta B_X \subset QB_Z$, para cierto $\delta > 0$, luego $\delta TB_X \subset TQB_Z \in \mathcal{N}(Y)$, y obtenemos $TB_X \in \mathcal{N}(Y)$, luego $T \in \mathcal{A}$. \square

Dado un ideal de operadores \mathcal{A} , K. Astala [1] introdujo la *\mathcal{A} -variación* de $D \in b(X)$ mediante

$$h_{\mathcal{A}}(D) := \inf\{\varepsilon > 0 : \exists Z, \exists K \in \mathcal{A}(Z, X), D \subset KB_Z + \varepsilon B_X\}.$$

Se dice que D es \mathcal{A} -compacto si $h_{\mathcal{A}}(D) = 0$. Si \mathcal{A} es un ideal de operadores cerrado suprayectivo y $D \in b(X)$, entonces $h_{\mathcal{A}}(D) = 0$ si y sólo si $D \subset KB_Z$ para cierto $K \in \mathcal{A}(Z, X)$ [1]. Se ha probado en [4] que la clase $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ de los subconjuntos \mathcal{A} -compactos es un ideal de conjuntos y, además,

$$h_{\mathcal{A}} = h_{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}}.$$

Ahora veremos que

$$h_{\mathcal{N}} = h_{\mathcal{A}_{\mathcal{N}}}.$$

Para demostrar esta igualdad es necesario el siguiente resultado.

Lema 9. *Sea \mathcal{N} un ideal de conjuntos y h la distancia a \mathcal{N} . Para cualquier conjunto acotado D ,*

$$h(D) = h(\text{aco } D),$$

siendo $\text{aco } D$ la envolvente absolutamente convexa de D .

Demostración. Es obvio que $h(D) \leq h(\text{aco } D)$. Recordemos que

$$\text{aco } D = \text{conv} \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha D$$

Ahora probamos la siguiente igualdad inspirándonos en [5].

$$h(\text{aco } D) = h\left(\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha D\right).$$

Sea $\varepsilon > h(D)$, luego $D \subset P + \varepsilon B_X$, para cierto $P \in \mathcal{N}$. Dado $\delta > 0$ existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, |\alpha_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, q$) tales que

$$\{\alpha : |\alpha| \leq 1\} \subset \bigcup_{i=1}^q \{\alpha : |\alpha - \alpha_i| \leq \delta\}.$$

Si $|\alpha - \alpha_i| \leq \delta$, entonces $\alpha D \subset (\alpha - \alpha_i)D + \alpha_i D$ y, además, $(\alpha - \alpha_i)D \subset \delta \|D\| B_X$. También $\alpha_i D \subset \alpha_i P + \alpha_i \varepsilon B_X$. Luego

$$\alpha D \subset \delta \|D\| B_X + \alpha_i P + \alpha_i \varepsilon B_X.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha D &\subset \bigcup_{i=1}^q (\delta \|D\| B_X + \alpha_i P + \alpha_i \varepsilon B_X) \\ &\subset (\delta \|D\| B_X + \varepsilon B_X) + \bigcup_{i=1}^q \alpha_i P = (\delta \|D\| + \varepsilon) B_X + \bigcup_{i=1}^q \alpha_i P. \end{aligned}$$

De $\bigcup_{i=1}^q \alpha_i P \in \mathcal{N}$, obtenemos

$$h\left(\bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha D\right) \leq \delta \|D\| + \varepsilon,$$

para todo $\delta > 0$, y, finalmente, $h(\text{aco } D) \leq h(C)$. \square

Teorema 10. *Sea \mathcal{N} un ideal de conjuntos. Para cualquier espacio de Banach X ,*

$$\mathcal{N}(X) = \{P \in b(X) : P \text{ es } \mathcal{A}_{\mathcal{N}}\text{-compacto}\}$$

Demostración. Si P es $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ -compacto, entonces existe $K \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}(Z, X)$ tal que $P \subset KB_Z \in \mathcal{N}(X)$. Por otro lado, sea $P \in \mathcal{N}(X)$. Tomamos $Z := \ell_1(P)$; esto es, Z es el espacio de las familias de escalares $(\xi_x)_{x \in P}$ que son absolutamente sumables con la norma dada por

$$\|(\xi_x)_{x \in P}\| := \sum_{x \in P} |\xi_x|$$

que lo convierte en espacio de Banach. Para $x \in P$ consideramos $e_x = (\varepsilon_y)_{y \in P} \in Z$, siendo $\varepsilon_y = 0$ si $y \neq x$ y $\varepsilon_y = 1$ si $y = x$. Entonces tenemos

$$B_Z = \overline{\text{aco}}\{e_x : x \in P\}.$$

Definimos el operador $K : Z \rightarrow X$, $Ke_x := x$. Es claro que K es lineal y continuo. Además,

$$KB_Z = K \overline{\text{aco}}\{e_x : x \in P\} \subset \overline{\text{aco}}\{Ke_x : x \in P\} = \overline{\text{aco}} P \in \mathcal{N}(X).$$

Luego $K \in \mathcal{A}_N$ y $P \subset KB_Z$. Es decir, $P \in \mathcal{N}(X)$. □

Corolario 11. $h_N = h_{\mathcal{A}_N}$.

REFERENCIAS

- [1] K. Astala, On measures of noncompactness and ideal variations in Banach spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Diss.* **29** (1980).
- [2] J. Banaś y K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banach spaces*, Marcel Dekker, 1980.
- [3] J. Banaś y A. Martínón, Some properties of the Hausdorff distance in metric spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* **42** (1990), 511–516.
- [4] J. Banaś, A. Martínón y K. B. Sadarangani, Set quantities related to the Hausdorff distance in Banach spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* **28** (1997), 1421–1433.
- [5] M. Cichoń, On measures of weak noncompactness, *Publ. Math. Debrecen* **45** (1994), 93–102.
- [6] F. S. De Blasi, On a property of the unit sphere in a Banach space, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.)* **21(60)** (1977), 259–262.
- [7] A. Martínón, A system of axioms for measures of noncompactness (en ruso), *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat. Fiz.* **10** (1990), 133–143.
- [8] A. Pietsch, *Operator ideals*, North Holland, 1980.
- [9] H. Rådström, An embedding theorem for spaces of convex sets, *Proc. Amer. Math Soc.* **3** (1952), 165–169.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38271 LA LAGUNA (TENERIFE), SPAIN

Correo electrónico: anmarce@ull.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA, 35071 LAS PALMAS DE GRAN CANARIA, SPAIN

APROXIMACIÓN EN NORMA L^p SOBRE SUBCONJUNTOS CERRADOS DEL PLANO COMPLEJO

ANTONIO BONILLA Y JUAN CARLOS FARIÑA

En memoria de nuestro amigo Chicho

ABSTRACT. Let K be a compact set of the complex plane. Sinanjan gives a sufficient condition for the density of the polynomials in the set of all functions in $L^p(K)$ that are analytic in the interior of K . The same condition is also sufficient for the density of the real harmonic polynomials in the set of all functions in $L^p(K)$ that are harmonic in the interior of K . By using techniques of “fusion” and “pushing poles”, this result can be extended to closed sets as consequence of the results of Boivin, Bonilla and Fariña for the holomorphic case and the results of Armitage and Goldstein for the harmonic case. In this paper, as consequence of the Sinanjan’s Theorem and by following ideas from Rosay and Rudin, we give a different proof of this results on closed sets.

1. INTRODUCCIÓN

Sea F un subconjunto cerrado del plano complejo. Si f es una función compleja medible sobre F y $1 < p < \infty$, definimos la norma L^p de f sobre F por

$$\|f\|_{p,F} = \left\{ \int_F |f(z)|^p dm \right\}^{\frac{1}{p}},$$

donde dm es la medida de Lebesgue sobre el plano. El espacio de todas las funciones complejas medibles para las que $\|f\|_{p,F}$ es finito lo denotaremos por $L^p(F)$. Asimismo $L^p_{\text{loc}}(F)$ representará al conjuntos de aquellas funciones f para las que, dado cualquier subconjunto compacto $Q \subset F$, pertenece a $L^p(Q)$; $A^p(F)$ se define como el conjunto de todas las funciones en $L^p_{\text{loc}}(F)$ que son además holomorfas en F° ($H(F^\circ)$). Análogamente, $a^p(F)$ es el conjunto de aquellas funciones reales definidas sobre F que pertenecen a $L^p_{\text{loc}}(F)$ y son armónica en su interior ($h(F^\circ)$).

Dada una clase de funciones A , denotemos por $[A]_{p,F}$ al conjunto de todas las funciones que son límite en norma L^p sobre F de funciones en A .

Un «agujero» de F será una componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus F$ y denotaremos por \hat{F} la unión de F y todos sus «agujeros».

El problema de aproximación uniforme sobre conjuntos cerrados del plano complejo fue solucionado completamente en 1969 por Arakelyan ([1]), quien da una caracterización, en términos puramente topológicos, de aquellos conjuntos cerrados

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30E10.

Key words and phrases. L^p spaces, entire approximation, harmonic approximation.

F que tienen la propiedad de que toda función continua en F y holomorfa en F° puede ser aproximada por funciones enteras. Estas condiciones permiten primeramente aproximar por funciones meromorfas sin polos en F y luego desplazar los polos de las funciones aproximantes al infinito. Este problema fue también resuelto cuando, en lugar de la norma uniforme, consideramos la norma $\text{Lip } \alpha$ ([9]) y C^m ([7]). En otros casos, por ejemplo la norma BMO o L^p , que son definidas por medio de una integral, el problema está aún abierto y sólo se ha podido probar que las condiciones de Arakelya junto con la condición que caracteriza la aproximación meromorfa en BMO, son suficiente para la aproximación entera en esta norma.

Un problema similar aparece cuando las funciones holomorfas son sustituidas por soluciones globales de ciertos operadores elípticos. En el caso particular del Laplaciano y la norma uniforme, recientemente Gardiner ([11]) solucionó completamente el problema caracterizando los subconjuntos relativamente cerrados F de un dominio G , donde la aproximación de funciones continuas en F y armónicas en su interior por funciones armónicas en G es siempre posible. Previamente, Sinanjan ([16]) había probado que si K es un subconjunto compacto de \mathbb{C} tal que $\partial K = \partial \hat{K}$, entonces los polinomios son densos en $A^p(K)$ y los polinomios reales son densos en $a^p(K)$. Este resultado se puede extender a conjuntos cerrados como consecuencia de los resultados en [5] para el caso holomorfo y de los resultados de Armitage y Goldstein [2] para el caso armónico. En esta nota damos una demostración de estos resultados en la línea de [15].

A efectos de notación, si E un subconjunto del plano complejo \mathbb{C} , denotaremos su clausura por \overline{E} , su interior por E° , su frontera topológica por ∂E y su complemento por E^c . Los discos abiertos centrados en z y de radio r los denotaremos por $D(z, r)$ y, si $k > 0$, kD representará el disco $D(z, kr)$. Finalmente, $G^\infty = G \cup \{\infty\}$ es la compactificación unipuntual de G .

2. APROXIMACIÓN L^p ENTERA

Sea F un subconjunto relativamente cerrado de un dominio arbitrario G . Como en el caso uniforme ([10]), usando el teorema de localización en L^p ([5]), el Teorema de Sinanjan y técnicas de desplazamiento de polos, es posible probar que si $\partial F = \partial \hat{F}$ y $G^\infty \setminus \hat{F}$ es localmente conexo en $\{\infty\}$, entonces $A^p(F) = [H(G)]_{p,F}$. Seguidamente damos una prueba alternativa de este resultado cuando F es un subconjunto cerrado del plano complejo. En dicha prueba seguiremos algunas ideas de [15] y [5].

Teorema 1. *Sea F un subconjunto cerrado del plano complejo y $1 < p < \infty$. Si*

- (i) $\partial F = \partial \hat{F}$ y
- (ii) $\mathbb{C}^\infty \setminus \hat{F}$ es localmente conexo en $\{\infty\}$,

entonces $A^p(F) = [H(\mathbb{C})]_{p,F}$.

Demostración. Sea $f \in A^p(F)$. Observemos que si $\partial F = \partial \hat{F}$, cualquier agujero de F es una componente conexa del interior de \hat{F} . Así, dada cualquier $f \in A^p(F)$, podemos obtener una función g en $A^p(\hat{F})$ que coincide con f en F sin más que definir $g = f$ en F y $g = 0$ en el resto. De este modo podemos suponer que $F = \hat{F}$. Teniendo en cuenta dicha suposición, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$B_n = \overline{D}(0, r_n)$, donde $\{r_n\}$ es una sucesión creciente que diverge a infinito y que elegiremos de modo que $B_n \cup \overline{H}_n \subset B_{n+1}^o$, siendo H_n la unión de todos los agujeros de $F \cup B_n$, siendo esto es posible por la propiedad (ii). Por otro lado, la condición (i) implica que si $F_o = F$ y $F_n = F \cup B_n \cup \overline{H}_n$, entonces los conjuntos $F_{n-1} \cap B_{n+1}$ satisfacen la hipótesis del teorema de Sinanjan. Señalemos además que $F_n \subset F_{n+1}$ y $\cup F_n = \mathbb{C}$.

La demostración consistirá en construir, mediante un proceso inductivo, una sucesión de funciones h_n tal que $h_n \in A^p(F_n)$ y existe h tal que, para cualquier $m \geq 0$, $\|h_n - h\|_{p, F_m} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto implica que $\lim h_n = h$ será también uniforme sobre compactos de \mathbb{C} . Consiguientemente h será una función entera verificando $\|f - h\|_{p, F} < \varepsilon$ y el teorema quedaría demostrado.

Sea $h_o = f$ y supongamos (como hipótesis inductiva) que h_{n-1} ya ha sido elegida. Para definir h_n , tomemos una función $\varphi_n \in C_o^\infty(\mathbb{C})$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n = 1$ en un entorno U_n de $B_n \cup \overline{H}_n$ y $\text{supp } \varphi_n \subset B_{n+1}$. Como ya señalamos, $F_{n-1} \cap B_{n+1}$ satisface la hipótesis del teorema de Sinanjan y podemos encontrar un polinomio P_n tal que

$$(1) \quad \|h_{n-1} - P_n\|_{p, F_{n-1} \cap B_{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}C} \varepsilon,$$

donde C es una constante que definiremos más tarde y que dependerá del hecho de que para una función $f \in C_0(\mathbb{C})$ la transformada de Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{z - w} dm(w)$$

está acotada en norma L^p si $p > 2$ i.e., $\|g\|_{p, \mathbb{C}} \leq C_1 \|f\|_{p, \mathbb{C}}$, mientras si $1 < p \leq 2$ está sólo localmente acotada ([5]), i.e., $\|g\|_{p, D} \leq C(D) \|f\|_{p, D}$, siendo D un disco en \mathbb{C} . Por esta razón hemos de considerar dos casos.

Trataremos primeramente con el caso $2 < p < \infty$. Tomemos $C = C_1 + 1$ en (1), y de este modo tendremos que

$$(2) \quad \left\| \frac{1}{\pi} \int_{F_{n-1}} \frac{(h_{n-1} - P_n) \overline{\partial} \varphi_n(w)}{z - w} dm(w) \right\|_{p, \mathbb{C}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Sea ahora

$$r_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{F_{n-1}} \frac{(h_{n-1} - P_n) \overline{\partial} \varphi_n(w)}{z - w} dm(w)$$

y definamos

$$h_n = \varphi_n P_n + (1 - \varphi_n) h_{n-1} + r_n.$$

Siguiendo la línea de la demostración de [4, Theorem 3.7.3] deducimos que $h_n \in A^p(F_n)$ y

$$(3) \quad \|h_{n-1} - h_n\|_{p, F_{n-1}} \leq \|\varphi_n (h_{n-1} - P_n)\|_{p, F_{n-1}} + \|r_n\|_{p, F_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Por tanto, como $\cup F_i = \mathbb{C}$, no es difícil probar que (3) implica que $h = \lim h_n = h_o + \sum_{n \geq 1} (h_n - h_{n-1})$ es entera y

$$\|f - h\|_{p,F} \leq \|h_o - h_1\|_{p,F_o} + \sum_{i=2}^{\infty} \|h_{i-1} - h_i\|_{p,F_{i-1}} < \varepsilon.$$

Así, el teorema queda probado para $p > 2$.

En el caso $1 < p \leq 2$, (2) no se verifica. Por tanto, para cada n tomaremos $z_n \in F_{n+1}^c$ y un disco $D = D(z_n, \delta)$ contenido en F_{n+1}^c . Elijamos $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\psi \equiv 1$ fuera de D y $\psi \equiv 0$ en $\frac{1}{2}D$. Definamos

$$h_n = \varphi_n P_n + (1 - \varphi_n) h_{n-1} + \left(r_n - \frac{r'_n(\infty)\psi}{z - z_n} \right).$$

Si probamos que

$$(4) \quad \left\| r_n - \frac{r'_n(\infty)\psi}{z - z_n} \right\|_{p,F_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

entonces, de un modo similar al caso anterior, $h_n \in A^p(F_n)$, $\|h_{n-1} - h_n\|_{p,F_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2^n}$ y $h = \lim h_n$ satisface el teorema.

Para probar (4), denotemos

$$m(z) = r_n - \frac{r'_n(\infty)\psi}{z - z_n}$$

y observemos que, si m tiene un cero de orden 2 en infinito, existe R tal que $\forall z \in D(z_n, R)^c$ podemos escribir

$$m(z) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_i}{(z - z_n)^i}.$$

De este modo, si $|z - z_n| > 2R$, siguiendo [6, section 1.7],

$$|b_i| \leq C \left(\frac{3}{2}R \right)^{n-2+\frac{2}{q}} \|m\|_{p,2D}.$$

Esto implica que

$$|m(z)| \leq C \frac{\left(\frac{3}{2}R\right)^{\frac{2}{q}}}{|z - z_n|^2} \|m\|_{p,2D} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}R\right)^{n-2}}{(z - z_n)^{i-2}} \leq C \frac{\left(\frac{3}{2}R\right)^{\frac{2}{q}}}{|z - z_n|^2} \|m\|_{p,2D}.$$

Consecuentemente

$$\int_{\mathbb{C} \setminus 2D} |m(z)|^p dm(z) \leq CR^{\frac{2}{q}p} \|m\|_{p,2D} R^{2-2p}$$

y

$$\|m\|_{p,\mathbb{C}} \leq \|m\|_{p,2D} + \|m\|_{p,\mathbb{C} \setminus 2D} \leq (1 + CR^{\frac{2}{q}p}) \|m\|_{p,2D} \leq C \|m\|_{p,2D}.$$

Nosotros sólo necesitamos estimar la norma L^p de m sobre $2D$. Para ello, en virtud de [6], tenemos que

$$|r'_n(\infty)| \leq C \left(\frac{3}{2}R\right)^{-1+\frac{2}{q}} \|r_n\|_{p,2D} = C_2 \|r_n\|_{p,2D}.$$

Usando el hecho de que la transformada de Cauchy está localmente acotada y $\frac{\psi(z)}{z - z_n} \in L^p(2D)$ para $p > 1$, tomando, en (1),

$$C = C(\varphi_n, 2D) + C_2 \left\| \frac{\psi}{z - z_n} \right\|_{p,2D},$$

podemos concluir que

$$\left\| r_n - \frac{r'_n(\infty)\psi}{z - z_n} \right\|_{p,2D} < \|r_n\|_{p,2D} + |r'_n(\infty)| \left\| \frac{\psi}{z - z_n} \right\|_{p,2D} < C \|r_n\|_{p,2D} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

□

3. APROXIMACIÓN ARMÓNICA EN NORMA L^p

Armitage y Goldstein ([2]) probaron que si F es subconjunto relativamente cerrado de un conjunto abierto G en \mathbb{R}^n con la propiedad de aproximación L^p local y además $G^\infty \setminus F$ es conexo y localmente conexo en $\{\infty\}$, entonces $a^p(F) = [h(G)]_{p,F}$. Aquí, como en el caso holomorfo, daremos una prueba diferente de este resultado en el caso particular en que G sea el plano complejo.

Teorema 2. *Sea F un subconjunto cerrado del plano complejo y $1 < p < \infty$. Si*

- (i) $\partial F = \partial \hat{F}$ y
- (ii) $\mathbb{C}^\infty \setminus \hat{F}$ es localmente conexo en $\{\infty\}$,

entonces $a^p(F) = [h(\mathbb{C})]_{p,F}$.

Demostración. Sea $f \in a^p(F)$. Consideremos F_n y φ_n como en la demostración del teorema anterior y como allí, construimos, por un proceso inductivo, una sucesión $\{h_n\}$ tal que $h_n \in a^p(F_n)$ y existe h verificando $\|h_n - h\|_{p,F_m} \rightarrow 0$ para $m \geq 0$. Consecuentemente h es una función armónica en \mathbb{C} con $\|f - h\|_{p,F} < \varepsilon$ que verifica el teorema.

Pongamos $h_o = f$, fijemos $n \geq 1$ y supongamos (como hipótesis inductiva) que h_{n-1} ya ha sido definida. El Teorema de Sinanjan en norma L^p para funciones armónicas nos da un polinomio armónico P_n tal que

$$(5) \quad \|h_{n-1} - P_n\|_{p,F_{n-1} \cap B_{n+1}} < \frac{1}{C2^{n+1}} \varepsilon,$$

donde, como en el caso holomorfo, C será definida más tarde. Sea ahora

$$\begin{aligned} r_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{F_{n-1}} (h_{n-1} - P_n) \Delta \varphi_n(w) \log |z - w| dm(w) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{F_{n-1}} \frac{(h_{n-1} - P_n) \bar{\partial} \varphi_n(w)}{z - w} dm(w) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{F_{n-1}} \frac{(h_{n-1} - P_n) \partial \varphi_n(w)}{\bar{z} - \bar{w}} dm(w). \end{aligned}$$

Notemos que $r_n = \frac{1}{2\pi} \log |z| * \varphi_n \Delta g - \varphi_n g$ siendo $g = (h_{n-1} - P_n) \chi_{F_{n-1}}$ y donde el primer término está localmente acotado en norma L^p , es decir,

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \log |z| * \varphi_n \Delta g \right\|_{p,D} \leq C(\varphi_n, D) \|g\|_{p,D}$$

donde D es un disco en \mathbb{C} (ver [14]). Consideremos $z_n \in F_{n+1}^c$ y $D = D(z_n, \delta)$ un disco contenido en F_{n+1}^c . Elijamos $\psi \in C^\infty(\mathbb{C})$ con $\psi \equiv 1$ fuera de D y $\psi \equiv 0$ en $\frac{1}{2}D$. Sea $R > 0$ una constante tal que $B = D(z_n, R) \supset B_{n+1}$. Siguiendo [14] tenemos que, si $f \in C(\mathbb{C})$ y $\text{supp } \varphi \subset B_1 = D(z, R)$, entonces $\left\| \frac{1}{2\pi} \log |z| * f \right\|_{p,3B_1} \leq C(\varphi, 3B_1) \|f\|_{p,3B_1}$. Definamos

$$\varphi = \psi \log |z - z_n|$$

y

$$S = \sum_{|\alpha| < q} c_\alpha \partial^\alpha \varphi,$$

donde los coeficientes c_α vienen dados por el desarrollo

$$r_n(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \log |z - z_n|$$

y $q = \max\{p, 1\}$, siendo p el número entero que aparece en [14, Lemma 2]. Esta serie converge en $C^\infty(\mathbb{C} \setminus D(z_n, R))$; además

$$|c_\alpha| \leq C(\alpha) \|r_n\|_{p,3B}$$

y así

$$\|S\|_{p,3\bar{B}} \leq C(q) \|r_n\|_{p,3B}.$$

Aplicando de nuevo [14, Lemma 2], como $r_n - S = O(|z|^{-q})$ cuando $z \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|r_n - S\|_{p,\mathbb{C}} &\leq C_1 \|r_n - S\|_{p,3D(z_n,R)} \\ (6) \quad &\leq C_1 (\|r_n\|_{p,3D(z_n,R)} + \|S\|_{p,3D(z_n,R)}) \\ &\leq C_1 (1 + C(q)) \|r_n\|_{p,3B} \end{aligned}$$

donde C_1 depende solamente de p .

Ahora, si tomamos, en (5), $C = \frac{C(\varphi_n, 3B)}{C_1(1 + C(q))}$, y definimos

$$h_n = \varphi_n P_n + (1 - \varphi_n)h_{n-1} + (r_n - S),$$

como, según (6),

$$\|r_n - S\|_{p, F_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

entonces $h_n \in a^p(E_n)$ y $\|h_{n-1} - h_n\|_{p, F_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Por tanto, existe una función $h = \lim h_n$ que es globalmente armónica en \mathbb{C} y verifica el teorema. \square

4. OBSERVACIONES

Para finalizar esta nota queremos hacer dos observaciones. Por un lado nótese que, de un modo similar al Teorema 2, se puede demostrar el Theorem 4 de [11] cuando F es un cerrado del plano complejo. La única diferencia estriba en el uso del Teorema de Walsh-Lebesgue ([17, pág. 503]) en lugar del Teorema de Sinanjan, aunque, ahora, H_n es la unión de todos los agujeros de $\hat{F} \cup B_n$ y los agujeros de F que intersecan a B_n . Esto es posible por la condición de «largas islas» ([12]) y por el hecho de que $\mathbb{C}^\infty \setminus \hat{F}$ es localmente conexo en $\{\infty\}$.

Por otro lado, debemos observar que las condiciones de los anteriores teoremas no son necesarias, incluso aunque se excluyan los casos triviales donde F contiene un subconjunto cerrado F' de medida plena con F' satisfaciendo las condiciones de los teoremas. Por ejemplo, cuando F es la clausura de ciertos dominios en «forma de luna» ([13]).

REFERENCIAS

- [1] N. Arakeljan, Uniform and tangential approximation by analytic functions, *Transl. Amer. Math. Soc.* **122** (1984), 85–97.
- [2] D. H Armitage y M. Goldstein, Better than uniform approximation on closed sets by harmonic functions with singularities, *Proc. London Math. Soc.* **60** (1990), 319–343.
- [3] T. Bagby y P. M. Gauthier, Harmonic approximation on closed subsets of Riemannian manifolds, en *Complex potential theory* (P. M. Gauthie, ed.), Kluwer Academic Publishers (1994), 75–87.
- [4] C. A. Berenstein y R. Gay, *Complex variables. An introduction*, Springer-Verlag, 1991.
- [5] A. Boivin, A. Bonilla y J. C. Fariña, Meromorphic approximation in weighted L^p spaces, *Proc. Roy. Irish Acad.* **95A** (1995), 47–64.
- [6] A. Boivin y J. Verdera, Approximation par fonctions holomorphes dans les espaces L^p , $\text{Lip } \alpha$ et BMO, *Indiana Univ. Math. J.* **40** (1991), 393–418.
- [7] A. Bonilla y J. C. Fariña, Meromorphic and holomorphic approximation in C^m -norm, *J. Math. Anal. Appl.* **181** (1994), 132–149.
- [8] A. Bonilla y J. C. Fariña, Meromorphic and entire approximation in BMO norm, *J. Approx. Theory* **76** (1994), 203–218.
- [9] J. C. Fariña, Lipschitz approximation on closed set, *J. Analyse Math.* **57** (1991) 152–171.
- [10] D. Gaier, *Lectures on complex approximation*, Birkhäuser, Boston, 1987.
- [11] S. J. Gardiner, Superharmonic extension and harmonic approximation, *Ann. Inst. Fourier* **44** (1994), 65–91.
- [12] S. J. Gardiner, *Harmonic Approximation*, London Mathematical Society Lecture Note Series **221**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [13] S. N. Mergelyan, On the completeness of systems of analytic functions (en ruso), *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)* **8** (1953), 3–63. Traducción al inglés: *Transl. Amer. Math. Soc.* **19** (1962), 109–166.
- [14] P. Paramonov y J. Verdera, Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of Euclidean space, *Math. Scand.* **74** (1994), 249–259.
- [15] J. P. Rosay y W. Rudin, Arakelian’s approximation theorem, *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 432–434.
- [16] S. O. Sinanjan, Approximation by analytic functions and polynomials in the mean with respect to the area (en ruso), *Mat. Sb. (N.S.)* **69(111)** (1966), 546–578. Traducción al inglés: *Transl. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), 91–124.
- [17] J. L. Walsh, The approximation of harmonic functions by polynomials and harmonic rational functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **35** (1929), 499–544.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38271 LA LAGUNA (TENERIFE), CANARY ISLANDS, SPAIN

Correo electrónico: abonilla@ull.es, jcfarina@ull.es

MÉTODOS TIPO SECANTE Y SU APLICACIÓN A OPERADORES NO DIFERENCIABLES

MIGUEL A. HERNÁNDEZ Y M. JESÚS RUBIO

A nuestro amigo y compañero Chicho

ABSTRACT. In this work we study a class of Secant-like iterations for solving nonlinear and non-differentiable equations in Banach spaces. We consider a condition for divided differences which generalizes those usual ones, i.e, Lipschitz continuous and Hölder continuous conditions. A semilocal convergence result is obtained. For that, we use a technique based on a new system of recurrence relations to obtain domains of existence and uniqueness of the solution. Finally, we apply the result obtained to a numerical example.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo consideramos operadores $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$, donde Ω es un dominio abierto y convexo en el espacio de Banach X , siendo Y también un espacio de Banach. Entonces, nos planteamos aproximar una solución de la ecuación

$$(1) \quad F(x) = 0.$$

Uno de los métodos más utilizado para resolver ecuaciones no lineales es el conocido método de Newton [4]:

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad x_0 \in \Omega, \quad n \geq 0.$$

Sin embargo, si F no es diferenciable, este método no es aplicable, ya que requiere evaluar $F'(x_n)$ en cada paso. Una opción elegida, para solventar esta dificultad, ha sido considerar diferencias divididas. Recordemos que un operador lineal y acotado $[x, y; F] : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ se dice una diferencia dividida de primer orden para F en los puntos x e y ($x \neq y$) si cumple la siguiente igualdad:

$$(2) \quad [x, y; F](x - y) = F(x) - F(y).$$

Pues bien, este operador se ha utilizado para aproximar la primera derivada Fréchet de F . Así, utilizando esta noción, se ha estudiado el método de la Secante [3]:

$$x_{n+1} = x_n - [x_{n-1}, x_n; F]^{-1}F(x_n), \quad x_0, x_{-1} \in \Omega.$$

El método de la Secante es útil cuando F no es derivable o es difícil de calcular F' , pero es más lento que el método de Newton. Recordemos que, mientras que el

método de Newton tiene convergencia cuadrática, el método de la Secante tiene R -order de convergencia $(1 + \sqrt{5})/2$ (ver [5]).

Pues bien, en este trabajo, construimos una familia uniparamétrica de procesos iterativos de tipo Secante, dada por el siguiente algoritmo:

$$(3) \quad \begin{cases} x_{-1}, x_0 \in \Omega \\ y_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)x_{n-1}, \quad \lambda \in [0, 1], \\ x_{n+1} = x_n - [y_n, x_n; F]^{-1}F(x_n). \end{cases}$$

Estos métodos se pueden considerar como una generalización del método de la Secante, y mantienen la característica de no necesitar la evaluación de la primera derivada Fréchet del operador en su aplicación.

Observemos que (3) se reduce al método de la Secante si $\lambda = 0$ y al método de Newton si $\lambda = 1$, porque $x_n = y_n$ y en este caso es conocido [5] que, si F es diferenciable Fréchet, $[y_n, x_n; F] = F'(x_n)$.

En el caso real, para los métodos (3), es claro que cuanto más próximo esté x_n a y_n , más alta será la velocidad de convergencia. Por ello, considerar los procesos iterativos dados en (3) nos permitirá aproximarnos más rápidamente a la solución que el método de la Secante y la velocidad de convergencia se aproximará a la del método de Newton cuando λ se acerque a uno. Además, evitamos la computación de $F'(x_n)$ en cada paso.

La convergencia del método de la Secante para aproximar la solución de (1) ha sido estudiada por otros autores ([1], [2], [5], [6]). La suposición básica es que las diferencias divididas sean Lipschitz o Hölder continuas. En este trabajo, para estudiar la convergencia de los procesos iterativos (3), nos proponemos generalizar esta condición, y así, sólo exigiremos que la diferencia dividida verifique

$$(4) \quad \|[x, y; F] - [v, w; F]\| \leq \omega(\|x - v\|, \|y - w\|), \quad x, y, v, w \in \Omega,$$

siendo $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continua y no decreciente en ambas componentes.

Es conocido [1] que, si para $x, y \in \Omega$ existe una diferencia dividida cumpliendo una condición de tipo Lipschitz o Hölder en Ω , entonces existe la derivada de Fréchet de F en Ω y satisface

$$[x, x; F] = F'(x), \quad x \in \Omega.$$

De igual manera, es fácil probar que dicha igualdad también se verifica con la condición (4) siempre que $\omega(0, 0) = 0$. Sin embargo esta condición obligará a que el operador F sea diferenciable, situación que nosotros no contemplamos.

Estudiaremos la convergencia semilocal de (3) mediante una nueva técnica que utiliza relaciones de recurrencia. Queremos hacer notar, la inestimable ayuda que supuso para nosotros, la participación del profesor J. Javier Guadalupe (Chicho) en el desarrollo de este procedimiento.

Entonces, dadas las características consideradas, esta familia uniparamétrica nos permitirá solucionar el problema de aproximar una solución de (1) de forma reducida en cuanto al coste operacional, y efectiva en cuanto a la velocidad de convergencia.

Para finalizar el trabajo se hace un estudio práctico de esta familia uniparamétrica aplicando los resultados de convergencia obtenidos a un ejemplo numérico.

2. ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA SEMILOCAL

Si contemplamos la situación en que el operador F no sea diferenciable, no exigiremos que la función ω verifique $\omega(0, 0) = 0$. Esto nos obligará a considerar $\lambda \in [0, 1)$. Nuestras condiciones iniciales serán

- (I): $\|x_{-1} - x_0\| = \alpha$,
- (II): existe $L_0^{-1} = [y_0, x_0; F]^{-1}$ tal que $\|L_0^{-1}\| \leq \beta$,
- (III): $\|L_0^{-1}F(x_0)\| \leq \eta$,
- (IV): $\|[x, y; F] - [v, w; F]\| \leq \omega(\|x - v\|, \|y - w\|)$, para $x, y, v, w \in \Omega$, siendo $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continua y no decreciente en ambas componentes.

Consideramos las notaciones siguientes:

$$a = \frac{\beta\omega(\lambda\eta + (1-\lambda)\alpha, \eta)}{1 - \beta\omega(\lambda\eta + (1-\lambda)\alpha, \eta)}, \quad b(u) = \frac{\beta\omega((1-\lambda)\eta, \eta)}{1 - \beta\omega(u + (1-\lambda)\alpha, u)};$$

entonces ya estamos en condiciones de obtener un resultado de convergencia semi-local válido para operadores no diferenciables.

Teorema 2.1. *Sean $x_0, x_{-1} \in \Omega$ y $\lambda \in [0, 1)$. Suponemos que, para cada par de puntos distintos $x, y \in \Omega$, existe una diferencia dividida $[x, y; H] \in \mathcal{L}(X, Y)$. En las condiciones (I)–(IV), suponemos que la ecuación*

$$(5) \quad u = \left(\frac{a}{1 - b(u)} + 1 \right) \eta$$

tiene al menos una solución positiva, sea R la solución positiva más pequeña. Si $\beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) < 1$, $b(R) < 1$ y $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$, la sucesión $\{x_n\}$ dada en (3) está bien definida y converge a una única solución x^* de $F(x) = 0$. Además, la solución x^* y las iteraciones x_n pertenecen a $\overline{B(x_0, R)}$.

Demostración. Para simplificar la notación, denotaremos $[y_n, x_n; F] = L_n$ y $b(R) = b$. En primer lugar probaremos, por inducción, que la sucesión dada en (3) está bien definida, es decir, que en cada paso el operador diferencia dividida $[y_n, x_n; F]$ posee inverso y el punto obtenido x_{n+1} está en Ω .

De las hipótesis iniciales se sigue que x_1 está bien definido y $\|x_1 - x_0\| \leq \eta < R$. Por tanto, $x_1 \in B(x_0, R) \subseteq \Omega$.

Utilizando (IV) y que ω es no decreciente en ambas componentes, resulta

$$\begin{aligned} \|I - L_0^{-1}L_1\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - L_1\| \leq \|L_0^{-1}\| \omega(\|y_1 - y_0\|, \|x_1 - x_0\|) \\ &\leq \|L_0^{-1}\| \omega(\lambda\|x_1 - x_0\| + (1-\lambda)\|x_0 - x_{-1}\|, \|x_1 - x_0\|) \\ &\leq \beta\omega(\lambda\eta + (1-\lambda)\alpha, \eta) \leq \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) < 1, \end{aligned}$$

y por el lema de Banach existe L_1^{-1} y

$$\|L_1^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(\lambda\eta + (1-\lambda)\alpha, \eta)}.$$

Por (2) y (3), obtenemos

$$F(x_1) = F(x_0) - [x_0, x_1; F](x_0 - x_1) = (L_0 - [x_0, x_1; F])(x_0 - x_1).$$

Entonces, por **(IV)**, se tiene

$$\begin{aligned} \|F(x_1)\| &\leq \|[x_0, x_1; F] - L_0\| \|x_1 - x_0\| \leq \omega(\|x_0 - y_0\|, \|x_1 - x_0\|) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \omega((1 - \lambda)\alpha, \eta) \|x_1 - x_0\| \leq \omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R) \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Como x_2 está bien definido, por estarlo $F(x_1)$ y L_1^{-1} , se sigue

$$(6) \quad \|x_2 - x_1\| \leq \|L_1^{-1}\| \|F(x_1)\| \leq \frac{\beta\omega((1 - \lambda)\alpha, \eta)}{1 - \beta\omega((1 - \lambda)\alpha, \eta)} \|x_1 - x_0\| = a\|x_1 - x_0\|.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que R satisface (5),

$$(7) \quad \begin{aligned} \|x_2 - x_0\| &\leq \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \left[\frac{\beta\omega((1 - \lambda)\alpha, \eta)}{1 - \beta\omega((1 - \lambda)\alpha, \eta)} + 1 \right] \|x_1 - x_0\| \leq (a + 1)\eta < R, \end{aligned}$$

luego, $x_2 \in B(x_0, R) \in \Omega$.

Análogamente a lo realizado en el paso anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \|I - L_0^{-1}L_2\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - L_2\| \leq \beta\omega(\|y_2 - y_0\|, \|x_2 - x_0\|) \\ &\leq \beta\omega(\|y_2 - x_0\| + \|x_0 - y_0\|, \|x_2 - x_0\|) \leq \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R) < 1, \end{aligned}$$

y por tanto, obtenemos

$$\|L_2^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R)}.$$

Tomando normas en la igualdad

$$F(x_2) = F(x_1) - [x_1, x_2; F](x_1 - x_2) = (L_1 - [x_1, x_2; F])(x_1 - x_2),$$

se tiene

$$\begin{aligned} \|F(x_2)\| &\leq \|[x_1, x_2; F] - L_1\| \|x_2 - x_1\| \\ &\leq \omega((1 - \lambda)\|x_1 - x_0\|, \|x_2 - x_1\|) \|x_2 - x_1\| \leq \omega((1 - \lambda)\eta, \eta) \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

Entonces se sigue

$$(8) \quad \|x_3 - x_2\| \leq \|L_2^{-1}\| \|F(x_2)\| \leq \frac{\beta\omega((1 - \lambda)\eta, \eta)}{1 - \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R)} \|x_2 - x_1\| = b\|x_2 - x_1\|.$$

En consecuencia, por (5), (6), (7) y (8), se tiene

$$\begin{aligned} \|x_3 - x_0\| &\leq \|x_3 - x_2\| + \|x_2 - x_0\| \leq b\|x_2 - x_1\| + \|x_2 - x_0\| \\ &\leq (ba + a + 1)\|x_1 - x_0\| \leq (ba + a + 1)\eta < R. \end{aligned}$$

Por tanto, $x_3 \in B(x_0, R)$.

Probaremos, por inducción sobre n , las siguientes relaciones para $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} (i_n): \quad &\exists L_n^{-1} = [y_n, x_n; F]^{-1} \quad \text{tal que} \quad \|L_n^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R)}. \\ (ii_n): \quad &\|x_{n+1} - x_n\| \leq b\|x_n - x_{n-1}\| \leq \dots \leq b^{n-1}\|x_2 - x_1\| \leq \eta. \end{aligned}$$

Suponiendo que los operadores lineales L_j son inversibles y $x_{j+1} \in B(x_0, R) \subseteq \Omega$ para todo $j = 1, \dots, n-1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|I - L_0^{-1}L_n\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|L_0 - L_n\| \leq \beta\omega(\|y_n - y_0\|, \|x_n - x_0\|) \\ &\leq \beta\omega(\|y_n - x_0\| + \|x_0 - y_0\|, \|x_n - x_0\|) \leq \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R) < 1, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\|L_n^{-1}\| \leq \frac{\beta}{1 - \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R)}.$$

De (3) y de la definición de diferencia dividida (2), podemos escribir

$$F(x_n) = F(x_{n-1}) - [x_{n-1}, x_n; F](x_{n-1} - x_n) = (L_{n-1} - [x_{n-1}, x_n; F])(x_{n-1} - x_n).$$

Tomando normas en la igualdad anterior, por **(IV)** se tiene

$$\begin{aligned} \|F(x_n)\| &\leq \|[x_{n-1}, x_n; F] - L_{n-1}\| \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \omega((1-\lambda)\|x_{n-1} - x_{n-2}\|, \|x_n - x_{n-1}\|) \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \omega((1-\lambda)\eta, \eta) \|x_n - x_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \|L_n^{-1}\| \|F(x_n)\| \leq \frac{\beta\omega((1-\lambda)\eta, \eta)}{1 - \beta\omega(R + (1-\lambda)\alpha, R)} \|x_n - x_{n-1}\| \\ &= b \|x_n - x_{n-1}\| \leq b^{n-1} \|x_2 - x_1\| < \eta. \end{aligned}$$

Por tanto, de (5) y (ii), se sigue

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_0\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq [b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1] \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \left[\frac{1-b^n}{1-b} a + 1 \right] \|x_1 - x_0\| \\ &< \left[\frac{a}{1-b} + 1 \right] \eta = R. \end{aligned}$$

Luego, $x_{n+1} \in B(x_0, R) \subseteq \Omega$ y la inducción está completa.

En segundo lugar probaremos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Para $m \geq 1$ y $n \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + \|x_{n+m-1} - x_{n+m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq [b^{m-1} + b^{m-2} + \dots + 1] \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1-b^m}{1-b} \|x_{n+1} - x_n\| \\ &< \frac{1}{1-b} b^{n-1} \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y converge a $x^* \in \overline{B(x_0, R)}$.

Por último, veamos que x^* es una raíz de F . Como

$$\|F(x_n)\| \leq \omega((1-\lambda)\eta, \eta) \|x_n - x_{n-1}\|,$$

y $\|x_n - x_{n-1}\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene $F(x^*) = 0$.

Para probar la unicidad, suponemos que existe otra solución $y^* \in \overline{B(x_0, R)}$ y consideramos el operador $A = [y^*, x^*; H]$. Como $A(y^* - x^*) = F(y^*) - F(x^*)$, si el operador A es inversible, entonces $x^* = y^*$. Pero,

$$\begin{aligned} \|L_0^{-1}A - I\| &\leq \|L_0^{-1}\| \|A - L_0\| \leq \|L_0^{-1}\| \| [y^*, x^*; H] - [y_0, x_0; H] \| \\ &\leq \beta\omega (\|y^* - y_0\|, \|x^* - x_0\|) \leq \beta\omega (\|y^* - x_0\| + \|x_0 - y_0\|, \|x^* - x_0\|) \\ &\leq \beta\omega (R + (1 - \lambda)\alpha, R) < 1 \end{aligned}$$

y por tanto, existe el operador A^{-1} . \square

3. EJEMPLO NUMÉRICO

Ahora, aplicamos el resultado de convergencia semilocal obtenido al siguiente sistema:

$$(9) \quad \begin{cases} x^2 - y + 1 + \frac{1}{9}|x - 1| = 0, \\ y^2 + x - 7 + \frac{1}{9}|y| = 0. \end{cases}$$

Sea el operador $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F = (F_1, F_2)$. Para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tomamos $F_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 + 1 + \frac{1}{9}|x_1 - 1|$, $F_2(x_1, x_2) = x_2^2 + x_1 - 7 + \frac{1}{9}|x_2|$.

Asimismo, consideramos la norma $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} |x_i|$ en \mathbb{R}^2 , y la correspondiente norma matricial para $A \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 |a_{ij}|.$$

Por otra parte, para $v, w \in \mathbb{R}^2$, tomamos $[v, w; F] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ como

$$[v, w; F]_{i1} = \frac{F_i(v_1, w_2) - F_i(w_1, w_2)}{v_1 - w_1}, \quad [v, w; F]_{i2} = \frac{F_i(v_1, v_2) - F_i(v_1, w_2)}{v_2 - w_2}, \quad i = 1, 2.$$

Por tanto

$$[v, w; F] = \begin{pmatrix} \frac{v_1^2 - w_1^2}{v_1 - w_1} & -1 \\ 1 & \frac{v_2^2 - w_2^2}{v_2 - w_2} \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \frac{|v_1 - 1| - |w_1 - 1|}{v_1 - w_1} & 0 \\ 0 & \frac{|v_2| - |w_2|}{v_2 - w_2} \end{pmatrix}$$

y

$$\|[x, y; F] - [v, w; F]\| \leq \|x - v\| + \|y - w\| + \frac{2}{9}.$$

A la vista de esta desigualdad y de **(IV)**, consideramos la función

$$\omega(u_1, u_2) = u_1 + u_2 + \frac{2}{9}.$$

En primer lugar, aplicamos el método de la Secante, tomando $(\lambda = 0)$ en (3) para aproximar la solución de $F(x) = 0$.

Elegimos $z_{-1} = (0.9, 1.1)$ y $z_0 = (1, 1)$; después de tres iteraciones obtenemos

$$z_2 = (1.06867, 2.18207) \quad \text{y} \quad z_3 = (1.14038, 2.34476).$$

Entonces, considerando $x_{-1} = z_2$ y $x_0 = z_3$, resulta:

$$\alpha = 0.162691, \quad \beta = 0.479385, \quad \eta = 0.0199155, \quad a = 0.240801.$$

En este caso, la ecuación (5) tiene como solución $R = 0.0256167$; además,

$$\beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R) = 0.209082 < 1$$

y $b(R) = 0.158834 < 1$. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema 2.1, lo cual nos asegura la existencia de una única solución de la ecuación $F(x) = 0$ en $\overline{B(x_0, R)}$.

En segundo lugar, tomando $\lambda = 0.99$ en (3), se cumplen las condiciones de convergencia un paso antes, considerando $x_{-1} = z_1$ y $x_0 = z_2$:

$$z_1 = (1.55676, 3.05109), \quad z_2 = (1.22744, 2.42526),$$

ya que,

$$\alpha = 0.625827, \quad \beta = 0.433589, \quad \eta = 0.066004, \quad a = 0.184859,$$

$$R = 0.0803703, \quad \beta\omega(R + (1 - \lambda)\alpha, R) = 0.168762 < 1, \quad b(R) = 0.150689 < 1.$$

Finalmente, obtenemos la solución aproximada x^* del sistema (9):

$$x^* = (1.15936, 2.36182).$$

En la Tabla 1 se muestran las acotaciones $\|x^* - x_n\|$ para las iteraciones x_n generadas por los métodos (3) para distintos valores de λ . Como se puede observar, cuanto mayor es λ , mayor es la velocidad de convergencia de los procesos (3).

TABLA 1. Estimaciones de los errores para diferentes valores de λ en (3)

| n | $\lambda = 0$ | $\lambda = 0.25$ | $\lambda = 0.5$ | $\lambda = 0.75$ | $\lambda = 0.99$ |
|-----|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1 | 6.04841×10^{-1} | 6.25523×10^{-1} | 6.46627×10^{-1} | 6.68166×10^{-1} | 6.89267×10^{-1} |
| 2 | 1.79753×10^{-1} | 1.08581×10^{-1} | 4.51011×10^{-2} | 3.66444×10^{-2} | 6.80791×10^{-2} |
| 3 | 1.8976×10^{-2} | 7.86512×10^{-3} | 2.47721×10^{-3} | 1.80847×10^{-3} | 2.07502×10^{-3} |
| 4 | 9.39474×10^{-4} | 1.47586×10^{-4} | 1.12474×10^{-5} | 7.20012×10^{-6} | 2.18935×10^{-6} |
| 5 | 7.42629×10^{-6} | 3.56366×10^{-7} | 2.46324×10^{-9} | 1.24707×10^{-9} | 1.89109×10^{-11} |
| 6 | 2.64814×10^{-9} | 1.53042×10^{-11} | 2.88658×10^{-15} | 8.88178×10^{-16} | 0.0 |

REFERENCIAS

- [1] I. K. Argyros, On the secant method, *Publ. Math. Debrecen* **43** (1993), 223–238.
- [2] J. E. Dennis, Toward a unified convergence theory for Newton-Like methods, en *Nonlinear Functional Anal. and Appl.* (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1970), Academic Press, Nueva York (1971), 425–472.
- [3] M. A. Hernández y M. J. Rubio, A new type of recurrence relations for the secant method, *Int. J. Comput. Math.* **2** (1999), 477–490.
- [4] L. V. Kantorovich y G. P. Akilov, *Funcional analysis*, Pergamon Press, Nueva York, 1982.
- [5] F. A. Potra y V. Ptak, *Nondiscrete induction and iterative processes*, Pitman Publ., Nueva York, 1984.
- [6] W. C. Rheinboldt, A unified convergence theory for a class of iterative processes, *SIAM J. Numer. Anal.* **5** (1968), 42–63.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: mahernan@dmc.unirioja.es, mjesus.rubio@dmc.unirioja.es

FÓRMULA FRACTAL DE LA ENERGÍA DE UNA SEÑAL MUESTREADA

M. ANTONIA NAVASCUÉS Y M. VICTORIA SEBASTIÁN

En memoria del profesor J. J. Guadalupe, Chicho

ABSTRACT. Fractal interpolation functions provide new methods for approximating experimental data. The main difference with the classical procedures is the fractal character of the curves used to fit the points. In the present paper, an affine fractal interpolation technique is applied to find an explicit formula to obtain the energy of a real periodic evenly sampled signal. Under some hypothesis about the original function, an error bound is given.

1. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN FRACTAL

Las funciones de interpolación fractal son de creación reciente (1987) y constituyen una herramienta útil en la aproximación de datos experimentales. Estas funciones pueden computarse de manera rápida y poseen propiedades geométricas que permiten representaciones gráficas adecuadas de fenómenos complejos y un cálculo sencillo de la dimensión fractal del gráfico de las mismas. En el caso particular de las funciones de interpolación fractal polinómica, el método puede considerarse una generalización de los splines de este tipo. La interpolación polinómica supone que la señal es demasiado «lisa» y no recoge la estructura fractal de la misma. Si el muestreo de la señal no es muy refinado, la interpolación por splines realiza sobre ésta un suavizado o filtro de paso bajo, que omite las frecuencias altas.

Las funciones de interpolación fractal pueden integrarse utilizando la ecuación funcional que las define. En algunos casos, este tipo de curvas poseen una dimensión fractal no entera, es decir, se trata de conjuntos fractales en sentido estricto y, además, son funciones no derivables en ningún punto.

En el presente trabajo se utilizan estas funciones para interpolar un conjunto de puntos correspondientes a una señal muestreada y calcular la energía de ésta, en el caso de que haya periodicidad.

1.1. Sistemas de funciones iteradas (SFI). Sea K un espacio métrico completo respecto de la distancia $d(x, y) \forall x, y \in K$. Sea \mathcal{H} el conjunto de todos los subconjuntos de K compactos no vacíos. \mathcal{H} es un espacio métrico completo con la

2000 *Mathematics Subject Classification.* 37M10, 58C05.

Key words and phrases. Affine fractal interpolation, signal energy, interpolation error bounds.

distancia de Hausdorff (ver [1])

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} d(x, y) \right\}$$

definida para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$.

Sean $w_n : K \rightarrow K$, $n = 1, 2, \dots, N$, un conjunto de transformaciones continuas. Entonces la $(N + 1)$ -tupla $\{K, w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ se denomina sistema de funciones iteradas (SFI) (ver [3]). Se define la transformación $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mediante la igualdad

$$W(A) = \bigcup_n w_n(A) \quad \text{para } A \in \mathcal{H}.$$

Cualquier conjunto $G \in \mathcal{H}$ tal que $W(G) = G$ se dice atractor del SFI (es decir, el atractor es un punto fijo de W). Si K es un compacto, entonces cualquier SFI admite al menos un atractor.

Si para algún $0 \leq s < 1$ y todo $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ se verifica la desigualdad

$$d(w_n(x), w_n(y)) \leq sd(x, y) \quad \forall x, y \in K,$$

entonces el SFI se dice hiperbólico. En este caso W es una aplicación contractiva respecto la métrica de Hausdorff, es decir,

$$h(W(A), W(B)) \leq sh(A, B) \quad \forall A, B \in \mathcal{H}.$$

Como consecuencia del teorema de la aplicación contractiva, W admite un único punto fijo, es decir, existe un único atractor G que verifica

$$G = \lim_{m \rightarrow \infty} W^m(S) \quad \forall S \in \mathcal{H},$$

donde W^m denota la composición de W consigo misma m veces.

1.2. Interpolación fractal afín. Sean $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ un conjunto de números reales, se denota por $I = [t_0, t_N] \subset \mathbb{R}$ el intervalo cerrado que los contiene. Sea dado el conjunto $\{(t_n, x_n) \in I \times \mathbb{R} : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$, llamado conjunto de puntos de interpolación. Para cada subintervalo $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ se define la aplicación $L_n : I \rightarrow I_n$, $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, de modo que

$$(1.1) \quad L_n(t_0) = t_{n-1}, \quad L_n(t_N) = t_n$$

y L_n sea un homeomorfismo contractivo:

$$(1.2) \quad |L_n(c_1) - L_n(c_2)| \leq l|c_1 - c_2| \quad \forall c_1, c_2 \in I$$

para algún $0 \leq l < 1$.

Sea $-1 < \alpha_n < 1$, $n = 1, 2, \dots, N$, y $F = I \times \mathbb{R}$. Se consideran N aplicaciones continuas, $F_n : F \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo:

$$(1.3) \quad F_n(t_0, x_0) = x_{n-1}, \quad F_n(t_N, x_N) = x_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$(1.4) \quad |F_n(t, x) - F_n(t, y)| \leq \alpha_n|x - y|, \quad t \in I, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Tomando $w_n(t, x) = (L_n(t), F_n(t, x))$, $\forall n = 1, 2, \dots, N$, se puede enunciar el siguiente resultado:

Teorema 1.1 (ver [1]). *El SFI $\{F, w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ descrito anteriormente admite un único atractor G . Este G es el gráfico de una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica $f(t_n) = x_n$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$.*

La función anterior recibe el nombre de función de interpolación fractal (FIF) asociada con $\{(L_n(t), F_n(t, x))\}_{n=1}^N$. Y, además, es la única función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la ecuación funcional

$$f(L_n(t)) = F_n(t, f(t)), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad t \in I,$$

o, lo que es lo mismo,

$$(1.5) \quad f(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad t \in I_n = [t_{n-1}, t_n].$$

Se define el conjunto \mathcal{F} de funciones continuas $f : [t_0, t_N] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(t_0) = x_0$; $f(t_N) = x_N$. En \mathcal{F} se define la métrica d asociada a la norma del supremo:

$$d(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [t_0, t_N]\}, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}.$$

Entonces (\mathcal{F}, d) es un espacio métrico completo.

Dado el SFI anterior, se define la aplicación $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ mediante

$$(1.6) \quad (Tf)(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)), \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Utilizando las condiciones (1.1)–(1.4), se comprueba que $(Tf)(t)$ es continua en el intervalo $[t_{n-1}, t_n]$ para $n = 1, 2, \dots, N$ y además lo es en t_1, t_2, \dots, t_{N-1} . En cada punto, $(Tf)(t_n) = x_n$. Además T es una aplicación contractiva en el espacio métrico (\mathcal{F}, d) :

$$d(Tf, Tg) \leq |\alpha|_\infty d(f, g),$$

donde $|\alpha|_\infty = \max\{|\alpha_n| : n = 1, 2, \dots, N\}$. Suponiendo que $|\alpha|_\infty < 1$, el teorema de la aplicación contractiva implica que T posee un único punto fijo en \mathcal{F} , es decir, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $(Tf)(t) = f(t) \forall t \in [t_0, t_N]$. Además, f pasa a través de los puntos de interpolación. Esta función f es la FIF asociada a w_n .

Las funciones de interpolación fractal más estudiadas hasta ahora han sido del tipo

$$(1.7) \quad L_n(t) = a_n t + b_n,$$

$$(1.8) \quad F_n(t, x) = \alpha_n x + q_n(t),$$

donde $q_n(t)$ es una aplicación afín, llamadas FIF afines (ver [1, 4]).

Para que se verifiquen las hipótesis del teorema anterior es necesario que $L_n(t_0) = t_{n-1}$, $L_n(t_N) = t_n$ (según (1.1)), lo cual implica que

$$a_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{t_N - t_0}, \quad b_n = \frac{t_N t_{n-1} - t_0 t_n}{t_N - t_0}.$$

Se trabajará con puntos equidistantes y además, sin pérdida de generalidad, se considerará el intervalo de interpolación en $t_0 = 0$, por lo que, si se denota $t_n - t_{n-1} = h$, entonces $t_N - t_0 = Nh$, y por lo tanto

$$(1.9) \quad a_n = \frac{1}{N} \quad \text{y} \quad b_n = t_{n-1}.$$

Imponiendo a F_n la condición (1.3) se tiene que

$$(1.10) \quad q_n(t_0) = x_{n-1} - \alpha_n x_0,$$

$$(1.11) \quad q_n(t_N) = x_n - \alpha_n x_N.$$

Si $q_n(t) = q_{1n}t + q_{0n}$, por (1.10)–(1.11) se obtienen los coeficientes de $q_n(t)$ en función del parámetro libre α_n , llamado factor de escala vertical. Como se ha considerado $t_0 = 0$, las expresiones se reducen a

$$(1.12) \quad q_{1n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_N} - \alpha_n \frac{x_N - x_0}{t_N},$$

$$(1.13) \quad q_{0n} = x_{n-1} - \alpha_n x_0.$$

Si $\alpha_n = 0 \forall n = 1, 2, \dots, N$, entonces $F_n(t, x) = q_n(t)$ en (1.8), y por lo tanto $f(t) = q_n \circ L_n^{-1}(t) \forall t \in I_n$ (con la notación de (1.5)). Entonces $f(t)$ es lineal a trozos y continua.

2. CÁLCULO DE LA ENERGÍA DE UNA SEÑAL PERIÓDICA MEDIANTE INTERPOLACIÓN FRACTAL AFÍN

Se pretende calcular la energía de una señal, de la cual en la práctica sólo se tienen datos muestreados. Se propone la técnica de reconstrucción y ajuste de dicha señal mediante las funciones de interpolación fractal expuestas en el apartado anterior. A partir de aquí se calcula la energía de la señal mediante fórmulas explícitas que vienen dadas en términos de los coeficientes del sistema de funciones iteradas que definen la función de interpolación.

2.1. Momentos temporales y espectrales de una señal. Dada una señal $x(t)$ definida en el intervalo $I = [0, T]$, se definen los momentos temporales como

$$M_n = \int_0^T t^n f(t) dt.$$

Se puede expresar una señal en una cierta época como una función del tiempo $x(t)$ y por medio de su transformada de Fourier $\hat{x}(w)$ describirla en función de la frecuencia. Multiplicando $\hat{x}(w)$ por su conjugado se obtiene el espectro de potencia $S(w) = \hat{x}(w)\hat{x}^*(w)$ de la señal.

Se define el momento espectral de orden n como

$$(2.1) \quad m_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w^n S(w) dw.$$

La descripción de las frecuencias completas obtenidas por medio de la transformada de Fourier es simétrica con respecto a la frecuencia 0. Por ser una señal real se verifica que $\hat{x}(-w) = \hat{x}^*(w)$, entonces $S(-w) = S(w)$ y $w^n S(w)$ es una función impar si n lo es. Como consecuencia, todos los momentos espectrales impares son 0.

En este caso nos centraremos en el estudio del momento de orden 0:

$$(2.2) \quad m_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(w) dw.$$

En la práctica se trabaja con señales de duración finita. Para determinados cálculos de tipo espectral, es necesaria la condición de periodicidad. Se denotará $L^2(T)$ el espacio de funciones periódicas de periodo T de cuadrado integrable en $I = [0, T]$. Se define la norma de $f \in L^2(T)$ como

$$(2.3) \quad \|f\|_{L^2}^2 = (f, f)_{L^2} = \frac{1}{T} \int_I f(t) f^*(t) dt.$$

La expresión del momento de orden 0 en el dominio temporal se basa en la igualdad de la energía, es decir, que la potencia total en el dominio de la frecuencia es idéntica a la potencia media en el dominio del tiempo. Se tiene, por la fórmula de Plancherel (Parseval) para una señal de este tipo (ver [5]) la siguiente igualdad:

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(w)|^2 dw = \frac{1}{T} \int_I |x(t)|^2 dt.$$

Considerando que $S(w) = \hat{x}(w)\hat{x}^*(w) = |\hat{x}(w)|^2$ y que x es una señal real, puede expresarse la energía de la misma como

$$(2.5) \quad E = m_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(w) dw = \frac{1}{T} \int_I x^2(t) dt.$$

2.2. Cuadratura de la energía en el dominio temporal. Se pretende calcular la energía de la señal en el dominio del tiempo. Como los datos que se tienen son los de una señal muestreada, es necesario reconstruirla para poder integrar el cuadrado de ésta. Para ello se utiliza el método de interpolación fractal propuesto anteriormente.

2.2.1. Momentos temporales. Se comienza hallando los momentos temporales en función de los coeficientes del sistema de funciones iteradas que definen la función de interpolación fractal afín, ya que se expresará la energía de la señal en función de dichos momentos.

Para calcular M_0 se utiliza la función de interpolación fractal afín asociada a un SFI del tipo (1.7)–(1.8) verificando (1.9), (1.12) y (1.13). En el siguiente desarrollo se tiene en cuenta que la FIF es el punto fijo de la aplicación $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ definida en (1.6):

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{t_0}^{t_N} f(t) dt = \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} (Tf)(t) dt = \sum_{n=1}^N \int_{t_0}^{t_N} [\alpha_n f(t) + q_n(t)] d(a_n t + b_n) \\ &= \sum_{n=1}^N a_n \alpha_n \int_0^{t_N} f(t) dt + \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{t_N} q_n(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^N a_n \alpha_n M_0 + \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{t_N} q_n(t) dt, \end{aligned}$$

donde se ha realizado el cambio de variable $t = L_n(\tilde{t})$ y se considera que $t_0 = 0$. Despejando de aquí el momento M_0 se obtiene

$$(2.6) \quad M_0 = \frac{\sum_{n=1}^N a_n \int_0^{t_N} q_n(t) dt}{1 - \sum_{n=1}^N a_n \alpha_n}.$$

Considerando que la partición del intervalo $[0, t_N]$ se hace de modo equidistante, entonces $a_n = 1/N$. Llamando $\alpha = \sum_{n=1}^N \alpha_n$ y $\beta = \sum_{n=1}^N \int_0^{t_N} q_n(t) dt$ se obtiene la expresión

$$(2.7) \quad M_0 = \frac{\beta}{N - \alpha}.$$

Procediendo de manera análoga se puede calcular el momento M_1 :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} M_1 &= \int_{t_0}^{t_N} t f(t) dt = \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} t (Tf)(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^{t_N} (a_n t + b_n) [\alpha_n f(t) + q_n(t)] d(a_n t + b_n) \\ &= \sum_{n=1}^N a_n^2 \alpha_n \int_0^{t_N} t f(t) dt + \sum_{n=1}^N a_n^2 \int_0^{t_N} t q_n(t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^N a_n b_n \alpha_n \int_0^{t_N} f(t) dt + \sum_{n=1}^N a_n b_n \int_0^{t_N} q_n(t) dt. \end{aligned}$$

Sustituyendo $a_n = 1/N$ y llamando $\gamma = \sum_{n=1}^N \alpha_n b_n$ se obtiene la expresión

$$M_1 = \frac{1}{N^2} \alpha M_1 + \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \int_0^{t_N} t q_n(t) dt + \frac{1}{N} \gamma M_0 + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N b_n \int_0^{t_N} q_n(t) dt.$$

Llamando $\lambda_1 = \sum_{n=1}^N \int_0^{t_N} t q_n(t) dt$, $\beta_1 = \sum_{n=1}^N b_n \int_0^{t_N} q_n(t) dt$ y sustituyendo M_0 por el valor calculado en (2.7), el momento M_1 se puede expresar del siguiente modo:

$$(2.9) \quad M_1 = \frac{1}{N^2 - \alpha} \left[\lambda_1 + N \gamma \frac{\beta}{N - \alpha} + N \beta_1 \right].$$

2.2.2. Fórmula de la energía. Para obtener el momento m_0 se aplica el método seguido en el cálculo de los momentos temporales. Se considera la función $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ definida por:

$$(Tf)(t) = \alpha_n f(L_n^{-1}(t)) + q_n(L_n^{-1}(t)), \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Según se ha expuesto en los apartados anteriores, T posee un único punto fijo $f \in \mathcal{F}$ de modo que $(Tf)(t) = f(t) \forall t \in [0, t_N]$. Para la obtención de $m_0 = \frac{1}{t_N} \int_0^{t_N} (f(t))^2 dt$ se considera la integral $I_0 = \int_0^{t_N} (f(t))^2 dt$, de modo que

$$I_0 = \int_0^{t_N} (f(t))(f(t)) dt = \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} (Tf(t))(Tf(t)) dt$$

$$= \sum_{n=1}^N \int_0^{t_N} [\alpha_n f(t) + q_n(t)][\alpha_n f(t) + q_n(t)] d(a_n t + b_n).$$

Se considera a partir de ahora $a_n = 1/N$. Así,

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_0^{t_N} [\alpha_n f(t) + q_n(t)][\alpha_n f(t) + q_n(t)] dt \\ &= \frac{1}{N} \left[\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \right) I_0 + 2 \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \int_0^{t_N} f(t) q_n(t) dt \right) + N J_0 \right]. \end{aligned}$$

El tercer sumando puede expresarse como el momento de orden 0 de otra función

$$J_0 = \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{t_N} (q_n(\tilde{t}))^2 d\tilde{t} = \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} (q_n \circ L_n^{-1}(t))^2 dt$$

(con $t = L_n(\tilde{t})$); por tanto $J_0 = \int_0^{t_N} (Q(t))^2 dt$ siendo $Q(t) = q_n \circ L_n^{-1}(t)$ si $t \in I_n$. Si $\alpha_n = 0 \forall n = 1, 2, \dots, N$, J_0 es el momento de la función lineal a trozos que interpola los datos.

Sustituyendo $q_n(t) = q_{1n}t + q_{0n}$ se puede expresar I_0 en términos de los momentos temporales. Se calcula primero el sumando

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_0^{t_N} f(t) q_n(t) dt &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_0^{t_N} [q_{1n}t f(t) + q_{0n}f(t)] dt \\ &= M_1 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n q_{1n} \right) + M_0 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n q_{0n} \right). \end{aligned}$$

Denotando por $\theta = \sum_{n=1}^N \alpha_n^2$ se tiene, pues,

$$I_0 = \frac{1}{N} \theta I_0 + \frac{2}{N} \left[M_1 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n q_{1n} \right) + M_0 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n q_{0n} \right) \right] + J_0;$$

despejando de aquí I_0 ,

$$(2.10) \quad I_0 = \left(\frac{1}{N - \theta} \right) \left[2M_1 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n q_{1n} \right) + 2M_0 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n q_{0n} \right) + N J_0 \right]$$

por lo que el momento m_0 resulta ser

$$(2.11) \quad E = m_0 = \frac{1}{Nh(N - \theta)} \left[2M_1 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n q_{1n} \right) + 2M_0 \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n q_{0n} \right) + N J_0 \right].$$

3. ACOTACIÓN DE LOS ERRORES DE APROXIMACIÓN

Se pretende dar una aproximación del error cometido al calcular la energía de la señal usando funciones de interpolación fractal. En primer lugar se acotará el error cometido al sustituir la señal $x(t)$ por la FIF $f_\alpha(t)$ que tiene como factores de escala vertical $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Posteriormente se acotará el error cometido al integrar la FIF para hallar el momento espectral de orden 0 o energía de la señal.

Se considera la aplicación

$$T : J \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

$$(\alpha, f) \mapsto T_\alpha f$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; J el intervalo $J = [0, r] \times [0, r] \times \dots \times [0, r]$, $0 \leq r < 1$, r fijo; $[t_0, t_N] = I$; \mathcal{F} espacio de funciones continuas en I tales que $f(t_0) = x_0$ y $f(t_N) = x_N$; y, finalmente,

$$(3.1) \quad T_\alpha f(t) = F_n^{\alpha_n}(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)) = \alpha_n f \circ L_n^{-1}(t) + q_n \circ L_n^{-1}(t).$$

El superíndice α_n representa la dependencia de F_n respecto el factor de escala vertical. El polinomio $q_n = q_{n1}t + q_{n0}$ y sus coeficientes se definen en (1.10) y (1.11), y $t \in [t_{n-1}, t_n] = I_n$. Se sabe que el punto fijo de T_α es la FIF (Teorema de Barnsley).

Proposición 3.1. *Dadas $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, se verifica que*

$$|T_\alpha f_1(t) - T_\alpha f_2(t)| \leq |\alpha|_\infty \|f_1 - f_2\|_\infty$$

siendo $|\alpha|_\infty = \max_n \{|\alpha_n|\}$, y $t \in I$.

Demostración.

$$\begin{aligned} |T_\alpha f_1(t) - T_\alpha f_2(t)| &\stackrel{t \in I_n}{=} |\alpha_n f_1 \circ L_n^{-1}(t) + q_n \circ L_n^{-1}(t) - \alpha_n f_2 \circ L_n^{-1}(t) - q_n \circ L_n^{-1}(t)| \\ &= |\alpha_n| |f_1 \circ L_n^{-1}(t) - f_2 \circ L_n^{-1}(t)| \\ &\leq \max_n \{|\alpha_n|\} |f_1 \circ L_n^{-1}(t) - f_2 \circ L_n^{-1}(t)| \leq |\alpha|_\infty \|f_1 - f_2\|_\infty \end{aligned}$$

de modo que

$$(3.2) \quad \|T_\alpha f_1 - T_\alpha f_2\|_\infty \leq |\alpha|_\infty \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

□

Proposición 3.2. *Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ y $f \in \mathcal{F}$. Entonces*

$$\|T_\alpha f - T_\beta f\|_\infty \leq |\alpha - \beta|_\infty (\|f\|_\infty + \max\{|x_0|, |x_N|\}).$$

Demostración. Se pretende acotar la diferencia $|T_\alpha f(t) - T_\beta f(t)|$. Podemos escribir (se expresa mediante $q_n^{\alpha_n}$ la dependencia de q_n respecto a α_n)

$$\begin{aligned} |T_\alpha f(t) - T_\beta f(t)| &\stackrel{t \in I_n}{=} |\alpha_n f \circ L_n^{-1}(t) + q_n^{\alpha_n} \circ L_n^{-1}(t) - \beta_n f \circ L_n^{-1}(t) - q_n^{\beta_n} \circ L_n^{-1}(t)| \\ &\leq |\alpha_n f \circ L_n^{-1}(t) - \beta_n f \circ L_n^{-1}(t)| + |q_n^{\alpha_n} \circ L_n^{-1}(t) - q_n^{\beta_n} \circ L_n^{-1}(t)|. \end{aligned}$$

{3.1}
{3.2}

Acotando por separado cada sumando, para {3.1} se tiene

$$|\alpha_n f \circ L_n^{-1}(t) - \beta_n f \circ L_n^{-1}(t)| \leq |\alpha_n - \beta_n| |f \circ L_n^{-1}(t)| \leq |\alpha - \beta|_\infty \|f\|_\infty.$$

Para acotar {3.2} se recuerda primero que $q_n(t) = q_{n1}t + q_{n0}$ con

$$q_{n1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_N} - \alpha_n \frac{x_N - x_0}{t_N},$$

$$q_{n0} = x_{n-1} - \alpha_n x_0.$$

Así,

$$|q_n^{\alpha_n} \circ L_n^{-1}(t) - q_n^{\beta_n} \circ L_n^{-1}(t)| = \left| (\beta_n - \alpha_n) \frac{x_N - x_0}{t_N} L_n^{-1}(t) + (\beta_n - \alpha_n) x_0 \right|.$$

Como $L_n(t) = a_n t + b_n$, entonces

$$L_n^{-1}(t) = \frac{t - b_n}{a_n} = N(t - t_{n-1})$$

y podemos continuar con la igualdad anterior:

$$|q_n^{\alpha_n} \circ L_n^{-1}(t) - q_n^{\beta_n} \circ L_n^{-1}(t)| = |\beta_n - \alpha_n| \left| \frac{x_N - x_0}{t_N} N(t - t_{n-1}) + x_0 \right|$$

Considerando $t_N = Nh$ con el fin de simplificar los cálculos, queda

$$\begin{aligned} &= |\beta_n - \alpha_n| \left| \frac{x_N - x_0}{h} (t - t_{n-1}) + x_0 \right| \\ &= |\beta_n - \alpha_n| \left| \frac{x_N(t - t_{n-1}) + x_0(h - (t - t_{n-1}))}{h} \right| \\ &= |\beta_n - \alpha_n| \left| \frac{x_N(t - t_{n-1}) + x_0(t_n - t)}{h} \right| \leq |\alpha - \beta|_\infty \max\{|x_0|, |x_N|\}. \end{aligned}$$

De este modo, aplicando las acotaciones de {3.1} y {3.2} se puede concluir que

$$(3.3) \quad |T_\alpha f(t) - T_\beta f(t)| \leq |\alpha - \beta|_\infty (\|f\|_\infty + \max\{|x_0|, |x_N|\}),$$

de donde se deduce el resultado. \square

Proposición 3.3. Dadas f_α y f_β dos FIF afines con factores de escala vertical $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, se cumple

$$\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq \frac{1}{1 - |\alpha|_\infty} |\alpha - \beta|_\infty (\|f_\beta\|_\infty + \max\{|x_0|, |x_N|\}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|f_\alpha - f_\beta\|_\infty &= \|T_\alpha f_\alpha - T_\alpha f_\beta + T_\alpha f_\beta - T_\beta f_\beta\|_\infty \\ &\leq \|T_\alpha f_\alpha - T_\alpha f_\beta\|_\infty + \|T_\alpha f_\beta - T_\beta f_\beta\|_\infty. \end{aligned}$$

Aplicando las proposiciones 3.1 y 3.2 se tiene

$$\|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq |\alpha|_\infty \|f_\alpha - f_\beta\|_\infty + |\alpha - \beta|_\infty (\|f_\beta\|_\infty + \max\{|x_0|, |x_N|\}),$$

de donde se deduce que

$$(3.4) \quad \|f_\alpha - f_\beta\|_\infty \leq \frac{1}{1 - |\alpha|_\infty} |\alpha - \beta|_\infty (\|f_\beta\|_\infty + \max\{|x_0|, |x_N|\}).$$

\square

Consecuencia. Haciendo $\beta = 0$ en la expresión anterior, tenemos

$$\|f_\alpha - f_0\|_\infty \leq \frac{1}{1 - |\alpha|_\infty} |\alpha|_\infty (\|f_0\|_\infty + \max\{|x_0|, |x_N|\}).$$

Aquí, f_0 es la función lineal a trozos en $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ que interpola los datos, $\|f_0\|_\infty = \max_n\{|x_n|\}$, de modo que

$$(3.5) \quad \|f_\alpha - f_0\|_\infty \leq \frac{2}{1 - |\alpha|_\infty} |\alpha|_\infty \max_n\{|x_n|\}.$$

Proposición 3.4 (Acotación del error de interpolación). *Sea $x(t)$ una señal real muestreada en intervalos de longitud constante $h = t_n - t_{n-1} \forall n = 1, 2, \dots, N$, y f_α la FIF que aproxima dicha señal, definida mediante la ecuación funcional (1.5) para un sistema de funciones iteradas de tipo afín. Si x es dos veces derivable y $|x''(\xi)| \leq C \forall \xi \in I$, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\|x - f_\alpha\|_\infty \leq \frac{C}{2} h^2 + \frac{2}{1 - |\alpha|_\infty} |\alpha|_\infty \max_n\{|x_n|\}.$$

Demostración. Se pretende acotar el error que se produce al sustituir la función «verdadera» por f_α función de interpolación fractal punto fijo de T_α . Para $t \in I$ se tiene que

$$(3.6) \quad |x(t) - f_\alpha(t)| \leq |x(t) - f_0(t)| + |f_0(t) - f_\alpha(t)|,$$

siendo f_0 la función lineal a trozos en los intervalos $[t_{n-1}, t_n]$, continua y pasando por los puntos de interpolación.

Se procede a acotar el primer sumando de la expresión (3.6) si $t \in I_n$. Si x es dos veces derivable, por el teorema de interpolación de Lagrange (ver [6]) existe $\xi \in I_n$ tal que, para $t \in I_n$, se tiene

$$x(t) = x(t_{n-1}) \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} + x(t_n) \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + \frac{x''(\xi)}{2} (t - t_{n-1})(t - t_n),$$

con lo que

$$x(t) = f_0(t) + \frac{x''(\xi)}{2} (t - t_{n-1})(t - t_n).$$

Si, además, la derivada segunda está acotada por C_n en I_n se tiene, para $t \in I_n$,

$$(3.7) \quad |x(t) - f_0(t)| \leq \frac{C_n}{2} |(t - t_{n-1})(t - t_n)| \leq \frac{C_n}{2} h^2.$$

El segundo sumando de (3.6) está acotado en (3.5). Aplicando conjuntamente las dos desigualdades se obtiene:

$$(3.8) \quad \|x - f_\alpha\|_\infty \leq \frac{C}{2} h^2 + \frac{2}{1 - |\alpha|_\infty} |\alpha|_\infty \max_n\{|x_n|\} = K,$$

siendo $C \geq 0$ tal que $|x''(\xi)| \leq C \forall \xi \in I$. □

Proposición 3.5 (Acotación del error de la cuadratura de la energía). *Sea*

$$m_{0_{\text{exac}}} = \frac{1}{T} \int_0^{t_N} (x(t))^2 dt$$

la energía correspondiente a una señal real $x(t)$ en el intervalo $I = [0, t_N]$, y

$$m_{0_{\text{aprox}}} = \frac{1}{T} \int_0^{t_N} (f_\alpha(t))^2 dt$$

la energía de la función de interpolación fractal afín correspondiente a la partición $0 < t_1 < \dots < t_N$. Entonces,

$$|E| = |m_{0_{\text{aprox}}} - m_{0_{\text{exact}}} | \leq K^2 + 2L_0K,$$

si x es dos veces derivable, $|x''(\xi)| \leq C \forall \xi \in I$, siendo $L_0 = \|x\|_\infty$ y K la constante definida en la proposición 3.4 en (3.8).

Demostración. Una vez acotada la diferencia entre la señal original y la FIF que la interpola se pretende dar una aproximación del error cometido al calcular la energía de la señal usando esta función de interpolación fractal.

Se denota $T = t_N - t_0 = t_N$ (ya que $t_0 = 0$). Así,

$$\begin{aligned} |E| &= |m_{0_{\text{aprox}}} - m_{0_{\text{exact}}} | = \frac{1}{T} \left| \int_0^{t_N} (f_\alpha(t))^2 dt - \int_0^{t_N} (x(t))^2 dt \right| \\ &= \frac{1}{T} \left| \int_0^{t_N} [(f_\alpha(t))^2 - (x(t))^2] dt \right| \\ &= \frac{1}{T} \left| \int_{t_0}^{t_N} [(f_\alpha(t))^2 - 2x(t)f_\alpha(t) + (x(t))^2 + 2x(t)f_\alpha(t) - 2(x(t))^2] dt \right| \\ &= \frac{1}{T} \left| \int_0^{t_N} (f_\alpha(t) - x(t))^2 dt + 2 \int_0^{t_N} x(t)(f_\alpha(t) - x(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^{t_N} |f_\alpha(t) - x(t)|^2 dt + \frac{2}{T} \int_0^{t_N} |x(t)| |f_\alpha(t) - x(t)| dt. \end{aligned}$$

Aplicando la acotación de la proposición anterior se obtiene el error en el cálculo de la energía de la señal:

$$(3.9) \quad |E| \leq \frac{1}{T} K^2 T + \frac{2}{T} L_0 K T = K^2 + 2L_0 K,$$

siendo L_0 y K las constantes descritas en el enunciado. □

REFERENCIAS

- [1] M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.
- [2] M. F. Barnsley y A. N. Harrington, The calculus of fractal interpolation functions, *J. Approx. Theory* **57** (1989), 14–34.
- [3] G. A. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry*, Springer-Verlag, Nueva York, 1990.
- [4] D. P. Hardin, B. Kessler y P. R. Massopust, Multiresolution analyses based on fractal functions, *J. Approx. Theory* **71** (1992), 104–120.
- [5] H. P. Hsu, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1987.
- [6] J. Stoer y R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, Nueva York, 1980.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, CENTRO POLITÉCNICO SUPERIOR, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, CALLE MARÍA DE LUNA 3, 50015 ZARAGOZA, SPAIN

Correo electrónico: manavas@posta.unizar.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS, CIUDAD UNIVERSITARIA s/n, 50009 ZARAGOZA, SPAIN

Correo electrónico: msebasti@posta.unizar.es

PERTURBACIONES DE SERIES DE FOURIER

MARIO PÉREZ Y FRANCISCO J. RUIZ

ABSTRACT. Let μ be a finite, positive measure on $[-1, 1]$, $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ the polynomials orthonormal with respect to μ and $\{S_n f\}_{n \in \mathbb{N}}$ the associated Fourier series for each function f . The range of p for which $S_n f$ converges to f for every $f \in L^p(\mu)$ has been determined only for particular measures. In this paper, we show how to obtain more general results by perturbing one of those measures.

Desde el año 1985, Chicho dirigía un grupo integrado por investigadores de las universidades de La Rioja y Zaragoza cuyo tema principal era el estudio de la convergencia de la serie de Fourier asociada a sistemas de polinomios ortogonales.

Desde aquel año, todos los jueves y viernes desde septiembre hasta junio, si no lo impedía alguna actividad académica en Logroño, nos reuníamos con él en el departamento de Matemáticas de Zaragoza para tratar ese problema.

Chicho ponía tanto entusiasmo en este trabajo que incluso un jueves, en que la noche anterior la había pasado en un hospital de Zaragoza porque le habían metido en la famosa «bañera» para destruirle unos cálculos renales, por la mañana temprano ya lo teníamos con nosotros y con litros y litros de agua hablando de nuestro tema matemático favorito.

En esta pequeña nota queremos honrar su memoria exponiendo algún resultado, pero sobre todo ideas que están sin publicar y que salieron de aquellas reuniones.

Esto lo haremos en el segundo párrafo. Aprovecharemos el primero para exponer el problema y, de paso, hacer un breve «survey» de las aportaciones del grupo en esta materia.

1. CONVERGENCIA EN NORMA DE LA SERIE DE FOURIER

Nos vamos a concentrar en el caso particular de una medida positiva y finita $d\mu$ soportada en el intervalo $[-1, 1]$, aunque mucho de lo dicho a continuación puede servir en soportes más generales e incluso en la circunferencia unidad.

Sea pues $d\mu$ una medida en $[-1, 1]$ y $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ el sistema de polinomios ortonormales que se obtienen aplicando el proceso de Gram-Schmidt al sistema linealmente independiente de las funciones $1, x, x^2, \dots$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C10, 47A55.

Key words and phrases. Fourier series, perturbation of operators, strong convergence, regular convergence, stable convergence.

La investigación de ambos autores está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI.

Dada una función $f \in L^1(d\mu)$, construimos su serie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n, \quad a_n = \int_{-1}^1 f P_n d\mu.$$

Esta serie infinita es, en principio, formal y de lo que se trata es de concretar con rigor cómo se parece a la función f , o dicho con más exactitud, en qué sentido converge la serie. A nosotros nos preocupa principalmente la convergencia en la norma de $L^p(d\mu)$, que recibe el nombre de convergencia fuerte.

A este respecto, el primer hecho importante y el único que comparten todas las medidas $d\mu$ es consecuencia de la teoría de espacios de Hilbert y es el siguiente:

Si $f \in L^2(d\mu)$ y denotamos

$$S_N f = \sum_{n=1}^N a_n P_n,$$

entonces $S_N f \rightarrow f$ en la norma de $L^2(d\mu)$.

Además $S_N f$ es la mejor aproximación polinómica a f en dicha norma, lo cual hace que la serie de Fourier tenga especial relevancia en teoría de aproximación.

¿Qué ocurre en $L^p(d\mu)$, cuando $p \neq 2$? Por lo que sabemos hasta la fecha, para resolver completamente el problema, es decir, dada una medida $d\mu$, conocer exactamente el rango de p 's para los que la serie de Fourier $S_N f$ converge a f en $L^p(d\mu)$, se necesita conocer estimaciones precisas para los polinomios que están muy lejos de conocerse en el caso de una medida $d\mu$ arbitraria. Por esto el problema sólo se ha abordado en casos particulares.

Gracias a trabajos de Máté, Nevai y Totik (ver [20]), se pueden obtener con cierta facilidad condiciones necesarias para que la serie de Fourier converja y como consecuencia no es difícil encontrar medidas para las que la serie de Fourier sólo converge para $p = 2$ (por ejemplo, la medida de Pollaczek, ver [29]).

Nos detenemos un momento para analizar someramente por qué las estimaciones de los polinomios resuelven el problema. Proviene de las siguientes consideraciones: S_N es un operador que viene dado por la integración contra un núcleo,

$$S_N f(x) = \int_{-1}^1 K_N(x, y) f(y) d\mu(y), \quad K_N(x, y) = \sum_{n=0}^N p_n(x) p_n(y),$$

y las relaciones de ortogonalidad permiten expresiones más manejables del núcleo como la fórmula de Christoffel-Darboux (ver [28]),

$$K_N(x, y) = \gamma_n \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}.$$

Aunque exactamente esta fórmula no sirve para nuestro problema (hay que recurrir a alguna un poco más intrincada debida a Pollard [25]), sí que nos vale para indicar al lector que el operador suma parcial tiene gran relación con el operador transformada de Hilbert,

$$Hf(x) = \int_{-1}^1 \frac{f(y)}{x - y} dy$$

y que la acotación de S_N en $L^p(d\mu)$ (si ésta es uniforme en N , por resultados básicos de análisis funcional, es equivalente a la convergencia de $S_N f$) se puede reducir a la acotación de H en espacios L^p con pesos en los que intervienen los polinomios.

Que H cumpla estas acotaciones es cuestión de tamaño; de que los pesos satisfagan unas adecuadas relaciones (ser de la clase A_p ; véase el trabajo germinal de Muckenhoupt [24] o mejor, el libro de García-Cuerva y Rubio de Francia [6] para detalles) y esto se logra en último término si el tamaño de los polinomios y coeficientes asociados a ellos están controlados.

Esta idea es la única que se ha explotado y así, empezando por Pollard [25, 26, 27] que resolvió el problema para polinomios de Jacobi, se incorporaron a la solución completa otros polinomios: Jacobi (en otro rango, ver [21]), Hermite y Laguerre (ver [22, 23]) o Jacobi generalizados (ver [1]); todos ellos, como se ve, polinomios clásicos o cercanos, de los que se sabe mucho acerca de su comportamiento en cuanto a tamaño.

Por esta vía, nuestro grupo ha ido obteniendo resultados que extienden los anteriores en varios sentidos.

Primero, ha tratado la convergencia en $L^p(d\mu)$ para más clases de polinomios, como polinomios de la clase \mathcal{H} (ver [13]), medidas clásicas modificadas por deltas de Dirac ([12, 10]) e incluso para otros sistemas de funciones especiales como sistemas de Bessel y Dini ([11, 9]), y funciones de Bessel ([4]).

Segundo, ha extendido la acotación uniforme en $L^p(d\mu)$ a acotaciones con pesos, es decir, acotación de $L^p(u d\mu)$ en $L^p(v d\mu)$, donde u, v son funciones medibles positivas, llamadas pesos en la literatura (ver [13, 8]).

Tercero, se ha estudiado el problema de la acotación en los extremos, tratando de obtener desigualdades de tipo débil y débil restringido. Explicaremos brevemente esta terminología: por dualidad e interpolación, el conjunto de p 's para los que hay convergencia fuerte es un intervalo $I = (p_0, p_1)$, donde se cumple $p \in I$ si y solo si $p' \in I$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Cabe preguntarse qué ocurre en los extremos p_0 y p_1 .

El ejemplo patrón de la serie de Fourier trigonométrica nos dice que allí, $p_0 = 1$, se cumple la desigualdad de Kolmogorov

$$|\{x \in [-\pi, \pi] : |S_N f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(-\pi, \pi)}, \quad (\lambda > 0),$$

donde C es una constante independiente de λ y f . Con lenguaje de análisis funcional, la desigualdad nos está diciendo que los operadores S_N están uniformemente acotados de $L^1(-\pi, \pi)$ en el espacio de Lorentz $L^{1, \infty}(-\pi, \pi)$ (véase [17] para una definición precisa de toda la gama de espacios $L^{p, q}(d\mu)$).

Para polinomios ortogonales fue Chanillo [2] el primero en advertir que, en el caso de Legendre (aquí $I = (\frac{4}{3}, 4)$), aunque no se da la análoga acotación débil de $L^{4/3}(d\mu)$ en $L^{\frac{4}{3}, \infty}(d\mu)$, sí se da algo más débil todavía, acotación de $L^{\frac{4}{3}, 1}(d\mu)$ en $L^{\frac{4}{3}, \infty}(d\mu)$. A esta última se le llama acotación débil restringida.

Nuestro grupo ha investigado lo que ocurre para la mayoría de los sistemas con los que hemos tratado y los resultados pueden verse en [14, 15, 12, 11].

Por último, hemos investigado problemas relacionados como convergencia de las series de Fourier en casi todo punto ([9, 4]) o el estudio de la conmutación de las

series de Fourier con operadores de multiplicación ([7, 16]), problema éste conectado con las acotaciones con pesos.

Pero volvamos a nuestro problema de la convergencia fuerte. Para una medida arbitraria $d\mu$ están muy lejos de conocerse estimaciones precisas sobre el tamaño de los polinomios que permitan el estudio vía la transformada de Hilbert y el problema, en general, se presenta muy difícil, como coinciden en afirmar los matemáticos especializados en esta materia. Si acaso, podemos aspirar a ir incorporando casos particulares poco a poco.

Variamos de estrategia y proponemos lo siguiente: tratar de obtener información de los casos conocidos. Para explicarnos mejor, sea uno de estos casos conocidos, el asociado a una medida $d\mu$. Modificamos la medida mediante un peso $d\mu_1(x) = w(x)d\mu(x)$, y nos preguntamos para qué modificaciones por w podemos obtener información de la nueva serie de Fourier a partir de la antigua.

Así también nuestra cuestión se encuadra en la teoría de perturbaciones para operadores lineales en la que la pregunta es: ¿cómo cambian las propiedades espectrales de un operador cuando se hace en éste un pequeño cambio?

En nuestro caso, queremos saber cómo está relacionada la serie de Fourier nueva con la antigua. El problema será abordable si podemos obtener una buena fórmula que relacione las dos series de Fourier. El principal antecedente lo tenemos en el trabajo de Coifman y Murray [5]. Allí se logra con éxito esta relación entre las series de Fourier (veremos los detalles en el párrafo siguiente) y se logra demostrar que si la modificación por w es «pequeña», entonces la serie de Fourier varía poco. La precisión de este hecho la da la noción de espacio de holomorfía y en su desarrollo se necesitan acotaciones para conmutadores de la serie de Fourier con funciones de BMO. En [5] se trabaja en $L^2(d\mu)$ y este hecho parece crucial en determinados puntos. De la lectura de este trabajo es de donde surgieron las ideas que expondremos en el párrafo 2 que tratan de extender la forma de trabajar en [5] al contexto no hilbertiano de $L^p(d\mu)$.

Por último diremos que el problema también está muy relacionado con flujos de Toda. Al lector interesado, aparte de la consulta de [5], le recomendamos el artículo de Laeng [19].

2. PERTURBACIONES DE SERIES DE FOURIER

En este punto, tenemos que introducir algunas notaciones. Seguimos teniendo una medida fija de partida $d\mu$ en el intervalo $[-1, 1]$, $\{P_n\}$ son los polinomios ortogonales respecto de $d\mu$, $K_n(x, y)$ es el núcleo y S_n es la correspondiente serie de Fourier.

Modificamos la medida por un peso $w(x)$, y tenemos una nueva medida $d\mu_1 = w d\mu$. Sean $\{Q_n\}$ los polinomios ortogonales respecto de $d\mu_1$, $K'_n(x, y)$ el nuevo núcleo y S'_n la nueva serie de Fourier, es decir,

$$S'_n f(x) = \int_{-1}^1 K'_n(x, y) f(y) w(y) d\mu(y), \quad K'_n(x, y) = \sum_{k=0}^n Q_k(x) Q_k(y).$$

Para trabajar en el mismo espacio de medida, consideramos las funciones

$$F_n(x) = Q_n(x) w^{1/2}(x)$$

que no son polinomios, pero son ortogonales respecto de $d\mu$. Llamemos T_n a la serie de Fourier respecto de este sistema y $T_n(x, y)$ al núcleo. Esto es,

$$T_n f(x) = \int_{-1}^1 T_n(x, y) f(y) d\mu(y), \quad T_n(x, y) = \sum_{k=0}^n F_k(x) F_k(y).$$

La relación entre T_n y S'_n es la siguiente

$$T_n(x, y) = K'_n(x, y) w^{1/2}(x) w^{1/2}(y),$$

$$T_n f(x) = w^{1/2}(x) \int_{-1}^1 K'_n(x, y) f(y) w^{-1/2}(y) w(y) d\mu(y) = w^{1/2}(x) S'_n(f w^{-1/2})(x).$$

Así, observamos que las posibles acotaciones en espacios L^p con pesos para T_n y S'_n están relacionadas por la fórmula anterior. A la hora de buscar información sobre las nuevas series de Fourier, nosotros optaremos por el estudio de T_n .

Si modificamos por el peso w^{-1} y hacemos una construcción similar, a los operadores análogos a los T_n los denotaremos \tilde{T}_n .

El propósito es relacionar la serie de Fourier T_n con la primitiva S_n .

Llamemos Π_n al espacio de los polinomios de grado menor o igual que n . Del simple hecho

$$T_n(g) = g, \quad \forall g \in w^{1/2}\Pi_n$$

se deduce que, si definimos

$$L_n(f) = w^{1/2} S_n(f w^{-1/2}), \quad L_n^*(f) = w^{-1/2} S_n(f w^{1/2}),$$

entonces

$$(1) \quad T_n(L_n(f)) = L_n(f).$$

Pero también es fácil obtener la relación

$$(2) \quad T_n(L_n^*(f)) = T_n(f).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} T_n(L_n^*(f))(x) &= \int_{-1}^1 w^{-1/2}(y) \left(\int_{-1}^1 f(z) w^{1/2}(z) K_n(y, z) d\mu(z) \right) T_n(x, y) d\mu(y) \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 w^{-1/2}(y) T_n(x, y) K_n(y, z) d\mu(y) \right) f(z) w^{1/2}(z) d\mu(z) \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 w^{1/2}(x) K'_n(x, y) K_n(y, z) d\mu(y) \right) f(z) w^{1/2}(z) d\mu(z) \\ &= \int_{-1}^1 w^{1/2}(x) K'_n(x, z) f(z) w^{1/2}(z) d\mu(z) \\ &= \int_{-1}^1 T_n(x, z) f(z) d\mu(z) = T_n f(x). \end{aligned}$$

Aquí hemos usado el teorema de Fubini y la propiedad reproductora del núcleo K_n , aunque en realidad se puede mirar desde un punto de vista más abstracto y (2) se deduce de que T_n son proyecciones autoadjuntas sobre el subespacio $w^{1/2}\Pi_n$, y L_n son proyecciones sobre este mismo subespacio en el espacio de Hilbert $L^2(d\mu)$.

Sumando y restando las igualdades (1) y (2) obtenemos

$$(3) \quad T_n(I + L_n - L_n^*) = L_n,$$

$$(4) \quad T_n(-I + L_n + L_n^*) = L_n.$$

Si los operadores que aparecen entre paréntesis en (3) o (4) fueran inversibles, ya tendríamos un modo de obtener T_n a partir de L_n .

En el espacio $L^2(d\mu)$ que $(I + L_n - L_n^*)$ son inversibles es un notable, aunque sencillo, resultado que se debe a Kerzman y Stein (ver [18]). Entonces, si no nos salimos de L^2 ,

$$T_n = L_n(I + L_n - L_n^*)^{-1}.$$

Este hecho es utilizado con éxito por Coifman y Murray en [5], tratando con problemas de dependencia analítica.

Nosotros nos fijamos en que las acotaciones en espacios L^p para los operadores L_n y L_n^* son equivalentes a acotaciones en L^p con pesos para los operadores S_n ; de éstas, disponemos de abundante información y así, de la fórmula (3) se pueden deducir consecuencias como la siguiente:

Para mayor facilidad pensemos que $d\mu(x) = dx$, con lo que P_n son los polinomios de Legendre.

Si el peso es de la forma $w = \exp(b)$, donde b es una función del espacio BMO (espacio de las funciones de oscilación media acotada, muy popular en análisis de Fourier, ver [6]), se sabe que entonces el peso w está en una clase A_p con $p \neq 2$.

Entonces, podemos deducir que los operadores L_n están uniformemente acotados en ese L^p , pues para los polinomios de Legendre se satisfacen las desigualdades con peso que necesitaríamos. Pero no sólo eso, sino que si la norma de b en BMO es suficientemente pequeña, el tamaño A_p del peso w es suficientemente pequeño y, podríamos asegurar por técnicas conocidas que, uniformemente en n ,

$$(5) \quad \|L_n - L_n^*\| \leq \alpha < 1,$$

donde la norma es la de operadores de L^p en L^p . Entonces, los operadores $I + L_n - L_n^*$ son inversibles con inversos

$$(I + L_n - L_n^*)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (L_n - L_n^*)^k$$

ya que la serie, por la condición (5) converge en la norma de los operadores de L^p en L^p . Y, además, estarán uniformemente acotados.

Por tanto, de (3),

$$T_n = L_n(I + L_n - L_n^*)^{-1}$$

son operadores uniformemente acotados en L^p .

Lo interesante de este pequeño resultado es que, para un sistema ortonormal respecto de un peso poco conocido (un $w \in A_p$), hemos obtenido convergencia de la serie de Fourier para $p \neq 2$.

Sin embargo, el problema es que tenemos que considerar constantes A_p “suficientemente pequeñas”, sin poder precisar con mucha exactitud este hecho. Lo que

nos gustaría es que, sin tantas limitaciones y como punto de partida para abordar nuestro problema, los operadores $(I + L_n - L_n^*)$ fueran siempre inversibles.

En este sentido, nos parece más interesante la fórmula (4) porque aquí, y esto no parece haber sido notado anteriormente, sí que somos capaces de demostrar que los operadores $(-I + L_n + L_n^*)$ son siempre inversibles.

En efecto, vamos a probar que

$$\exists(-I + L_n + L_n^*)^{-1} = -I + T_n + \tilde{T}_n.$$

Si cambiamos el papel de w por w^{-1} , las relaciones (1) y (2) se transforman en

$$\tilde{T}_n(L_n^*) = L_n^*, \quad \tilde{T}_n(L_n) = \tilde{T}_n,$$

y usándolas junto con las propias (1) y (2) se obtiene claramente que

$$(-I + T_n + \tilde{T}_n)(-I + L_n + L_n^*) = I.$$

Pero también

$$\begin{aligned} & (-I + L_n + L_n^*)(-I + T_n + \tilde{T}_n) \\ &= I - T_n - \tilde{T}_n - L_n + L_n(T_n) + L_n(\tilde{T}_n) - L_n^* + L_n^*(T_n) + L_n^*(\tilde{T}_n) = I \end{aligned}$$

porque, por las propiedades reproductoras de los núcleos,

$$L_n(T_n) = T_n, \quad L_n^*(\tilde{T}_n) = \tilde{T}_n$$

y

$$L_n(\tilde{T}_n) = L_n, \quad L_n^*(T_n) = L_n^*.$$

Con estos nuevos datos, el problema que nos ocupa tiene nombre en teoría de operadores: es un problema de convergencia *estable* de operadores.

Definición 1 ([3, p. 130]). Sean $U, U_n, n = 1, 2, \dots$, operadores acotados en un espacio de Banach X . Se dice que (U_n) converge a U establemente ($U_n \xrightarrow{s} U$) si:

- (i) $U_n \rightarrow U$ puntualmente, y
- (ii) $\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tales que para $n > N, U_n^{-1}$ son operadores acotados en X y $\|U_n^{-1}\| \leq M$.

Nuestro conocimiento sobre la convergencia de distintas series de Fourier en espacios L^p con pesos y las ideas anteriormente expuestas nos permiten mostrar ejemplos de convergencia estable.

Teorema. *Cuando*

$$d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1$$

y el peso es de la forma

$$w(x) = (1-x)^a(1+x)^b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

entonces los operadores $U_n = -I + L_n + L_n^*$ convergen a I establemente, si se satisfacen las condiciones

$$\left| (\alpha + 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha + 1}{2} \right\} - \frac{|a|}{2}$$

(y la equivalente sustituyendo a, α por b, β).

Demostración. El punto clave es que, como puede verse en [8], la serie de Fourier S_n correspondiente a $d\mu$ satisface la acotación con pesos

$$\|uS_n(u^{-1}f)\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(d\mu)}$$

donde $u(x) = (1-x)^A(1+x)^B$ siempre que $1 < p < \infty$ y

$$\left| A + (\alpha + 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha + 1}{2} \right\}$$

(y la equivalente sustituyendo A , α por B , β).

Como consecuencia, si se cumplen las hipótesis del teorema, los operadores T_n , \tilde{T}_n , L_n y L_n^* están acotados en $L^p(d\mu)$, dado que estas acotaciones equivalen a correspondientes acotaciones con peso para los operadores S'_n y S_n . \square

Este resultado se podría extender sin mayor dificultad a polinomios de Jacobi generalizados.

Sin embargo, nos parece más interesante hacer notar el hecho de que por aquí se pueda abrir una nueva vía para el estudio de la convergencia de la serie de Fourier en casos más generales. Es decir, si para una medida μ y un peso $w(x)$, la sucesión $-I + L_n + L_n^*$ converge establemente (a I) en $L^p(d\mu)$, entonces por (4) los operadores T_n estarán uniformemente acotados y la correspondiente serie de Fourier será convergente.

En este caso, nos parece oportuno recordar que la convergencia estable se puede caracterizar en términos aparentemente más sencillos.

Definición 2 ([3, p. 130]). Sean U , U_n , $n = 1, 2, \dots$, operadores acotados en un espacio de Banach X . Se dice que (U_n) converge a U regularmente ($U_n \xrightarrow{r} U$) si:

- (i) $U_n \rightarrow U$ puntualmente, y
- (ii) $\forall \{x_n\} \subset X$ acotada tal que $U_n x_n \rightarrow y$ para alguna subsucesión, existe a su vez una subsucesión tal que $x_n \rightarrow x$ y $Ux = y$.

En nuestro caso, es sencillo deducir que la convergencia estable de $-I + L_n + L_n^*$ a I es equivalente a la convergencia regular (ver [3, Proposition 3.17]).

REFERENCIAS

- [1] V. M. Badkov, Convergence in the mean and almost everywhere of Fourier series in polynomials orthogonal on an interval, *Math. USSR Sb.* **24** (1974), 223–256.
- [2] S. Chanillo, On the weak behaviour of partial sums of Legendre series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **268** (1981), 367–376.
- [3] F. Chatelin, *Spectral approximation of linear operators*, Academic Press, 1983, Nueva York.
- [4] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (1999), 125–147.
- [5] R. R. Coifman y M. A. M. Murray, Uniform analyticity of orthogonal projections, *Trans. Amer. Math. Soc.* **312** (1989), 779–817.
- [6] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [7] J. J. Guadalupe, M. Pérez y F. J. Ruiz, Estimates for commutators of orthogonal Fourier series, *J. London Math. Soc.* **54** (1996), 311–322.
- [8] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted L^p -boundedness of Fourier series with respect to generalized Jacobi weights, *Publ. Mat.* **35** (1991), 449–459.

- [9] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Two notes on convergence and divergence a.e. of Fourier series with respect to some orthogonal systems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), 457–464.
- [10] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials relative to measures with mass points, *Mathematika* **40** (1993), 331–344.
- [11] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (1993), 370–389.
- [12] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted norm inequalities for polynomial expansions associated to some measures with mass points, *Constr. Approx.* **12** (1996), 341–360.
- [13] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and weak convergence of some orthogonal Fourier expansions by using A_p theory, en *Orthogonal Polynomials and Their Applications* (Proc. Int. Congr., Laredo/España 1987, J. Vinuesa, ed.), *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **117**, Dekker, Nueva York (1989), 161–169.
- [14] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Weak behaviour of Fourier-Jacobi series, *J. Approx. Theory* **61** (1990), 222–238.
- [15] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Weighted weak behaviour of Fourier-Jacobi series, *Math. Nachr.* **158** (1992), 161–174.
- [16] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Commutators and analytic dependence of Fourier-Bessel series on $(0, \infty)$, *Canad. Math. Bull.* **42** (1999), 198–208.
- [17] R. Hunt, On $L(p, q)$ spaces, *Enseign. Math.* **12** (1966), 249–276.
- [18] N. Kerzman y E. M. Stein, The Szegő kernel in terms of Cauchy-Fantappiè kernels, *Duke Math. J.* **45** (1978), 197–224.
- [19] E. Laeng, Analytic dependence of orthogonal polynomials, *Rev. Mat. Iberoamericana* **7** (1991), 287–312.
- [20] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, Necessary conditions for weighted mean convergence of Fourier series in orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **46** (1986), 314–322.
- [21] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.
- [22] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 419–431.
- [23] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 433–460.
- [24] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207–226.
- [25] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 387–403.
- [26] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 355–367.
- [27] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. III, *Duke Math. J.* **16** (1949), 189–191.
- [28] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.^a edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [29] J. L. Varona, *Convergencia en L^p con pesos de la serie de Fourier respecto de algunos sistemas ortogonales*, Tesis Doctoral, Sem. Mat. García de Galdeano, sec. 2, núm. **22**, Zaragoza, 1989.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS,
CIUDAD UNIVERSITARIA S/N, 50009 ZARAGOZA, SPAIN
Correo electrónico: mperez@posta.unizar.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS,
CIUDAD UNIVERSITARIA S/N, 50009 ZARAGOZA, SPAIN
Correo electrónico: fjruiz@posta.unizar.es

PUNTOS DEL RETÍCULO

FERNANDO CHAMIZO Y ANTONIO CÓRDOBA

En memoria de Chicho

ABSTRACT. In this expository paper we discuss several “lattice point problems” describing some of the standard geometric and analytic methods. At the end we also present three applications to problems in Number Theory and Quantum Mechanics.

1. EL CÍRCULO Y EL RETÍCULO

Contar cuántos elementos de \mathbb{Z}^2 hay dentro de un conjunto, o de una familia de ellos, resulta ser una operación delicada que, sin embargo, nos aparece en contextos sumamente interesantes.

Un ejemplo notable es la función aritmética

$$r_2(l) = \#\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + n^2 = l\},$$

que es el número de puntos de \mathbb{Z}^2 que están en la circunferencia de radio \sqrt{l} centrada en el origen. Observemos que la sucesión de sus valores es bastante irregular: $r_2(1) = 4$; $r_2(2) = 4$; $r_2(3) = r_2(6) = r_2(7) = 0$; $r_2(5) = 8$; $r_2(25) = 12$; $r_2(4225) = 36$; $r_2(4227) = 0$. No obstante existen fórmulas que dependen de la descomposición de l en producto de primos. La razón estriba en que si $l = m^2 + n^2$ entonces tenemos que $l = (m + ni)(m - ni)$, $i = \sqrt{-1}$. De manera que la función r_2 está ligada a la divisibilidad en el anillo $\mathbb{Z}[i]$ de los enteros gaussianos. Si $l = 2^\gamma \prod_{p_i \equiv 1 \pmod{4}} p_i^{\alpha_i} \prod_{q_j \equiv 3 \pmod{4}} q_j^{\beta_j}$ resulta que $r_2(l) = 0$ a menos que todos los β_j sean pares. En cuyo caso $r_2(l) = 4 \prod (1 + \alpha_i)$.

A partir de esta fórmula resulta muy sencillo demostrar que:

- (a) $r_2(k) = O(k^\epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$.
- (b) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{r_2(k)}{(\log k)^p} = +\infty$, para todo p .

Un procedimiento eficiente para regularizar una función consiste en calcular sus promedios. En nuestro caso da lugar a la definición:

$$\mathcal{N}(R) = \sum_{l \leq R^2} r_2(l).$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. 11H06, 11P21, 52C05, 52C07.

Key words and phrases. Lattice points, exponential sums, circle problem.

La función $\mathcal{N}(R)$ también admite una interpretación geométrica en términos del retículo fundamental, no es más que el número de puntos de coordenadas enteras dentro del círculo centrado de radio R .

Asociemos con cada punto $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ de \mathbb{Z}^2 el cuadrado unidad Q_ν que lo tiene como centro y cuyos vértices son $(\nu_1 \pm 1/2, \nu_2 \pm 1/2)$. Entonces la región $A(R) = \bigcup_{\|\nu\| \leq R} Q_\nu$ verifica la identidad $\text{Área}(A(R)) = \mathcal{N}(R)$, por lo que la doble inclusión $D_{R-\sqrt{2}}(\mathbf{0}) \subset A(R) \subset D_{R+\sqrt{2}}(\mathbf{0})$ nos permite escribir:

$$\mathcal{N}(R) = \pi R^2 + O(R), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Surge el problema: ¿Cuál es el verdadero orden de magnitud de $E(R) = \mathcal{N}(R) - \pi R^2$ cuando $R \rightarrow +\infty$?

En términos más precisos: ¿Cuál es el ínfimo de los valores de θ para los que $E(R) = O(R^\theta)$?

He aquí algunas cotas superiores para este ínfimo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= 0'6666\dots, & \text{G. Voronoï y W. Sierpiński (1903)} \\ \frac{33}{50} &= 0'66, & \text{J. G. van der Corput (1922)} \\ \frac{15}{23} &= 0'6521\dots, & \text{E. C. Titchmarsh (1935)} \\ \frac{13}{20} &= 0'65, & \text{L.-K. Hua (1942)} \\ \frac{35}{54} &= 0'6481\dots, & \text{G. Kolesnik (1976)} \\ \frac{7}{11} &= 0'6363\dots, & \text{H. Iwaniec y C. J. Mozzochi (1988)} \\ \frac{46}{73} &= 0'6301\dots, & \text{M. N. Huxley (1993)} \end{aligned}$$

En la dirección opuesta, Hardy y Landau, en 1915, probaron que

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{|E(R)|}{R^{1/2}(\log R)^{1/4}} = +\infty.$$

No obstante, si sustituimos la estimación L^∞ por otra en la métrica L^2 , entonces, como veremos más adelante, se cumple la fórmula:

$$\frac{1}{R} \int_0^R |E(s)|^2 ds = cR + O(R^\epsilon), \quad \text{para todo } \epsilon > 0,$$

donde $c > 0$ es una constante explícita. Esta fórmula nos permite, siguiendo a Hardy, ser «optimistas» y precisar el «problema del círculo» en la siguiente pregunta:

$\dot{¿Es cierto que } E(R) = O(R^{1/2+\epsilon}), R \rightarrow +\infty, \text{ para todo } \epsilon > 0? \dot{¿}$

En dimensión tres hay un problema análogo para la esfera, cuya formulación se encuentra ya en la obra de Gauss, y que aparece asociado, de manera natural, al

proceso de contar el número de clases de ideales en las extensiones cuadráticas del cuerpo de los racionales (véase la última sección).

$$\mathcal{N}_3(R) = \#\{\nu \in \mathbb{Z}^3 : \|\nu\| \leq R\} = \frac{4\pi}{3}R^3 + E_3(R).$$

De nuevo se trata de conocer el verdadero orden de magnitud de $E_3(R)$. El mejor resultado hasta la fecha se debe a D. R. Heath-Brown [8] y es $E_3(R) = O(R^{21/16+\epsilon})$.

Resulta curioso constatar que para las dimensiones $n \geq 4$, el correspondiente problema de la n -esfera es más asequible a los métodos del Análisis Armónico y se conoce el valor óptimo del exponente. Por lo que los casos abiertos son los anteriormente expuestos, $n = 2$ y $n = 3$.

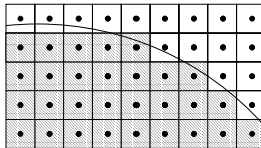
2. OTROS DOMINIOS CONVEXOS

2.1. El problema general. El problema del círculo admite una generalización natural simplemente cambiando la circunferencia por otra curva y el radio por la razón de la homotecia que aplicamos sobre ella. Concretamente se trata de lo siguiente:

Dada una curva regular cerrada simple cuya curvatura es estrictamente positiva en todo punto, sea D la región convexa acotada que limita y sea A su área. Hallar el ínfimo de los exponentes θ para los que se cumple

$$E(R) := \#\{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : (n/R, m/R) \in D\} - AR^2 = O(R^\theta).$$

Si a cada punto de \mathbb{Z}^2 se le asigna, como antes, el cuadrado unidad que lo tiene por centro, entonces la geometría del problema muestra que $E(R)$ depende esencialmente de las proporciones normalizadas entre $-1/2$ y $1/2$ en las que la curva dilatada corta a cada uno de estos cuadrados.



Razonando heurísticamente, si se supone equidistribución y cierta independencia entre dichas proporciones, el teorema central del límite llevaría a una distribución normal $N(0, \sqrt{n})$ donde n es el número de cuadrados cortados por la curva dilatada, el cual es obviamente $O(R)$. Este argumento probabilístico sugiere que es muy difícil conseguir $|E(R_0)| > cR_0^\theta$ con $\theta > 1/2$ para un R_0 fijo, y en el límite resulta imposible. De nuevo la conjetura de Hardy se presenta como una frontera natural de este proceso.

En este sentido hay un antiguo resultado de D. G. Kendall [13] que se puede glosar diciendo que, una vez fijada la razón de la homotecia R_0 , si lanzamos al azar la región dilatada sobre el plano, la media de los puntos de \mathbb{Z}^2 atrapados es AR_0^2 y la desviación típica es $\sigma < cR_0^{1/2}$, donde c sólo depende de la curva. Por otra parte, se

conoce que, al igual que en el problema del círculo, el exponente $\theta = 1/2$ no puede alcanzarse, esto es,

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} |E(R)| R^{-1/2} = \infty$$

(de nuevo, incluso todavía podría dividirse por cierto factor logarítmico [15] y el resultado seguiría siendo ∞).

El mejor resultado conseguido hasta la fecha es el mismo que el obtenido para el problema del círculo y se debe a M. N. Huxley [9], quien probó $E(R) = O(R^\theta)$ para todo $\theta > 46/73$ (bajo la hipótesis de que la curvatura sea C^1); concretamente:

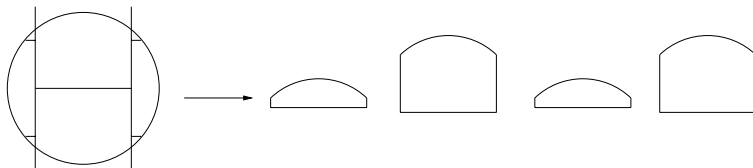
$$E(R) = O(R^{46/73}(\log R)^{315/146}).$$

A pesar de que el método empleado es muy complejo (en la cuarta sección se da una breve descripción de la idea fundamental) y está bastante optimizado, cuantitativamente sólo constituye una mejora de menos de un 6% sobre el exponente llamado *trivial* $2/3$. Lo cual da una idea de la dificultad del problema.

2.2. Puntos bajo gráficas. A base de cortar la región D con algunas rectas de la forma $x = n$, $y = m$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) y orientar adecuadamente los trozos resultantes, se puede reducir la estimación de $E(R)$ a la de la cantidad análoga para regiones de la forma

$$D(a, b; f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

con la salvedad de que los puntos en las fronteras rectas cuentan sólo la mitad (porque al recomponer D cada uno pertenece a dos trozos).



Con este convenio, en cada vertical intermedia $x = c$, $a < c < b$, el número de puntos de coordenadas enteras es $[f(c)] + 1/2$ donde $[\cdot]$ indica la parte entera. Por consiguiente la contribución a $E(R)$ de la región $D(a, b, f)$ es

$$-\frac{[f(a)] + [f(b)] + 1}{2} + \sum_{n=a}^b \left([f(n)] + \frac{1}{2} \right) - \int_a^b f(t) dt.$$

Por construcción (recuérdese la convexidad de la curva) siempre se puede suponer que $f(x) = Rg(x/R)$ con $0 < c_1 < -g'' < c_2$ y $|g'| < c_3$. Resultados bien conocidos sobre la aproximación de sumas por integrales (Euler-McLaurin o la regla del trapecio) implican que, salvo una magnitud acotada, la cantidad anterior coincide con

$$E(a, b; f) = - \sum_{n=a}^b \psi(f(n)) \quad \text{donde } \psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

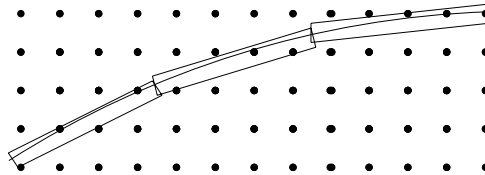
Si la gráfica de f contiene M puntos de \mathbb{Z}^2 entonces $E(a, b; f + \epsilon) - E(a, b; f - \epsilon) = M$ para ϵ suficientemente pequeño. De aquí surge naturalmente la condición de convexidad de la curva inicial, porque si fuera demasiado plana se podría conseguir que pasara por muchos puntos del retículo y $R^{1/2}$ no sería el límite natural. De todas formas, en este tipo de argumentos no hay que perder de vista que R puede variar. Por ejemplo, un resultado clásico de V. Jarník [12] (véase también [10, §2.2]) implica que dado un R_0 siempre es posible construir una curva con curvatura acotada y continua $c_1 \leq k \leq c_2$ de manera que $|E(R_0)| \geq c_3 R_0^{2/3}$ donde c_1, c_2 y c_3 son constantes absolutas. Nótese que esto no invalida que para cualquiera de estas curvas se cumpla $E(R) = O(R^\theta)$ cuando $R \rightarrow +\infty$ para algún $\theta < 2/3$. Por otra parte se sabe que las gráficas suficientemente regulares no pueden contener muchos puntos del retículo (véase [2] y [17]) impidiendo generalizar la construcción de Jarník.

2.3. El exponente $2/3$ por métodos elementales. Como veremos en la tercera sección, la acotación $E(R) = O(R^{2/3})$ es inmediata (al menos para el problema del círculo) si se aplican los rudimentos del Análisis Armónico. Sin embargo también es posible obtener el exponente $2/3$, salvo un factor logarítmico extra, con argumentos geométricos elementales combinados con resultados básicos de aproximación diofántica. Hay algunos detalles en la demostración que la hacen un poco extensa para incluirla aquí en su totalidad [10, p. 33–41] pero descartando estos detalles es realmente breve.

La idea clave radica en que es fácil contar puntos bajo rectas de pendiente racional cuando el denominador de ésta es igual a la longitud del intervalo. Concretamente, para calcular $E(A, B; px/q + \beta)$ con p/q irreducible y $[A, B]$ un intervalo entero conteniendo q elementos, se puede usar la fórmula elemental

$$\sum_{n=A}^B \psi\left(\frac{p}{q}n + \beta\right) = \psi(q\beta).$$

Para estimar $E(a, b; f)$, supongamos que la gráfica de f se aproxima por tangentes de pendientes racionales cuyo denominador coincida con la longitud de la proyección (en x) de la tangente y sea comparable a $R^{1/3}$. Si es posible hacer esto en todo el intervalo $[a, b]$, por geometría elemental podemos completar estas rectas a rectángulos de altura comparable a $R^{-1/3}$ (recuérdese que $c_1/R < -f'' < c_2/R$) que cubran toda la gráfica de f .



El área de cada uno de los rectángulos es $O(1)$ y por la fórmula anterior (o por un argumento geométrico sencillo) también lo es el número de puntos de \mathbb{Z}^2 incluidos

en cada uno de ellos. Como $b - a = O(R)$, hay $O(R^{2/3})$ rectángulos y se deduce

$$E(a, b; f) = O(R^{2/3}).$$

Como f' es decreciente (en particular inyectiva) y $|f'| < c_3$, el número de valores de x tales que $f'(x) = p/q$ con $1 \leq q \leq R^{1/3}$ es comparable a $R^{2/3}$ [7, Th. 331], si $b - a$ es como R , el espaciamento promedio entre estos valores de x es $R^{1/3}$. Así pues, teniendo en cuenta que la mayoría de las fracciones tienen denominador grande, la construcción anterior parece en principio posible (quizá permitiendo multiplicar por una constante las longitudes de las tangentes). Sin embargo esto no es cierto del todo, ya que las fracciones con denominador pequeño están mucho más separadas del resto que el espaciamento promedio. Por ejemplo, para $p/q \neq 0/1$, $1 \leq q \leq R^{1/3}$, se tiene $R|0/1 - p/q| \geq R^{2/3}$ que está muy lejos del $R^{1/3}$ esperado. Los racionales con denominador pequeño son pocos, con lo cual no parece que su contribución sea decisiva, aunque en cualquier caso aparece amplificada por el problema del espaciamento. Teniendo en cuenta cuidadosamente estos hechos contrapuestos, lo que se obtiene es un factor logarítmico extra con respecto a lo que correspondería a la última fórmula. Por ejemplo, en [10] se obtiene con argumentos de este tipo $E(R) = O(R^{2/3} \log^{4/3} R)$.

3. ANÁLISIS ARMÓNICO DEL TÉRMINO DE ERROR

3.1. Fórmula de sumación de Poisson. Serie de Hardy. Cada punto del retículo $\nu \in \mathbb{Z}^n$ origina una función periódica: $e(\nu \cdot x)$ donde aquí y en lo sucesivo $e(t)$ es una abreviatura para $e^{2\pi it}$. El conjunto de todas ellas constituye una base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) = L^2(Q)$ siendo Q el cubo unidad. Toda función integrable tiene una serie de Fourier

$$f \sim \sum_{\nu} \hat{f}(\nu) e(\nu \cdot x)$$

donde los coeficientes están calculados por medio de las fórmulas

$$\hat{f}(\nu) = \int_Q f(x) e(-\nu \cdot x) dx.$$

El Análisis Armónico estudia las diversas maneras en las que la serie representa a la función.

Como ya hemos visto en la sección anterior, los problemas de puntos del retículo llevan a estimar sumas de $\psi(f(n))$ donde $\psi(t) = t - [t] - 1/2$. Si $n \neq 0$ tenemos que $\int_0^1 \psi(t) e(-nt) dt = i/(2\pi n)$, luego

$$\psi(t) \sim -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi nt)}{n} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^M \frac{\text{sen}(2\pi nt)}{n} + O(M^{-1} \|\nu\|^{-1})$$

donde $\|\nu\| = \text{dist}(t, \mathbb{Z})$.

Sustituyendo la serie de Fourier en la expresión del término de error, obtenemos una reducción del «problema del retículo» al de la estimación de sumas trigonométricas del tipo

$$\sum_n e(f(n)),$$

que abordaremos en la próxima sección.

En el caso no periódico tenemos también la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e(-\xi \cdot x) f(x) dx, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dada una función integrable en \mathbb{R}^n existen, por lo menos, dos procedimientos para construir una función periódica a partir de ella, a saber:

$$(1) \quad f_1(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} f(x + \nu),$$

$$(2) \quad f_2(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}(f)(\nu) e(\nu \cdot x).$$

La fórmula de sumación de Poisson consiste en la afirmación de que ambas funciones coinciden, $f_1 = f_2$. En particular, haciendo $x = 0$ (para funciones adecuadas) obtenemos la identidad

$$\sum_{\nu} f(\nu) = \sum_{\nu} \widehat{f}(\nu),$$

donde hemos hecho uso de la notación estándar $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$ para la transformada de Fourier.

En el caso particular en que $f(x)$ es la función característica del disco centrado de radio R , la suma de la izquierda es exactamente nuestra función $\mathcal{N}(R)$. En cuanto al miembro de la derecha, tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{D_R(\mathbf{0})} e(-\xi \cdot x) dx = R^2 \int_{D_1(\mathbf{0})} e(-R\xi \cdot x) dx \\ &= R^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho e(i|\xi|\rho \cos \theta) d\theta d\rho = R^2 \int_0^1 \rho J_0(2\pi R|\xi|\rho) d\rho = R \frac{J_1(2\pi R|\xi|)}{2\pi|\xi|}, \end{aligned}$$

donde J_k designa la función de Bessel de orden k . Las funciones de Bessel verifican la ecuación $\frac{d}{dt}(t^k J_k(t)) = t^k J_{k-1}(t)$ y tienen el desarrollo asintótico

$$J_k(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos\left(t - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Habida cuenta de que $\widehat{f}(\mathbf{0}) = \pi R^2$ obtenemos, formalmente,

$$E(R) = \frac{R^{1/2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2(n)}{n^{3/4}} \cos\left(2\pi R\sqrt{n} - \frac{3\pi}{4}\right) + O(r_2(R^2) + 1),$$

que es la fórmula de Hardy.

Observemos que se trata de una identidad notable, donde la serie de la derecha debe ser tratada con un cierto esmero, al no ser absolutamente convergente. No obstante, eso no representa ningún obstáculo, ya que con poco esfuerzo podemos

obtener fórmulas aproximadas. Para ello tómesese una función auxiliar ϕ , radial, no negativa y de clase C_0^∞ en el disco unidad, entonces su transformada de Fourier es una función radial $\varphi(r)$ que decae rápidamente, y un sencillo argumento (involucrando la convolución con ϕ) nos permite escribir:

$$E(R) = \frac{R^{1/2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2(n)}{n^{3/4}} \cos\left(2\pi R\sqrt{n} - \frac{3\pi}{4}\right) \varphi(\delta\sqrt{n}) + O((\delta R + 1)R^\epsilon)$$

para todo $\epsilon > 0$, uniformemente en $\delta > 0$.

Si elegimos ahora el valor $\delta = R^{-1/3}$ obtenemos la estimación de Voronoï y Sierpiński. Haciendo uso de esta fórmula aproximada y tomando luego el límite cuando $\delta \rightarrow 0^+$, se obtiene el promedio

$$\frac{1}{R} \int_0^R |E(s)|^2 ds = cR + O(R^\epsilon), \quad \text{para todo } \epsilon > 0,$$

donde

$$c = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2^2(n)}{n^{3/2}}.$$

Podemos hacer variar también el centro de las circunferencias. Dado un punto y en el cuadrado unidad, Q , consideremos el disco

$$D_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - y\| \leq R\}.$$

Sea $E(R; y) = \sum_{\nu} \chi_{D_R(y)}(\nu) - \pi R^2$. La fórmula de sumación de Poisson permite escribir

$$E(R; y) = \sum_{\nu \neq 0} \widehat{\chi}_{D_R(y)}(\nu) e(\nu \cdot y).$$

Por lo que

$$\int_Q |E(R; y)|^2 dy = \sum_{\nu \neq 0} |\widehat{\chi}_{D_R(y)}(\nu)|^2 = \frac{R}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2(n)}{n^{3/2}} \cos^2\left(2\pi R\sqrt{n} - \frac{3\pi}{4}\right) + O(1).$$

Es decir: Si lanzamos «al azar» un disco de radio R en el plano y contamos cuántos puntos del retículo captura dentro, resulta que el valor esperado es πR^2 , con una desviación típica $O(R^{1/2})$.

3.2. Regularización. (Principio de Incertidumbre). El análisis anterior aparenta la necesidad de un proceso delicado de truncación de la serie obtenida cuando aplicamos la fórmula de sumación de Poisson. También parece descansar sobre las propiedades analíticas de las funciones de Bessel. Ello es debido al empecinamiento en usar la función indicadora del círculo, que es discontinua y cuya transformada de Fourier no decae con rapidez suficiente. Sin embargo, como hemos visto, con la ayuda de los procesos de regularización (y el principio de incertidumbre para la transformación de Fourier), podremos hacer el mismo cálculo de forma mucho más sencilla y maleable. Válida incluso para el caso de dominios convexos más generales.

Diremos que la función diferenciable ϕ está adaptada al intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si se verifica que

$$\text{sop}(\phi) \subset I, \quad \|D^j \phi\|_\infty \leq C_j |I|^{-j}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

siendo $|I|$ la longitud del intervalo y las C_j constantes positivas fijadas de antemano.

En este caso la transformada de Fourier verifica la estimación

$$|\widehat{\phi}(\xi)| \ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kj} |I_k^*|^{-1} \chi_{I_k^*}(\xi),$$

donde $I_k^* = [-2^k/|I|, 2^k/|I|]$ y \ll es otra forma de indicar la notación O de Landau, esto es, significa *menor salvo constantes* (que en este caso dependen de j y de C_j).

En el plano tenemos funciones adaptadas a rectángulos T que pueden poseer dimensiones y direcciones arbitrarias. Si θ_1 y $\theta_2 = \theta_1^\perp$ son las direcciones de los lados de T cuyas longitudes respectivas son d_1 y d_2 , entonces ϕ está adaptada a T cuando

$$\text{sop}(\phi) \subset T, \quad \text{y} \quad \|D_{\theta_1}^\alpha D_{\theta_2}^\beta \phi\|_\infty \leq C_{\alpha\beta} d_1^{-\alpha} d_2^{-\beta},$$

donde las constantes positivas, $C_{\alpha\beta}$, han sido fijadas previamente.

Cuando T sea paralelo a los ejes de coordenadas, con longitudes respectivas d_1 y d_2 , el rectángulo T_k^* es igual a $[-2^k/d_1, 2^k/d_1] \times [-2^k/d_2, 2^k/d_2]$. Dado que la transformada de Fourier conmuta con las rotaciones del espacio subyacente, el caso anterior nos permite obtener la noción de T_k^* , cualquiera que sean las direcciones de T , que hace válida la siguiente estimación:

$$|\widehat{\phi}(\xi)| \ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kj} |T_k^*|^{-1} \chi_{T_k^*}(\xi)$$

donde $|T_k^*|$ designa ahora el área.

Existen diversos procedimientos para obtener una familia de funciones $\{\phi_k\}$, de clase C^∞ , de manera que:

- (i) ϕ_k está adaptada a $(1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1})$, $k = 1, 2, \dots$
- (ii) $\sum \phi_k(\rho) \equiv 1$ en $[3/4, 1]$.

Sea $\phi_0(\rho) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\rho)$, $0 \leq \rho \leq 1$. Consideraremos las funciones radiales en \mathbb{R}^2 definidas por $\varphi_k(x) = \phi_k(|x|)$. Tenemos que

$$\chi_{D_R(\mathbf{0})}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x/R),$$

que da lugar a la familia de aproximaciones

$$\sum_{\nu} \chi_{D_R(\mathbf{0})}(\nu) = \sum_{\nu} \sum_{k=0}^M \varphi_k(\nu/R) + O((2^{-M} R^2 + 1) R^\epsilon)$$

para todo entero positivo M y todo $\epsilon > 0$.

El análisis del término de error nos lleva, de nuevo a través de la fórmula de sumación de Poisson, a considerar el siguiente tipo de sumas:

$$E(R) = \sum_{k=0}^M R^2 \sum_{\nu \neq 0} \widehat{\varphi}_k(R\nu) + O((2^{-M} R^2 + 1) R^\epsilon).$$

Los primeros términos de la suma se estiman fácilmente debido al decaimiento de la transformación de Fourier y contribuyen con $O(1)$. Cuando k crece, sin embargo,

se presenta el siguiente problema tipo: dado $\delta > 0$ (pequeño) y una función φ adaptada a $(1 - \delta, 1)$, definiendo $\varphi(x) = \phi(|x|)$, se trata de estimar $\sum_{\nu \neq 0} \widehat{\varphi}(R\nu)$.

La geometría sugiere que tomemos una partición diferenciable de la circunferencia unidad (partición en ángulos) de manera que $\phi_j(\theta)$ esté adaptada al intervalo $(2\pi(j-1)\delta^{1/2}, 2\pi(j+1)\delta^{1/2})$ y $\sum \phi_j(\theta) \equiv 1$ en $[0, 2\pi]$. Sea $\varphi_j(\rho e^{i\theta}) = \phi_j(\theta)\phi(\rho)$. Entonces φ_j está adaptada a un rectángulo T^j , cuyo lado menor, de longitud $\sim \delta$, tiene la dirección del ángulo $2\pi j\delta^{1/2}$ y cuyo lado mayor, de longitud $\sim \delta^{1/2}$, tiene la dirección de la tangente a la circunferencia en $e^{2\pi i j\delta^{1/2}}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu \neq 0} \widehat{\varphi}(R\nu) \right| &\ll \sum_{\nu \neq 0} \sum_j |\widehat{\varphi}_j(R\nu)| \ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kl} \sum_{1 \leq \|\nu\|} \sum_j |T_k^{j*}|^{-1} \chi_{T_k^{j*}}(R\nu) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kl} \delta^{3/2} 2^{-2k} \sum_{1 \leq \|\nu\|} \sum_j \chi_{T_k^{j*}}(R\nu) \ll \delta^{-1/2} R^{-2}. \end{aligned}$$

Unas sencillas consideraciones geométricas demuestran la estimación

$$\sum_j \chi_{T_k^{j*}}(R\nu) \ll \frac{2^k \delta^{-1}}{R \|\nu\|} \quad \text{y} \quad \sum_{1 \leq \|\nu\| \leq 2^k \delta^{-1}/R} \frac{2^k \delta^{-1}}{R \|\nu\|} \ll \frac{2^{2k} \delta^{-2}}{R^2}.$$

Volviendo a $E(R)$ hemos obtenido que

$$\begin{aligned} E(R) &\ll \sum_{k=0}^M 2^{k/2} + O((2^{-M} R^2 + 1) R^\epsilon) \\ &\ll 2^{M/2} + O((2^{-M} R^2 + 1) R^\epsilon). \end{aligned}$$

Tomando $2^M = R^{4/3}$ obtenemos de nuevo la estimación de Sierpiński y Voronoï. (Con un poco de cuidado podríamos haber eliminado el término R^ϵ .)

4. SUMAS TRIGONOMÉTRICAS

4.1. Los pares de exponentes de van der Corput. Según hemos visto, la estimación del error en el problema del círculo o sus generalizaciones lleva a expresiones que involucran sumas trigonométricas. Esta situación es recurrente en Teoría de Números. Por recordar sólo dos ejemplos, se puede señalar que una estimación no trivial para $\sum_{n \leq N} e(\alpha n^2)$ implica que la parte fraccionaria de αn^2 está equidistribuida si α es irracional [18], o un estudio cuidadoso de $\sum_{p \leq N} e(px)$, donde p recorre los primos, es crucial para demostrar que todo número impar suficientemente grande es suma de tres primos.

Establecer un método general para tratar las sumas trigonométricas es un objetivo demasiado ambicioso, pero la teoría de pares de exponentes de van der Corput (escrita en su forma actual por E. Phillips [16]) permite obtener estimaciones cuando las fases satisfacen ciertas propiedades analíticas.

Comencemos notando que quizá dividiendo en intervalos diádicos se puede suponer que los extremos del intervalo de sumación son de tamaño comparable, esto es,

consideraremos sumas trigonométricas del tipo

$$S = \sum_{n \asymp N} \varepsilon(f(n)),$$

donde $n \asymp N$ abrevia $N \ll n \ll N$; o sea, $n \asymp N$ equivale a $c_1 N \leq n \leq c_2 N$ con $c_1, c_2 > 0$. Si tenemos en mente el caso $f(n) = Ng(n/N)$ que corresponde a dilatar una gráfica y suponemos que las derivadas de g no se anulan, se llega a las hipótesis de la teoría de pares de exponentes:

$$|f^{(k)}| \asymp DN^{1-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad D \gg 1.$$

Nótese que D es el tamaño de la derivada. La condición $D \gg 1$ es meramente técnica, ya que si D fuera muy pequeño podríamos aproximar muy bien las fases por funciones lineales y se tendría una estimación precisa, típicamente una fórmula asintótica.

Los «enemigos» para estimar S son la longitud del intervalo y la oscilación, por ello esperamos acotaciones del tipo

$$|S| \ll D^\alpha N^\beta.$$

Si esta acotación tiene validez general con las hipótesis antes señaladas, se dice que (α, β) es un *par de exponentes*. Con este lenguaje la acotación trivial corresponde a $(0, 1)$.

El método de pares de exponentes de van der Corput establece fórmulas inductivas que permiten generar nuevos pares de exponentes, y están contenidas en los siguientes resultados:

Proceso A. Si (α, β) es un par de exponentes entonces

$$A(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{2\alpha + 2}, \frac{\alpha + \beta + 1}{2\alpha + 2} \right)$$

también lo es.

Proceso B. Si (α, β) es un par de exponentes entonces

$$B(\alpha, \beta) = \left(\beta - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2} \right)$$

también lo es.

Nótese que geoméricamente A atrae (α, β) hacia $(0, 1)$ de forma no lineal y B es la simetría que intercambia $(0, 1)$ y $(1/2, 1/2)$.

A veces se añade a estos dos procesos un tercero, llamado Proceso C, que no es otra cosa que la observación trivial de que el conjunto de pares de exponentes es convexo; es decir, que si (α_1, β_1) y (α_2, β_2) pertenecen a él, entonces $(t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2, t\beta_1 + (1-t)\beta_2)$ con $0 \leq t \leq 1$ también.

Los pares de exponentes de van der Corput se obtienen aplicando de todas las formas posibles los procesos anteriores al par trivial $(0, 1)$. Por ejemplo,

$$B(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad AB(0, 1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right), \quad BA^2B(0, 1) = \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right),$$

son pares de exponentes de van der Corput. En la actualidad se conoce algún par de exponentes que no se obtiene por estos procesos a partir del trivial $(0, 1)$ (en

realidad el método clásico de Vinogradov ya consigue este objetivo en el caso límite $\alpha \rightarrow 0$).

Veamos a grandes rasgos la idea de la demostración de estos dos procesos.

El Proceso A fue introducido por H. Weyl [18] en su estudio de la equidistribución de las partes fraccionarias de polinomios, y en este contexto era una idea simple pero ingeniosa para reducir el grado, En primer lugar, nótese que para cualquier H , digamos pequeño en comparación con N , en la suma doble

$$\sum_{n \asymp N} \sum_{h \leq H} e(f(n+h))$$

cada término de S aparece esencialmente H veces (en rigor hay un pequeño problema técnico con los términos cercanos a la frontera, que obviaremos aquí, estableciendo cierta relación entre los límites de sumación de n y h). Por tanto, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica

$$\begin{aligned} H^2 |S|^2 &\ll N \sum_{n \asymp N} \left| \sum_{h \leq H} e(f(n+h)) \right|^2 \\ &\ll N \sum_{h_1, h_2 \leq H} \left| \sum_{n \asymp N} e(f(n+h_1) - f(n+h_2)) \right|. \end{aligned}$$

La nueva suma trigonométrica que debemos tratar tiene ahora una oscilación, previsiblemente menor, que podemos controlar con H . Es decir, dominamos al «enemigo» de la oscilación a costa de permitir que aparezcan varias sumas trigonométricas, lo que en principio parece favorecer al «enemigo» de la longitud del intervalo de sumación.

El término diagonal $h_1 = h_2$ contribuye con $N^2 H$ mientras que si $h_1 \neq h_2$ podemos usar el par de exponentes (α, β) con la nueva cota para la derivada $\tilde{D} \asymp |h_1 - h_2| DN^{-1}$. En total se obtiene

$$H^2 |S|^2 \ll N^2 H + NH^2 (HDN^{-1})^\alpha N^\beta.$$

Con la elección óptima $H^{\alpha+1} = D^{-\alpha} N^{1+\alpha-\beta}$ se sigue

$$|S| \ll D^{\alpha/(2\alpha+2)} N^{(\alpha+\beta+1)/(2\alpha+2)},$$

que es la estimación deseada.

Olvidándose de los detalles técnicos (que no son triviales), el Proceso B se reduce a la fórmula de sumación de Poisson. Al aplicarla formalmente (sin considerar los problemas de convergencia) pasaríamos a una suma de integrales del tipo

$$I_n = \int e(f(x) - nx) dx.$$

Estas integrales tendrán una contribución relevante sólo si $e(nx)$ y $e(f(x))$ oscilan dentro del mismo rango de frecuencias (y así hay interferencia), es decir, $n \asymp f'$. En este caso, el principio de fase estacionaria sugiere que

$$I_n \sim e^{\pm i\pi/4} \frac{e(g(n))}{\sqrt{|f''(x_n)|}}$$

donde x_n cumple $f'(x_n) = n$ y $g(n) = f'(x_n) - nx_n$. Por consiguiente, sumando por partes (nótese que $|f''(x)| \asymp DN^{-1}$) y suprimiendo términos de orden inferior cabe esperar

$$|S| \ll D^{-1/2} N^{1/2} \left| \sum_{n \asymp D} e(g(n)) \right|$$

donde, como es fácil comprobar derivando implícitamente, $|g'| \asymp N$. Así que aplicando el par de exponentes (α, β) a la última suma, se tiene

$$|S| \ll D^{\beta-1/2} N^{\alpha+1/2},$$

como queríamos demostrar.

En el caso del problema del círculo, para estar en las hipótesis de la teoría de pares de exponentes, lo mejor es utilizar la fórmula $r_2(m) = 4(d_1(m) - d_3(m))$, donde $d_j(m)$ es el número de divisores de m que son congruentes con j módulo 4. Contar puntos en circunferencias se traduce entonces en contar ciertos puntos en hipérbolas del tipo $xy = m$. De esta forma, el Análisis Armónico traduce la acotación del término de error en la estimación de sumas de la forma

$$\sum_{h \asymp H} \sum_{n \asymp N} e\left(h \frac{R^2}{n}\right).$$

Completando este programa [6, §4.4], se llega a que si (α, β) es un par de exponentes entonces el error en el problema del círculo es

$$\#\{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : n^2 + m^2 \leq R^2\} - \pi R^2 = O(R^{(\alpha+\beta)/(\alpha+1)}).$$

A pesar del refinamiento del método, se puede probar [6] que por mucho que apliquemos los procesos A y B (y C), a partir de $(0, 1)$, tan solo puede alcanzarse el exponente $0'65804271\dots$ que está desalentadoramente muy próximo a $2/3$.

4.2. Métodos bidimensionales. Como hemos visto al estudiar los problemas de puntos del retículo, aparecen de forma natural sumas trigonométricas en dos variables. Además la demostración del Proceso A nos indica que se puede transformar una suma unidimensional en otra bidimensional. En cualquier caso, siempre podemos estudiar sumas trigonométricas dobles despreciando la cancelación en una de las variables y tratando la suma en la otra variable. La pregunta lógica es si no se podría generalizar el método antes introducido para que opere genuinamente en las dos variables simultáneamente. La respuesta es que en teoría sí y se conjetura que la cancelación se duplica [6, p. 72–73], pero incluso en los casos más sencillos no se verifican las hipótesis que se necesitan en las pruebas. La razón es que la condición natural

$$\left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k} \right| \asymp \mathcal{D} N^{-j} M^{-k}, \quad j, k = 1, 2, 3, \dots$$

no es suficiente en este caso, porque no asegura que los Hessianos que aparecen al aplicar el método de fase estacionaria no se anulen. De todas formas algunos autores (especialmente G. Kolesnik [14]) han conseguido superar con gran esfuerzo estas dificultades en algunos ejemplos particulares.

4.3. El método de Hardy-Littlewood discreto. La demostración de Huxley [9] del mejor resultado para los problemas de puntos del retículo está basada en los trabajos anteriores [1] y [11]. Como tiene reminiscencias con el método del círculo clásico (también llamado de Hardy-Littlewood) sustituyendo algunas integrales por sumas, se ha dado en llamarlo método de Hardy-Littlewood discreto. Aunque es un proceso bastante complejo, podemos resumir la idea subyacente en unas líneas:

Imaginemos, por ejemplo, la circunferencia aproximada por tangentes. Alrededor de los puntos en los que la pendiente sea un número racional de denominador pequeño podemos contar con bastante precisión los puntos del retículo. Esto se refleja en que la suma trigonométrica correspondiente se puede no sólo estimar, sino aproximar muy bien gracias a la fórmula de sumación de Poisson y el principio de fase estacionaria. Sin embargo con ello sólo se cubre una pequeña porción de la circunferencia (recuérdese lo visto en la segunda sección acerca del espaciamiento cuando el denominador es pequeño) y hay una multitud de sumas trigonométricas que no sabemos controlar individualmente. La idea clave es que, después de tratar estas sumas y agruparlas adecuadamente, si no hay «resonancias» entre las frecuencias no todas las sumas pueden ser grandes simultáneamente. El resultado básico en este sentido es la llamada *desigualdad de gran criba*:

$$\sum_{x_j} \left| \sum_{n \leq N} a_n e(n x_j) \right|^2 \leq (N + \delta^{-1}) \sum_{n \leq N} |a_n|^2,$$

donde $\delta = \min |x_j - x_k|$ con $j \neq k$ y $x_j \in [0, 1 - \delta]$. Cualesquiera que sean los coeficientes $a_n \in \mathbb{C}$, mientras las frecuencias sean bien diferentes (no haya «resonancias»), δ^{-1} tendrá un tamaño aceptable. En el caso de los problemas de puntos del retículo la desigualdad que se necesita [1, Lemma 2.4] es más compleja y versátil pero guarda la misma idea. Una de las mayores dificultades que se plantean tras su aplicación es que el estudio del espaciamiento no es en absoluto sencillo y lleva a problemas diofánticos bastante finos.

5. ALGUNAS APLICACIONES

5.1. El promedio del número de clases. El número de clases de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $h(d)$, mide, en un sentido que no precisaremos aquí, lo lejos que está este anillo de tener factorización única, y tiene una importancia capital en muchos problemas aritméticos. Por ejemplo, $h(-1) = 1$ implica que dados dos primos impares distintos p y q , $x^2 + y^2 = pq$ tiene solución en enteros si y sólo si $x^2 + y^2 = p$ y $x^2 + y^2 = q$ la tienen. Por otra parte, $h(-5) = 2$ implica que, al cambiar $x^2 + y^2$ por $x^2 + 5y^2$, el resultado anterior sólo se cumple para la mitad de los primos. Hay primos como 7 y 23 que son «defectuosos» porque $x^2 + 5y^2 \neq 7, 23$ y sin embargo $9^2 + 5 \cdot 4^2 = 7 \cdot 23$. De alguna forma, $1/h(d)$ es la proporción de primos «no defectuosos» cuando se considera $x^2 - dy^2$ en lugar de $x^2 + y^2$.

El número de clases tiene un comportamiento muy caótico y desconocido, por ejemplo, un resultado tan débil como que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(-n) = \infty$ fue un problema abierto durante más de 130 años. El origen de este problema, y otros similares, está en la obra de Gauss quien introdujo el número de clases en 1801 y dio una

aproximación para su promedio. La relación con los problemas de puntos del retículo viene a través de la fórmula

$$\#\{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : 4ac - b^2 = n, -a < b \leq a < c \text{ ó } 0 \leq b \leq a = c\} = \sum_{k^2|n} h(-n/k^2).$$

Así que el número de clases está relacionado con el número de puntos del retículo en cierta porción de un hiperboloide. Curiosamente se puede hacer lo mismo con una superficie esférica para muchos valores de n . A través de esta relación con los puntos del retículo, mediante métodos avanzados se puede dar una forma precisa de la aproximación de Gauss. Concretamente de [4] y [8] se deduce que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} h(-n) = \frac{\pi}{18\zeta(3)} N^{1/2} - \frac{3}{2\pi^2} + O(N^{-11/32+\epsilon}).$$

En particular, en media, $h(-n)$ crece como \sqrt{n} .

5.2. Problemas aleatorios. Uno de los hitos de la Física actual es la formulación de R. P. Feynmann de la Mecánica Cuántica por medio de integrales sobre todos los caminos. Según esta interpretación, si un haz de luz parte de P se refleja en un espejo y llega a Q , lo que ocurre no es que los fotones sigan trayectorias rectilíneas y verifiquen mágicamente que el ángulo de incidencia y el de reflexión sean iguales, sino que los fotones siguen *todas* las trayectorias y la probabilidad de ir de P a Q depende del valor de

$$\int_P^Q e^{iS/\hbar} \mathcal{D}\mu,$$

donde S es la acción y $\mathcal{D}\mu$ es una medida sobre el espacio de todos los caminos que unen P y Q . Si creemos que el principio de fase estacionaria es aplicable en este contexto (\hbar es pequeño), deduciremos que la trayectoria más probable es la de acción estacionaria, esto es, la clásica.

La filosofía subyacente también encuentra su reflejo en varios aspectos de la Ciencia: quizá no debemos buscar modelos plenamente deterministas que den resultados precisos a partir de datos precisos, sino que más bien muchos fenómenos responden a comportamientos cualitativos y leyes de escala obtenidos al promediar sobre todos los escenarios posibles.

Con esta idea en mente tiene sentido formular problemas de puntos del retículo para curvas aleatorias y de hecho Ya. G. Sinai ha estudiado algunos de ellos en relación con la Física. En nuestro contexto y guardando la analogía con las integrales de Feynman podemos considerar todos los arcos convexos uniendo $(0, 0)$ y $(N, 0)$ cuya curvatura sea comparable a $1/N$. Como la curvatura coincide con la derivada segunda tras un giro de ejes, podemos pensar que estos arcos son gráficas con $c_2/N \leq -f'' \leq c_1/N$. Si las identificamos con sus valores en los enteros, $y_i = f(i)$, una medida natural en este espacio es

$$d\mu_N(f) = K_N \prod_{i=1}^{N-1} \phi\left(-\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{2}N\right),$$

con ϕ soportada en $[c_1, c_2]$, y K_N se escoge de forma que $\int d\mu_N(f) = 1$. Utilizando esta medida, en [3] se prueba que la conjetura de Hardy de que el error está acotado por $O(N^\theta)$ para todo $\theta > 1/2$ es cierta para casi todo arco.

5.3. Átomos. En la formulación de Born-Oppenheimer se considera que un átomo consta de un núcleo de carga Z , que supondremos en el origen, y de Z electrones cuantizados. Para simplificar la presentación, aunque sin alterar el alcance de nuestro punto de vista, consideraremos que la masa y la carga del electrón son iguales a uno, así como también la constante de Planck; si además prescindimos del *spin*, entonces el hamiltoniano es el siguiente:

$$H_Z = - \sum_{i=1}^Z \left(\Delta_{x_i} + \frac{Z}{\|x_i\|} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|},$$

que es un operador que actúa sobre el espacio \mathcal{H} de funciones de onda antisimétricas.

El estado fundamental está descrito por una función Ψ_0 que minimiza la energía:

$$E(Z) = \inf_{\|\Psi\|_2=1, \Psi \in \mathcal{H}} \langle H_Z \Psi, \Psi \rangle.$$

La función de onda da lugar a la densidad electrónica

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^{3(Z-1)}} |\Psi(x, x_2, \dots, x_Z)|^2 dx_2 \dots dx_Z$$

cuya interpretación (de Copenhague) es que la probabilidad de encontrar un electrón del sistema en una región A del espacio \mathbb{R}^3 es igual a $\int_A \rho(x) dx$.

Tenemos el siguiente:

Teorema. *Para $Z \rightarrow +\infty$ se cumple la fórmula asintótica*

$$E(Z) = C_{TF} Z^{7/3} + C_{Sc} Z^2 + C_{SD} Z^{5/3} + \dots$$

El primer término fue conjeturado por Fermi (1927) y demostrado por Lieb y Simon (1977). El segundo, respectivamente por Scott (1952) y por Hughes (1990); y el tercero fue previsto por Schwinger y Dirac y finalmente demostrado por Fefferman y Seco (1991).

La prueba es bastante laboriosa; sin embargo resulta interesante resaltar que en [5] se observa que el término siguiente en el desarrollo asintótico de $E(Z)$ no es de la forma $C Z^{4/3}$, sino que es una suma trigonométrica similar a la que aparece en el problema del círculo:

$$\psi(Z) = \sum_{k=1}^{\lambda} f(k) \mu(\lambda \phi(k/\lambda))$$

donde $\lambda = Z^{1/3}$ y $\mu(x) = \text{dist}(x, \mathbb{Z})^2 - 1/12$. La amplitud f y la fase ϕ involucran al potencial de Thomas-Fermi, pero son apropiadas en el sentido de que f es «monótona» y ϕ es convexa. El método de van der Corput permite entonces demostrar lo siguiente:

Teorema.

- (a) $|\psi(Z)| \leq CZ^{3/2}$.
- (b) $\limsup_{Z \rightarrow \infty} |Z^{-3/2}\psi(Z)| \neq 0$.
- (c) ψ oscila «cuasiperiódicamente».

Básicamente existen dos estrategias para estimar $E(Z)$: la de Hartree-Fock y la de Thomas-Fermi. La primera es idónea para el caso de pocos electrones, mientras que la de Thomas-Fermi es una aproximación estadística que debe mejorar para números atómicos grandes. En las demostraciones de los teoremas anteriormente citados se combinan ambos puntos de vista.

Consideremos el hamiltoniano

$$H_0 = \sum_i (-\Delta_{x_i} + V(x_i)),$$

donde V es el potencial que actúa sobre un solo electrón y que en principio desconocemos. Si supiéramos la densidad electrónica ρ , un buen candidato para V sería

$$V(x) = -\frac{Z}{\|x\|} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\|x-y\|} dy.$$

Supongamos por un momento que tenemos ρ , El método de separación de variables permite obtener el estado fundamental de H_0 :

$$\Psi_{hf}(x_1, \dots, x_Z) = C \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \varphi_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \varphi_Z(x_{\sigma(Z)}),$$

donde $\{\varphi_1, \dots, \varphi_Z\}$ son las primeras autofunciones del operador de una sola variable tridimensional $-\Delta_x + V(x)$, C es una constante de normalización, y el sumatorio está extendido sobre todas las permutaciones de Z elementos.

La energía (de Hartree-Fock) es entonces $E_{hf}(Z) = \langle H\Psi_{hf}, \Psi_{hf} \rangle$. La densidad electrónica debe verificar una ecuación de autoconsistencia:

$$\rho_{hf}(x) = \int |\Psi_{hf}(x, x_2, \dots, x_Z)|^2 dx_2 \dots dx_Z = \sum_{k=1}^Z |\varphi_k(x)|^2 = \rho(x).$$

La ecuación $\rho_{hf} = \rho$ se resuelve por iteración, pero hay que tener cuidado en hacer una buena elección de la densidad de partida.

En este empeño resulta útil la teoría de Thomas-Fermi. En ella, la energía asociada a ρ viene dada por la expresión

$$\mathcal{E}_{TF}(\rho) = C_{TF} \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{5/3}(x) dx + \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(x)\rho(y)}{\|x-y\|} dx dy - Z \int \frac{\rho(x)}{\|x\|} dx,$$

donde los dos últimos sumandos representan la energía potencial electrostática, mientras que el primero describe la energía cinética (lo que puede ser justificado mediante un argumento que involucra contar puntos del retículo dentro de una esfera).

Surge, por tanto, el problema de calcular

$$\min \left\{ \mathcal{E}_{TF}(\rho) : \int \rho(x) dx = Z \right\},$$

que puede tratarse por los métodos del Cálculo de Variaciones, obteniéndose la densidad electrónica que corresponde al potencial de Thomas-Fermi $V_{TF}^Z(x)$. Estamos entonces en condiciones de escribir la fórmula del término $\psi(Z)$:

$$\sum_{l=1}^{l_{TF}} \frac{2l+1}{\frac{1}{\pi} \int [V_{TF}^Z(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}]_+^{-1/2} dr} \mu \left(\int [V_{TF}^Z(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}]_+^{-1/2} dr \right).$$

Como hemos indicado anteriormente, con un poco de trabajo es posible preparar la suma $\psi(Z)$ de manera que el método de van der Corput (fórmula de sumación de Poisson más fase estacionaria) nos dé la estimación del teorema. La mayor regularidad de $\mu(x)$ respecto a la función parte fraccionaria hace que esta suma sea más fácil de estimar que la correspondiente al problema del círculo. No obstante, resultan dignos de ser reseñados tanto el parecido analítico del estos problemas como el carácter oscilatorio del término ψ , comparado con la periodicidad de las propiedades químicas de los átomos. Son un testimonio fehaciente de la relación entre la Teoría de los Números y la Mecánica Cuántica.

REFERENCIAS

- [1] E. Bombieri y H. Iwaniec, On the order of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, *Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa (4)* **13** (1986), 449–472.
- [2] E. Bombieri y J. Pila, The number of integral points on arcs and ovals, *Duke Math. J.* **59** (1989), 337–357.
- [3] F. Chamizo y A. Córdoba, A path integral approach to lattice point problems, prepublicación (2000).
- [4] F. Chamizo y H. Iwaniec, On the Gauss mean-value formula for class number, *Nagoya Math. J.* **151** (1998), 199–208.
- [5] A. Córdoba, C. Fefferman y L. A. Seco, Weyl sums and atomic energy oscillations, *Rev. Mat. Iberoamericana* **11** (1995), 165–226.
- [6] S. W. Graham y G. Kolesnik, *Van der Corput's method of exponential sums*, London Math. Society Lecture Note Series **126**, Cambridge University Press, 1991.
- [7] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 5.ª edición, Oxford University Press, 1983.
- [8] D. R. Heath-Brown, Lattice points in the sphere, en *Number theory in progress, Vol. 2* (Zakopane-Kościelisko, 1997), de Gruyter, Berlín (1999), 883–892.
- [9] M. N. Huxley, Exponential sums and lattice points II, *Proc. London Math. Soc. (3)* **66** (1993), 279–301.
- [10] M. N. Huxley, *Area, lattice points, and exponential sums*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [11] H. Iwaniec y C. J. Mozzochi, On the divisor and circle problems, *J. Number Theory* **29** (1988), 60–93.
- [12] V. Jarník, Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, *Math. Zeitschrift* **24** (1925), 500–518.
- [13] D. G. Kendall, On the number of lattice points inside a random oval, *Quart. J. Math. Oxford* **19** (1948), 1–26.
- [14] G. Kolesnik, On the method of exponent pairs, *Acta Arith.* **45** (1985), 115–143.
- [15] W. G. Nowak, On the lattice rest of a convex body in \mathbb{R}^s , *Arch. Math.* **45** (1985), 284–288.
- [16] E. Phillips, The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method, *Quart. J. Math.* **4** (1933), 209–225.
- [17] H. P. F. Swinnerton-Dyer, The number of lattice points on a convex curve, *J. Number Theory* **6** (1974), 128–135.
- [18] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.* **77** (1916), 313–352.

k -COHERENCE OF MEASURES WITH NON-CLASSICAL WEIGHTS

FRANCISCO MARCELLÁN, ANDREI MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN
 AND JUAN J. MORENO-BALCÁZAR

*Dedicated to Prof. Dr. José Javier Guadalupe, Chicho.
 His memory will always remain with us.*

ABSTRACT. The concept of k -coherence of two positive measures μ_1 and μ_2 is useful in the study of the Sobolev orthogonal polynomials. If μ_1 or μ_2 are compactly supported on \mathbb{R} then any 0-coherent pair or symmetrically 1-coherent pair (μ_1, μ_2) must contain a Jacobi measure (up to affine transformation). Here examples of k -coherent pairs ($k \geq 1$) when neither μ_1 nor μ_2 are Jacobi are constructed.

1. INTRODUCTION AND k -COHERENCE

Given two positive distribution functions (see, e.g., [10]), μ_1 and μ_2 , supported on \mathbb{R} and with an infinite number of points of increase, we can define the Sobolev inner product

$$(1) \quad (p, q)_S = \int pq \, d\mu_1 + \int p'q' \, d\mu_2,$$

on the space \mathbb{P} of algebraic polynomials with real coefficients. The sequence Q_n , $\deg Q_n(x) = n$, $n = 0, 1, \dots$ of monic polynomials orthogonal with respect to (1) has been object of interest in the last years. Algebraic and analytic properties of these polynomials (known as Sobolev orthogonal polynomials) have been studied and compared with the corresponding properties of the monic polynomial sequences $P_n(\mu_i, \cdot)$ such that for $i = 1, 2$,

$$\deg P_n(\mu_i, \cdot) = n, \quad \langle P_n(\mu_i, x), x^j \rangle_i = 0, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

with

$$\langle p, q \rangle_i = \int pq \, d\mu_i,$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 42C05; Secondary 33C25.

Key words and phrases. Coherent pairs of measures, Sobolev orthogonal polynomials.

Research of F. Marcellán supported by Dirección General de Investigación (Ministerio de Ciencia y Tecnología) of Spain under grant BFM2000-0206-C04-01.

Research of A. Martínez-Finkelshtein partially supported by INTAS project 2000-272, a research grant of Dirección General de Enseñanza Superior (DGES) of Spain, project code PB95-1205, and by Junta de Andalucía, Grupo de Investigación FQM 0229.

Research of J. J. Moreno-Balcázar partially supported by Junta de Andalucía, Grupo de Investigación FQM 0229, and INTAS project 2000-272.

(see [5]–[8]). This study is much simplified if we assume a link between the measures μ_1 and μ_2 , restrictive enough to follow the structural properties of the sequence $\{Q_n\}$, but sufficiently loose to get some insight concerning the general situation.

One of these links, appeared in [3], is the concept of the *coherence of measures*; it proved to be a fruitful tool in the study of the Sobolev orthogonal polynomials. All the coherent pairs of measures (μ_1, μ_2) have been obtained in [9]; in particular, it was shown that at least one of them must be a classical weight function (Jacobi, Laguerre or Hermite).

Thus, in order to deal with pairs (μ_1, μ_2) with non-classical weights, we need to extend the concept of coherence. The main goal of this work is to show how to construct such pairs of measures, linked by the so-called k -coherence relation. These measures are in particular suitable for the study of structural and analytic properties of the Sobolev polynomials $\{Q_n\}$ (see, e.g., [7]).

Definition 1 (k -coherence). *Let $\mu_i, i = 1, 2$, be two positive measures. Then (μ_1, μ_2) is a k -coherent pair of measures ($k \geq 0$) if for every $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k + 1$, there exist $\sigma_n^{(n)}(\mu_1, \mu_2), \dots, \sigma_n^{(n-k)}(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}$, with $\sigma_n^{(n-k)}(\mu_1, \mu_2) \neq 0$, such that*

$$(2) \quad P_n(\mu_2, x) = \frac{P'_{n+1}(\mu_1, x)}{n+1} - \sum_{j=0}^k \sigma_n^{(n-j)}(\mu_1, \mu_2) \frac{P'_{n-j}(\mu_1, x)}{n-j}.$$

Remark: Relation (2) can be considered for $k = -1$, but this case is trivial and is only verified by the classical polynomials: Jacobi, Laguerre, Hermite and Bessel (see [10]). If $k = 0$, we obtain the 0-coherence (or just coherence) introduced by Iserles et al. in [3], and $k = 1$ yields the 1-coherence studied by de Bruin and Meijer in [2] as well as by Kwon et al in [4]. A particular case of 1-coherence is the symmetric coherence, also introduced by Iserles et al. in [3], which takes place when both measures are symmetric with respect to the origin.

When the measures μ_1 and μ_2 are linked by k -coherence, a connection between the families $\{Q_n\}$ and $\{P_n(\mu_1, \cdot)\}$ can be established. Indeed, denote $k_n(\mu_i) = \langle P_n(\mu_i, \cdot), P_n(\mu_i, \cdot) \rangle_i$, $i = 1, 2$, and $\tilde{k}_n = (Q_n, Q_n)_S$. In order to simplify notations we omit the explicit reference to the pair (μ_1, μ_2) in the coefficients $\sigma_n^{(n-j)}$, whenever it cannot lead to confusion.

We have the following relation between the polynomials $P_n(\mu_1, x)$ and $Q_n(x)$:

Proposition 1. *Let (μ_1, μ_2) be a k -coherent pair of measures satisfying (2). Then, for $n \geq k + 1$, there exist $\alpha_n^{(n-j)} \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, k$, with $\alpha_n^{(n-k)} \neq 0$, such that*

$$P_{n+1}(\mu_1, x) - \sum_{j=0}^k \sigma_n^{(n-j)} \frac{n+1}{n-j} P_{n-j}(\mu_1, x) = Q_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^k \alpha_n^{(n-j)} Q_{n-j}(x).$$

Proof. Consider the 1-parametric family of Sobolev inner products, given by

$$(3) \quad (p, q)_S = \int pq d\mu_1 + \lambda \int p'q' d\mu_2, \quad \lambda \geq 0.$$

Standard arguments allow to express the polynomial $Q_n(x; \lambda)$, orthogonal with respect to (3), as a ratio of two determinants. It can be observed that $Q_n(x; 1) =$

$Q_n(x)$, and that the coefficients of $Q_n(x; \lambda)$ are rational functions in λ such that for each n a non-trivial limit polynomial

$$R_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_n(x; \lambda)$$

exists. This monic polynomial has degree n and satisfies (see [8]):

$$(4) \quad \langle R_n, 1 \rangle_1 = 0, \quad n \geq 1,$$

$$(5) \quad \langle R'_n, x^m \rangle_2 = 0, \quad n \geq 2, \quad 0 \leq m \leq n - 2.$$

From (5) we get

$$(6) \quad R'_{n+1}(x) = (n + 1)P_n(\mu_2, x), \quad n \geq 1.$$

For the time being, we have not used the concept of k -coherence. Now, by (2), relation (6) can be rewritten as

$$R'_{n+1}(x) = P'_{n+1}(\mu_1, x) - (n + 1) \sum_{j=0}^k \sigma_n^{(n-j)}(\mu_1, \mu_2) \frac{P'_{n-j}(\mu_1, x)}{n - j}, \quad n \geq k + 1.$$

Taking into account (4),

$$(7) \quad R_{n+1}(x) = P_{n+1}(\mu_1, x) - \sum_{j=0}^k \sigma_n^{(n-j)} \frac{n + 1}{n - j} P_{n-j}(\mu_1, x), \quad n \geq k + 1.$$

On the other hand, expanding R_{n+1} in the basis $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}\}$, and using (5) and (7) we get

$$(8) \quad R_{n+1}(x) = Q_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^k \alpha_n^{(n-j)} Q_{n-j}(x),$$

where, using (6) and (7),

$$\alpha_n^{(n-j)} = \frac{\langle R_{n+1}, Q_{n-j} \rangle_S}{\tilde{k}_{n-j}} = \frac{\langle R_{n+1}, Q_{n-j} \rangle_1}{\tilde{k}_{n-j}}, \quad j = 0, \dots, k.$$

Moreover, we have, for $j = k$,

$$\alpha_n^{(n-k)} = -\sigma_n^{(n-k)} \frac{n + 1}{n - k} \frac{k_{n-k}(\mu_1)}{\tilde{k}_{n-k}} \neq 0.$$

It remains to gather (7) and (8). □

2. k -COHERENT PAIRS

Given a positive and integrable function f on an open bounded interval $\Delta \subset \mathbb{R}$, $f(x) dx$ stands for an absolutely continuous measure, supported on Δ , whose Radon-Nikodym derivative with respect to the Lebesgue measure dx on Δ is $f(x)$. Furthermore, for $\xi \in \mathbb{R}$, $\delta(\xi)$ will be the Dirac delta (mass point) at ξ .

The complete classification of the coherent and symmetrically coherent pairs was given by Meijer in [9]. In particular, he proved that if $\text{supp}(\mu_1) = [-1, 1]$ then all the 0-coherent pairs (μ_1, μ_2) are those described in the following table:

TABLE 1

| Case | μ_1 | μ_2 |
|------|--|--|
| 1 | $(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx$ | $\frac{1}{ x-\xi_2 }(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M\delta(\xi_2)$ |
| 2 | $ x-\xi_1 (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx$ | $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ |
| 3 | $(1+x)^{\beta-1}dx + M\delta(1)$ | $(1+x)^\beta dx$ |
| 4 | $(1-x)^{\alpha-1}dx + M\delta(-1)$ | $(1-x)^\alpha dx$ |

with $\alpha, \beta > 0$, $|\xi_1| > 1$, $|\xi_2| \geq 1$, and $M \geq 0$.

In a similar way, all the symmetrically coherent pairs (μ_1, μ_2) were classified as follows:

TABLE 2

| Case | μ_1 | μ_2 | |
|------|---------------------------------------|--|------------------|
| 5 | $(1-x^2)^{\alpha-1}dx$ | $\frac{(1-x^2)^\alpha}{x^2+\xi_2^2}dx$ | $\xi_2 \neq 0$ |
| 6 | $(1-x^2)^{\alpha-1}dx$ | $\frac{(1-x^2)^\alpha}{\xi_2^2-x^2}dx + M[\delta(-\xi_2) + \delta(\xi_2)]$ | $ \xi_2 \geq 1$ |
| 7 | $(x^2 + \xi_1^2)(1-x^2)^{\alpha-1}dx$ | $(1-x^2)^\alpha dx$ | $\xi_1 \neq 0$ |
| 8 | $(\xi_1^2 - x^2)(1-x^2)^{\alpha-1}dx$ | $(1-x^2)^\alpha dx$ | $ \xi_1 > 1$ |
| 9 | $dx + M[\delta(1) + \delta(-1)]$ | dx | |

with $\alpha > 0$ and $M \geq 0$. Notice that in all the cases at least one of the measures is the Jacobi weight.

The main goal of this work is to give some non-trivial examples of k -coherent pairs (μ_1, μ_2) , $k \geq 1$, for which neither μ_1 nor μ_2 are Jacobi, combining coherent pairs from Tables 1 and 2:

Proposition 2.

(i) *The pair*

| Case 1 | μ_1 | μ_2 |
|--------|--|--|
| | $ x-\xi_1 (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx$ | $\frac{1}{ x-\xi_2 }(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M\delta(\xi_2)$ |

with $\alpha, \beta > 0$, $|\xi_1| > 1$, $|\xi_2| \geq 1$ and $M \geq 0$, is 1-coherent.

(ii) *Pairs*

| Case 2 | μ_1 | μ_2 | |
|--------|---------------------------------------|---|--------------------------------|
| 2a | $(x^2 + \xi_1^2)(1-x^2)^{\alpha-1}dx$ | $\frac{1}{ x-\xi_2 }(1-x^2)^\alpha dx + M\delta(\xi_2)$ | $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \geq 1$ |
| 2b | $(\xi_1^2 - x^2)(1-x^2)^{\alpha-1}dx$ | $\frac{1}{ x-\xi_2 }(1-x^2)^\alpha dx + M\delta(\xi_2)$ | $ \xi_1 > 1, \xi_2 \geq 1$ |

with $\alpha > 0$, and $M \geq 0$, and

| Case 3 | μ_1 | μ_2 | |
|--------|--------------------------------------|---|-------------------------------|
| 3a | $ x - \xi_1 (1 - x^2)^{\alpha-1} dx$ | $\frac{(1-x^2)^\alpha}{x^2+\xi_2^2} dx$ | $ \xi_1 > 1, \xi_2 \neq 0$ |
| 3b | $ x - \xi_1 (1 - x^2)^{\alpha-1} dx$ | $\frac{(1-x^2)^\alpha}{\xi_2^2-x^2} dx + M[\delta(-\xi_2) + \delta(\xi_2)]$ | $ \xi_1 > 1, \xi_2 \geq 1$ |

with $\alpha > 0$, are 2-coherent.

(iii) Pairs

| Case 4 | μ_1 | μ_2 | |
|--------|--|---|--------------------------------|
| 4a | $(x^2 + \xi_1^2)(1 - x^2)^{\alpha-1} dx$ | $\frac{(1-x^2)^\alpha}{x^2+\xi_2^2} dx$ | $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$ |
| 4b | $(x^2 + \xi_1^2)(1 - x^2)^{\alpha-1} dx$ | $\frac{(1-x^2)^\alpha}{\xi_2^2-x^2} dx + M[\delta(-\xi_2) + \delta(\xi_2)]$ | $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \geq 1$ |
| 4c | $(\xi_1^2 - x^2)(1 - x^2)^{\alpha-1} dx$ | $\frac{(1-x^2)^\alpha}{x^2+\xi_2^2} dx$ | $ \xi_1 > 1, \xi_2 \neq 0$ |
| 4d | $(\xi_1^2 - x^2)(1 - x^2)^{\alpha-1} dx$ | $\frac{(1-x^2)^\alpha}{\xi_2^2-x^2} dx + M[\delta(-\xi_2) + \delta(\xi_2)]$ | $ \xi_1 > 1, \xi_2 \geq 1$ |

with $\alpha > 0$, and $M \geq 0$, are 3-coherent.

In all the cases, the absolutely continuous parts of μ_1 and μ_2 are supported on $[-1, 1]$.

Proof. Fix $\alpha, \beta > 0$ corresponding to μ_2 and denote the Jacobi measures

$$(9) \quad \nu_1 = (1 - x)^{\alpha-1}(1 + x)^{\beta-1} dx, \quad \nu_2 = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta dx,$$

with the following convention: if β does not appear explicitly in the expression of μ_2 (Cases 2–4), then assume

$$(10) \quad \alpha = \beta.$$

We use the fact that the derivative of a Jacobi polynomial is still a Jacobi polynomial (see [10]):

$$(11) \quad P'_n(\nu_1, x) = nP_{n-1}(\nu_2, x).$$

Consider Case 1. Take

$$\mu_1 = |x - \xi_1|(1 - x)^{\alpha-1}(1 + x)^{\beta-1} dx, \quad \mu_2 = \frac{1}{|x - \xi_2|}(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta dx + M\delta(\xi_2).$$

Since μ_2 is 0-coherent with ν_1 (see Case 1 of Table 1), we have

$$P_n(\mu_2, x) = \frac{P'_{n+1}(\nu_1, x)}{n+1} - \sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2) \frac{P'_n(\nu_1, x)}{n},$$

so that using (11),

$$P_n(\mu_2, x) = P_n(\nu_2, x) - \sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2) P_{n-1}(\nu_2, x).$$

But ν_2 is 0-coherent with μ_1 (see Case 2, Table 1). Then,

$$P_n(\nu_2, x) = \frac{P'_{n+1}(\mu_1, x)}{n+1} - \sigma_n^{(n)}(\mu_1, \nu_2) \frac{P'_n(\mu_1, x)}{n},$$

so that,

$$P_n(\mu_2, x) = \frac{P'_{n+1}(\mu_1, x)}{n+1} - \left(\sigma_n^{(n)}(\mu_1, \nu_2) + \sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2) \right) \frac{P'_n(\mu_1, x)}{n} \\ + \sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2) \sigma_{n-1}^{(n-1)}(\mu_1, \nu_2) \frac{P'_{n-1}(\mu_1, x)}{n-1}, \quad n \geq 2.$$

This proves that (μ_1, μ_2) is 1-coherent with coherence parameters

$$\sigma_n^{(n)}(\mu_1, \mu_2) = \sigma_n^{(n)}(\mu_1, \nu_2) + \sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2), \\ \sigma_n^{(n-1)}(\mu_1, \mu_2) = -\sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2) \sigma_{n-1}^{(n-1)}(\mu_1, \nu_2).$$

In the same way, if we combine coherent pairs of Table 1 or Table 2 we get all the pairs that appear in Proposition 2. We omit the details and summarize the coherence parameters $\sigma_n^{(n-j)}(\mu_1, \mu_2)$ using the notation of (9) and (10):

| Case | $\sigma_n^{(n)}(\mu_1, \mu_2)$ | $\sigma_n^{(n-1)}(\mu_1, \mu_2)$ |
|------|---|--|
| 1 | $\sigma_n^{(n)}(\mu_1, \nu_2) + \sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2)$ | $-\sigma_{n-1}^{(n-1)}(\mu_1, \nu_2) \sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2)$ |
| 2 | $\sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2)$ | $\sigma_n^{(n-1)}(\mu_1, \nu_2)$ |
| 3 | $\sigma_n^{(n)}(\mu_1, \nu_2)$ | $\sigma_n^{(n-1)}(\nu_1, \mu_2)$ |
| 4 | 0 | $\sigma_n^{(n-1)}(\mu_1, \nu_2) + \sigma_n^{(n-1)}(\nu_1, \mu_2)$ |

| Case | $\sigma_n^{(n-2)}(\mu_1, \mu_2)$ | $\sigma_n^{(n-3)}(\mu_1, \mu_2)$ |
|------|--|--|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | $-\sigma_{n-1}^{(n-2)}(\mu_1, \nu_2) \sigma_n^{(n)}(\nu_1, \mu_2)$ | 0 |
| 3 | $-\sigma_{n-2}^{(n-2)}(\mu_1, \nu_2) \sigma_n^{(n-1)}(\nu_1, \mu_2)$ | 0 |
| 4 | 0 | $-\sigma_{n-2}^{(n-3)}(\mu_1, \nu_2) \sigma_n^{(n-1)}(\nu_1, \mu_2)$ |

□

From the proof of Proposition 2 it can be seen that in all the cases the coherence parameters $\sigma_n^{(n-j)}(\mu_1, \mu_2)$ are sums or products of the parameters involved in the coherence or symmetrically coherence relations, which are convergent as $n \rightarrow \infty$ (see [5]–[8]). Hence, $\sigma_n^{(n-j)}(\mu_1, \mu_2)$ have finite limits when $n \rightarrow \infty$, fact which can be used in the study of the asymptotics of $\{Q_n\}$. Actually, following the scheme proposed in [8] we can prove

Theorem 1. *Let (μ_1, μ_2) be a pair as in Proposition 2. Then,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(x)}{P_n(\mu_2, x)} = \frac{1}{\Phi'(x)}$$

uniformly on compact subsets of $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ where $\Phi(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})/2$ with $\sqrt{x^2 - 1} > 0$ when $x > 1$.

Open questions. In this paper some non-trivial k -coherent pairs of measures are given; still the problem of the complete classification of all k -coherent pairs (with $k \geq 1$) remains open and has an independent interest. In this sense, in [4] the authors have obtained all the 1-coherent pairs when one of the measures is classic (i.e., Jacobi, Laguerre or Hermite).

Furthermore, the approach described in this work can be applied to obtain k -coherent pairs with unbounded support. Asymptotic properties for coherent and symmetrically coherent pairs with unbounded support have been obtained in [6] and [1], respectively, but not much more in this direction is known.

REFERENCES

- [1] M. Alfaro, J. J. Moreno-Balcázar, T. E. Pérez, M. A. Piñar and M. L. Rezola, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for Hermite coherent pairs, *J. Comp. Appl. Math.* **133** (2001), 141–150.
- [2] M. G. de Bruin and H. G. Meijer, Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete Sobolev space, *Ann. Numer. Math.* **2** (1995), 233–246.
- [3] A. Iserles, P. E. Koch, S. Nørsett and J. M. Sanz-Serna, On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products, *J. Approx. Theory* **65** (1991), 151–175.
- [4] K. H. Kwon, J. H. Lee and F. Marcellán, Generalized coherent pairs, *J. Math. Anal. Appl.* **253** (2001), 482–514.
- [5] F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein and J. J. Moreno-Balcázar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for symmetrically coherent pairs of measures with compact support, *J. Comp. Appl. Math.* **81** (1997), 217–227.
- [6] F. Marcellán and J. J. Moreno-Balcázar, Strong and Plancherel-Rotach asymptotics of non-diagonal Laguerre-Sobolev, *J. Approx. Theory* **110** (2001), 54–73.
- [7] A. Martínez-Finkelshtein, Asymptotics properties of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.* **99** (1998), 491–510.
- [8] A. Martínez-Finkelshtein, J. J. Moreno-Balcázar, T. E. Pérez and M. A. Piñar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of measures, *J. Approx. Theory* **92** (1998), 280–293.
- [9] H. G. Meijer, Determination of all coherent pairs, *J. Approx. Theory* **89** (1997), 321–343.
- [10] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th edition, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

F. MARCELLÁN: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, SPAIN

E-mail address: pacomarc@ing.uc3m.es

A. MARTÍNEZ-FINKELSHEIN AND J. J. MORENO-BALCÁZAR: DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA Y MATEMÁTICA APLICADA, UNIVERSIDAD DE ALMERÍA, SPAIN

E-mail address: andrei@ual.es, balcazar@ual.es

URL: <http://www.ual.es/~andrei>, <http://www.ual.es/~balcazar>

_____: INSTITUTO CARLOS I DE FÍSICA TEÓRICA Y COMPUTACIONAL, UNIVERSIDAD DE GRANADA, SPAIN

LOS q -POLINOMIOS HIPERGEOMÉTRICOS

RENATO ÁLVAREZ-NODARSE

A Chicho por estar siempre ahí

ABSTRACT. It is well known that the q -polynomials of hypergeometric type are the polynomial solutions of a certain second order difference equation in a non-uniform lattice. In this short paper we present a modification of the proof of a Theorem by Atakishiyev, Rahman, and Suslov that characterizes the most general lattice.

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de la familia de las funciones especiales, y en particular de los polinomios ortogonales, se encuentran los q -polinomios. Estos objetos matemáticos tienen un gran interés por sus distintas aplicaciones en diversas áreas de la física-matemática. Son importantes sus aplicaciones y su relación con la teoría de particiones [3], las fracciones continuas, series de Euler, funciones theta y elípticas, entre otras (ver e.g. [4, 5, 16]). A lo anterior hay que unirle su estrecha conexión con la teoría de representación de q -álgebras (ver [18, 25]), éstas últimas recientemente usadas para describir el espectro *rotacional y vibracional* de núcleos atómicos, moléculas, etc. (ver e.g. [15] y las referencias del mismo). Sus aplicaciones en física se han incrementado en la última década debido a la introducción de los q -osciladores cuánticos (ver e.g. [7, 8, 11, 12] y las referencias de los mismos), el q -análogo de la teoría cuántica del momento angular [22]–[24], y las q -ecuaciones de Schrödinger [20].

Es conocido que las familias de q -polinomios se pueden obtener a partir de una ecuación en diferencias en una red no uniforme [10, 21] del tipo $x(s) = c_1q^s + c_2q^{-s} + c_3$. La suficiencia de este resultado se debe a Nikiforov y Uvarov en dos preprints (en ruso) de 1983 y completada en la edición rusa (Hauka, 1985) de la monografía [21]. Años más tarde Atakishiyev, Rahman y Suslov [10] prueban que este resultado también es necesario. Nuestro principal objetivo en este breve trabajo es dar una prueba más simple de la necesidad que la propuesta en [10]. Finalmente, consideraremos algunos ejemplos representativos.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 33D45.

Key words and phrases. Basic orthogonal polynomials and functions.

Este trabajo fue parcialmente financiado por el M.E.C. a través del proyecto BFM2000-0206-C04-02 de la Dirección General de Investigación (DGI) y el proyecto FQM-0262 de la Junta de Andalucía.

2. LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA EN UNA RED NO UNIFORME

Comenzaremos considerando una discretización de la ecuación diferencial hipergeométrica

$$(1) \quad \tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0,$$

consistente en aproximar las derivadas y' e y'' de la siguiente forma:

$$y'(x) \sim \frac{1}{2} \left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} + \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)} \right],$$

$$y''(x) \sim \frac{1}{x(s + \frac{h}{2}) - x(s - \frac{h}{2})} \left[\frac{y(x(s+h)) - y(x(s))}{x(s+h) - x(s)} - \frac{y(x(s)) - y(x(s-h))}{x(s) - x(s-h)} \right].$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (1), y haciendo el cambio lineal de la variable $s \rightarrow hs$ obtenemos la ecuación:

$$(2) \quad \tilde{\sigma}(x(s)) \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla y(x(s))}{\nabla x(s)} + \frac{\tilde{\tau}(x(s))}{2} \left[\frac{\Delta y(x(s))}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(x(s))}{\nabla x(s)} \right] + \lambda y(x(s)) = 0,$$

$$\nabla f(s) = f(s) - f(s-1), \quad \Delta f(s) = f(s+1) - f(s),$$

donde $\tilde{\sigma}(x(s))$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en $x(s)$ y $\tilde{\tau}(x(s))$, de grado 1 y λ es una constante. Se puede comprobar que (2) aproxima a la ecuación original (1) en la *red no uniforme* $x(s)$ hasta orden $O(h^2)$.

En adelante llamaremos *red*, a una función $x(s) \in C^2(U)$, donde U es cierto dominio del plano complejo, tal que $x(s)$, $s = 0, 1, 2, \dots$ define un conjunto de puntos de \mathbb{C} en los cuales vamos a discretizar la ecuación (1) y asumiremos que $x(s)$ no es constante, es decir que $\Delta x(s) \neq 0$ para todo s . Además la distancia entre dos puntos $\Delta x(s) \equiv x(s+h) - x(s)$ no tiene que ser constante. Por comodidad consideraremos el caso $h = 1$. El caso de una red uniforme, es decir, cuando $\Delta x(s) = 1$ corresponde a la función $x(s) = s$.

Vamos a considerar, en vez de la ecuación (2), la siguiente ecuación equivalente:

$$(3) \quad \sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} + \tau(s) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0,$$

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}(x(s)) - \frac{1}{2} \tilde{\tau}(x(s)) \Delta x(s - \frac{1}{2}), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(x(s)),$$

donde por $y(s)$ denotaremos las soluciones de la ecuación anterior, o sea, $y(s) \equiv y(x(s))$. Obviamente τ es un polinomio de grado a lo sumo 1 en $x(s)$, no así σ que, en general, no es un polinomio en $x(s)$.

Por analogía con la ecuación (1), vamos a imponer que la ecuación anterior (3) satisfaga la *propiedad de hipergeometricidad*, consistente en que si y es una solución de (3), entonces sus k -ésimas diferencias finitas generalizadas y_k , definidas por ($y_0(s) \equiv y(s)$)

$$(4) \quad y_k(s) \equiv y_k(x(s)) = \frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)} \frac{\Delta}{\Delta x_{k-2}(s)} \cdots \frac{\Delta}{\Delta x(s)} y(s) \equiv \Delta^{(k)} y(s),$$

donde $x_m(s) = x(s + \frac{m}{2})$, satisfacen una ecuación del mismo tipo [10, 21]. Para responder a esta cuestión aplicamos el operador $\frac{\Delta}{\Delta x(s)}$ a (3), obteniendo

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x_1(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla y_1(s)}{\nabla x_1(s)} + \tau_1(s) \frac{\Delta y_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \mu_1 y_1(s) = 0,$$

donde

$$\tau_1(s) = \frac{\Delta \sigma(s)}{\Delta x(s)} + \tau(s+1) \frac{\Delta x_1(s)}{\Delta x(s)}, \quad \mu_1 = \lambda + \frac{\Delta \tau(s)}{\Delta x(s)}.$$

A continuación aplicamos el operador $\frac{\Delta}{\Delta x_1(s)}$, y así sucesivamente, obtenemos, por inducción que las $y_k(s)$ satisfacen la ecuación

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x_k(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla y_k(s)}{\nabla x_k(s)} + \tau_k(s) \frac{\Delta y_k(s)}{\Delta x_k(s)} + \mu_k y_k(s) = 0,$$

$$(5) \quad \tau_k(s) = \frac{\Delta \sigma(s)}{\Delta x_{k-1}(s)} + \tau_{k-1}(s+1) \frac{\Delta x_k(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \quad \tau_0(s) = \tau(s),$$

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \frac{\Delta \tau_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \quad \mu_0 = \lambda.$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$(6) \quad \mu_k = \lambda + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\Delta \tau_m(s)}{\Delta x_m(s)},$$

$$\tau_k(s) = \frac{\sigma(s+k) - \sigma(s) + \tau(s+k) \Delta x(s+k - \frac{1}{2})}{\Delta x_{k-1}(s)}.$$

Para probar la primera basta notar que $\sum_{k=1}^n (\mu_k - \mu_{k-1}) = \mu_n - \mu_0 = \mu_n - \lambda$. Para la segunda reescribimos la fórmula de $\tau_k(s)$ en (5) en la forma

$$\tau_k(s) \Delta x_k(s - \frac{1}{2}) + \sigma(s) = \sigma(s+1) + \tau_{k-1}(s+1) \Delta x_{k-1}(s+1 - \frac{1}{2}).$$

Denotando $\tau_k(s) \Delta x_k(s - \frac{1}{2}) + \sigma(s)$ por $T(s, k)$, tenemos $T(s, k) = T(s+1, k-1)$, luego $T(s, k) = T(s+k, 0)$, de donde se deduce el resultado.

Para que se cumpla la condición hipergeométrica la ecuación (5) ha de tener la misma estructura que (3). Más aún, para que (2) —y por tanto (3)— tenga soluciones polinómicas es necesario que $\tilde{\tau}(x(s)) \equiv \tau(s)$ sea un polinomio de grado a lo sumo uno. En efecto, si $y(s)$ es un polinomio de grado 1 en $x(s)$, entonces $\Delta y(s) = \nabla y(s) = C$, C constante, y (2) se transforma en $C/2 \tilde{\tau}(x(s)) + \lambda y(s) = 0$, por tanto $\tilde{\tau}(x(s))$ es un polinomio de grado a lo sumo 1. Si aplicamos el mismo razonamiento a la ecuación (5), tendremos que para que (5) tenga soluciones polinómicas en $x_k(s)$ —y por tanto podamos asegurar que tiene lugar la propiedad de hipergeometricidad— es necesario que $\tau_k(s)$ sea un polinomio en $x_k(s)$ de grado a lo sumo uno.

Si imponemos ahora que $\tilde{\sigma}(x(s))$ sea un polinomio de grado a lo más 2 en $x(s)$, podemos comprobar que no para cualquier función $x(s)$ que escojamos la ecuación (2) —o (3)— tiene soluciones polinómicas de tipo hipergeométrico en $x(s)$.

Un sencillo cálculo (ver e.g. [10, ecuación (1.61), pág. 191]) nos permite ver que, por ejemplo, para $x(s) = s^3$ lo anterior es falso. Ello nos indica que no para cualquier red tendremos familias de polinomios hipergeométricos.

Definición 2.1. *En aquellas redes donde $\tau_k(s)$ es un polinomio de grado a lo sumo uno en $x_k(s)$ la ecuación (3) se denomina ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico.*

Obviamente la ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico es tal que sus soluciones y cumplen la *propiedad de hipergeometricidad*, es decir, cumplen que las k -ésimas diferencias finitas generalizadas y_k satisfacen el mismo tipo de ecuación, en este caso (5). El próximo paso es, por tanto, encontrar la clase más amplia de funciones $x(s)$ para las cuales se cumple dicha propiedad de hipergeometricidad.

Teorema 2.1 ([10]). *El conjunto más amplio de funciones $x(s)$ para las cuales la ecuación (3) tiene como solución una familia de polinomios de tipo hipergeométrico viene dado por*

$$(7) \quad x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3,$$

donde $q \in \mathbb{C}$, y c_1, c_2, c_3 son constantes que pueden depender de q , e independientes de s .

Escogiendo las constantes c_1, c_2, c_3 como funciones de q de la forma adecuada, (7) se transforma, cuando $q \rightarrow 1$, en la familia de funciones (red cuadrática) [21] $x(s) = \tilde{c}_1 s^2 + \tilde{c}_2 s + \tilde{c}_3$, a la que pertenecen los polinomios de Racah y los duales de Hahn [21]. Comúnmente la red $x(s)$ se suele escribir en su forma simétrica [21]

$$x(s) = c_1 (q^s + q^{-s-\mu}) + c_3.$$

Para demostrar el teorema vamos a dar una prueba más simple de la siguiente proposición, que conduce directamente al teorema.

Proposición 2.1 ([10]). *Para que $\tau_k(s)$ sea un polinomio de grado a lo más 1 en $x_k(s)$ es necesario y suficiente que $x(s)$ satisfaga las siguientes dos ecuaciones:*

$$(8) \quad \frac{x(s+k) + x(s)}{2} = \alpha_k x_k(s) + \beta_k,$$

$$(9) \quad x(s+k) - x(s) = \gamma_k \Delta x_k(s - \frac{1}{2}),$$

para ciertas constantes α_k, β_k y γ_k . En particular para $k=1$, (8) se convierte en

$$(10) \quad \frac{x(s+1) + x(s)}{2} = \alpha x(s + \frac{1}{2}) + \beta.$$

Demostración. Para probar la necesidad vamos a reescribir, siguiendo la idea original descrita en [10], la ecuación (6) en su forma equivalente

$$\begin{aligned} \tau_k(s) \Delta x_k(s - \frac{1}{2}) &= \sigma(s+k) - \sigma(s) + \tau(s+k) \Delta x(s+k - \frac{1}{2}) \\ &= \tilde{\sigma}(s+k) - \tilde{\sigma}(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{2} \Delta x(s - \frac{1}{2}) + \frac{\tilde{\tau}(s+k)}{2} \Delta x(s+k - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} &= \frac{\tilde{\sigma}''}{2}[x(s+k) + x(s)][x(s+k) - x(s)] + \tilde{\sigma}'(0)[x(s+k) - x(s)] \\ &\quad + \frac{\tilde{\tau}'}{2}[x(s+k)\Delta x(s+k - \frac{1}{2}) + x(s)\Delta x(s - \frac{1}{2})] \\ &\quad \quad + \frac{\tilde{\tau}(0)}{2}[\Delta x(s+k - \frac{1}{2}) + \Delta x(s - \frac{1}{2})], \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación

$$(12) \quad \tilde{\sigma}[x(s)] = \frac{\tilde{\sigma}''}{2}x^2(s) + \tilde{\sigma}'(0)x(s) + \tilde{\sigma}(0), \quad \tilde{\tau}[x(s)] = \tilde{\tau}'x(s) + \tilde{\tau}(0),$$

para los polinomios $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ de la ecuación (2), respectivamente. Es evidente que para que τ_k sea un polinomio de grado a lo más uno en $x_k(s)$ es necesario que el miembro derecho de la expresión (11) tenga como factor a $\Delta x_k(s - \frac{1}{2})$ cualquiera sea la elección de los polinomios $\tilde{\sigma}(s)$ y $\tilde{\tau}(s)$ no nulos.

Escojamos $\tilde{\sigma}(s)$ y $\tilde{\tau}(s)$ tales que $\tilde{\sigma}'' = 0$ y $\tilde{\tau}' = \tilde{\tau}(0) = 0$ con $\tilde{\sigma}'(0) \neq 0$. Entonces, necesariamente tendremos

$$\tau_k(s)\Delta x_k(s - \frac{1}{2}) = \tilde{\sigma}'(0)[x(s+k) - x(s)],$$

de donde se deduce que la red debe satisfacer la ecuación

$$x(s+k) - x(s) = \gamma_k(s)\Delta x_k(s - \frac{1}{2}),$$

siendo $\gamma_k(s)$ un polinomio de grado a lo más 1 en $x_k(s)$ pues para esta elección de $\tilde{\sigma}(s)$ y $\tilde{\tau}(s)$ tenemos $\tau_k(s) = \tilde{\sigma}'(0)\gamma_k(s)$. Demostremos que $\gamma_k(s)$ no depende de s , o sea, es constante. Para ello regresemos a la expresión (11) y tomemos ahora $\tilde{\sigma}' = 0$ y $\tilde{\tau}' = \tilde{\tau}(0) = 0$ con $\tilde{\sigma}'' \neq 0$. Usando la expresión anterior deducimos que

$$\tau_k(s) = \frac{\tilde{\sigma}''}{2}[x(s+k) + x(s)]\gamma_k(s).$$

Ahora bien, si grado $\gamma_k = 1$, entonces $\tau_k(s)$ o bien es de grado mayor que uno o bien no es ni siquiera un polinomios pues obviamente $x(s+k) + x(s)$ no es una constante (si lo fuera, tomando $k = 0$, deduciríamos que $x(s)$ es constante lo cual es una contradicción). Luego γ_k es constante. Puesto que γ_k es constante entonces necesariamente $x(s+k) + x(s)$ ha de ser un polinomio de grado a lo más 1 en $x_k(s)$ y por tanto tenemos

$$\frac{x(s+k) + x(s)}{2} = \alpha_k x_k(s) + \beta_k,$$

para ciertas constantes α_k y β_k . Luego las expresiones (8) y (9) se cumplen. Falta ahora probar que estas dos expresiones son las únicas condiciones necesarias con lo cual la proposición quedaría demostrada. Para ello observemos que para $k = 1$ tenemos la fórmula (10). Es fácil comprobar que una solución particular de (10) es $x(s) = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ($\alpha \neq 1$). La solución general de la ecuación homogénea correspondiente la buscaremos de la forma $x(s) = r^s$. Sustituyendo dicha solución en (10) obtenemos la ecuación característica

$$r - 2\alpha r^{\frac{1}{2}} + 1 = 0,$$

que tiene dos soluciones r_1, r_2 ($\alpha \neq 1$) tales que $r_1 r_2 = 1$. Por lo que, denotando por q a una de dichas soluciones, por ejemplo r_1 , entonces la otra será igual a $r_2 = q^{-1}$, y la solución general de (10) tendrá la forma

$$(13) \quad x(s) = c_1 q^s + c_2 q^{-s} + c_3.$$

Además, con la notación anterior es claro que $\alpha = (q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})/2$. El caso $\alpha = 1$ nos conduce a la solución $x(s) = \tilde{c}_1 s^2 + \tilde{c}_2 s + \tilde{c}_3$ —en realidad una solución particular es $4\beta s^2$ y la general es $\tilde{c}_2 s + \tilde{c}_3$ —. Esta última expresión es un caso particular de (13) y se puede obtener tomando el límite $q \rightarrow 1$ y escogiendo adecuadamente los valores c_1, c_2 y c_3 dependientes de q .

Si ahora usamos (13) junto a la expresión

$$(14) \quad \Delta x(s+a) = \kappa_q (c_1 q^{s+a+\frac{1}{2}} - c_2 q^{-s-a-\frac{1}{2}}), \quad \kappa_q = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}},$$

así como que $\gamma_k = \frac{\Delta(x(s+k)-x(s))}{\Delta x_k(s-\frac{1}{2})}$, $\alpha_k = \frac{\Delta(x(s+k)+x(s))}{\Delta x_k(s)}$ y $\beta_k = (1-\alpha_k)c_3$, obtenemos

$$(15) \quad \gamma_k = [k]_q = \frac{q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_k = \frac{q^{\frac{k}{2}} + q^{-\frac{k}{2}}}{2}, \quad \beta_k = -\frac{c_3}{2} (q^{\frac{k}{4}} - q^{-\frac{k}{4}})^2,$$

o, utilizando que $c_3 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ con $\alpha = \alpha_1$, $\beta_k = \beta [\frac{k}{2}]_q^2 [\frac{1}{2}]_q^{-2}$, donde $[x]_q$, denota a los q -números:

$$(16) \quad [x]_q \equiv \frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Comprobemos que bajo estas condiciones τ_k es un polinomio de grado a lo más uno. Usando (8) y (9), (12) se transforma en

$$\begin{aligned} \tau_k(s) \Delta x_k(s - \frac{1}{2}) &= \tilde{\sigma}'' \gamma_k [\alpha_k x_k(s) + \beta_k] \Delta x_k(s - \frac{1}{2}) \\ &+ \tilde{\sigma}'(0) \gamma_k \Delta x_k(s - \frac{1}{2}) + \frac{\tilde{\tau}'}{2} [x(s+k) \Delta x(s+k - \frac{1}{2}) + x(s) \Delta x(s - \frac{1}{2})] \\ &+ \frac{\tilde{\tau}(0)}{2} [\Delta x(s+k - \frac{1}{2}) + \Delta x(s - \frac{1}{2})]. \end{aligned}$$

Ahora bien, $\Delta x(s+k - \frac{1}{2}) + \Delta x(s - \frac{1}{2}) = \alpha_k \Delta x_k(s - \frac{1}{2})$, y

$$x(s+k) \Delta x(s+k - \frac{1}{2}) + x(s) \Delta x(s - \frac{1}{2}) = [2\alpha_{2k} x_k(s) - 2(\alpha_{2k} - \alpha_k) c_3] \Delta x_k(s - \frac{1}{2}),$$

de donde se deduce fácilmente que $\tau_k(s)$ es un polinomio de grado a lo más uno en $x_k(s)$.

Para probar la suficiencia seguiremos la idea original de Nikiforov y Uvarov publicada solamente en la versión rusa de [21] y los preprints originales de Nikiforov y Uvarov —en [21] se da una prueba distinta.

Ante todo, nótese que si la red es tal que se cumple

$$(17) \quad \frac{\Delta p_n[x(s)]}{\Delta x(s)} = q_{n-1} [x(s + \frac{1}{2})] \quad \text{y} \quad \frac{p_n[x(s+1)] + p_n[x(s)]}{2} = r_n [x(s + \frac{1}{2})],$$

siendo $p_n[x(s)]$ un polinomio de grado n en $x(s)$, y $q_{n-1}[x(s + \frac{1}{2})]$ y $r_n[x(s + \frac{1}{2})]$ sendos polinomios de grado n y $n - e$, respectivamente, en $x(s + \frac{1}{2})$. Entonces

$$(18) \quad \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} \right] = \tilde{q}_{n-1}[x(s)], \quad \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)} = \tilde{r}_{n-2}[x(s)].$$

Si ahora recordamos que $\tilde{\sigma}(x(s))$ y $\tilde{\tau}(x(s))$ son polinomios en $x(s)$ de grado a lo sumo 2 y 1 respectivamente, concluimos que nuestra ecuación admite soluciones polinómicas puesto que entonces los operadores

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla}{\nabla x(s)} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} \frac{\nabla}{\nabla x(s)}$$

transforman un polinomio de grado n en $x(s)$ en otros polinomios en $x(s)$ de grado $n - 1$ y $n - 2$, respectivamente. Notemos ahora que

$$\begin{aligned} \frac{x^n(s+1) - x^n(s)}{x(s+1) - x(s)} &= \frac{x(s+1) + x(s)}{2} \frac{x^{n-1}(s+1) - x^{n-1}(s)}{x(s+1) - x(s)} \\ &\quad + \frac{x^{n-1}(s+1) + x^{n-1}(s)}{2}, \\ \frac{x^n(s+1) + x^n(s)}{2} &= \frac{x(s+1) + x(s)}{2} \frac{x^{n-1}(s+1) + x^{n-1}(s)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{4} [x(s+1) - x(s)]^2 \frac{x^{n-1}(s+1) - x^{n-1}(s)}{x(s+1) - x(s)}. \end{aligned}$$

Utilizando las dos identidades anteriores podemos comprobar, mediante inducción, que si la red $x(s)$ satisface la ecuación en diferencias (10), donde α , β son constantes arbitrarias, entonces (17) tienen lugar siempre y cuando $[x(s+1) - x(s)]^2$ sea un polinomio de grado a lo sumo 2 en $x(s + \frac{1}{2})$. Un cálculo directo nos confirma que $[x(s+1) - x(s)]^2$: es un polinomio de grado a lo más 2 en $x(s + \frac{1}{2})$ para la red (7)

$$[x(s+1) - x(s)]^2 = \kappa_q^2 x_1(s)^2 + 3c_3 \kappa_q^2 (x(s) - c_3) + 4c_1 c_2 + c_3^2, \quad \kappa_q = q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}.$$

La suficiencia está demostrada y con ella nuestra proposición. \square

Un corolario inmediato de lo anterior es la siguiente expresión para τ_k :

$$(19) \quad \begin{aligned} \tau_k(s) &= \tilde{\tau}'_k x_k(s) + \tilde{\tau}_k(0) = \left([2k]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} + \alpha_{2k} \tilde{\tau}' \right) x_k(s) \\ &\quad + 2[k]_q \beta_k \frac{\tilde{\sigma}''}{2} + [k]_q \tilde{\sigma}'(0) + \alpha_k \tilde{\tau}(0) + \tilde{\tau}'(0) (\alpha_k - \alpha_{2k}) \frac{\beta}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

En particular tendremos que $\tilde{\tau}'_k = [2k]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} + \alpha_{2k} \tilde{\tau}'$. Luego, usando (6), se deduce que

$$(20) \quad \mu_k = \lambda + [k]_q \left\{ \left(\frac{q^{\frac{1}{2}(k-1)} + q^{-\frac{1}{2}(k-1)}}{2} \right) \tilde{\tau}' + [k-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\},$$

donde $\tilde{\sigma}''$ y $\tilde{\tau}'$ son los coeficientes del desarrollo en potencias de $x(s)$ de los polinomios $\tilde{\sigma}(x(s))$ y $\tilde{\tau}(x(s))$, respectivamente (ver (12)). Si ahora usamos (17), deducimos que, si y es un polinomio de grado n en $x(s)$, entonces y_1 es de grado $n - 1$ en $x_1(s)$, y

así sucesivamente hasta llegar a que $y_n = C \neq 0$. Luego, de (5) se deduce que μ_n es cero y se tiene, por tanto, la siguiente expresión para λ en el caso de las soluciones polinómicas

$$(21) \quad \lambda_n = -[n]_q \left\{ \left(\frac{q^{\frac{1}{2}(n-1)} + q^{-\frac{1}{2}(n-1)}}{2} \right) \tilde{\tau}' + [n-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\}.$$

3. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS q -POLINOMIOS HIPERGEOMÉTRICOS

A partir de la ecuación de tipo hipergeométrico (2) o (3) se pueden obtener muchas propiedades interesantes de las soluciones de la misma, en particular una fórmula de tipo Rodrigues [21]

$$(22) \quad P_n(s)_q = \frac{B_n}{\rho(s)} \nabla^{(n)} \left(\rho(s+n) \prod_{m=1}^k \sigma(s+m) \right),$$

$$\nabla^{(n)} = \frac{\nabla}{\nabla x_1(s)} \frac{\nabla}{\nabla x_2(s)} \cdots \frac{\nabla}{\nabla x_n(s)},$$

donde $\rho(s)$ es una solución de la ecuación de tipo Pearson

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s - \frac{1}{2})} [\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s).$$

A partir de la fórmula de Rodrigues se deduce fácilmente [10, 21] la siguiente expresión explícita para las soluciones polinómicas de la ecuación (3):

$$(23) \quad P_n(s)_q = B_n \sum_{m=0}^n \frac{[n]_q! (-1)^{m+n}}{[m]_q! [n-m]_q!} \frac{\nabla x(s+m - \frac{n-1}{2})}{\prod_{l=0}^n \nabla x(s + \frac{m-l+1}{2})}$$

$$\times \prod_{l=0}^{n-m-1} [\sigma(s-l)] \prod_{l=0}^{m-1} [\sigma(s+l) + \tau(s+l)\Delta x(s+l - \frac{1}{2})].$$

En el caso más general cuando $\sigma(s) = q^{-2s} p_4(q^s)$, siendo p_4 un polinomio en q^s de grado 4, cuyas cuatro raíces son diferentes, y que denotaremos por q^{s_i} , $i = 1, 2, 3, 4$, es decir,

$$(24) \quad \sigma(s) = C q^{-2s} \prod_{i=1}^4 (q^s - q^{s_i}), \quad C = \text{const.} \neq 0,$$

la expresión anterior (23) se expresa mediante una *serie hipergeométrica básica* ${}_4\phi_3$ [10, 21]

$$(25) \quad P_n(s)_q = D_n {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{2\mu+n-1+\sum_{i=1}^4 s_i}, q^{s_1-s}, q^{s_1+s+\mu} \\ q^{s_1+s_2+\mu}, q^{s_1+s_3+\mu}, q^{s_1+s_4+\mu} \end{matrix} \middle| q, q \right),$$

con $q^\mu = c_1/c_2$, y

$$D_n = B_n \left(\frac{-C}{c_1 q^\mu \kappa_q} \right)^n q^{-n(s_1+3(n-1)/4)} \\ \times (q^{s_1+s_2+\mu}; q)_n (q^{s_1+s_3+\mu}; q)_n (q^{s_1+s_4+\mu}; q)_n.$$

A partir de (25) es fácil comprobar que $P_n(s)_q$ es un polinomio de grado exactamente n . Para ello basta notar que $C(s_1, \mu) = q^{-\frac{\mu}{2}}(q^{s_1+l+\frac{\mu}{2}} + q^{-s_1-l-\frac{\mu}{2}})$,

$$(q^{s_1-s}; q)_k (q^{s_1+s+\mu}; q)_k = (-1)^k q^{k(s_1+\mu+\frac{k-1}{2})} \prod_{l=0}^{k-1} \left(\frac{x(s) - c_3}{c_1} - C(s_1, \mu) \right).$$

Además, el coeficiente principal a_n de $P_n(s)_q = a_n x^n(x) + \dots$ se expresa por

$$a_n = B_n \left(\frac{-C}{c_1^2 \kappa_q} \right)^n q^{-3n(n+1)/4} (q^{s_1+s_2+s_3+s_4+n+2\mu-1}; q)_n.$$

Es importante destacar que para la red general (7) se tiene la propiedad de simetría $x(s) = x(-s - \mu)$, y por tanto (3) nos conduce a

$$(26) \quad \tilde{\sigma}(x(s)) = \frac{\sigma(-s - \mu) + \sigma(s)}{2}, \quad \tilde{\tau}(x(s)) = \frac{\sigma(-s - \mu) - \sigma(s)}{\Delta x(s - \frac{1}{2})}.$$

Esto permite reescribir la ecuación en diferencias (3) de la siguiente forma

$$(27) \quad [\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - \frac{1}{2})] \frac{\Delta P_n(s)_q}{\Delta x(s)} - \sigma(s) \frac{\nabla P_n(s)_q}{\nabla x(s)} + \lambda_n \Delta x(s - \frac{1}{2}) P_n(s)_q = 0.$$

Nótese que $\sigma(-s - \mu) = \sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - \frac{1}{2})$. Usando la definición (24) e igualando los coeficientes de las potencias de mayor orden en q^s en la ecuación (27) obtenemos una expresión muy útil para λ_n , equivalente a (21)

$$(28) \quad \lambda_n = -\frac{Cq^{(2\mu+s_1+s_2+s_3+s_4)/2}}{c_1^2(q)} [n]_q \left[2\mu + n - 1 + \sum_{i=1}^4 s_i \right]_q.$$

En general las soluciones polinómicas de la ecuación (3) no tienen por que constituir familias ortogonales. No obstante, si se imponen ciertas condiciones de frontera éstas constituyen familias ortogonales respecto a la función ρ solución de la ecuación de tipo Pearson. Para más detalle véase [10, 13, 21].

4. EJEMPLOS

Para concluir este trabajo consideremos algunos ejemplos.

Polinomios de Askey-Wilson. Sean $x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s})$, $q^s = e^{i\theta}$, $\mu = 0$, $a = q^{s_1}$, $b = q^{s_2}$, $c = q^{s_3}$ y $d = q^{s_4}$. Escojamos las constantes A y B_n en (25) de la forma

$$C = -q^{\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2, \quad B_n = 2^{-n}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^{-n} q^{\frac{n(3n-5)}{4}}.$$

Entonces (25) nos da

$$(29) \quad p_n(x(s), a, b, c, d) = \frac{(ab; q)_n (ac; q)_n (ad; q)_n}{a^n} \\ \times {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}abcd, a e^{-i\theta}, a e^{i\theta} \\ ab, ac, ad \end{matrix} \middle| q, q \right),$$

y son los q -análogos de los polinomios introducidos por Askey y Wilson (ver [9, 10, 14]). Además, son solución de la ecuación en diferencias (27) con

$$\sigma(s) = -q^{-2s+\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^2(q^s - a)(q^s - b)(q^s - c)(q^s - d),$$

y

$$\lambda_n = 4q^{-n+1}(1 - q^n)(1 - abcdq^{n-1}).$$

Los polinomios q -clásicos. A partir de la fórmula (25) tomando el límite $q^{-\mu} \rightarrow 0$, se obtienen los polinomios q -clásicos [19] (un estudio usando el punto de vista descrito aquí se puede encontrar en [1]) que corresponden a la red exponencial $x(s) = c_1q^s + c_3$. En este caso se tiene [21]

$$(30) \quad \sigma(s) = \bar{A}(q^{s-s_1} - 1)(q^{s-s_2} - 1), \\ \sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - \frac{1}{2}) = \bar{A}(q^{s-\bar{s}_1} - 1)(q^{s-\bar{s}_2} - 1).$$

y, la representación (25) se transforma en

$$(31) \quad P_n(s)_q = D_n {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{s_1+s_2-\bar{s}_1-\bar{s}_2+n-1}, q^{s-\bar{s}_1} \\ q^{s_1-\bar{s}_1}, q^{s_2-\bar{s}_1} \end{matrix} \middle| q, q \right),$$

y

$$\lambda_n = -\frac{\bar{A}}{c_1^2} q^{-\frac{1}{2}(s_1+s_2+\bar{s}_1+\bar{s}_2)} [n]_q [s_1 + s_2 - \bar{s}_1 - \bar{s}_2 + n - 1]_q.$$

Si escogemos los parámetros $q^{s_1} = 0$, $q^{s_2} = c/a$, $q^{-\bar{s}_1} = aq$, $q^{-\bar{s}_2} = abq/c$, y $\bar{A} = -c/aq^{-\frac{1}{2}}$, obtenemos los q -polinomios grandes de Jacobi (B_n se escoge para que sean mónicos) introducidos por W. Hahn en 1949

$$p_n(x; a, b, c; q) = \frac{(aq; q)_n (cq; q)_n}{(abq^{n+1}; q)_n} {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, x \\ aq, cq \end{matrix} \middle| q; q \right),$$

que son solución de la ecuación en diferencias (27), con

$$\lambda_n = -\frac{(1 - q^{-n})(1 - abq^{n+1})}{(1 - q)^2}.$$

El resto de las familias conocidas de q -polinomios se puede obtener a partir de las fórmulas (25) y (31), tomando límites apropiados. De esta forma, por ejemplo, se obtuvieron en [2] dos familias clásicas que no habían sido estudiadas con anterioridad.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer al Dr. N. M. Atakishiyev (Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México) sus comentarios y críticas.

REFERENCIAS

- [1] R. Álvarez-Nodarse y J. Arvesú, On the q -polynomials in the exponential lattice $x(s) = c_1 q^s + c_3$, *Integral Transform. Spec. Funct.* **8** (1999), 299–324.
- [2] R. Álvarez-Nodarse y J. C. Medem, q -Classical polynomials and the q -Askey and Nikiforov-Uvarov Tableaus, *J. Comput. Appl. Math.* **135** (2001), 197–223.
- [3] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge Univ. Press, 1985.
- [4] G. E. Andrews, *q -Series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **66**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [5] G. E. Andrews, R. Askey y R. Roy, *Special functions*, Cambridge Univ. Press, 1999.
- [6] R. Askey, N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, An analog of the Fourier transformation for a q -harmonic oscillator, en *Symmetries in science, VI* (Bregenz, 1992), Plenum, Nueva York (1993), 57–63.
- [7] R. Askey y S. K. Suslov, The q -harmonic oscillator and an analogue of the Charlier polynomials, *J. Phys. A.* **26** (1993), L693–L698.
- [8] R. Askey y S. K. Suslov, The q -harmonic oscillator and the Al-Salam and Carlitz polynomials, *Lett. Math. Phys.* **29** (1993), 123–132.
- [9] R. Askey y R. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Mem. Amer. Math. Soc.* **319**, Providence, RI, 1985.
- [10] N. M. Atakishiyev, M. Rahman y S. K. Suslov, On the classical orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **11** (1995), 181–226.
- [11] N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, Difference analogs of the harmonic oscillator, *Theoret. and Math. Phys.* **85** (1991), 442–444.
- [12] N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, A realization of the q -harmonic oscillator, *Theoret. and Math. Phys.* **87** (1991), 1055–1062.
- [13] N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, Continuous orthogonality property for some classical polynomials of a discrete variable, *Rev. Mexicana Fís.* **34** (1988), 541–563.
- [14] N. M. Atakishiyev y S. K. Suslov, On the Askey-Wilson polynomials, *Constr. Approx.* **8** (1992), 1363–369.
- [15] D. Bonatsov y C. Daskaloyannis, Quantum groups and their applications in nuclear physics, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **43** (1999), 537–618.
- [16] N. J. Fine, *Basic hypergeometric series and applications*, Mathematical Surveys and Monographs **27**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [17] G. Gasper y M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [18] T. H. Koornwinder, Orthogonal polynomials in connection with quantum groups, en *Orthogonal polynomials* (Columbus, OH, 1989, P. Nevai, ed.), NATO ASI Ser. C, Math. Phys. Sci. **294**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1990), 257–292.
- [19] J. C. Medem, R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, On the q -polynomials: A distributional study, *J. Comput. Appl. Math.* **135** (2001), 157–196.
- [20] J. A. Minahan, The q -Schrödinger equation, *Mod. Phys. Lett. A* **5** (1990), 2625–2632.
- [21] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov y V. B. Uvarov, *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, Berlín, 1991. (Edición en ruso: Nauka, Moscú, 1985.)
- [22] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy y Yu. I. Kharitonov, Method of projection operators and the q -analog of the quantum theory of angular momentum. Clebsch-Gordon coefficients and irreducible tensor operators, *Soviet J. Nuclear Phys.* **53** (1991), 593–605.

- [23] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy y Yu. I. Kharitonov, Projection-operator method and the q -analog of the quantum theory of angular momentum. Racah coefficients, $3j$ and $6j$ symbols, and their symmetry properties, *Soviet J. Nuclear Phys.* **53** (1991), 1069–1086.
- [24] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy y Yu. I. Kharitonov, Tree technique and irreducible tensor operators for the $SU_q(2)$ quantum algebra: $9j$ symbols, *Soviet J. Nuclear Phys.* **55** (1992), 1599–1604.
- [25] N. Ja. Vilenkin y A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions*, Vol. 2, 3, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992/93.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE SEVILLA, APDO. 1160, 41080 SEVILLA, SPAIN

Correo electrónico: ran@cica.es

URL: <http://merlin.us.es/~renato/>

———: INSTITUTO CARLOS I DE FÍSICA TEÓRICA Y COMPUTACIONAL, UNIVERSIDAD DE GRANADA, 18071 GRANADA, SPAIN

CONJUNTOS DOMINANTES EN ESPACIOS DE BERGMAN CON PESO

FERNANDO PÉREZ-GONZÁLEZ Y JULIO C. RAMOS

A la memoria del Profesor José Javier Guadalupe, compañero, amigo, maestro

ABSTRACT. In this paper we give necessary and sufficient conditions in order to a subset of the open unit disc to be a dominating set for weighted Bergman spaces. A result of D. Luecking is generalized.

1. INTRODUCCIÓN

Sea U el disco unidad abierto del plano complejo. Si $p > 0$ y $\alpha > -1$, denotemos por $A_\alpha^p(U)$ el espacio de todas las funciones f que son analíticas en U y tales que

$$\|f\|_{p,\alpha}^p := \int_U |f|^p (1 - |z|^2)^\alpha dm(z) < \infty,$$

donde dm representa la medida de área de Lebesgue. $A_\alpha^p(U)$ es conocido como el espacio de Bergman pesado siendo $w(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ el peso usual. Supongamos que G es un subconjunto medible de U de medida positiva. Nuestro objetivo en este artículo es encontrar condiciones sobre el conjunto G que garanticen que sea un *conjunto dominante* para el espacio $A_\alpha^p(U)$, esto es, para que se verifique

$$\|f\|_{p,\alpha}^p \simeq \int_G |f|^p w(z) dm(z),$$

para toda $f \in A_\alpha^p(U)$. Este tipo de problemas ha sido considerado para distintas clases de funciones (ver, por ejemplo, [1] y [2]). En [3], D. Luecking los estudió para los espacios de Bergman $A^p(U)$ clásicos, pero bajo otra perspectiva, a saber, tratando de dar respuesta a cuestiones como, por ejemplo, qué propiedades ha de tener el conjunto para que el operador $f \mapsto f|_G$ de $A^p(U)$ en $L^p(G)$ tenga rango cerrado. En este trabajo, siguiendo la línea de [3], presentamos una generalización del resultado principal de Luecking pero haciendo énfasis en la distribución uniforme de la masa de G tanto cerca del círculo unidad como en discos pseudohiperbólicos. Si $a \in U$ y $\eta \in (0, 1)$, denotamos por $D(a, \eta)$ al disco euclídeo abierto centrado en a y de radio

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30H05, 46J15.

Key words and phrases. Dominating set, Bergman spaces, pseudo-hyperbolic disks.

La investigación del primer autor ha sido parcialmente soportada por la DGEIC, Proyecto de Investigación PB98-0444 y por la DGUI-Gobierno de Canarias, proyecto PI-1999/105.

El segundo autor agradece a la Universidad de Oriente, Venezuela, la financiación recibida de esta institución para cubrir en parte su estancia en La Laguna.

$(1 - |a|)\eta$. Obsérvese que $D(a, \eta) \subset U$. El disco pseudohiperbólico de centro en a y radio r es, por definición, el conjunto

$$\Delta(a, r) = \left\{ z : \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < r \right\}.$$

Nuestro resultado principal lo podemos formular como sigue.

Teorema 1.1. *Supongamos que G es un subconjunto medible de U , $p > 0$ y consideremos el peso $w(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ con $\alpha > -1$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_U w(z) |f(z)|^p dm \leq C \int_G w(z) |f(z)|^p dm,$$

para toda $f \in A_\alpha^p(U)$.

(2) *Existe una constante $\delta > 0$ tal que*

$$m(G \cap D) > \delta m(U \cap D),$$

para todo disco D cuyo centro está sobre $|z| = 1$.

(3) *Existen constantes $\delta_0 > 0$ y $\eta \in (0, 1)$ tal que*

$$m(G \cap D(a, \eta)) > \delta_0 m(D(a, \eta)),$$

para todo $a \in U$.

(4) *Existen constantes $\delta_1 > 0$ y $\eta_1 \in (0, 1)$ tal que*

$$m(G \cap \Delta(a, \eta_1)) > \delta_1 m(\Delta(a, \eta_1)),$$

para todo $a \in U$.

La demostración del Teorema 1.1 se reparte a lo largo del trabajo, ocupándonos en la Sección 2 de las equivalencias entre (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4), las cuales tienen un marcado carácter geométrico y pueden tener interés por sí mismas, mientras que en la Sección 3 se completa la prueba haciendo intervenir la condición analítica (1), propia de los conjuntos dominantes.

2. DISTRIBUCIÓN DE LA MASA EN DISCOS

Como ya apuntamos, en esta sección nos centraremos en probar que las condiciones (2), (3) y (4) en el Teorema 1.1 son equivalentes.

(2) \Rightarrow (3): Supongamos que el conjunto G satisface la condición en (2) y sea $a \in U$. Denotemos por b al punto de la frontera que es extremo del radio que pasa por a . Afirmamos que existen constantes $C > 0$ y $0 < \eta < 1$, que dependen sólo de δ , verificando

$$(2.1) \quad \begin{cases} 1 - |a| \leq Cr, & \text{y} \\ m(D \cap U \setminus D(a, \eta)) < \frac{\delta}{2} m(D \cap U), \end{cases}$$

donde D es el disco con centro b y un radio r que más adelante fijaremos.

En efecto, notemos, en primer lugar, que la segunda condición en (2.1) es equivalente a $m(D \cap D(a, \eta)) > (1 - \frac{\delta}{2}) m(D \cap U)$ ya que

$$m(D \cap U \setminus D(a, \eta)) = m(D \cap U) - m(D \cap D(a, \eta)).$$

Además, $m(D \cap U)$ es una función creciente de r que satisface

$$m(D \cap U) = \begin{cases} 0, & r = 0, \\ \pi, & r \geq 2; \end{cases}$$

y dado que el centro de D está en la circunferencia unidad, no es difícil comprobar que

$$(2.2) \quad \frac{1}{4}m(D) \leq m(D \cap U) \leq \frac{1}{2}m(D)$$

para todo $0 \leq r \leq 2$. Luego, dado $\delta \in (0, 1)$, podemos tomar

$$r = \frac{\delta}{4\pi} (1 - |a|),$$

y en consecuencia

$$(2.3) \quad m(D \cap U) \leq \frac{\pi}{2}r^2 = \frac{\delta^2}{32\pi} (1 - |a|)^2,$$

con lo cual, haciendo $C = \frac{4}{\delta}\pi$, se obtiene que $1 - |a| \leq Cr$. Nos interesa ahora elegir η de modo que

$$m(D \cap D(a, \eta)) > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta^2}{32\pi} (1 - |a|)^2.$$

Con este fin, consideremos el disco D_2 contenido en D , tangente a $D(a, \eta)$ en un punto de U y cuyo centro está en la intersección de la frontera de $D(a, \eta)$ con el radio que pasa por a . Nótese que el radio de D_2 es $r - (1 - |a|)(1 - \eta) = (1 - |a|)\left(\frac{\delta}{4\pi} + \eta - 1\right)$, y, por su construcción, se tiene que

$$m(D \cap D(a, \eta)) > m(D_2 \cap D(a, \eta)) > \frac{1}{4}m(D_2) = \frac{\pi}{4}(1 - |a|)^2 \left(\frac{\delta}{4\pi} + \eta - 1\right)^2.$$

Haciendo

$$\eta = 1 - \frac{3\delta}{4\pi},$$

tenemos que

$$m(D \cap D(a, \eta)) > \frac{\pi}{4}(1 - |a|)^2 \frac{\delta^2}{4\pi^2},$$

y como $\delta \in (0, 1)$, vale la desigualdad $\frac{\delta^2}{16\pi} > (1 - \frac{\delta}{2}) \frac{\delta^2}{32\pi}$ y por tanto,

$$m(D \cap D(a, \eta)) > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta^2}{32\pi} (1 - |a|)^2,$$

la cual, con (2.3), establece la validez de la segunda de las acotaciones en (2.1).

En lo que resta de la prueba de esta implicación, supondremos que D y $D(a, \eta)$ están fijos. Como $m(G \cap D) = m(G \cap D \cap D(a, \eta)) + m(G \cap D \setminus D(a, \eta))$, $G \cap D \cap D(a, \eta) \subset G \cap D(a, \eta)$ y $G \subset U$, podemos escribir que

$$m(G \cap D) \leq m(G \cap D(a, \eta)) + m(G \cap D \setminus D(a, \eta)),$$

y como $m(G \cap D \setminus D(a, \eta)) < \frac{\delta}{2}m(D \cap U)$, queda que

$$m(G \cap D) \leq m(G \cap D(a, \eta)) + \frac{\delta}{2}m(D \cap U).$$

Por tanto

$$m(G \cap D(a, \eta)) \geq m(G \cap D) - \frac{\delta}{2}m(D \cap U),$$

y dado que G satisface (2), se concluye que

$$\begin{aligned} m(G \cap D(a, \eta)) &> \frac{\delta}{2}m(D \cap U) \geq \frac{\delta}{8}\pi r^2 \\ &= \frac{\delta}{8}\pi \left(\frac{\delta}{4\pi}\right)^2 (1 - |a|)^2 \frac{\eta^2}{\eta^2} = \frac{\delta^3}{8(4\pi - 3\delta)^2} m(D(a, \eta)), \end{aligned}$$

lo que prueba que G satisface (3) con $\delta_0 = \frac{\delta^3}{8(4\pi - 3\delta)^2}$.

(3) \Rightarrow (2): Supongamos ahora que G satisface (3) y sea D un disco con centro b sobre $|z| = 1$ y radio r (≤ 2). En esta situación, para $\eta \in (0, 1)$ dado, existe un único a en el segmento que une el origen con b tal que $r = (1 + \eta)(1 - |a|)$ y D contiene tangencialmente a $D(a, \eta)$.

Para tal $a \in U$, por (3), se tiene que

$$\begin{aligned} m(G \cap D) &> m(G \cap D(a, \eta)) > \delta_0 m(D(a, \eta)) \\ &= \delta_0 \pi \eta^2 (1 - |a|)^2 = \delta_0 \pi \eta^2 \frac{r^2}{(1 + \eta)^2} \\ &= \delta_0 \frac{\eta^2}{(1 + \eta)^2} m(D) \geq \frac{\delta_0 \eta^2}{(1 + \eta)^2} m(D \cap U), \end{aligned}$$

es decir, (2) se satisface con $\delta = \delta_0 \eta^2 / (1 + \eta)^2$.

Para probar la equivalencia con (4) es conveniente utilizar algunos sencillos lemas técnicos que por completitud incluimos.

Lema 2.1. *Si $z \in D(a, \eta)$ y $2\eta / (1 + \eta^2) \leq r < 1$, entonces*

$$D(a, \eta) \subset \Delta(z, r).$$

Demostración. Para $w, z \in D(a, \eta)$, la expresión

$$\frac{|z - w|}{|1 - \bar{w}z|}$$

alcanza el máximo cuando $|z| = |a| + (1 - |a|)\eta$ y $|w| = |a| - (1 - |a|)\eta$. Así resulta que

$$|z - w| \leq 2(1 - |a|)\eta,$$

$$|1 - \bar{w}z| \leq 1 - (|a| + (1 - |a|)\eta)(|a| - (1 - |a|)\eta) \leq (1 - |a|)(1 + \eta^2);$$

por tanto

$$\frac{|z - w|}{|1 - \bar{w}z|} \leq \frac{2\eta}{1 + \eta^2} \leq r,$$

lo que significa que $w \in \Delta(z, r)$. □

Lema 2.2. *Dado $r \in (0, 1)$, existen una constante C_r que sólo depende de r tal que para todo $a \in U$ se verifica que*

$$\frac{1}{C_r} (1 - |a|)^2 \leq m(\Delta(a, r)) \leq C_r (1 - |a|)^2.$$

Demostración. Primero notemos que $\Delta(a, \eta)$ es un disco euclídeo con centro C y radio R dados por

$$C = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 |a|^2} a, \quad R = \frac{1 - |a|^2}{1 - r^2 |a|^2} r.$$

Luego

$$m(\Delta(a, r)) = \pi \frac{(1 - |a|^2)^2}{(1 - r^2 |a|^2)^2} r^2,$$

y como $|a| \in (0, 1)$, $1 - |a|^2 \leq 2(1 - |a|)$ entonces

$$(2.4) \quad m(\Delta(a, r)) \leq \frac{4\pi r^2}{(1 - r^2)^2} (1 - |a|)^2 = C_1(r) (1 - |a|)^2.$$

Por otra parte, como

$$\frac{(1 - |a|^2)^2}{(1 - r^2 |a|^2)^2} \geq (1 - |a|^2)^2,$$

entonces

$$(2.5) \quad m(\Delta(a, r)) \geq \pi r^2 (1 - |a|^2)^2 \geq \pi r^2 (1 - |a|)^2 = C_2(r) (1 - |a|)^2.$$

Luego de (2.4) y (2.5) se concluye que existe una constante $C_r > 1$ tal que

$$\frac{1}{C_r} (1 - |a|)^2 \leq m(\Delta(a, r)) \leq C_r (1 - |a|)^2.$$

□

Ahora estamos en disposición de probar las equivalencias relativas a la condición (4) del Teorema 1.1.

(3) \Rightarrow (4): Sea $a \in U$ y supongamos que existe $\eta \in (0, 1)$ y $G \subset U$ tal que se cumple (3). Seleccionemos $\eta_1 \in (0, 1)$ tal que $\frac{2\eta}{1+\eta^2} \leq \eta_1$, entonces por (3), y los Lemas 2.1 y 2.2 podemos escribir

$$\begin{aligned} m(G \cap \Delta(a, \eta_1)) &\geq m(G \cap D(a, \eta)) \geq \delta_0 m(D(a, \eta)) \\ &= \delta_0 \pi (1 - |a|)^2 \eta^2 > \frac{\delta_0 \pi \eta^2}{C(\eta_1)} m(\Delta(a, \eta_1)), \end{aligned}$$

de modo que (4) se cumple con $\delta_1 = \delta_0 \pi \eta^2 / C(\eta_1)$.

(4) \Rightarrow (2): Supongamos que existe $\eta_1 \in (0, 1)$ tal que (4) se cumple. Sea D un disco con radio r , centro en $|z| = 1$ y consideremos $a \in U$ tal que $\Delta(a, \eta_1)$ está contenido

tangencialmente en D . Obsérvese que D tiene radio $r = 1 - |C| + R$, donde C es el centro euclídeo de $\Delta(a, \eta_1)$ y R es el radio euclídeo. Por hipótesis podemos escribir

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad m(G \cap D) &> m(G \cap \Delta(a, \eta_1)) > \delta_1 m(\Delta(a, \eta_1)) \\
 &= \delta_1 \pi R^2 = \delta_1 \pi \eta_1^2 \left[\frac{1 - |a|^2}{1 - \eta_1^2 |a|^2} \right]^2 \\
 &= \delta_1 \pi \eta_1^2 r^2 \left[\frac{1 - |a|^2}{1 - \eta_1^2 |a|^2 - (1 - \eta_1^2) |a| + (1 - |a|^2) \eta_1} \right]^2.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que $\eta_1 \in (0, 1)$, entonces $(\eta_1^2 + 1) + (\eta_1 - 3) \leq 0$, luego

$$\begin{aligned}
 (1 - |a|) (\eta_1^2 |a| + 1) + (1 - |a|^2) (\eta_1 - 3) \\
 \leq (1 - |a|^2) (\eta_1^2 + 1) + (1 - |a|^2) (\eta_1 - 3) \leq 0,
 \end{aligned}$$

y por tanto

$$3(1 - |a|^2) \geq 1 - \eta_1^2 |a|^2 - (1 - \eta_1^2) |a| + (1 - |a|^2) \eta_1.$$

Sustituyendo en (2.6) encontramos

$$m(G \cap D) > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \delta_1 \pi \eta_1^2 r^2 = \frac{1}{9} \delta_1 \eta_1^2 m(D) > \frac{1}{9} \delta_1 \eta_1^2 m(D \cap U)$$

y (2) es cierto con $\delta = \frac{1}{9} \delta_1 \eta_1^2$.

3. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1: PARTE ANALÍTICA

Probaremos en primer lugar que (1) \Rightarrow (4). Para ello, fijemos un $0 < \eta_1 < 1$ tal que

$$(3.7) \quad \frac{1}{\pi} \int_{|z| < \eta_1} w(z) dm > \frac{1}{\alpha + 1} \left(1 - \frac{1}{2C}\right).$$

Con el cambio de variables $z \rightarrow \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \varphi_a(z)$ cuyo jacobiano satisface:

$$|\varphi'_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \bar{a}z|^4},$$

la desigualdad en (3.7) queda

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Delta(a, \eta_1)} (1 - |z|^2)^\alpha \frac{(1 - |a|^2)^{2+\alpha}}{|1 - \bar{a}z|^{4+2\alpha}} dm > \frac{1}{\alpha + 1} \left(1 - \frac{1}{2C}\right),$$

donde se ha usado la identidad

$$w\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) = (1 - |z|^2)^\alpha \frac{(1 - |a|^2)^\alpha}{|1 - \bar{a}z|^{2\alpha}}.$$

Pero como

$$\frac{1}{\pi} \int_U (1 - |z|^2)^\alpha \frac{(1 - |a|^2)^{2+\alpha}}{(1 - \bar{a}z)^{4+2\alpha}} dm = \frac{1}{\alpha + 1}$$

(veáse [4, pág. 53]) resulta que

$$\frac{1}{\pi} \int_{U \setminus \Delta(a, \eta_1)} (1 - |z|^2)^\alpha \frac{(1 - |a|^2)^{2+\alpha}}{|1 - \bar{a}z|^{4+2\alpha}} dm < \frac{1}{2(\alpha + 1)C}.$$

Ahora, aplicando la hipótesis de (1) a la función

$$f(z) = \frac{(1 - |a|^2)^{(2+\alpha)/p}}{(1 - \bar{a}z)^{(4+2\alpha)/p}},$$

podemos escribir

$$\frac{1}{\pi} \int_G (1 - |z|^2)^\alpha \frac{(1 - |a|^2)^{2+\alpha}}{|1 - \bar{a}z|^{4+2\alpha}} dm \geq \frac{1}{(\alpha + 1)C},$$

de aquí que

$$(3.8) \quad \frac{1}{\pi} \int_{G \cap \Delta(a, \eta_1)} (1 - |z|^2)^\alpha \frac{(1 - |a|^2)^{2+\alpha}}{|1 - \bar{a}z|^{4+2\alpha}} dm \geq \frac{1}{2(\alpha + 1)C}.$$

Afirmamos que existe una constante $C = C(\alpha, \eta_1)$ tal que, para todo $z \in G \cap \Delta(a, \eta_1)$, se verifica que

$$(3.9) \quad \left[\frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} \right]^\alpha \leq C(\alpha, \eta_1).$$

En efecto, usando la útil identidad

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2},$$

observamos que, si $\alpha > 0$ y como $|\varphi_a(z)| < 1$, se tiene $[1 - |\varphi_a(z)|^2]^\alpha < 1$ y (3.9) vale trivialmente. Si $-1 < \alpha < 0$, entonces $|\varphi_a(z)| < \eta_1$ para todo $z \in \Delta(a, \eta_1)$ y consecuentemente

$$\left[1 - |\varphi_a(z)|^2 \right]^\alpha < (1 - \eta_1^2)^\alpha,$$

de modo que (3.9) también es cierta para este caso.

Combinando (3.9) con (3.8) y teniendo en cuenta que

$$\frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \bar{a}z|^4} \leq \frac{4}{(1 - |a|)^2},$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(\alpha+1)C} &\leq \frac{1}{\pi} \int_{G \cap \Delta(a, \eta_1)} (1-|z|^2)^\alpha \frac{(1-|a|^2)^{2+\alpha}}{|1-\bar{a}z|^{4+2\alpha}} dm \\ &\leq C(\alpha, \eta_1) \frac{4}{(1-|a|)^2} m(G \cap \Delta(a, \eta_1)), \end{aligned}$$

es decir,

$$m(G \cap \Delta(a, \eta_1)) \geq \frac{C(\alpha, \eta_1)}{8C} (1-|a|)^2.$$

Por esta desigualdad y la estimación en (3.9) podemos asegurar que existe una constante δ_1 (dependiente de α y η_1) tal que

$$m(G \cap \Delta(a, \eta_1)) > \delta_1 m(\Delta(a, \eta_1)).$$

(3) \Rightarrow (1): Para probar esta implicación requeriremos varios lemas. Supondremos que δ_0 y η están fijados por hipótesis y C representará una constante que sólo depende de los parámetros η , α y p cuyo valor puede cambiar de una línea a otra. Para simplificar, escribiremos $D(a)$ en lugar de $D(a, \eta)$.

Lema 3.1. *Existe una constante $C = C(\alpha, \eta) > 0$ tal que, para todo $a \in U$,*

$$(3.10) \quad w(a) \leq C \inf \{w(z) : z \in D(a)\}.$$

Demostración. Notemos en primer lugar que para todo $z \in D(a)$, se tiene

$$(3.11) \quad |a| - (1-|a|)\eta < |z| < |a| + (1-|a|)\eta.$$

Así,

$$\begin{aligned} 1-|z|^2 &< 1 - [|a| - (1-|a|)\eta]^2 \\ &= 1-|a|^2 + 2|a|(1-|a|)\eta - (1-|a|)^2\eta^2 \\ &< (1-|a|^2) + 2(1-|a|^2)\eta + (1-|a|^2)\eta^2 \\ &= (1+\eta)^2(1-|a|^2), \end{aligned}$$

con lo cual, para $-1 < \alpha < 0$ y $z \in D(a)$, resulta que

$$w(z) = (1-|z|^2)^\alpha > (1+\eta)^{2\alpha} (1-|a|^2)^\alpha = (1+\eta)^{2\alpha} w(a),$$

lo que prueba que existe una constante $C = C(\alpha, \eta) > 0$ tal que (3.10) vale.

De manera similar, de (3.11) también se infiere que

$$\begin{aligned} 1-|z|^2 &> 1 - [|a| + (1-|a|)\eta]^2 \\ &> 1 - [|a| + (1-|a|)\eta] \\ &> (1-|a|)(1-\eta) > \frac{1}{2}(1-\eta)(1-|a|^2), \end{aligned}$$

luego, para $\alpha > 0$ y $z \in D(a)$ queda

$$w(z) = (1 - |z|^2)^\alpha > \left[\frac{1}{2} (1 - \eta) \right]^\alpha (1 - |a|^2)^\alpha = \left[\frac{1}{2} (1 - \eta) \right]^\alpha w(a),$$

así que también en este caso podemos asegurar la existencia de una constante $C = C(\alpha, \eta) > 0$ tal que (3.10) vale. \square

Dada una función analítica f y $0 < \lambda < 1$, definimos el conjunto

$$E_\lambda(a) = E_\lambda(f, a) = \{z \in D(a, \eta) : |f(z)| > \lambda |f(a)|\},$$

y el operador

$$B_\lambda f(a) = \frac{1}{m(E_\lambda(a))} \int_{E_\lambda(a)} |f|^p dm.$$

Por simplicidad asumiremos $p = 1$, advirtiendo que la prueba del caso general se puede obtener con pequeñas modificaciones reemplazando $|f|$ por $|f|^p$.

Lema 3.2. *Sea f analítica en U y $a \in U$. Entonces*

$$(3.12) \quad \frac{m(E_\lambda(a))}{m(D(a))} \geq \frac{\log \frac{1}{\lambda}}{\log \frac{B_\lambda f(a)}{|f(a)|} + \log \frac{1}{\lambda}}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 0$ y $D = D(a)$ tiene área $m(D) = 1$. Aplicando la desigualdad de Jensen y estimaciones elementales tenemos

$$\begin{aligned} \log |f(0)| &\leq \int_D \log |f| dm = \int_{D \setminus E_\lambda(0)} \log |f| dm + \int_{E_\lambda(0)} \log |f| dm \\ &\leq \log(\lambda |f(0)|) \int_{D \setminus E_\lambda(0)} dm + m(E_\lambda(0)) \frac{1}{m(E_\lambda(0))} \int_{E_\lambda(0)} \log |f| dm \\ &\leq \log(\lambda |f(0)|) [1 - m(E_\lambda(0))] + m(E_\lambda(0)) \log B_\lambda f(0), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la concavidad de la función logaritmo en la última desigualdad. Restando $\log |f(0)|$ en ambos lados obtenemos

$$0 \leq [1 - m(E_\lambda(0))] \log \lambda + m(E_\lambda(0)) \log \left[\frac{B_\lambda f(0)}{|f(0)|} \right].$$

Como quiera que $\log \lambda < 0$ y $\log \left[\frac{B_\lambda f(0)}{|f(0)|} \right] > 0$, resolviendo para $m(E_\lambda(0))$ obtenemos

$$m(E_\lambda(0)) \geq \frac{\log \frac{1}{\lambda}}{\log \left[\frac{B_\lambda f(0)}{|f(0)|} \right] + \log \frac{1}{\lambda}}$$

que era lo que se quería probar. \square

Lema 3.3. *Sea $\varepsilon > 0$ y f analítica en U . Definamos el conjunto*

$$A = \left\{ a \in U : |f(a)| < \frac{\varepsilon}{m(D(a))} \int_{D(a)} |f| dm \right\}.$$

Entonces, existe una constante C que depende sólo de η tal que

$$\int_A |f(z)| w(z) dm \leq C\varepsilon \int_U |f(z)| w(z) dm.$$

Demostración. Por el Lema 3.1 y la definición de A , para $a \in A$ tenemos

$$|f(a)| w(a) \leq C\varepsilon \int_U |f(z)| \frac{1}{m(D(a))} \chi_{D(a)}(z) w(z) dm(z).$$

Integrando sobre A y usando el teorema de Fubini queda que

$$\begin{aligned} & \int_A w(a) |f(a)| dm(a) \\ & \leq C\varepsilon \int_U w(z) |f(z)| \left[\int_A \frac{1}{m(D(a))} \chi_{D(a)}(z) dm(a) \right] dm(z). \end{aligned}$$

Afirmamos que existe una constante C independiente de z tal que

$$(3.13) \quad \int_A \frac{1}{m(D(a))} \chi_{D(a)}(z) dm(a) \leq C.$$

En efecto, usando (2.6) con $r = 2\eta/(1 + \eta^2)$ podemos escribir

$$\chi_{D(a)}(z) \leq \chi_{\Delta(a,r)}(z) = \chi_{\Delta(z,r)}(a),$$

donde la primera desigualdad se debe a que $D(a) \subset \Delta(a,r)$ y la segunda a que $z \in \Delta(a,r)$ precisamente cuando $a \in \Delta(z,r)$. Luego la integral en (3.13) está dominada por

$$(3.14) \quad \int_{\Delta(z,r)} \frac{1}{m(D(a))} dm(a).$$

Puesto que para $a \in \Delta(z,r)$, se tiene que

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq \frac{2\eta}{1+\eta^2},$$

sigue que

$$\frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} = 1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 \geq 1 - \left(\frac{2\eta}{1+\eta^2} \right)^2 = C(\eta).$$

De aquí que

$$\begin{aligned} 1 - |a| &> \frac{1}{2} (1 - |a|^2) \geq C(\eta) \frac{|1-\bar{a}z|^2}{(1-|z|^2)^2} (1-|z|^2) \\ &\geq C(\eta) (1-|z|^2) \geq C(\eta) (1-|z|), \end{aligned}$$

y por tanto

$$m(D(a)) = \pi\eta^2 (1-|a|)^2 \geq C(\eta) (1-|z|)^2.$$

Sustituyendo en (3.14) y aplicando el Lema 3.13 vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Delta(z,r)} \frac{1}{m(D(a))} dm(a) &\leq \frac{C}{(1-|z|)^2} \int_{\Delta(z,r)} dm(a) \leq \frac{C}{(1-|z|)^2} m(\Delta(z,r)) \\ &\leq \frac{C}{(1-|z|)^2} C_r (1-|z|)^2 = C, \end{aligned}$$

es decir, (3.14) está acotada por una constante independiente de z ; por tanto

$$\int_A w(a) |f(a)| dm \leq C\varepsilon \int_U w(z) |f(z)| dm.$$

y en consecuencia

$$\int_A |f(a)| w(a) dm \leq C\varepsilon \int_U |f(z)| w(z) dm$$

que era lo que se quería demostrar. □

En el siguiente lema supondremos que $\lambda < 1/2$.

Lema 3.4. *Sea $0 < \varepsilon < 1$ y $f \in A_\alpha^1(U)$. Definamos el conjunto*

$$B = \{a \in U : |f(a)| < \varepsilon^3 B_\lambda f(a)\}.$$

Entonces existe una constante C que depende sólo de η (y p) tal que

$$\int_B |f(z)| w(z) dm \leq C\varepsilon \int_U |f(z)| w(z) dm.$$

Demostración. Descomponiendo la integral como se indica

$$\int_B w |f| dm = \int_{B \cap A} w |f| dm + \int_{B \setminus A} w |f| dm,$$

observamos que la primera integral se puede acotar de acuerdo con el Lema 3.3 por lo que

$$\int_{B \cap A} w |f| dm \leq \int_A w |f| dm \leq C\varepsilon \int_U w |f| dm,$$

para una cierta constante $C > 0$. Para acotar la segunda integral, usemos el Lema 3.1 (lo cual es posible porque $E_\lambda(a) \subset D(a, \eta)$) y el teorema de Fubini como en el lema anterior, obteniéndose que

$$\begin{aligned} &\int_{B \setminus A} w(a) |f(a)| dm(a) \\ &\leq \varepsilon^3 \int_U w(z) |f(z)| \int_{B \setminus A} \frac{1}{m(E_\lambda(a))} \chi_\lambda(a, z) dm(a) dm(z). \end{aligned}$$

Mas, como ya se vio que existe una constante $C > 0$ independiente de z tal que

$$\int_{B \setminus A} \frac{1}{m(E_\lambda(a))} \chi_\lambda(a, z) dm(a) \leq \frac{C}{\varepsilon^2},$$

queda

$$\int_{B \setminus A} |f(a)| w(a) dm \leq C\varepsilon \int_U |f(z)| w(z) dm$$

y la demostración está completa. \square

Continuando ahora con la prueba del Teorema 1.1, hagamos

$$F := U \setminus B = \{a \in U : |f(a)| \geq \varepsilon^3 B_\lambda f(a)\},$$

y eligiendo ε suficientemente pequeño para que $\varepsilon C < 1/2$ (tal elección depende solamente de η y p^2) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_U w |f| \, dm &= \int_{U \setminus B} w |f| \, dm + \int_B w |f| \, dm \leq \int_F w |f| \, dm + \varepsilon C \int_U w |f| \, dm \\ &< \int_F w |f| \, dm + \frac{1}{2} \int_U w |f| \, dm, \end{aligned}$$

es decir,

$$(3.15) \quad \int_U w |f| \, dm < 2 \int_F w |f| \, dm.$$

Como $\frac{B_\lambda f(a)}{|f(a)|} \leq \frac{1}{\varepsilon^3}$ para $a \in F$, si seleccionamos λ menor que ε^{6/δ_0} , por el Lema 3.2, podemos escribir

$$\frac{m(E_\lambda(a))}{m(D(a))} > \frac{\frac{2}{\delta_0} \log\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right) + \frac{2}{\delta_0} \log\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)} > 1 - \frac{\delta_0}{2}.$$

En particular esto implica que

$$m(D(a)) - m(E_\lambda(a)) < \frac{\delta_0}{2} m(D(a)).$$

Por otra parte, dado que $E_\lambda(a) \subset D(a)$, sigue de las hipótesis en (3) que para $a \in F$,

$$\begin{aligned} m(G \cap E_\lambda(a)) &= m(G \cap D(a)) - m(G \cap D(a) - E_\lambda(a)) \\ &> \delta_0 m(D(a)) - m(D(a) - E_\lambda(a)) \\ (3.16) \quad &= \delta_0 m(D(a)) + m(E_\lambda(a)) - m(D(a)) \\ &> \delta_0 m(D(a)) - \frac{\delta_0}{2} m(D(a)) = \frac{1}{2} \delta_0 m(D(a)), \end{aligned}$$

con λ dependiendo sólo de η , δ_0 y p .

Por el Lema 3.4 y para $a \in F$ se tiene que

$$\frac{1}{m(D(a))} \int_G \chi_{D(a)}(z) w(z) |f(z)| \, dm \geq \frac{1}{2} \delta_0 \lambda w(a) |f(a)|,$$

e integrando sobre F , y usando nuevamente el teorema de Fubini obtenemos

$$\int_G w(z) |f(z)| \left[\int_F \frac{1}{m(D(a))} \chi_{D(a)}(z) \, dm(a) \right] dm(z) \geq \frac{1}{2} \delta_0 \lambda \int_F w |f| \, dm.$$

La integral entre corchetes se puede acotar como en el Lema 3.2 mientras que el segundo miembro puede estimarse usando el Lema 3.3. Por consiguiente,

$$C \int_G w(z) |f(z)| \, dm(z) \geq \frac{1}{4} \delta_0 \lambda \int_U w(z) |f| \, dm$$

lo que completa la demostración.

REFERENCIAS

- [1] F. F. Bonsall, Domination of the supremum of a bounded harmonic function by its supremum over a countable subset, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*(2) **30** (1987), 471–477.
- [2] S. J. Gardiner, Sets of determination for harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **338** (1993), 233–242.
- [3] D. H. Luecking, Inequalities in Bergman spaces, *Illinois J. Math.* **25** (1981), 1–11.
- [4] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Marcel Dekker, Nueva York, 1980.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38271 LA LAGUNA, TENERIFE, SPAIN

Correo electrónico: fernando.perez.gonzalez@ull.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ORIENTE, CUMANÁ, ESTADO SUCRE, VENEZUELA

Correo electrónico: jramos@sucre.udo.edu.ve

ECUACIONES INTEGRALES DOBLES CON FUNCIONES DE BESSEL DE DISTINTO ORDEN

ÓSCAR CIAURRI Y JUAN L. VARONA

Chicho, te echamos de menos

ABSTRACT. We study dual integral equations associated with Hankel transforms of different order, that is, dual integral equations of Titchmarsh's type with Bessel functions of different order. We reformulate these equations giving a better description in terms of continuous operators on L^p spaces, and we solve them in these spaces. The solution is given as a series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{\mu+2k+1}$ which converges in the L^p -norm, where J_ν denotes the Bessel function of order ν .

1. INTRODUCCIÓN

En algunas aplicaciones relacionadas con el potencial, el electromagnetismo o la teoría de la radiación acústica aparecen ciertas ecuaciones integrales en las que la función incógnita satisface una condición sobre una parte del intervalo $(0, \infty)$ y otra diferente sobre el resto. Este tipo de ecuaciones son conocidas como ecuaciones integrales dobles. Un caso importante son las denominadas ecuaciones integrales dobles de tipo Titchmarsh:

$$(1) \quad \begin{cases} \int_0^\infty t^\beta f(t) J_\alpha(xt) dt = g(x), & \text{si } 0 < x < 1, \\ \int_0^\infty f(t) J_\eta(xt) dt = 0, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde J_α y J_η denotan las funciones de Bessel de orden α y η , g es una función dada y f es la función incógnita.

Estas ecuaciones son más conocidas en el caso $\alpha = \eta$. Existen diversos métodos para resolverlas, pero la mayoría de ellos son formales. Por ejemplo, podemos encontrar su solución utilizando transformadas de Mellin o algún otro tipo de transformadas integrales. También podemos reducirlas a ecuaciones integrales de tipo Fredholm. Habitualmente, estos métodos nos permiten obtener la función f mediante una expresión integral; pueden verse en [17, pág. 337], [15, § 12, pág. 65], [7, § 5.11] y [4, pág. 76]. Otro procedimiento consiste en utilizar series de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{\mu+2k+1}$; véase a este respecto [19] y [20], el primero de ellos con una amplia

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 45F10; Secondary 42C10.

Key words and phrases. Dual integral equations, Bessel functions, Fourier series, Hankel transform.

La investigación de ambos autores está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI y la ayuda API-01/B38 de la UR.

bibliografía, pero el estudio que se realiza en ambos trabajos es puramente formal. Por esta razón, y siguiendo con el caso $\alpha = \eta$, los autores, junto a J. J. Guadalupe (Chicho) y M. Pérez, nos planteamos rigorizar el uso de estas series en la resolución de las ecuaciones integrales dobles de tipo Titchmarsh (véase [2]). Aquí continuamos con este objetivo en un contexto más general, sin exigir $\alpha = \eta$.

Esta generalización también ha sido analizada por algunos autores. Por ejemplo, la utilización de operadores de Erdélyi-Köber conduce a una expresión integral para la función f solución de (1). A este respecto, véanse [12], [10, § 2.1.7] y [5, § 9.7]; pero el estudio que se hace en ellos es, de nuevo, formal (lo cual es, además, reconocido explícitamente). Podemos consultar otros métodos, así como problemas relacionados, y abundantes referencias, en [10, Cap. 2] y [5, Cap. 9]. A ese respecto, destacaremos únicamente que en [5, § 9.8] se efectúa un estudio riguroso de existencia y unicidad de solución de una ecuación análoga a (1) en espacios de distribuciones.

Pero volvamos a nuestro objetivo de resolver (1) sin exigir $\alpha = \eta$. Procediendo como en [2], reformularemos la ecuación (1) para obtener una descripción de la misma en términos de operadores definidos sobre ciertos espacios L^p . En estos espacios, resolveremos la ecuación reformulada, identificando la solución como una serie de funciones de Bessel convergente en L^p . Por otra parte, el método usado aquí para encontrar la solución es algo más sencillo que el de [2]. Esta diferencia radica en que, ahora, la solución se busca en el espacio L^p con peso $x^{\alpha+\beta}$ (en [2], el peso era x^α); esto nos permite aplicar (7) y, como consecuencia, se utilizan menos operadores para comprobar la convergencia de las series que aparecen.

Es de destacar que la solución que se obtiene (Teorema 4.1) no depende de η . Más que el hecho en sí, lo que sorprende a los autores es que esto no ha sido observado en ninguno de los trabajos previos (antes citados) que han analizado este tipo de ecuaciones. Y más, teniendo en cuenta que eran métodos formales.

Este artículo está organizado del siguiente modo: En la Sección 2 reescribiremos la ecuación integral doble de una manera más conveniente, y analizaremos el comportamiento de algunos operadores relacionados con ella. La Sección 3 describe algunas propiedades de interés de las funciones de Bessel y los polinomios de Jacobi, así como de las correspondientes series de Fourier que generan. Por último, en la Sección 4 presentamos una solución de la ecuación integral doble.

A lo largo de estas páginas utilizaremos C para denotar una constante independiente de f , y de posibles variables involucradas, que puede asumir distintos valores en diferentes situaciones.

Dada una función g definida sobre $[0, 1]$, la extensión dada por $g(x) = 0$ para cada $x > 1$ la denotaremos, con un pequeño abuso de notación, $\chi_{[0,1]}g$. Así, de manera indistinta, $\chi_{[0,1]}$ será tanto la función característica del intervalo $[0, 1]$ como un operador que extiende funciones definidas en $[0, 1]$ a funciones sobre $[0, \infty)$.

2. LA ECUACIÓN DOBLE

Definimos, para $\mu > -1$, la transformada de Hankel de orden μ , \mathcal{H}_μ , como el operador integral que a cada función adecuada f le asocia

$$\mathcal{H}_\mu(f, x) = \frac{x^{-\mu/2}}{2} \int_0^\infty f(t) J_\mu(\sqrt{xt}) t^{\mu/2} dt, \quad x > 0.$$

El operador \mathcal{H}_μ es un isomorfismo de la clase de Schwartz

$$S^+ = \{f \in C^\infty((0, \infty)) : \forall k, j \geq 0, |t^k f^{(j)}(t)| < C_{k,j}\}$$

en sí mismo. Además, sobre este espacio, \mathcal{H}_μ^2 es el operador identidad. Y, por otra parte, S^+ es denso en cada $L^p([0, \infty), x^\mu dx)$, $1 < p < \infty$. La transformada de Hankel puede extenderse a un operador acotado de $L^p([0, \infty), x^\mu dx)$ en $L^{p'}([0, \infty), x^\mu dx)$, con $\mu \geq -1/2$, $1 \leq p \leq 2$ y $1/p + 1/p' = 1$; es decir

$$\|\mathcal{H}_\mu f\|_{L^{p'}([0, \infty), x^\mu dx)} \leq C \|f\|_{L^p([0, \infty), x^\mu dx)}, \quad f \in L^p([0, \infty), x^\mu dx)$$

(véanse [3] y [16]).

Denotaremos por M_μ el multiplicador de la transformada de Hankel asociado con $\chi_{[0,1]}$; esto es, el operador dado por $\mathcal{H}_\mu(M_\mu f) = \chi_{[0,1]} \mathcal{H}_\mu f$. Sobre el espacio S^+ , dicha definición es equivalente a

$$M_\mu f = \mathcal{H}_\mu(\chi_{[0,1]} \mathcal{H}_\mu f).$$

De esta forma (y teniendo en cuenta que $\mathcal{H}_\mu^2 = \text{Id}$), una manera alternativa de expresar que $\mathcal{H}_\mu f$ está soportada en $[0, 1]$ es decir que $M_\mu f = f$.

Haciendo uso de estos operadores reformularemos la ecuación integral doble. En primer lugar, con un simple cambio de notación podemos escribir (1) como

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x^{-\alpha/2}}{2} \int_0^\infty t^\beta f(t) J_\alpha(\sqrt{xt}) t^{\alpha/2} dt = g(x), & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{x^{-\eta/2}}{2} \int_0^\infty f(t) J_\eta(\sqrt{xt}) t^{\eta/2} dt = 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La segunda ecuación en (2) nos está diciendo que $\text{sop}(\mathcal{H}_\eta f) \subseteq [0, 1]$; en otras palabras, $M_\eta f = f$, siempre que el operador M_η esté bien definido para la función f .

La primera ecuación en (2) puede entenderse como

$$\mathcal{H}_\alpha(t^\beta f) \chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1]} g.$$

Usando que, bajo ciertas circunstancias, \mathcal{H}_α es un operador inversible, se obtiene la ecuación

$$M_\alpha(t^\beta f, x) = \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} g, x).$$

Por conveniencia multiplicaremos ambos lados por el factor $x^{-\beta}$, para tener

$$x^{-\beta} M_\alpha(t^\beta f, x) = x^{-\beta} \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} g, x).$$

Reuniendo lo anterior, nuestro interés se centrará en resolver, sobre los espacios $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$, con $\alpha + \beta > -1$, la que denominaremos ecuación doble;

$$(3) \quad \begin{cases} x^{-\beta} M_\alpha(t^\beta f, x) = x^{-\beta} \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} g, x), \\ M_\eta(f, x) = f(x), \end{cases}$$

con $g \in L^p([0, 1], x^\nu dx)$.

En los espacios $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$ será posible construir una solución en forma de serie de funciones de Bessel utilizando (7). De este modo no necesitaremos usar los operadores que construimos en [2].

En un sentido estricto, (2) y (3) no son exactamente equivalentes si no exigimos que las funciones pertenezcan a un espacio L^p conveniente. Sin embargo, es interesante notar que, para cualquier aplicación física práctica, la interpretación de una ecuación integral doble y su solución como en (2) es equivalente a su interpretación como en (3).

Finalmente, considerando los operadores $M_{\alpha,\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$, dados por

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta}(f, x) &= x^{-\beta} M_\alpha(t^\beta f, x), \\ \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g, x) &= x^{-\beta} \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} g, x), \end{aligned}$$

podemos reescribir la ecuación (3) como

$$(4) \quad \begin{cases} M_{\alpha,\beta} f = \mathcal{H}_{\alpha,\beta} g, \\ M_\eta f = f. \end{cases}$$

Estos operadores están bien definidos, por ejemplo, si $f \in S^+$ y $g \in C^\infty([0, 1])$. Veremos ahora que $M_{\alpha,\beta}$ y M_η son acotados en la norma de $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$, bajo ciertas condiciones sobre α , β , η y p . Como es usual, este hecho nos permite extenderlos como operadores acotados a todo el espacio $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$. Más adelante, y de manera similar, extenderemos $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ como un operador acotado de $L^p([0, 1], x^\nu dx)$ en $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$.

Proposición 2.1. *Sea $\alpha, \eta \geq -1/2$, $\alpha + \beta > -1$ y $1 < p < \infty$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \|M_{\alpha,\beta} f\|_{L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)} &\leq C \|f\|_{L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)} \\ &\iff \left| \frac{\alpha + \beta + 1}{p} - \frac{\alpha + 1}{2} - \beta \right| < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

y

$$\|M_\eta f\|_{L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)} \leq C \|f\|_{L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)} \iff \left| \frac{\alpha + \beta + 1}{p} - \frac{\eta + 1}{2} \right| < \frac{1}{4}.$$

Demostración. Ambas equivalencias son casos particulares de la más general

$$\|M_\mu f\|_{L^p([0, \infty), x^\lambda dx)} \leq C \|f\|_{L^p([0, \infty), x^\lambda dx)} \iff \left| \frac{\lambda + 1}{p} - \frac{\mu + 1}{2} \right| < \frac{1}{4},$$

válida para $\mu \geq -1/2$ y $\lambda > -1$. En realidad se trata de una versión con pesos radiales del resultado de Herz (véase [8]) relativo a la acotación de M_μ .

Veamos un esquema de la demostración. Para una función $f \in S^+$, aplicando el teorema de Fubini a $M_\mu f = \mathcal{H}_\mu(\chi_{[0,1]} \mathcal{H}_\mu f)$, y usando la fórmula de von Lommel

$$\int_0^1 J_\mu(yx) J_\mu(yt) y dy = \frac{1}{x^2 - t^2} (x J_{\mu+1}(x) J_\mu(t) - t J_\mu(x) J_{\mu+1}(t)),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} M_\mu(f, x) &= \frac{1}{2}x^{-\mu/2+1/2}J_{\mu+1}(x^{1/2})H(t^{\mu/2}J_\mu(t^{1/2})f(t), x) \\ &\quad - \frac{1}{2}x^{-\mu/2}J_\mu(x^{1/2})H(t^{\mu/2+1/2}J_{\mu+1}(t^{1/2})f(t), x) \\ &= W_1(f, x) - W_2(f, x), \end{aligned}$$

donde H denota la transformada de Hilbert $H(f, x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x-t} dt$. Ahora, teniendo en cuenta que, para $p \in (1, \infty)$,

$$\|Hf\|_{L^p([0,\infty),x^\tau dx)} \leq C\|f\|_{L^p([0,\infty),x^\tau dx)} \iff -1 < \tau < p - 1$$

y la estimación $|J_\mu(x)| \leq Cx^{-1/2}$, que se verifica para $\mu \geq -1/2$, tendremos que

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} < \frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2} < \frac{1}{4} &\implies \|W_1f\|_{L^p([0,\infty),x^\lambda dx)} \leq C\|f\|_{L^p([0,\infty),x^\lambda dx)}, \\ -\frac{1}{4} < \frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2} < \frac{3}{4} &\implies \|W_2f\|_{L^p([0,\infty),x^\lambda dx)} \leq C\|f\|_{L^p([0,\infty),x^\lambda dx)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $|\frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2}| < \frac{1}{4}$, el operador $M_\mu f$ es acotado en $L^p([0, \infty), x^\lambda dx)$.

Veamos ahora el recíproco. Como consecuencia de los resultados clásicos de interpolación, para probar que $|\frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2}| < \frac{1}{4}$ es una condición necesaria bastará ver que no hay acotación de M_μ para los valores de p tales que $|\frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2}| = \frac{1}{4}$. Sea p_1 tal que $\frac{\lambda+1}{p_1} - \frac{\mu+1}{2} = \frac{1}{4}$. Si $p_1 < 1$, no hay nada que probar, pues una de las hipótesis es $1 < p < \infty$; en otro caso, es claro que, para este valor de p , el operador W_2 es acotado. Sin embargo, usando estimaciones apropiadas cerca de infinito para las funciones de Bessel, y con una elección adecuada de f , se prueba que W_1 no es acotado para $p = p_1$. El caso en el que $\frac{\lambda+1}{p} - \frac{\mu+1}{2} = -\frac{1}{4}$ es análogo. \square

Procederemos ahora a extender $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ a un operador acotado de $L^p([0, 1], x^\nu dx)$ en $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$. A fin de obtener la acotación correspondiente haremos uso del siguiente resultado relativo a la transformada de Hankel debido a Rooney ([9] y [14], con un cambio de variable):

Teorema 2.2 (Rooney). Sean $\alpha > -1, 1 < r \leq s < \infty$ y

$$\text{máx} \left\{ \frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{s} \right\} \leq \omega < \alpha + \frac{3}{2}.$$

Entonces,

$$\left(\int_0^\infty |x^{-\omega/2+\alpha/2+3/4}\mathcal{H}_\alpha(h, x)|^s \frac{dx}{x} \right)^{1/s} \leq C \left(\int_0^\infty |x^{\omega/2+\alpha/2+1/4}h(x)|^r \frac{dx}{x} \right)^{1/r}.$$

En la siguiente proposición obtenemos la acotación que usaremos para $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$:

Proposición 2.3. Sea $\alpha > -1$ y $1 < p < \infty$ verificando

$$\text{máx} \left\{ (2\alpha + 2\beta + 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right), (2\alpha + 2\beta + 3) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \right\} \leq \beta < \frac{\alpha + \beta + 1}{p}$$

y

$$(5) \quad \frac{\alpha + \beta + \nu + 2}{p} \leq \alpha + \beta + 1.$$

Entonces,

$$\|\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g\|_{L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}dx)} \leq C\|g\|_{L^p([0,1],x^\nu dx)}.$$

Demostración. Tomando $\omega = 2\beta + \alpha + \frac{3}{2} - \frac{2(\alpha+\beta+1)}{p}$ tendremos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g\|_{L^p([0,\infty),x^{\alpha+\beta}dx)} &= \|x^{-\beta+(\alpha+\beta+1)/p}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)\|_{L^p([0,\infty),\frac{dx}{x})} \\ &= \|x^{-\omega/2+\alpha/2+3/4}\mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]}g)\|_{L^p([0,\infty),\frac{dx}{x})}. \end{aligned}$$

Elijamos ahora $r = s = p$ en el Teorema 2.2, y observemos que (respectivamente, referido a las desigualdades)

$$\begin{aligned} \text{máx} \left\{ (2\alpha + 2\beta + 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right), (2\alpha + 2\beta + 3) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \right\} &\leq \beta < \frac{\alpha + \beta + 1}{p} \\ \iff \text{máx} \left\{ 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{p} \right\} &\leq \omega < \alpha + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Así, podemos concluir

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g\|_{L^p([0,\infty),x^\alpha dx)} &\leq C\|x^{\omega/2+\alpha/2+1/4}\chi_{[0,1]}g\|_{L^p([0,\infty),\frac{dx}{x})} \\ &= C\|x^{\beta+\alpha+1-(\alpha+\beta+\nu+2)/p}\chi_{[0,1]}g\|_{L^p([0,\infty),x^\nu dx)} \\ &\leq C\|g\|_{L^p([0,1],x^\nu dx)}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de $\beta + \alpha + 1 - (\alpha + \beta + \nu + 2)/p \geq 0$, es decir, (5). \square

Con esto, la ecuación doble (4) es un problema bien propuesto en el siguiente sentido: dada $g \in L^p([0, 1], x^\nu dx)$, ¿existe alguna solución $f \in L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$?

3. FUNCIONES DE BESSEL Y POLINOMIOS DE JACOBI

Funciones de Bessel y series de Fourier-Neumann. Para $\mu > -1$, la expresión

$$\int_0^\infty J_{\mu+2n+1}(x)J_{\mu+2m+1}(x) \frac{dx}{x} = \frac{\delta_{n,m}}{2(\mu+2n+1)}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

(véase [22, Cap. XIII, págs. 404 y 405] o [13, Cap. X, pág. 162]) da lugar a un sistema ortonormal, $\{j_n^\mu\}_{n \geq 0}$, en $L^2([0, \infty), x^\mu dx)$, constituido por las funciones

$$(6) \quad j_n^\mu(x) = \sqrt{\mu+2n+1}J_{\mu+2n+1}(\sqrt{x})x^{-\mu/2-1/2}.$$

Para funciones adecuadas f definidas en $[0, \infty)$, su serie de Fourier con respecto a $\{j_n^\mu\}_{n \geq 0}$ es el desarrollo

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)j_k^\mu, \quad a_k(f) = \int_0^\infty f(t)j_k^\mu(t)t^\mu dt.$$

Estas series son un caso particular de las del tipo $\sum_{k \geq 0} a_k J_{\mu+k}$, que habitualmente son conocidas como series de Neumann; así, nos referiremos a ellas como series de

Fourier-Neumann. Tomaremos el operador suma parcial n -ésima, $S_n f$, de la serie de Fourier-Neumann como

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n a_k(f) j_k^\mu(x).$$

En [21], uno de los autores realiza el estudio de la convergencia en $L^p([0, \infty), x^\mu dx)$ de las series de Fourier-Neumann. En concreto, prueba que, si $\mu \geq -1/2$ y p satisface

$$\max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|, (\mu + 1) \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| \right\} < \frac{1}{4},$$

entonces

$$S_n f \rightarrow f, \text{ en } L^p([0, \infty), x^\mu dx), \forall f \in B_{p,\mu},$$

donde

$$B_{p,\mu} = \overline{\text{span}\{j_n^\mu\}},$$

con la clausura en $L^p([0, \infty), x^\mu dx)$. Además, para ese rango de p , se identifica $B_{p,\mu} = E_{p,\mu}$, siendo

$$E_{p,\mu} = \{f \in L^p([0, \infty), x^\mu dx) : M_\mu f = f\} = M_\mu(L^p([0, \infty), x^\mu dx)).$$

En [1], y bajo las hipótesis anteriores sobre μ y p , se prueba que la serie de Fourier-Neumann es convergente para cada función $f \in L^p([0, \infty), x^\mu dx)$. Lo que ocurre es que, si $f \notin E_{p,\mu}$, la serie converge hacia $M_\mu f$ (para ello, basta observar que $M_\mu f \in E_{p,\mu}$ y que $a_k(f) = a_k(M_\mu f)$, lo cual es fácil de comprobar utilizando el teorema de Fubini). En concreto, se tiene que

$$(7) \quad S_n f \rightarrow M_\mu f, \text{ en } L^p([0, \infty), x^\mu dx), \quad \forall f \in L^p([0, \infty), x^\mu dx).$$

Este resultado es fundamental en el análisis que aquí se efectúa. Nos permite encontrar la solución de la ecuación integral doble de una manera más sencilla que en [2], sin tener que estudiar la acotación de varios de los operadores que allí aparecen.

Polinomios de Jacobi y series de Fourier-Jacobi. Dados $\alpha, \beta > -1$, los polinomios de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n \geq 0}$ de orden α, β (ver [4, Cap. X] y [18, Cap. VI]) forman un sistema ortonormal en el intervalo $[-1, 1]$ con respecto al peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Un simple cambio de variable nos permite ver que el sistema $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)\}_{n \geq 0}$ es ortogonal en $[0, 1]$ respecto al peso $x^\alpha(1-x)^\beta$. De un modo más preciso, se verifica que

$$\int_0^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x) P_m^{(\alpha,\beta)}(1-2x) x^\alpha (1-x)^\beta dx = h_n^{(\alpha,\beta)} \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

donde

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) n!}.$$

De este modo, considerando

$$(8) \quad p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1/2} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tendremos un sistema ortonormal en $[0, 1]$ con respecto al peso $x^\alpha(1-x)^\beta$. Para una función apropiada g , definida en $[0, 1]$, su serie de Fourier, que denominaremos serie de Fourier-Jacobi, es el desarrollo

$$g \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(g) p_k^{(\alpha, \beta)}, \quad b_k(g) = \int_0^1 g(t) p_k^{(\alpha, \beta)}(t) t^\alpha (1-t)^\beta dt.$$

Llamaremos $s_n g$ al operador suma parcial n -ésima con respecto al sistema ortonormal $\{p_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n \geq 0}$; es decir,

$$s_n(g, x) = \sum_{k=0}^n b_k(g) p_k^{(\alpha, \beta)}(x).$$

La convergencia en media para las series de Fourier-Jacobi ha sido ampliamente tratada en la literatura matemática (véanse, por ejemplo, [6] y [11]). El siguiente resultado de Muckenhoupt da condiciones necesarias y suficientes para la acotación uniforme del operador $S_n g$ con un cierto tipo de pesos y , como consecuencia, sobre la convergencia en media.

Teorema 3.1 (Muckenhoupt). *Sean $\alpha, \beta > -1$, $1 < p < \infty$ y $w(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\|s_n g\|_{L^p([0,1], w^p(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx)} \leq C \|g\|_{L^p([0,1], w^p(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} \left| (\alpha + 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) + a \right| &< \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha + 1}{2} \right\}, \\ \left| (\beta + 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) + b \right| &< \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta + 1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Además, en estas condiciones $S_n g \rightarrow g$ en $L^p([0, 1], w^p(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx)$ para cualquier función $g \in L^p([0, 1], w^p(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx)$.

Relación entre polinomios de Jacobi y funciones de Bessel. Existe una estrecha relación, vía la transformada de Hankel, entre los polinomios de Jacobi y las funciones de Bessel. El siguiente lema, que será fundamental en nuestra argumentación, muestra dicha vinculación:

Lema 3.2. *Sean $\alpha, \beta > -1$ y $\alpha + \beta > -1$. Entonces*

$$(9) \quad \mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t), x) = 2^{-\beta} \frac{\sqrt{\alpha + \beta + 2n + 1} \Gamma(n + 1)}{\Gamma(\beta + n + 1)} (1-x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2x) \chi_{[0,1]}(x).$$

Si, además, asumimos $\beta < 1$, tenemos

$$(10) \quad \chi_{[0,1]} \mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta}(t) t^\beta, x) = 2^\beta \frac{\sqrt{\alpha + \beta + 2n + 1} \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1)} P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2x) \chi_{[0,1]}.$$

La comprobación de (9) puede verse en [1] y la de (10) en [2]. Nótese que (9) nos permite asegurar que $\text{sop}(\mathcal{H}_\alpha(j_n^{\alpha+\beta})) \subseteq [0, 1]$. Sin embargo, (10) únicamente nos da el valor de la transformada de Hankel de $t^\beta j_n^{\alpha+\beta}$ en $[0, 1]$; fuera de dicho intervalo no dice nada.

El lema anterior nos va a proporcionar la clave para resolver la ecuación doble, por ello lo reescribiremos en términos de los operadores $M_{\alpha,\beta}$, $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ y M_η . Teniendo en cuenta que $\mathcal{H}_\eta j_n^{\alpha+\beta} = \mathcal{H}_\eta j_n^{\eta+\alpha+\beta-\eta}$ y usando (9) podemos deducir que $\mathcal{H}_\eta j_n^{\alpha+\beta}$ está soportada en $[0, 1]$, si $\eta, \alpha + \beta, \alpha + \beta - \eta > -1$. Así es claro que, cuando M_η esté bien definido,

$$(11) \quad M_\eta(j_n^{\alpha+\beta}) = j_n^{\alpha+\beta}.$$

Por otra parte, aplicando (8) y (10) tenemos

$$(12) \quad \begin{aligned} M_{\alpha,\beta}(j_n^{\alpha+\beta}) &= x^{-\beta} M_\alpha(t^\beta j_n^{\alpha+\beta}) = x^{-\beta} \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} \mathcal{H}_\alpha(t^\beta j_n^{\alpha+\beta})) \\ &= x^{-\beta} \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} d_n p_n^{(\alpha,\beta)}) = d_n \mathcal{H}_{\alpha,\beta} p_n^{(\alpha,\beta)} \end{aligned}$$

con

$$d_n = 2^\beta \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)^{1/2} \Gamma(\beta + n + 1)^{1/2}}{\Gamma(\alpha + n + 1)^{1/2} (n!)^{1/2}}.$$

De (11) y (12) se deduce que, si tomamos el dato $g = d_n p_n^{(\alpha,\beta)}$, una solución de la ecuación doble es $f = j_n^{\alpha+\beta}$. Este hecho nos induce a pensar que, si el dato es una función g desarrollable como serie de Fourier-Jacobi, la solución f se podrá expresar como serie de Fourier-Neumann, con sus coeficientes elegidos de manera adecuada a partir de los del desarrollo de g .

4. LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DOBLE

Teorema 4.1. Sean $-1 < \beta < 1$, $\alpha, \eta, \alpha + \beta \geq -1/2$, $\alpha + \beta - \eta > -1$ y $1 < p < \infty$ verificando

$$\begin{aligned} \text{máx} \left\{ \left| \frac{\nu+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} \right|, \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|, (\alpha + \beta + 1) \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|, \right. \\ \left. \left| \frac{\alpha+\beta+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} - \beta \right|, \left| \frac{\alpha+\beta+1}{p} - \frac{\eta+1}{2} \right| \right\} < \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{p} - \frac{\beta+1}{2} \right| < \text{mín} \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2} \right\}, \quad \frac{\alpha+\beta+\nu+2}{p} \leq \alpha + \beta + 1$$

y

$$\text{máx} \left\{ (2\alpha + 2\beta + 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right), (2\alpha + 2\beta + 3) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \right\} \leq \beta < \frac{\alpha+\beta+1}{p}.$$

Entonces, para cada $g \in L^p([0, 1], x^\nu dx)$, la función

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g) J_k^{\alpha+\beta} = M_{\alpha+\beta}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta} g)$$

es una solución en $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$ de la ecuación doble

$$\begin{cases} M_{\alpha,\beta} f = \mathcal{H}_{\alpha,\beta} g, \\ M_\eta f = f. \end{cases}$$

Demostración. En nuestras hipótesis se tiene que $M_{\alpha,\beta}$ y M_η son operadores acotados de $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$ en sí mismo y que $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ es un operador acotado del espacio $L^p([0, 1], x^\nu dx)$ en $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$. Además, podemos asegurar que

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g)j_k^{\alpha+\beta}, \quad a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g) = \int_0^{\infty} \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g,t)j_k^{\alpha+\beta}(t)t^{\alpha+\beta} dt,$$

es una función en $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$. De hecho, a partir de (7) (con $\mu = \alpha + \beta$), se tiene que

$$f = M_{\alpha+\beta}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g).$$

Verifiquemos en primer lugar que f cumple la segunda condición de la ecuación doble. Usando (11) llegamos a

$$\begin{aligned} M_\eta f &= \lim_{n \rightarrow \infty} M_\eta \left(\sum_{k=0}^n a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g)j_k^{\alpha+\beta} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g)j_k^{\alpha+\beta} = M_{\alpha+\beta}(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g) = f. \end{aligned}$$

Antes de ver que f cumple la primera condición de la ecuación doble comprobaremos que la función g es desarrollable en serie de Fourier-Jacobi. Por el Teorema 3.1 (tomando $a = (\nu - \alpha)/p$ y $b = -\beta/p$) sabemos

$$\begin{aligned} s_n g &= \sum_{k=0}^n b_k(g)p_k^{(\alpha,\beta)} \rightarrow g, \quad \text{en } L^p([0, 1], x^\nu dx), \quad \forall g \in L^p([0, 1], x^\nu dx) \\ &\iff \begin{cases} \left| \frac{\nu+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2} \right| < \frac{1}{4}, \\ \left| \frac{1}{p} - \frac{\beta+1}{2} \right| < \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2} \right\}, \end{cases} \end{aligned}$$

y éstas son dos de nuestras hipótesis.

En el siguiente paso obtendremos una relación entre los coeficientes $a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g)$ y $b_k(g)$. Teniendo en cuenta que la aplicación $h \mapsto \int_0^{\infty} j_k^{\alpha+\beta}(x)h(x)x^{\alpha+\beta} dx$ y el operador $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$ son continuos, el primero de $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$ en \mathbb{R} y el segundo de $L^p([0, 1], x^\nu dx)$ en $L^p([0, \infty), x^{\alpha+\beta} dx)$, llegamos a que

$$\begin{aligned} a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g) &= \int_0^{\infty} j_k^{\alpha+\beta}(x)\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(g,x)x^{\alpha+\beta} dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m(g) \int_0^{\infty} j_k^{\alpha+\beta}(x)\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(p_m^{(\alpha,\beta)}, x)x^{\alpha+\beta} dx. \end{aligned}$$

Observemos que sobre $L^2([0, \infty), x^\alpha dx)$ la transformada de Hankel \mathcal{H}_α es un operador autoadjunto (nótese que $j_k^{\alpha+\beta}, \chi_{[0,1]} p_m^{(\alpha,\beta)} \in L^2([0, \infty), x^\alpha dx)$). Entonces, aplicando (9) y la ortogonalidad de los polinomios de Jacobi concluimos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty j_k^{\alpha+\beta}(x) \mathcal{H}_{\alpha,\beta}(p_m^{(\alpha,\beta)}, x) x^{\alpha+\beta} dx &= \int_0^\infty j_k^{\alpha+\beta}(x) \mathcal{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} p_m^{(\alpha,\beta)}, x) x^\alpha dx \\ &= \frac{1}{d_k} \int_0^1 (1-t)^\beta p_k^{(\alpha,\beta)}(t) p_m^{(\alpha,\beta)}(t) t^\alpha dt = \frac{\delta_{k,m}}{d_k}, \end{aligned}$$

donde d_k es como en (12). Por tanto se verifica que

$$a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g) = \frac{b_k(g)}{d_k}.$$

Con la igualdad anterior, usando (12) y la continuidad de los operadores $M_{\alpha,\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}$, ya estamos en disposición de probar que f cumple la primera parte de la ecuación doble:

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta}f &= \lim_{n \rightarrow \infty} M_{\alpha,\beta} \left(\sum_{k=0}^n a_k(\mathcal{H}_{\alpha,\beta}g) j_k^{\alpha+\beta} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{\alpha,\beta} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k(g)}{d_k} d_k p_k^{(\alpha,\beta)} \right) = \mathcal{H}_{\alpha,\beta}g. \end{aligned}$$

□

REFERENCIAS

[1] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (1999), 125–147.
 [2] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Solving dual integral equations on Lebesgue spaces, *Studia Math.* **142** (2000), 253–267.
 [3] A. J. Durán, On Hankel transform, *Proc. Amer. Math. Soc.* **110** (1990), 417–424.
 [4] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger y F. Tricomi, *Higher transcendental functions*, Vol. II, McGraw-Hill, Nueva York, 1953.
 [5] R. Estrada y R. P. Kanwal, *Singular integral equations*, Birkhäuser, Boston, 2000.
 [6] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and weak convergence of some orthogonal Fourier expansions by using A_p theory, en *Orthogonal polynomials and their applications* (Proc. Int. Congr., Laredo/España 1987, J. Vinuesa, ed.), *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **117**, Dekker, Nueva York (1989), 161–169.
 [7] H. Hochstadt, *Integral equations*, Wiley, Nueva York, 1973.
 [8] C. S. Herz, On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **40** (1954), 996–999.
 [9] P. Heywood y P. G. Rooney, A weighted norm inequality for the Hankel transformation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **99A** (1984), 45–50.
 [10] B. N. Mandal y N. Mandal, *Advances in dual integral equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
 [11] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.
 [12] C. Nasim y B. D. Aggarwala, On some dual integral equations, *Indian J. Pure Appl. Math.* **15** (1984), 323–340.
 [13] J. Rey Pastor y A. de Castro, *Funciones de Bessel*, Dossat, Madrid, 1958.

- [14] P. G. Rooney, A technique for studying the boundedness and extendability of certain types of operators, *Canad. J. Math.* **25** (1973), 1090–1102.
- [15] I. N. Sneddon, *Fourier transforms*, McGraw-Hill, Nueva York, 1951. Reedición: Dover, Nueva York, 1995.
- [16] K. Stempak y W. Trebels, Hankel multipliers and transplantation operators, *Studia Math.* **126** (1997), 51–66.
- [17] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford, Nueva York, 1937.
- [18] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.^a edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [19] C. J. Tranter, *Integral transforms in mathematical physics*, 3.^a edición, Methuen, Londres, 1966.
- [20] C. J. Tranter, *Bessel functions with some physical applications*, English Univ. Press, Londres, 1968.
- [21] J. L. Varona, Fourier series of functions whose Hankel transform is supported on $[0, 1]$, *Constr. Approx.* **10** (1994), 65–75.
- [22] G. N. Watson, *A Treatise on the theory of Bessel functions*, 2.^a edición, Cambridge Univ. Press, 1944.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN
Correo electrónico: `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es`

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN
Correo electrónico: `jvarona@dmc.unirioja.es`
URL: <http://www.unirioja.es/dptos/dmc/jvarona/hola.html>

EL TEOREMA DE ENUMERACIÓN DE PÓLYA

EMILIO FERNÁNDEZ MORAL Y MERCEDES SÁNCHEZ BENITO

ABSTRACT. We wish to offer here a didactic presentation, mainly based on G. Pólya's original paper and by the light of various examples, of a topic of Combinatorics: Pólya's (and Redfield's) enumeration theorem. Our excuses for it just being that an oral version was exposed in one of the sessions corresponding to the year 1991 of the "Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas de Logroño", a meeting place for secondary teacher's and university professors that as much owes to Chicho's passion for Mathematics.

El año 1937, la revista *Acta Mathematica* publica un extenso trabajo de investigación del reconocido profesor George Pólya (1887–1985) titulado *Enumeración combinatoria para grupos, grafos y compuestos químicos*, [11]. Consta de una introducción, que comienza:

Este artículo presenta una continuación del trabajo hecho por Cayley. Cayley investigó repetidamente problemas combinatorios relativos a la determinación del número de ciertos árboles. Algunos de sus problemas se prestan a interpretación química: el número de árboles en cuestión es igual al número de ciertos (teóricamente posibles) compuestos químicos . . .

y de cuatro capítulos, titulados sucesivamente «Grupos», «Grafos», «Compuestos químicos» y «Evaluación asintótica del número de combinaciones», que termina dando una estimación asintótica del . . . *curioso número ρ_n de parafinas estructuralmente isómeras C_nH_{2n+2} que intrigó a Cayley.*

La primera traducción al inglés publicada, el año 1987, se debe a Ronald C. Read, que la acompaña (en [13]) de un estudio, de antecedentes y consecuentes, titulado *El legado del artículo de Pólya: cincuenta años de la teoría de Pólya*, con más de doscientas referencias bibliográficas. Es en el primer capítulo ([13, págs. 17–20]) donde Pólya expone, demostrándolo de dos maneras, su «**teorema fundamental**», hoy día un resultado clásico de la enumeración combinatoria. En la página 118, Read da noticia de los trabajos menos conocidos del matemático americano J. H. Redfield, que ya en 1927 publicó un resultado equivalente, [14].

Nuestro objetivo en este artículo es hacer una exposición didáctica del teorema de Pólya, a la luz de unos problemas de combinatoria recreativa y basada esencialmente en las primeras páginas de [13].

Para nosotros, de hecho, «todo empezó» al leer la *Revista* que, con la finalidad de motivar, interesar y entretener, formaba las «páginas amarillas» de los libros

2000 *Mathematics Subject Classification*. 05–01, 05A15.

Key words and phrases. Pólya's enumeration theorem, necklace's problem.

de Matemáticas de B.U.P. que Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador publicaron el año 1987. En la página 175 del libro de primero [9] quedaba planteado el siguiente problema:

Tienes cuentas (todas las que quieras) de tres colores (verdes, rojas y amarillas). ¿Cuántas sortijas distintas puedes hacer con 5 cuentas?

Por otra parte, en libros de matemática recreativa se podía encontrar la fórmula para el número de collares de n perlas de k colores ([8, pág. 323]), o enterarse de que hay 2226 cubos con las caras pintadas de alguno de entre seis colores posibles, de los que 30 tienen un color distinto en cada cara ([8, pág. 242]), que hay 24 cuadrados de fondo negro con la cara dividida en cuadrantes de 3 colores ([8, pág. 241]), que hay $\frac{n^3+2n}{3}$ triángulos de fondo negro y cara dividida en 3 partes triangulares idénticas de n colores ([7, p. 255]), o que con 12 varillas de colores distintos y de la misma longitud se pueden formar hasta 19958400 entramados cúbicos ([1, pág. 48]).

Por fortuna, el año 1990 encontramos en la librería Pons de Zaragoza el libro de R. C. Read.

Problema A_1 .

- Tenemos un montón de cuentas de collar de la misma forma, unas blancas y otras negras. ¿Cuántos collares distintos se pueden formar engarzando 6 de ellas? ([13, pág. 98]).

Llamemos **configuración** (hexagonal bicolor) en este problema a cada una de las disposiciones de 6 cuentas, blancas o negras, en los vértices de un hexágono regular plano que los tiene distinguidos, por ejemplo, numerados. O bien, una **configuración hexagonal bicolor** es una aplicación $\varphi: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{\circ, \bullet\}$. Nos convendrá, para abreviar, llamar Φ al conjunto de las configuraciones. Hay en total $2^6 = 64$ configuraciones distintas, por ejemplo

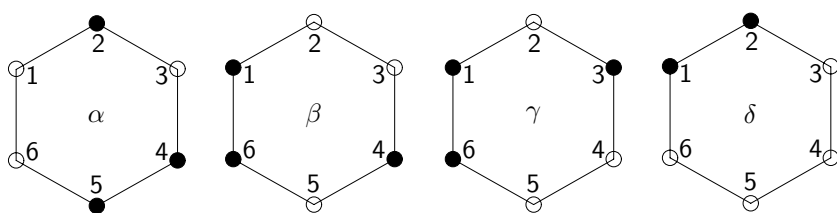


FIGURA 1

Las configuraciones no enumeran los diferentes collares, pues hay configuraciones distintas, como las tres primeras de la figura anterior, que constituyen, espacialmente, el mismo collar. Pero enseguida nos damos cuenta de que dos configuraciones constituyen el mismo collar si se puede «transformar» una en otra mediante alguno de los elementos del **grupo diédrico** D_6 de las simetrías de un hexágono regular que presentamos en la figura siguiente (las reflexiones planas de D_6 hacen el papel de los giros espaciales, de 180° en torno a los mismos ejes, que dan la vuelta al collar):

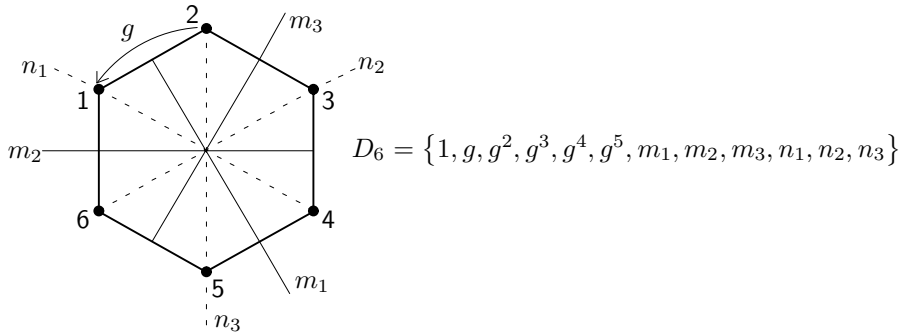


FIGURA 2

Así, en el caso de las configuraciones α, β y γ de la figura 1, se tienen las relaciones que escribiremos

$$\beta = g^4(\alpha); \quad \gamma = m_3(\alpha),$$

y las tres constituyen, desde luego, el mismo collar.

Como D_6 es un grupo, la relación binaria en Φ definida por $\varphi \sim \psi \iff \exists s \in D_6$ tal que $s(\varphi) = \psi$, es de equivalencia, y produce una partición de Φ en clases disjuntas. Estas clases sí enumeran los collares espacialmente diferentes, y se llaman las **órbitas** en la acción **del grupo** D_6 sobre el conjunto Φ .

Por ejemplo, la órbita de la configuración α de la figura 1, que designaremos por O_α , es el conjunto formado por las doce configuraciones siguientes:

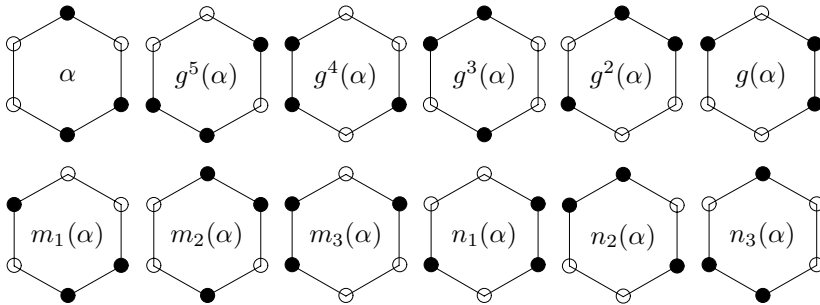


FIGURA 3

y O_δ es el conjunto formado por estas otras seis:

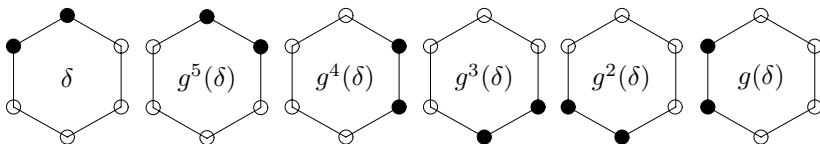


FIGURA 4

En este segundo caso, la órbita consta de menos configuraciones; el motivo es que hay, además de la identidad, otra simetría, la reflexión m_1 , que deja δ invariante ($m_1(\delta) = \delta$), y las demás reflexiones convierten δ en alguna de las configuraciones $g^i(\delta)$; visto de otro modo, cada una de las 6 configuraciones de O_δ es invariante por dos simetrías: la identidad y la **conjugada** de la simetría m_1 por el giro g^i correspondiente, es decir, la simetría $g^i m_1 (g^i)^{-1}$. Por ejemplo, la configuración $g(\delta)$ es invariante por la identidad y por $gm_1g^{-1} = m_2$, ya que $gm_1g^{-1}(g(\delta)) = gm_1(\delta) = g(\delta)$.

En ambos casos, y adelantando un primer resultado general que veremos a continuación, la suma, extendida a todas las configuraciones de una órbita, del número de simetrías del grupo D_6 que dejan cada configuración invariante, es igual al orden del grupo D_6 : en el primer caso hay 12 configuraciones distintas, siendo cada una de ellas sólo invariante por la identidad; en el segundo hay 6 configuraciones distintas, cada una de ellas invariante por dos simetrías.

Las observaciones siguientes son de rápida comprobación:

- Para cada $\varphi \in \Phi$, las simetrías que dejan φ invariante constituyen un subgrupo H_φ de D_6 .
- Para cada $\varphi \in \Phi$, el número de configuraciones de la órbita O_φ es

$$N(O_\varphi) = \frac{|D_6|}{|H_\varphi|}$$

(donde hemos usado —aquí y en lo que sigue— las notaciones $N(A)$, $|G|$ para designar el número de elementos del conjunto finito A o del grupo G). Esto es así puesto que la aplicación entre el grupo cociente D_6/H_φ de los cogrupos a izquierda módulo H_φ y el conjunto de configuraciones O_φ dada por $sH_\varphi \rightarrow s(\varphi)$ es biyectiva, y se sabe que $|D_6/H_\varphi| = \frac{|D_6|}{|H_\varphi|}$.

- Para cada configuración ψ equivalente a φ (sea $s \in D_6$ tal que $\psi = s(\varphi)$), el subgrupo de las simetrías que dejan invariante ψ es $H_\psi = sH_\varphi s^{-1}$, que tiene el mismo orden que H_φ .

De modo que, para una órbita cualquiera O_φ , se tiene

$$\sum_{\psi \in O_\varphi} N(\{s \in D_6 \mid s(\psi) = \psi\}) = N(O_\varphi) \cdot |H_\varphi| = |D_6| = 12.$$

Y así, la suma, extendida a las 64 configuraciones de Φ , del número de simetrías de D_6 que dejan cada configuración invariante será igual al número de órbitas, multiplicado por el valor constante, 12, de dicha suma sobre cada órbita, o sea,

$$\sum_{\varphi \in \Phi} N(\{s \in D_6 \mid s(\varphi) = \varphi\}) = 12 \times (\text{número de órbitas}).$$

Pero podemos hacer esta suma de otro modo; en vez de contar, para cada configuración, el número de simetrías que la dejan invariante, podemos contar, para cada simetría, el número de configuraciones que deja invariantes; el número (finito) total

obtenido será el mismo, y se tiene así finalmente:

$$\sum_{s \in D_6} N(\{\varphi \in \Phi \mid s(\varphi) = \varphi\}) = 12 \times (\text{número de órbitas}).$$

De manera que para hallar el número de collares se puede, simplemente, «promediar» el número de configuraciones invariantes por cada simetría de D_6 .

Nota. Este resultado, válido en general para la acción de un grupo finito G sobre un conjunto finito K ,

$$\text{número de órbitas} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} N(\{\kappa \in K \mid g(\kappa) = \kappa\}),$$

se conoce como **lema de Burnside** (aparece en [4]; véase [13, pág. 101]).

Es esencial, para calcular fácilmente el número de configuraciones que deja invariantes cada simetría, y para lo que seguirá, representar las 12 simetrías del grupo D_6 como permutaciones de los 6 vértices de un hexágono regular (se está considerando, pues, $D_6 \leq S_6$, donde S_6 es el **grupo simétrico** de 6 letras; diremos que D_6 actúa sobre Φ como **grupo de permutaciones de grado 6**), y además, presentar estas permutaciones como producto de ciclos disjuntos de la manera siguiente (véase la figura 2):

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)(5)(6);$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (165432);$$

$$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (153)(264);$$

$$g^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (14)(25)(36);$$

$$g^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (135)(246);$$

$$g^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (123456);$$

$$m_1 = (12)(36)(45); \quad m_2 = (16)(25)(34); \quad m_3 = (14)(23)(56);$$

$$n_1 = (1)(4)(26)(35); \quad n_2 = (3)(6)(24)(15); \quad n_3 = (2)(5)(13)(46).$$

Por ejemplo, la «permutación» n_1 deja fijos los vértices 1 y 4, e intercambia el 2 con el 6, y el 3 con el 5; n_1 es, así, el producto de dos ciclos de longitud 1, y de dos ciclos de longitud 2. Podemos contar el número de configuraciones bicolors que quedan invariantes por esta permutación si nos damos cuenta que, en una tal configuración, el vértice 1 y el vértice 4 pueden tener cualquier color, los vértices 2

y 6 deben ser del mismo color para que su intercambio no altere la configuración, y lo mismo para los vértices 3 y 5. Luego el número de configuraciones invariantes por n_1 es $2^4 = 16$.

Si, en general, la permutación s se descompone en k ciclos disjuntos, el número de configuraciones bicolors invariantes por s será 2^k . De modo que, si agrupamos las permutaciones que se descomponen en el mismo número de ciclos, sin importar la longitud de los mismos, como hay

| | | | |
|---|-----------------------------|---|----------------------------------|
| 1 | permutación compuesta de | 6 | ciclos, $\{1\}$ |
| 3 | permutaciones compuestas de | 4 | ciclos, $\{n_1, n_2, n_3\}$ |
| 4 | permutaciones compuestas de | 3 | ciclos, $\{g^3, m_1, m_2, m_3\}$ |
| 2 | permutaciones compuestas de | 2 | ciclos, $\{g^2, g^4\}$ |
| 2 | permutaciones compuestas de | 1 | ciclos, $\{g, g^5\}$ |

se tiene

$$\sum_{s \in D_6} N(\{\varphi \in \Phi \mid s(\varphi) = \varphi\}) = 1 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 = 156,$$

y, por lo tanto, el número de órbitas es $\frac{156}{12} = 13$. Estos son los 13 collares bicolors de 6 cuentas:

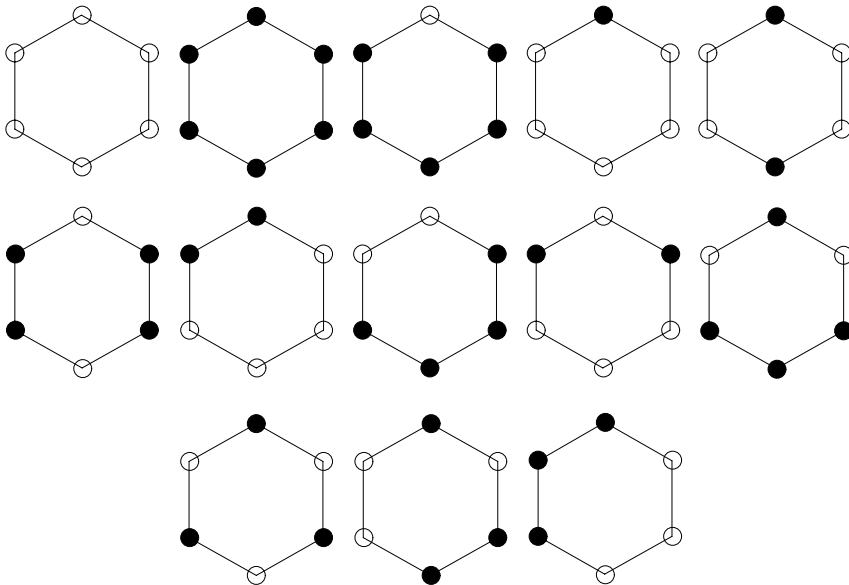


FIGURA 5

De modo que una forma de resolver el problema es hallar el valor, para $s = 2$, del polinomio «contador» $C(s) = \frac{1}{12}(s^6 + 3s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 2s)$; aquí, 12 es el orden del grupo D_6 , y cada simetría de D_6 contribuye a la suma entre paréntesis

con un término s^k si, en su presentación como permutación de grado 6, está compuesta por un total de k ciclos disjuntos. Más en general, el número de collares de 6 cuentas de n colores ($n \geq 1$) será $C(n)$.

No supone ahora ningún esfuerzo, y a cambio su utilidad, como veremos en los próximos problemas B_i , es mayor, construir otro «polinomio contador» que contiene más información sobre la estructura combinatoria del grupo, y al que **Pólya** denominó **índice de ciclos del grupo de permutaciones** (D_6 en este caso, como grupo de permutaciones de grado 6); se trata del polinomio en 6 variables, cuyo número está indicado por el grado del grupo,

$$\zeta_{D_6}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = \frac{1}{12}(s_1^6 + 3s_1^2s_2^2 + 4s_2^3 + 2s_3^2 + 2s_6),$$

al que una **permutación de tipo** $[j_1, j_2, \dots, j_6]$, es decir, que se descompone en j_1 ciclos de longitud 1, j_2 ciclos de longitud 2, \dots , j_6 ciclos de longitud 6 (siendo $j_1 + 2j_2 + \dots + 6j_6 = 6$), contribuye con un monomio de la forma $s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_6^{j_6}$. El número de collares de 6 cuentas y n colores es, ahora,

$$C(n) = \zeta_{D_6}(n, n, n, n, n, n).$$

Nota. En general, el índice de ciclos del grupo finito G como grupo de permutaciones de grado n es

$$\zeta_G(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + \dots + nj_n = n}} h_{j_1 \dots j_n} s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_n^{j_n},$$

donde $h_{j_1 \dots j_n}$ es el número de elementos de tipo $[j_1, j_2, \dots, j_n]$ que hay en G . (El índice de ciclos caracteriza «combinatoriamente» el grupo de permutaciones; véase [13, p. 27].)

Problema A2.

- ¿Cuántos collares distintos, de n cuentas, se pueden formar con cuentas de k colores? ([6, núm. 275]).

Vamos a calcular el índice de ciclos del grupo diédrico D_n de orden $2n$, de las simetrías del n -gono regular, que actúa aquí como grupo de permutaciones de grado n sobre el conjunto Φ de las k^n configuraciones posibles.

El grupo D_n está formado por n reflexiones y n giros, en éstos se incluye la identidad. Si n es impar, cada una de las n reflexiones se descompone en producto de 1 ciclo de longitud 1 y $\frac{n-1}{2}$ ciclos de longitud 2, siendo entonces la contribución total de las reflexiones al índice de ciclos igual a $\frac{1}{2} s_1 s_2^{\frac{n-1}{2}}$.

En cambio, si n es par (recordemos el caso hexagonal), la mitad de las reflexiones son producto de $\frac{n}{2}$ ciclos de longitud 2, y la otra mitad son producto de 2 ciclos de longitud 1 y $\frac{n-2}{2}$ ciclos de longitud 2; la contribución de las reflexiones al índice de ciclos es, en este caso,

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{n}{2} s_2^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} s_2^{\frac{n}{2}-1} s_1^2 \right) = \frac{1}{4} s_2^{\frac{n}{2}-1} (s_1^2 + s_2).$$

Los n giros de D_n , que constituyen el subgrupo cíclico C_n , son, sobre los vértices $i = 1, 2, \dots, n$, las permutaciones $g_m(i) = i + m$ (módulo n), para $m = 1, 2, \dots, n$.

Fijemos m ; si $k \geq 1$ es el menor entero tal que $km \equiv 0$ (módulo n), es fácil ver que entonces g_m se descompone en $\frac{n}{k}$ ciclos de longitud k . Sea $\text{mcd}(m, n) = d$, tal menor entero $k \geq 1$ es obviamente $k = \frac{n}{d}$, y la permutación g_m se descompone, pues, en d ciclos de longitud $\frac{n}{d}$.

Agrupemos las g_m que tienen el mismo tipo de descomposición en producto de ciclos. Para ello, denotemos con $\varphi(h)$ al número de enteros positivos menores que h y primos con h (función φ de Euler). De este modo, para cada divisor d de n hay $\varphi(\frac{n}{d})$ números m , entre 1 y n , tales que $\text{mcd}(m, n) = d$.

De modo que, por cada divisor d de n , hay $\varphi(\frac{n}{d})$ permutaciones que contribuyen con un término $s_{\frac{n}{d}}^d$ al índice de ciclos. La contribución de los n giros es, entonces,

$$\frac{1}{2} \cdot \zeta_{C_n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) s_{\frac{n}{d}}^d = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d) s_d^{\frac{n}{d}},$$

y, finalmente, el índice de ciclos de D_n actuando como grupo de permutaciones de grado n es ([13, pág. 22])

$$\zeta_{D_n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d) s_d^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} s_1 s_2^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{2} s_2^{\frac{n}{2}-1} (s_1^2 + s_2) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Luego, el número de collares de n cuentas y k colores es ([8, pág. 323])

$$\zeta_{D_n}(k, k, \dots, k) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi(d) k^{\frac{n}{d}} + \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} k^{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{2} k^{\frac{n}{2}} (k+1) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Si $k = 2$ y n es un número primo impar, el número de collares es ([8, pág. 320])

$$\frac{1}{2n} (2^n + 2(n-1)) + \frac{1}{2} 2^{\frac{n+1}{2}} = \frac{2^{n-1} - 1}{n} + 2^{\frac{n-1}{2}} + 1.$$

Adjuntamos una pequeña tabla de índices de ciclos que permitirá resolver alguno de los problemas mencionados al principio:

$$\begin{array}{ll} \zeta_{C_3}(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{3}(s_1^3 + 2s_3) & \zeta_{D_3}(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{6}(s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3) \\ \zeta_{C_4}(s_1, \dots, s_4) = \frac{1}{4}(s_1^4 + s_2^2 + 2s_4) & \zeta_{D_4}(s_1, \dots, s_4) = \frac{1}{8}(s_1^4 + 2s_1^2s_2 + 3s_2^2 + 2s_4) \\ \zeta_{C_5}(s_1, \dots, s_5) = \frac{1}{5}(s_1^5 + 4s_5) & \zeta_{D_5}(s_1, \dots, s_5) = \frac{1}{10}(s_1^5 + 5s_1s_2^2 + 4s_5) \end{array}$$

En problemas n -gonales bicolors, el menor n para el que el número de órbitas en la acción de los grupos C_n y D_n es distinto es precisamente $n = 6$, el caso presentado en el problema **A1**.

Problema A₃.

- (a) Queremos pintar cada cara de un cubo con un color, pudiendo repetir colores, y tenemos n colores distintos. ¿Cuántos cubos distintos podríamos conseguir? ([8, pág. 242 y 315]).
- (b) Lo mismo, pero con un octaedro regular.

Sobre el conjunto de configuraciones del apartado (a) actúa el **grupo octaédrico O** , de orden 24, de los giros que dejan invariante un cubo (o un octaedro), como grupo de permutaciones, de grado 6, de las 6 caras del cubo (o de los 6 vértices del octaedro inscrito en las caras del cubo). En cambio en (b), es el mismo grupo O , pero como grupo de permutaciones, de grado 8, de las 8 caras del octaedro (o de los 8 vértices del cubo circunscrito).

El grupo completo de las simetrías de un cubo, o de un octaedro, es de orden 48, pues también están las simetrías especulares. Pero tendremos dos cubos (octaedros) distintos cuando no se pueda hacer coincidir uno con otro por un giro espacial, y las simetrías actuantes se reducen a los 24 elementos del grupo octaédrico. En el lado derecho de la siguiente figura tabulamos el tipo de cada uno de ellos, como permutación de grado 6 y como permutación de grado 8:

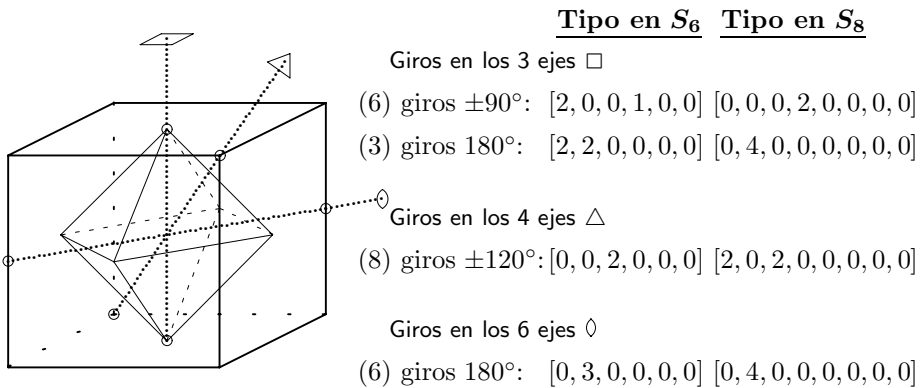


FIGURA 6

(a) El índice de ciclos del grupo de permutaciones es (ver la tabla)

$$\zeta_O(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = \frac{1}{24}(s_1^6 + 6s_1^2s_4 + 3s_1^2s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_2^3),$$

y el número de cubos,

$$\zeta_O(n, n, n, n, n, n) = \frac{1}{24}(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2) = \frac{1}{24}n^2(n+1)(n^3 - n^2 + 4n + 8).$$

(b) En este caso, el índice de ciclos del grupo de permutaciones es

$$\zeta_O(s_1, s_2, \dots, s_8) = \frac{1}{24}(s_1^8 + 9s_2^4 + 8s_1^2s_3^2 + 6s_4^2),$$

y el número de octaedros,

$$\zeta_O(n, n, \dots, n) = \frac{n^2}{24}(n^6 + 17n^2 + 6).$$

Nota 1. La representación del grupo O como grupo de permutaciones de menor grado es la de grado 4, ya que $O \cong S_4$, a cada giro de O le corresponde en este isomorfismo una de las $4!$ permutaciones de las diagonales del cubo (o del octaedro). El índice de ciclos de O como grupo de permutaciones de grado 4 es (la fórmula siguiente se generaliza de modo obvio para conseguir el índice de ciclos $\zeta_{S_n}(s_1, \dots, s_n)$):

$$\begin{aligned} \zeta_O(s_1, s_2, s_3, s_4) &= \frac{1}{24} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + 3j_3 + 4j_4 = 4}} \frac{4!}{j_1! 2^{j_2} j_2! 3^{j_3} j_3! 4^{j_4} j_4!} s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} s_4^{j_4} \\ &= \frac{1}{24} (s_1^4 + 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2 + 6s_4). \end{aligned}$$

Por otro lado, también se puede considerar la actuación de los elementos del grupo O permutando las doce aristas del cubo. El índice de ciclos de O como grupo de grado 12 es

$$\zeta_O(s_1, s_2, \dots, s_{12}) = \frac{1}{24} (s_1^{12} + 9s_4^3 + 8s_3^4 + 6s_1^2 s_5^2).$$

Nota 2. El **grupo tetraédrico T** , de los 12 giros que dejan invariante un tetraedro regular¹ (el grupo completo de simetrías es de orden 24, pues además de los 4 ejes de giro ternarios que pasan por un vértice y el centro de la cara opuesta, y los 3 binarios que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas, hay simetrías especulares respecto de los planos perpendiculares a una arista que pasan por su punto medio), es isomorfo al **grupo alternado A_4** de grado 4 (los giros son las permutaciones pares de las caras del tetraedro). El índice de ciclos de T como grupo de permutaciones de grado 4 es

$$\begin{aligned} \zeta_T(s_1, s_2, s_3, s_4) &= \frac{1}{24} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + 3j_3 + 4j_4 = 4}} \frac{4!(1 + (-1)^{j_2 + j_4})}{j_1! 2^{j_2} j_2! 3^{j_3} j_3! 4^{j_4} j_4!} s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} s_4^{j_4} \\ &= \frac{1}{12} (s_1^4 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2). \end{aligned}$$

Esta fórmula se puede generalizar para el índice de ciclos $\zeta_{A_n}(s_1, \dots, s_n)$; véase [13, pág. 22]).

Nota 3. Los índices de ciclos del **grupo icosaédrico I** , de los 60 giros que dejan invariante un icosaedro (o un dodecaedro) regular, como grupo de permutaciones de grado 12 (vértices del icosaedro o caras del dodecaedro) o de grado 20 (caras del icosaedro o vértices del dodecaedro) son, respectivamente,

$$\zeta_I(s_1, s_2, \dots, s_{12}) = \frac{1}{60} (s_1^{12} + 24s_1^2 s_5^2 + 20s_3^4 + 15s_2^6),$$

¹ Véase un problema relacionado con este grupo en [8, pág. 315].

y

$$\zeta_I(s_1, s_2, \dots, s_{20}) = \frac{1}{60}(s_1^{20} + 24s_5^4 + 20s_1^2s_3^6 + 15s_2^{10}),$$

como se pueden escribir a partir de la tabla siguiente:

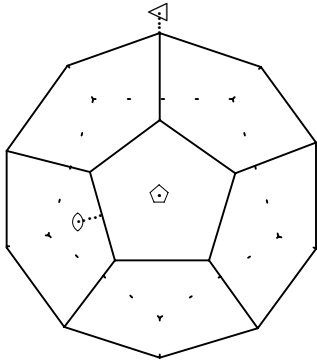
| | | |
|---|------------------------------------|------------------------------------|
|  | <u>Tipo en S_{12}</u> | <u>Tipo en S_{20}</u> |
| | Giros en los 6 ejes ◊ | |
| | [2, 0, 0, 0, 2, 0, ..., 0] | [0, 0, 0, 0, 4, 0, ..., 0] |
| Giros en los 10 ejes △ | | |
| [0, 0, 4, 0, ..., 0] | [2, 0, 6, 0, ..., 0] | |
| Giros en los 15 ejes ◊ | | |
| [0, 6, 0, ..., 0] | [0, 10, 0, ..., 0] | |

FIGURA 7

El grupo I es isomorfo (véase, por ejemplo, [5, pág. 50]) al alternado A_5 de grado 5, y su índice de ciclos como grupo de permutaciones de grado 5 puede obtenerse a partir de la fórmula general señalada en la nota anterior.

Si ahora queremos resolver problemas como, ¿cuántos collares distintos hay, de n cuentas y k colores, pero que contengan α_1 cuentas de color «1», ..., α_k cuentas de color « k » (siendo $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$)? o bien, ¿cuántos cubos hay con tres caras rojas, dos azules y una amarilla?, necesitamos dar un paso más. La solución no requiere una técnica muy complicada, sólo «subirnos a hombros» de Pólya, que ahora muestra toda la potencia del índice de ciclos de un grupo de permutaciones, al poderse conjugar con el uso de funciones generatrices en su teorema.

Lo expondremos en la solución del problema siguiente. Es oportuno empezar con palabras del propio Pólya ([12], «Sobre pictografía»):

... La pictografía es quizá la fuente remota de los alfabetos griego, latino y gótico cuyas letras utilizamos corrientemente como símbolos matemáticos. Deseo observar que también la pictografía primitiva puede ser de alguna utilidad en la matemática. En lo que sigue, quiero mostrar cómo el método de funciones generatrices, importante en el análisis combinatorio, puede desarrollarse de un modo bastante intuitivo a partir de «series figuradas», en las que los términos son dibujos (o, con más precisión, variables representadas por dibujos) ...

Problema B_1 .

- ¿Cuántos collares distintos, de n cuentas, se pueden hacer con k cuentas blancas y $n - k$ negras, siendo $0 \leq k \leq n$?

Llamemos A_{kl} a los números que buscamos. Construyamos² su, como la llama Pólya, **serie generatriz «figurada»**

$$F(\circ, \bullet) = \sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=n}} A_{kl} \circ^k \bullet^l,$$

que vendría a ser la «suma» de los collares del problema A_2 , con los términos «semejantes» (collares que tienen la misma composición de cuentas blancas y negras) agrupados; por ejemplo, en el caso $n = 6$ (problema A_1), dicha «serie» es

$$1 \cdot \circ^6 \bullet^0 + 1 \cdot \circ^5 \bullet^1 + 3 \cdot \circ^4 \bullet^2 + 3 \cdot \circ^3 \bullet^3 + 3 \cdot \circ^2 \bullet^4 + 1 \cdot \circ^1 \bullet^5 + 1 \cdot \circ^0 \bullet^6,$$

donde \circ^k indica la presencia de k cuentas blancas, y \bullet^l la de l negras, en el collar (la concatenación de cuentas se asimila a un producto algebraico conmutativo de las figuras que las representan).

Ahora, A_{kl} es (recordemos el problema A_2) el número de órbitas correspondientes a configuraciones n -gonales bicolores formadas con k cuentas blancas y l negras, **configuraciones** que llamaremos, para abreviar, **de contenido (k, l)** .

Aplicando un «lema de Burnside parcial» a la acción de D_n sobre el conjunto Φ_{kl} de las configuraciones de contenido (k, l) , se tiene

$$A_{kl} = \frac{1}{|D_n|} \sum_{s \in D_n} N(\{\varphi \in \Phi_{kl} \mid s(\varphi) = \varphi\}),$$

de manera que

$$\begin{aligned} F(\circ, \bullet) &= \sum_{k,l} \left(\frac{1}{2n} \sum_{s \in D_n} N(\{\varphi \in \Phi_{kl} \mid s(\varphi) = \varphi\}) \right) \circ^k \bullet^l \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{s \in D_n} \left(\sum_{k,l} N(\{\varphi \in \Phi_{kl} \mid s(\varphi) = \varphi\}) \circ^k \bullet^l \right). \end{aligned}$$

Veamos que, si la permutación $s \in D_n$ de grado n es de tipo $[j_1, j_2, \dots, j_n]$, entonces

$$\sum_{k,l} N(\{\varphi \in \Phi_{kl} \mid s(\varphi) = \varphi\}) \circ^k \bullet^l = (\circ + \bullet)^{j_1} (\circ^2 + \bullet^2)^{j_2} \dots (\circ^n + \bullet^n)^{j_n}.$$

Una tal permutación s puede visualizarse en la forma siguiente:

$$s = \overbrace{(x)(x) \dots (x)}^{j_1} \overbrace{(xx)(xx) \dots (xx)}^{j_2} \dots \overbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}^{j_n \leq 1}.$$

Una configuración α , de contenido cualquiera, será invariante por esta permutación s si y sólo si su «expresión figurada» es

$$\alpha = \overbrace{(\otimes)(\otimes) \dots (\otimes)}^{j_1} \overbrace{(\otimes\otimes)(\otimes\otimes) \dots (\otimes\otimes)}^{j_2} \dots \overbrace{(\otimes \cdot \dots \cdot \otimes)}^{j_n \leq 1},$$

² De acuerdo con [12], hemos modificado la forma de la serie figurada que se da en [13].

donde, dentro de cada paréntesis, las «bolitas» son del mismo color (condición necesaria y suficiente para que el correspondiente ciclo de s deje la configuración α invariante).

Así que poniendo $(\circ\circ) = \circ^2$, $(\bullet\bullet) = \bullet^2$, etc., las configuraciones α invariantes por s (en número de $2^{j_1+j_2+\dots+j_n}$, como se ha visto en el problema A_1) son todas las de la forma

$$\alpha = \underbrace{\circ\circ\dots\circ}_{j_1} \underbrace{\circ^2\circ^2\dots\circ^2}_{j_2} \dots \underbrace{\circ^n}_{j_n \leq 1},$$

luego son, en efecto, los términos del producto algebraico

$$(\circ + \bullet)^{j_1} (\circ^2 + \bullet^2)^{j_2} \dots (\circ^n + \bullet^n)^{j_n}.$$

Ahora, si se introduce la función auxiliar

$$f(\circ, \bullet) = \circ + \bullet$$

a la que Pólya llama **función generatriz de la colección de figuras** y se pone $f_i(\circ, \bullet) = f(\circ^i, \bullet^i)$, se tiene finalmente

$$F(\circ, \bullet) = \frac{1}{2^n} \sum_{j_1+\dots+j_n=n} h_{j_1j_2\dots j_n} [f_1(\circ, \bullet)]^{j_1} \dots [f_n(\circ, \bullet)]^{j_n} = \zeta_{D_n}(f_1, f_2, \dots, f_n),$$

donde $h_{j_1j_2\dots j_n} \geq 0$ es el número de permutaciones de D_n de tipo $[j_1, j_2, \dots, j_n]$.

El resultado al que se ha llegado, que constituye la forma particular del teorema de Pólya para el caso que estamos tratando, dice que la función generatriz del número de collares de contenido (k, l) se obtiene substituyendo la correspondiente $f_i(\circ, \bullet)$ en el lugar de la indeterminada s_i en el índice de ciclos del grupo D_n .

En particular, para $n = 6$, como el índice de ciclos del grupo D_6 era:

$$\zeta_{D_6}(s_1, s_2, \dots, s_6) = \frac{1}{12}(s_1^6 + 3s_1^2s_2^2 + 4s_2^3 + 2s_3^2 + 2s_6),$$

la función generatriz $F(\circ, \bullet)$ queda, en este caso «reescrita», en la forma

$$F(\circ, \bullet) = \frac{1}{12} [(\circ + \bullet)^6 + 3(\circ + \bullet)^2(\circ^2 + \bullet^2)^2 + 4(\circ^2 + \bullet^2)^3 + 2(\circ^3 + \bullet^3)^2 + (\circ^6 + \bullet^6)],$$

y el coeficiente de $\circ^k\bullet^{6-k}$ en el polinomio homogéneo de grado 6 que se obtiene es, desde luego, el número de collares de 6 cuentas con k cuentas blancas y $6 - k$ cuentas negras.

En el caso general, substituyendo la generatriz de figuras $f(\circ, \bullet) = \circ + \bullet \equiv 1 + x$ en el índice de ciclos $\zeta_{D_n}(s_1, \dots, s_n)$, se obtiene la función generatriz de los números que buscamos, llamémosles solamente A_k , en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^n A_k x^k = \xi_{D_n}(1+x, 1+x^2, \dots, 1+x^n) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{d|n} \varphi(d)(1+x^d)^{\frac{n}{d}} + \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{1}{2}(1+x+x^2)(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de x^k , se sigue:

$A_0 = 1$; ya que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, basta contar las fracciones $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$.

Y, para $k \geq 1$, teniendo en cuenta que:

- En $(1+x^d)^{n/d}$ sólo aparecerá un término x^k si $k = rd$, es decir si d también divide a k , y el coeficiente será $\binom{n/d}{r} = \binom{n/d}{k/d}$.
- En la expresión que aparece en el caso n impar,

$$(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}}(1+x) = 1 + \frac{n-1}{2}x^2 + \binom{\frac{n-1}{2}}{2}x^4 + \dots + x^{n-1} \\ + x + \frac{n-1}{2}x^3 + \binom{\frac{n-1}{2}}{2}x^5 + \dots + x^n,$$

el coeficiente de x^k es $\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{k}{2}}$ si k es par, o $\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{k-1}{2}}$ si k es impar.

- En la expresión que aparece en el caso n par,

$$(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+x+x^2) = (1+x^2)^{\frac{n}{2}} + x(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1} \\ = \sum_{l=0}^{n/2} \binom{n/2}{l} x^{2l} + \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{\frac{n}{2}-1}{l} x^{2l+1},$$

el coeficiente de x^k es $\binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}}$ si k es par, o $\binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{k-1}{2}}$ si k es impar.

Por lo tanto, abreviando algo la expresión final mediante la función parte entera,

$$A_k = \frac{1}{2n} \sum_{d|\text{mcd}(n,k)} \varphi(d) \binom{n/d}{k/d} + \begin{cases} \frac{1}{2} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}} & \text{si } n \text{ es par y } k \text{ es par,} \\ \frac{1}{2} \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por ejemplo (tomado de [15]) cuando $n = 12$, $0 \leq k \leq 12$, la fórmula anterior da

$$A_k = \frac{1}{24} \sum_{d|\text{mcd}(12,k)} \varphi(d) \binom{12/d}{k/d} + \begin{cases} \frac{1}{2} \binom{6}{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ es par,} \\ \frac{1}{2} \binom{5}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} & \text{si } k \text{ es impar,} \end{cases}$$

así que, sucesivamente, $A_0 = A_{12} = 1$, $A_1 = A_{11} = 1$, $A_2 = A_{10} = 6$, $A_3 = A_9 = 12$, $A_4 = A_8 = 29$, $A_5 = A_7 = 38$ y $A_6 = 50$.

Problema B_2 .

- (a) Vamos a suponer que tenemos seis bolas de tres colores distintos, tres rojas, dos azules, una amarilla. Las bolas del mismo color no se pueden distinguir. ¿De cuántas maneras se pueden asignar las seis bolas a los seis

vértices de un octaedro regular que se puede mover libremente en el espacio? ([13, pág. 2].)³

- (b) Tenemos 6 colores para pintar las caras de un cubo, ¿cuántos cubos distintos se pueden hacer, cuyas caras tengan entre todas los 6 colores, uno en cada cara? ([10, págs. 42–46], según [8, pág. 239]).

(a) El índice de ciclos del grupo O actuando como grupo de permutaciones sobre los 6 vértices de un octaedro es

$$\zeta_O(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = \frac{1}{24}(s_1^6 + 6s_1^2s_4 + 3s_1^2s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_3^3).$$

La función generatriz de la colección de figuras (bola roja, bola azul, bola amarilla) es $f(x, y, z) = x + y + z$, y el número que queremos es el coeficiente de x^3y^2z en el polinomio generador

$$F(x, y, z) = \frac{1}{24}[(x + y + z)^6 + 6(x + y + z)^2(x^4 + y^4 + z^4) + 3(x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 8(x^3 + y^3 + z^3)^2 + 6(x^2 + y^2 + z^2)^3].$$

Dicho coeficiente es

$$A_{321} = \frac{1}{24} \left(\frac{6!}{3!2!1!} + 3 \cdot 2 \cdot 2 \right) = 3,$$

lo que contesta el problema.

(b) Con el mismo índice de ciclos que en el apartado (a), la función generatriz de la colección de figuras es ahora $f(a, b, c, d, e, f) = a + b + c + d + e + f$, y queremos el coeficiente de $abcdef$ en el correspondiente polinomio generador $F(a, b, c, d, e, f)$; para esto, es obvio que nos podemos limitar a considerar sólo el primer término, $\frac{1}{24}(a + b + c + d + e + f)^6$, donde dicho coeficiente es $\frac{1}{24}6!$. Son 30 los cubos, y este problema, en particular, admite una solución más sencilla (véase [8, pág. 242]).⁴

Nota. Más en general, sea $[\Phi]$ un conjunto finito o numerable de distintos objetos $\phi', \phi'', \dots, \phi^{(\lambda)}, \dots$ llamados figuras; hay una propiedad de las figuras, llamada su contenido, expresable mediante un multiíndice $\kappa = (k_1, \dots, k_m)$, donde $m \geq 1$ y los k_i ($i = 1, \dots, m$) son enteros no negativos, que divide $[\Phi]$ en subconjuntos finitos. La serie

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\kappa} a_{\kappa} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m},$$

donde a_{κ} es el número de figuras de contenido κ , se llama función generatriz de $[\Phi]$.⁵

³ Este es el primer ejemplo que da, e inmediatamente resuelve, presentando así su teorema, Pólya.

⁴ Con un cálculo del todo similar, utilizando el índice de ciclos $\zeta_O(s_1, \dots, s_{12})$, se puede probar que son $\frac{1}{24}12!$, como citábamos al comienzo, los diferentes entramados cúbicos formados por 12 varillas de distinto color.

⁵ En [13], Pólya considera también conjuntos infinitos de figuras. Por ejemplo, dado un objeto B , el conjunto $[\Phi] = \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde ϕ_n es la «figura» formada por n copias de B , cuya función generatriz es $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Sea G un grupo de permutaciones de grado n , y $\zeta_G(s_1, \dots, s_n)$ su índice de ciclos. Sea A_κ el número de órbitas de contenido κ en la acción de G sobre el conjunto de las aplicaciones $\varphi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow [\Phi]$, o configuraciones. (El contenido de la configuración φ es la suma de los contenidos de las figuras $\varphi(1), \dots, \varphi(n)$.) Se tiene que

$$\sum_{\kappa} A_{\kappa} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} = \zeta_G(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

siendo $f_i(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^i, \dots, x_m^i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Es decir:

Teorema de Pólya. *La función generatriz para las configuraciones no equivalentes con respecto a G se obtiene sustituyendo la función generatriz de $[\Phi]$ en el índice de ciclos de G .*

El lector interesado puede ampliar su información sobre el teorema de Pólya en libros como [17], [3] y [2]. Además, en el artículo [16] se puede encontrar una exposición del tema que, en algunos aspectos, se asemeja a la aquí efectuada.

REFERENCIAS

- [1] W. W. R. Ball y H. S. M. Coxeter, *Mathematical recreations and essays*, Dover, Nueva York, 1987.
- [2] C. Berge, *Principes de combinatoire*, Dunod, París, 1968.
- [3] N. L. Biggs, *Discrete mathematics*, Oxford University Press, Nueva York, 1991.
- [4] W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, 2.^a ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1911.
- [5] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, 3.^a ed., Dover, Nueva York, 1973.
- [6] H. E. Dudeney, *536 Puzzles and curious problems*, Londres, 1931.
- [7] M. Gardner, *Festival mágico-matemático*, Alianza, Madrid, 1984.
- [8] M. Gardner, *Nuevos pasatiempos matemáticos*, 5.^a ed., Alianza, Madrid, 1984.
- [9] M. de Guzmán, J. Colera y A. Salvador, *Matemáticas. Bachillerato 1*, Anaya, Madrid, 1987.
- [10] P. A. McMahon, *New mathematical pastimes*, Cambridge, 1921.
- [11] G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Mathematica* **68** (1937), 145–254.
- [12] G. Pólya, On picture-writing, *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 689–697.
- [13] G. Pólya y R. C. Read, *Combinatorial enumeration of groups, graphs, and chemical compounds*, Springer-Verlag, Nueva York, 1987.
- [14] J. H. Redfield, The theory of group reduced distributions, *Amer. J. Math.* **49** (1927), 433–455.
- [15] D. L. Reiner, Enumeration in music theory, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 51–54.
- [16] A. Tucker, Polyá's enumeration formula by example, *Mathematical Magazine* **47** (1974), 248–256.
- [17] A. Tucker, *Applied combinatorics*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1980.

I. E. S. PRÁXEDES MATEO SAGASTA, GLORIETA DEL DR. ZUBÍA s/N, 26003 LOGROÑO (LA RIOJA), SPAIN

———, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO J. L. VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA s/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: emilio.fernandez@dmc.unirioja.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, 28040 MADRID, SPAIN

Correo electrónico: merche_sanchez@mat.ucm.es

POLIEDROS

JOSÉ IGNACIO EXTREMIANA ALDANA, LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO
Y MARÍA TERESA RIVAS RODRÍGUEZ

Gracias, Chicho, te queremos

ABSTRACT. In this paper we have tried to explore the presence of polyhedra in some areas of the human activity. Taking as started point a reflection about the platonic association of regular polyhedra to different cosmic elements, we have a look at the study and the use of polyhedra in art, science and technology. We emphasize some recent applications of polyhedral techniques to biological, chemical and physical processes. The symmetries, topological invariants and geometrical properties play an important role in phenomena such that the virus replication, the study of molecular structures and different properties of the substances.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo intentamos poner de manifiesto la importancia de los Poliedros y la manera en la que aparecen en diversos campos que han tenido interés para el ser humano a lo largo de la historia. Hemos elegido este tema, en cierto modo ligado a nuestro campo de investigación, porque sabemos que le gustaba a Chicho. Precisamente, él fue quien sugirió el tema de los Cuerpos Platónicos para una sesión del Seminario de Actualización Permanente de Matemáticas «José Luis Rubio de Francia», que durante tantos años condujo.

Con el trabajo que aquí presentamos, versión reducida de otro más extenso que estamos preparando, nos gustaría contribuir, en la medida de nuestras posibilidades, a «acercar las Matemáticas a la sociedad», uno de los objetivos del Año Mundial de las Matemáticas y una idea en la que Chicho siempre insistía. Lamentamos que no haya podido leer el borrador que con toda seguridad le hubiésemos pasado para que lo criticara.

Por último, queremos manifestar nuestra gran admiración a su labor en la Universidad y nuestro inmenso cariño a quien fue uno de nuestros mejores amigos.

2000 *Mathematics Subject Classification*. 51M20, 52B99, 57M25, 57N60, 57Q05.

Key words and phrases. Polyhedron, cellular complexes, platonic solids, symmetry, virus, capsid, nucleic acid, molecular structure, perovskite, fullerene, knots and links.

Los autores agradecen el apoyo financiero de la DGI, proyecto BFM2000-0961, y de la Universidad de La Rioja, proyecto API00/B15.

2. CUERPOS E IDEAS PLATÓNICAS

En el lenguaje cotidiano se entiende que un polígono es una región del plano determinada por un número finito de segmentos. Estos segmentos se denominan lados o aristas y sus extremos vértices del polígono. El polígono se llama regular si todos sus lados son iguales y todos los ángulos determinados por las aristas en los vértices también son iguales. Se dice que el polígono es convexo si es una región convexa; es decir, que el segmento que une dos puntos cualesquiera de la región está contenido en ella. De modo análogo, pensando en el espacio tridimensional, se dice que un poliedro es un cuerpo sólido limitado por una superficie que consta de un número finito de polígonos no coplanarios a los que se denomina caras del poliedro. Se llama regular si sus caras son polígonos regulares iguales y se dice que es convexo si es una región convexa. De forma parecida puede pensarse en dimensiones sucesivamente mayores para obtener lo que comúnmente se llaman politopos, y en particular los politopos regulares y convexos, cuya existencia y número están bien determinados [4].

En este trabajo muchas veces la palabra poliedro o estructura poliedral se utilizará en un sentido más general para nombrar espacios construidos con piezas sencillas, de diversas dimensiones, llamadas celdas (copias topológicas de discos de la correspondiente dimensión). Se forman a partir de un espacio discreto de puntos (0-celdas), al que se le va pegando sucesivamente una colección (quizás vacía) de celdas, de dimensión cada vez mayor, por los bordes de éstas. Estas estructuras poliedrales o poliedros generales pueden tener un número finito o infinito de piezas y en este último caso ser su dimensión finita o infinita. Muchos de los objetos matemáticos que se estudian en Geometría, Topología y otras áreas tienen esta estructura. Entre los más sencillos se encuentran los polígonos y poliedros geométricos descritos al inicio de esta sección, que han sido utilizados y estudiados desde la antigüedad. Hace aproximadamente dos mil cuatrocientos años ya se conocía que únicamente existen cinco poliedros regulares convexos: el tetraedro (cuatro caras triangulares), el cubo o hexaedro (seis caras cuadradas), el octaedro (ocho caras triangulares), el dodecaedro (doce caras pentagonales) y el icosaedro (veinte caras triangulares). Véase la Figura 2.

Los restos arqueológicos más antiguos en los que aparecen figuras poliedrales, de los que tenemos noticia, son unas piedras talladas del neolítico (aproximadamente 2000 a. C.) encontradas en Escocia, véase la Figura 1. También se conservan un par de dados icosaédricos de la época de la dinastía de Tolomeo en el British Museum de Londres. Parece que este tipo de figuras geométricas ya tenían una utilidad lúdica como ocurre en la actualidad. Pensemos por ejemplo en los dados que se utilizan en juegos tan populares como el parchís o la oca que no son sino cubos; el dado del Scatergeries es un icosaedro y en los juegos de rol se utilizan todo tipo de poliedros regulares.

En el libro XIII de los «Elementos», [12], de Euclides (300 a. C.) aparece la construcción de los cinco poliedros regulares; hay quien incluso sostiene que los



FIGURA 1. Piedras del Neolítico

Elementos no son sino una narración excelente de éstos. Se atribuye a Teeteto (417–369 a. C.), personaje que aparece en los Diálogos de Platón (400 a. C.) como símbolo de la inteligencia, la teoría de los cinco poliedros regulares.

A los cinco sólidos regulares se les llama Cuerpos Platónicos porque Platón en uno de sus diálogos más significativos, el «Timeo», en el que se explica la construcción del universo, establece una asociación entre ellos y los elementos fundamentales de los que éste está compuesto, que según sostenían los griegos estaba hecho con átomos de agua, aire, tierra y fuego.

Según lo que allí se expone, el mundo real es una copia imperfecta del mundo de las ideas hecha por el Demiurgo, ser inteligente y bueno al que le atrae la belleza y trata de recrearla. Este personaje crea en primer lugar el alma del mundo y la esfera celeste (lo hace dándole forma esférica, la más perfecta) en cuyo centro está la Tierra. Después se ocupa de la materia con la que está hecho el mundo; se compone de cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua, que han de tener la propiedad de ser «sólidos» (pues las cosas no solamente son planas sino que tienen profundidad) y han de ser capaces de recomponerse unos en otros. Puesto que han de ser sólidos, esto es, limitados por planos y un plano está compuesto por piezas sencillas (triángulos), el Demiurgo elige de éstos los más bellos: el triángulo rectángulo isósceles (con dos piernas —catetos— iguales) y el triángulo rectángulo escaleno (cojo) que posee la propiedad de tener la hipotenusa de doble longitud que uno de sus catetos. A partir de seis de estos últimos triángulos construye el triángulo equilátero y, con estas piezas, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. Con cuatro triángulos rectángulos isósceles construye el cuadrado y con seis de éstos el cubo.

Incluimos a continuación extractos literales del «Timeo» según la traducción castellana [23]:

«... Antes de la creación, por cierto, todo esto carecía de proporción y medida. Cuando dios se puso a ordenar el universo, primero dio forma y número al fuego, agua, tierra y aire, de los que, si bien había algunas huellas, se encontraban en el estado en que probablemente se halle todo cuando dios está ausente. Sea siempre esto lo que afirmamos en toda ocasión: que dios los compuso tan bellos y excelsos como era posible de aquello que no era así. Ahora, en verdad, debo intentar demostraros el orden y origen de cada uno de los elementos con un discurso poco habitual... En primer lugar, creo que para cualquiera está más allá de toda duda que fuego, tierra, agua y aire son cuerpos. Ahora bien, toda forma corporal tiene también profundidad.

Y, además, es de toda necesidad que la superficie rodee la profundidad. La superficie de una cara plana está compuesta de triángulos. Todos los triángulos se desarrollan a partir de dos, cada uno con un ángulo recto y los otros agudos. Uno tiene a ambos lados una fracción de ángulo recto dividido por lados iguales, el otro partes desiguales de un ángulo recto atribuida a lados desiguales. . . suponemos que éste es el principio del fuego y de los otros cuerpos. . . Ciertamente, debemos explicar cuáles serían los cuatro cuerpos más perfectos, que, aunque disímiles entre sí, podrían nacer unos de otros cuando se desintegran. En efecto, si lo logramos, tendremos la verdad acerca del origen de la tierra y el fuego y de sus medios proporcionales. Pues no coincidiremos con nadie en que hay cuerpos visibles más bellos que éstos, de los que cada uno representa un género particular. Debemos, entonces, esforzarnos por componer estos cuatro géneros de cuerpos de extraordinaria belleza y decir que hemos captado su naturaleza suficientemente . . . »

Debe haber cuatro elementos por el siguiente razonamiento: las cosas deben tener fuego, puesto que se ven, y tierra, puesto que son materiales; dos cosas necesitan de una tercera para poder ser unidas. Si el universo fuese plano bastaría con un tercer elemento, pero, como tiene profundidad, necesita de otro más para poder hacer esta unión. Así, para unir el fuego y la tierra se precisan otros dos: el aire y el agua. Analizando las propiedades de los elementos y la proporción en la que deben estar en la naturaleza, llega a la conclusión de que los átomos de fuego son tetraedros, los de tierra son cubos, los de aire octaedros y los de agua icosaedros. Queda una única combinación, el dodecaedro, que lo reserva para el universo. En la Figura 2 mostramos los dibujos de Kepler basados en esa asociación.

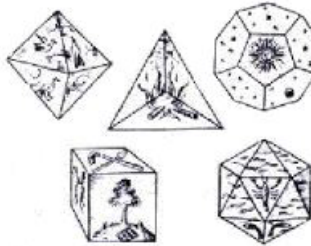


FIGURA 2. Elementos y cuerpos platónicos

En esencia, los integrantes más elementales son los triángulos rectángulos isósceles y los escalenos. Puesto que el fuego, el agua y el aire están integrados por escalenos, se pueden romper en sus escalenos y recombinarse entre sí de modo que se genera un ciclo de reacciones circular al no poderse crear una situación de equilibrio. De nuevo citamos palabras textuales de la traducción del «Timeo»:

«... Debemos pensar que todas estas cosas son en verdad tan pequeñas que los elementos individuales de cada clase nos son invisibles por su pequeñez, pero cuando muchos se aglutinan, se pueden observar sus masas y, también, que en todas partes

dios adecuó la cantidad, movimientos y otras características de manera proporcional y que todo lo hizo con la exactitud que permitió de buen grado y obediente la necesidad. A partir de todo aquello cuyos géneros hemos descrito antes, muy probablemente se daría lo siguiente. Cuando el fuego choca con la tierra y con su agudeza la disuelve, ésta se trasladaría, ya sea que se hubiera diluido en el mismo fuego o en una masa de aire o de agua, hasta que sus partes se reencontraran en algún lugar, se volvieran a unir unas con otras y se convirtieran en tierra —pues nunca pasarían a otra especie—, pero si el agua es partida por el fuego, o también por el aire, es posible que surjan un cuerpo de fuego y dos de aire. Cuando se disuelve una porción de aire, sus fragmentos darían lugar a dos cuerpos de fuego. A la inversa, cuando el fuego, rodeado por el aire o el agua o alguna tierra, poco entre muchos, se mueve entre sus portadores, lucha y, vencido, se quiebra; dos cuerpos de fuego se combinan en una figura de aire; mas cuando el aire es vencido y fragmentado, de dos partes y media se forjará una figura entera de agua.»

Una mirada rápida sobre estas ideas platónicas quizás nos haga sonreír, pero una reflexión algo más profunda sobre ellas nos hace pensar cómo han influido a lo largo de la historia y hasta qué punto están vigentes en la actualidad. En nuestra opinión, contienen tres principios que han tenido y tienen gran importancia en el desarrollo de la ciencia: Unión entre ciencia y belleza, aplicación de objetos y reglas matemáticas conocidas a entidades o procesos desconocidos (asociación de los poliedros a entidades cósmicas) y construcción de la complejidad a partir de elementos simples.

En relación con el primer principio recogemos la frase de G. H. Hardy [16] referida a las matemáticas: *«Los diseños del matemático, como los del pintor o el poeta, han de ser bellos; las ideas, como los colores o las palabras, deben relacionarse de manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas.»*

La unión de ciencia y belleza, simbolizada en polígonos y poliedros, ha sido una constante en la obra de muchos científicos y artistas. Una muestra la tenemos en la construcción que Euclides hace del pentágono regular, en el que la diagonal y el lado están en proporción áurea $\tau : 1$, siendo $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número áureo o la divina proporción, llamado así por la belleza que genera en los objetos que lo contienen. Por ejemplo, aparece este número en el dodecaedro, en el icosaedro y en la sucesiva división de un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea, que da lugar a un cuadrado y a otro rectángulo áureo. Uniendo mediante trozos de circunferencia los vértices opuestos de los cuadrados que se van obteniendo, aparece la espiral áurea, que es la característica de algunas de las más bellas caracolas.

Tanto en la pintura como en la escultura y en la arquitectura esta proporción se ha mantenido a lo largo de la historia como canon de belleza. Citaremos sólo algunos edificios enormemente singulares como el Partenón de la Acrópolis ateniense o la iglesia de Notre Dame de París en los que casi cualquier rectángulo que se puede distinguir en ellos es un rectángulo áureo. La fachada de la sede de las Naciones Unidas en Nueva York está formada por tres grandes rectángulos, cada uno de los cuales es áureo. Otros objetos de uso común, como las tarjetas postales o de crédito, también son rectángulos áureos.

En 1202, Leonardo da Pisa (apodado Fibonacci) encontró su célebre sucesión de enteros, $\{f_n\} : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$, en un estudio que realizaba sobre la cría de conejos. Esta sucesión está íntimamente ligada al número áureo, de tal forma que éste es el límite de la sucesión cuyos términos son los cocientes $\frac{f_{n+1}}{f_n}$. Los números de Fibonacci aparecen en estudios botánicos ligados a la filotaxia (disposición de las hojas) que presentan muchos árboles y frutos como la piña común, donde un cociente $\frac{f_n}{f_m}$ marca la rotación que interviene en el paso de una hoja a otra o de una lámina a otra. Así, la naturaleza, al igual que muchos artistas, parece servirse en algunas de sus creaciones de proporciones en las que interviene el número áureo ligado al pentágono regular. No es de extrañar que la figura formada por las diagonales de un pentágono regular (pentagrama) fuese elegida por los pitagóricos como el símbolo de su secta.

Una muestra de la inclusión de figuras poliedrales en el arte podemos encontrarla en la obra del pintor y mosaicista florentino Paolo Ucello (1397–1475). En la Figura 3 puede verse un detalle del fresco titulado «El Diluvio», pintado por este artista en 1448, en el que aparece un joven luciendo un sombrero que es un toro poliedral. Esta misma figura del toro poliedral, junto con otras inspiradas en dibujos de Leonardo da Vinci de los que hablaremos enseguida, también aparecerá posteriormente en algunas de las bellísimas obras realizadas hacia el 1520 por Fra Giovanni da Verona. Se trata de unos maravillosos trabajos de marquetería obtenidos al unir pequeños trozos de madera de diferentes tonalidades (artesanía que aún se realiza en Italia). Véase la Figura 3.



FIGURA 3. Obras de P. Ucello y Fra Giovanni da Verona

Mención especial merece el pintor y matemático Piero della Francesca (1416–1492), considerado actualmente como uno de los primeros artistas del renacimiento

cuya fascinación por los poliedros les condujo a estudiar y desarrollar propiedades de antiguos y nuevos sólidos. Uno de sus libros, «*Libellus de quinque corporibus regularibus*» (1480), conservado en la Biblioteca Vaticana, contiene la figura más antigua que conozcamos de un poliedro cuyas sesenta caras son pentágonos y hexágonos en la misma distribución que ahora se utiliza para construir balones de fútbol, véase la Figura 4. Más adelante resaltaremos la importancia de este poliedro concreto (uno de los denominados sólidos arquimedianos, al que Kepler [20] llamaría mucho más tarde icosaedro truncado porque puede obtenerse truncando un icosaedro en cada uno de sus vértices). Véase la Figura 5.

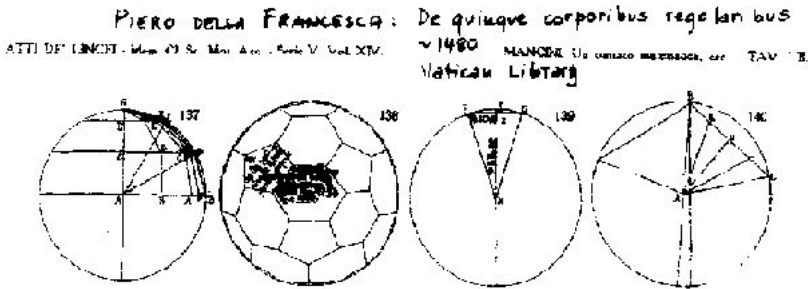


FIGURA 4. Dibujos de Piero della Francesca

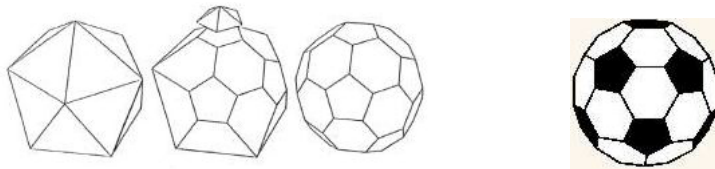


FIGURA 5. Truncando un icosaedro. Balón de fútbol

Parece que no sólo influido por los trabajos de Piero della Francesca, sino plagiándolos en parte, Fra Luca Pacioli (1445–1509) escribió un libro acerca de las maravillosas propiedades del número áureo titulado «*De divina proportione*», [22]. En este libro aparecen numerosas ilustraciones de poliedros con dibujos hechos por su amigo el gran artista Leonardo da Vinci (1452–1519). Es notable la atracción que sentía Leonardo por los poliedros, para los que construyó modelos de sus esqueletos, con tiras de madera como aristas, que dejaban huecos todo el interior del poliedro y las caras del mismo. Cuando un modelo así se observa en perspectiva con el ojo del observador muy pegado a una de las caras huecas, ésta aparece como un polígono grande que en su interior contiene el resto de las caras. Pintada esta configuración sobre un plano, es una buena representación en dos dimensiones del poliedro en cuestión, que se denomina diagrama de Schlegel del mismo. Los dibujos de Leonardo han sido una referencia y fuente de inspiración para numerosos artistas

y científicos tanto de su época como posteriores. En la ilustración de la Figura 6 podemos contemplar el diseño de Leonardo de dos poliedros, uno de ellos el icosaedro truncado.

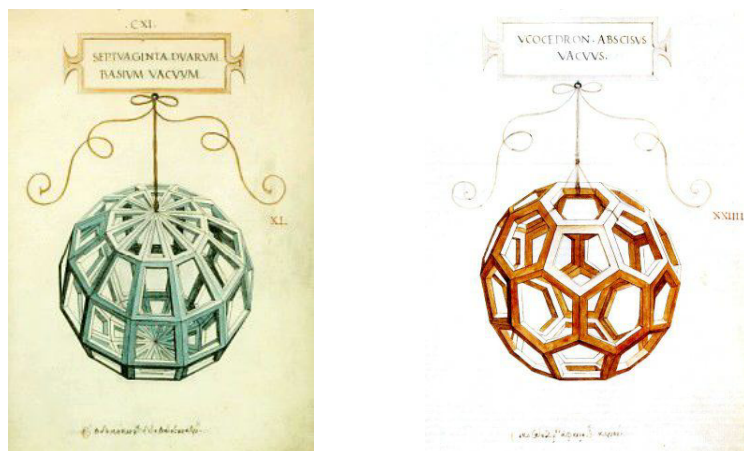


FIGURA 6. Dibujos de Leonardo da Vinci

Muchas de las obras artísticas más importantes del renacimiento son tratados de perspectiva, de geometría proyectiva, importante parte de la Geometría a cuyo desarrollo contribuyeron de manera notable grandes artistas. En algunas de estas obras aparecen especialmente dibujados o esculpidos algunos poliedros; como ejemplo hemos elegido el grabado «Melancolía» de Dürero (1471–1528), una de las obras que a nuestro entender simboliza mejor la unión de belleza y ciencia, véase la Figura 7.

Otra admirable muestra del desarrollo de ciencia y arte se encuentra en la espléndida Alhambra de Granada. En las paredes de este monumento árabe del siglo XIII pueden apreciarse diseños de fascinante belleza que presentan cada uno de los diecisiete grupos de simetría planos. Su influencia en otras obras artísticas es notable y como ejemplo pueden verse los trabajos del holandés M. C. Escher (1898–1972), donde, a diferencia de los anteriores, aparecen dibujos de animales o de humanos pero subyace el mismo espíritu de creación a través de la simetría. En [11] pueden verse obras de este artista, muy vinculado a la geometría, en las que se observa tanto la influencia señalada como la de Leonardo para sus numerosas creaciones poliedrales, y la utilización también en su última etapa de modelos hiperbólicos.

Es bien conocida la utilización básica de figuras y estructuras poliedrales en obras de grandes artistas del siglo XX pertenecientes a diferentes movimientos artísticos, muchos de ellos enmarcados en el arte abstracto. Sugerimos al lector que observe algunas de las obras de Picasso, Dalí, Oteiza, etc. Hoy en día hay una corriente, muy ligada al mundo científico, cuyas obras representan figuras de poliedros o de sus deformaciones hasta conseguir creaciones bellas; numerosas referencias e ilustraciones de ellas pueden encontrarse en la página web de George Hart.

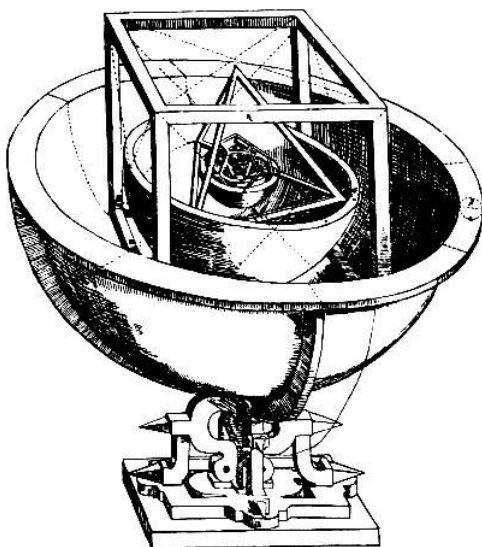


FIGURA 7. Melancolía de Dürero y modelo cósmico de Kepler

Otra de las ideas platónicas, la asociación de sólidos a entidades cósmicas, sigue presente en investigadores posteriores al ocuparse de la estructura del universo. Así, por ejemplo, la encontramos en los trabajos del gran astrónomo J. Kepler (1571–1630), quien, además de enunciar las tres leyes del movimiento planetario, sistematizó matemáticamente y desarrolló todo lo que se conocía en su época sobre poliedros. En un folleto de 1596 titulado «El misterio cósmico», Kepler, hombre profundamente religioso a pesar de que llegó a ser excomulgado en 1612, escribe:

«... Antes de ser creado el universo, no existían los números excepto la Trinidad que es Dios mismo... Dado que la línea y el plano no implican ningún número, entonces reina la infinitud. Consideremos por lo tanto a los sólidos. Primero debemos eliminar a los sólidos irregulares dado que sólo estamos interesados en la creación ordenada; quedan por lo tanto seis cuerpos: la esfera y los cinco poliedros regulares. A la esfera corresponde el cielo exterior, mientras que el mundo dinámico está representado por los sólidos de cara plana, de los cuales existen cinco, los cuales a la vez (cuando son vistos como límite) determinan seis cosas diferentes: los seis planetas que giran alrededor del sol. Éste es el motivo por el cual sólo hay seis planetas ...»

Más adelante asigna cada cuerpo platónico a un planeta con el siguiente argumento:

«... los sólidos regulares se dividen en dos grupos: tres en uno y dos en otro. Al grupo mayor pertenecen primero el cubo, segundo la pirámide, y finalmente el dodecaedro. Al segundo grupo pertenecen primero el octaedro y segundo el icosaedro. Lo mencionado explica por qué la parte más importante del universo, que es la Tierra —donde la imagen de Dios se refleja en el hombre—, separa a los dos grupos. Por

consiguiente, como posteriormente procedo a demostrar, los sólidos del primer grupo deben hallarse fuera de la órbita de la Tierra, mientras que los del segundo grupo deben encontrarse dentro... por lo tanto, asigno el cubo a Saturno, el tetraedro a Júpiter, el dodecaedro a Marte, el icosaedro a Venus y el octaedro a Mercurio».

Para reforzar su teoría, Kepler creó un modelo impresionante del universo, inspirado en los modelos vaciados de Leonardo, que muestra un cubo con un tetraedro inscrito en él, un dodecaedro inscrito en el tetraedro, un icosaedro inscrito en el dodecaedro, y finalmente un octaedro inscrito en el icosaedro; todos ellos separados por esferas. Este modelo ilustrado en la Figura 7 explicaba matemáticamente su teoría cosmológica, que inicialmente procedía de la teoría copernicana de órbitas circulares.

Cabe preguntarse cómo habría modificado Kepler su visión del universo de haber sido descubiertos durante su vida el resto de planetas que hoy conocemos, pero lo que sí es cierto es que basándose en las numerosas observaciones de T. Brahe (del que fue ayudante), ampliándolas, construyendo nuevos modelos cósmicos poliedrales, estudiando sistemáticamente propiedades de los poliedros conocidos y descubriendo nuevos y trabajando duramente en lo que él denominó su «guerra con Marte» (determinación de la órbita), Kepler descubrió las tres leyes fundamentales del movimiento de los planetas. I. Newton (1642–1727) mostraría un siglo más tarde en sus «Principia Mathematica» que estas tres leyes pueden ser deducidas matemáticamente, mediante métodos exclusivamente geométricos, de la ley de la gravitación.

Si en los trabajos de Kepler la idea básica es utilizar la ciencia para una mejor comprensión del universo, convencido de que Dios lo ha creado de acuerdo con un plan matemático, el propio Newton consideraba su obra como una explicación de las profecías del profeta Daniel. Con impulsos religiosos similares o diferentes, o sin ellos, lo cierto es que los científicos, siguiendo la pauta marcada por la asociación de poliedros a entidades cósmicas, continúan intentando explicar la forma del universo utilizando modelos, conceptos y teorías previamente desarrollados en Matemáticas.

La tercera idea que deseamos resaltar a partir de la asociación platónica, y que quizás sea la que más profundamente ha influido en el desarrollo de la ciencia es el pensamiento de que, sin entrar en otras consideraciones éticas, espirituales o morales, la materia, los seres orgánicos o vivos o los que son producto de nuestra imaginación están hechos de piezas elementales básicas que especialmente combinadas producen entes de una complejidad mucho mayor.

Este proceso es el que parece seguirse no sólo en la fabricación industrial o en la construcción de edificios, sino también en la creación celular de los seres vivos y a un nivel más profundo en la composición molecular y atómica, hasta el punto de que hoy en día muchos científicos sostienen que el universo está construido a partir de doce partículas elementales sobre las que actúan cuatro fuerzas fundamentales.

Por otra parte, este proceso de construcción a partir de elementos simples se aplica en ocasiones al análisis de la estructura del lenguaje o del pensamiento o en técnicas de aprendizaje y se encuentra en la base del desarrollo actual de la inteligencia artificial.

No es extraño, por tanto, que en la aproximación al estudio de la «realidad» conocida o desconocida, infinita o infinitesimal, en su posible diseño o modificación,

las «estructuras poliedrales» aparezcan no sólo en campos meramente científicos o técnicos, sino también cuando se desean aplicar herramientas tecnológicas a otros ámbitos. En la siguiente sección, aunque sólo sea una pequeña muestra, exponemos algunos ejemplos de esta presencia poliedral en diversos campos.

3. POLIEDROS, CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Es evidente que las estructuras poliedrales están presentes en la naturaleza. Todos estamos familiarizados con la forma poligonal de las telarañas, con la estructura hexagonal de los paneles de abejas o la estructura poligonal que conforma la superficie de las alas y ojos de algunos insectos. También los granos de polen y las semillas de ciertas plantas tienen formas poliedrales basadas fundamentalmente en pentágonos y hexágonos, y llama la atención la belleza de seres como los radiolarios (cuyo esqueleto contribuye a la formación de sedimentos marinos) proporcionada por sus formas poliedrales, en algunos casos estrelladas, que en muchas ocasiones van encajándose para formar colonias de gran estabilidad.

Quizás no tan explícitamente, pero sí de un modo muy fuerte, donde aparece una conexión con los poliedros es en el campo de la virología, objeto de estudio de numerosos grupos de investigación en la actualidad y en el que vamos a centrarnos a continuación.

Los virus son microorganismos formados por asociaciones organizadas de macromoléculas, sólo visibles con microscopio electrónico debido a su pequeño tamaño (entre 10 y 300 nanómetros), que se caracterizan por poseer solamente un tipo de ácido nucleico, ADN o ARN, pero no ambos como ocurre en formas superiores de vida. El ácido nucleico que contiene el material genético está protegido por una capa proteica que se llama cápside, la cual está compuesta de numerosas subunidades proteicas sujetas a ciertas simetrías que determinan que la cápside adquiera una estructura poliedral, que varía de unos virus a otros, lo suficientemente eficaz como para formar un sello capaz de envolver al ácido. Ésta es la composición esencial de todos los virus, aunque algunos más complejos poseen otra envoltura exterior que contiene lípidos y azúcares ligados a las proteínas de la cápside (virus envueltos). La Figura 8 muestra a la izquierda la imagen de un virus envuelto (herpesvirus), en la que puede apreciarse difusamente la forma poliedral de la cápside que vemos con mayor detalle en la imagen de la derecha.

Por sí mismo, un virus (o más precisamente una partícula viral completa: cápside conteniendo al ácido —virion—) puede considerarse como un complejo bioquímico inerte. Depende enteramente de factores externos para poder moverse y no puede replicarse fuera de una célula viva. Cuando ha invadido una célula, el ácido nucleico del virus, que porta la información genética (genoma), dirige la maquinaria de la célula para sintetizar completamente nuevas partículas virales idénticas a la progenitora.

El estudio de los virus como ciencia es relativamente joven, con avances muy rápidos a partir de los años cincuenta en paralelo con los de la biogenética y biología molecular. Hoy en día la clasificación de los virus se hace atendiendo esencialmente a estos dos aspectos: la naturaleza de su material genético y la simetría y composición de su cápside.

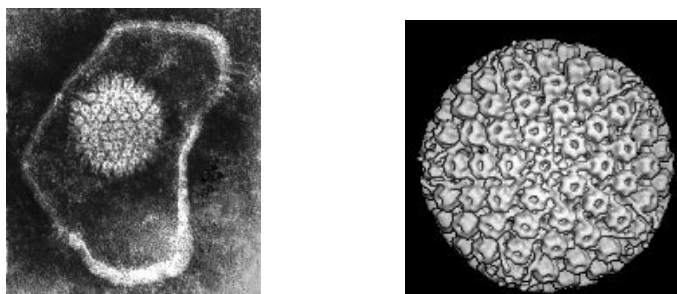


FIGURA 8. Virus herpes

Las complejas uniones de macromoléculas en el sello de un virus son maravillosas miniaturas de arquitectura molecular y los requerimientos específicos de cada virus dan como resultado una fascinante diversidad de organización y diseño geométrico en la estructura poliedral asociada. La teoría sobre la construcción de la estructura poliedral de los virus fue iniciada en 1956 por Crick y Watson y estaba basada en algunas consideraciones teóricas y un número no muy grande de evidencias experimentales posibles en aquella época; posteriormente su teoría, en términos generales, sería ampliamente confirmada y universalmente aceptada. Esencialmente, consistía en señalar que la cápside del virus adquiere una estructura poliedral que está determinada por el propio virus y que la forma más económica y «razonable» de que el genoma codifique la construcción de la cápside es que para ello utilice el mismo tipo de moléculas una y otra vez (teoría de las subunidades idénticas). Además, estas subunidades deberían empaquetarse siguiendo unas reglas de simetría geométrica de manera que conformaran un sello estable.

En principio pensaron que siempre se empaquetaban siguiendo una simetría icosaedral 5:3:2 (recordemos que el icosaedro está compuesto por veinte triángulos equiláteros y tiene seis ejes de simetría rotacional de 5 hojas que pasan por los vértices, diez ejes de 3 hojas en el centro de los triángulos y quince ejes de 2 hojas en el centro de las aristas) y señalaron que el número de subunidades debería ser un múltiplo de sesenta y que ninguna debería coincidir con un eje.

Con la introducción de las técnicas de coloreado en el microscopio electrónico (Brenner y Horne, 1959) se descubrió la forma de muchas partículas virales y se acordaron los nombres de «cápside», «capsómero» y «virion» (propuestos por Lwoff, Anderson y Jacob, 1959) para denominar respectivamente al sello proteico, a las unidades morfológicas comprendidas en él y a la partícula viral completa. Casi todas las partículas virales analizadas presentaban simetría icosaedral, pero el número de las unidades morfológicas (abultamientos que presenta la cápside) no era en general un múltiplo de sesenta y además estaban localizadas en los ejes de simetría. La aparente paradoja estructural que se presentó (los capsómeros no eran las subunidades estructurales de las que hablaban Crick y Watson) desapareció posteriormente y se fundamentó en trabajos de Horne y Wildy (1961) y de Caspar y Klug (1962), que en términos generales ratificaban la primitiva teoría de Crick y Watson, a partir de

los cuales se unificó la terminología y el análisis de la estructura poliedral de los virus. Así, las «unidades de estructura» son las más pequeñas unidades de construcción de la cápside funcionalmente equivalentes y los «capsómeros» son las unidades morfológicas que pueden apreciarse en la superficie de la partícula viral y están formadas por distintas agrupaciones de unidades de estructura. El hecho de que las subunidades proteicas no se distribuyan aleatoriamente sino que se adhieran formando capsómeros es debido a que se maximizan las interacciones moleculares que estabilizan la partícula. La unión entre las subunidades adheridas en cada capsómero es más fuerte que la que se da entre unos capsómeros y otros (esto hace que puedan aislarse más fácilmente los capsómeros para posibles estudios funcionales o estructurales).

Aunque algunos presentan una estructura algo más compleja, la mayor parte de los virus corresponden a dos grupos morfológicos diferenciados: Los de simetría helicoidal y los de simetría icosaedral.

En los que presentan simetría helicoidal se observa que tienen una forma tubular hueca y en el hueco es donde se sitúa el ácido. Pero la disposición de las subunidades proteicas en la pared tubular (a excepción de los extremos) no es cilíndrica sino que van conformando una hélice (espiral) que puede ser levógira o dextrógira, cuyos radios circulares y número de unidades por giro de la hélice varía de unos virus a otros.

Los virus con simetría icosaedral (por lo que se conoce hasta la fecha, la preferida por la mayoría) tienen forma esférica y presentan siempre $60T$ subunidades de estructura formando la cápside. Se dice que T es el número de la triangulación, y toma valores de la serie 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, ..., obtenida a partir de la fórmula $T = Pf^2$, donde f es cualquier entero positivo y P cualquier número de la serie 1, 3, 7, 13, 19, 21, ... ($= h^2 + hk + k^2$, para enteros positivos h y k coprimos). La morfología de la cápside pueden presentarse como $60T$ monómeros o presentarse como $30T$ dímeros, $20T$ trímeros o conformando $10(T - 1)$ hexámeros y exactamente 12 pentámeros.

Actualmente existen técnicas de simulación que permiten reconstruir en un ordenador la forma de muchos virus. Estas imágenes virtuales facilitan el estudio geométrico de su estructura y con ello el análisis de diferentes propiedades del virus investigado. En algunas de las direcciones electrónicas que incluimos al final del trabajo existe una buena colección de imágenes de virus donde pueden observarse diferentes estructuras poliedrales, todas ellas de una enorme belleza. En la Figura 9 aparecen imágenes de dos partículas que corresponden a unas de las primeras enfermedades virales estudiadas; a la izquierda la del virus de la fiebre aftosa —Löffler, 1898— (que presenta simetría icosaedral) y a la derecha la del virus del mosaico del tabaco —A. Mayer, 1886— (que presenta simetría helicoidal). Como curiosidad, incluimos en la Figura 10 la imagen de un virus icosaedral $T = 1$ (satellite tobacco necrosis virus) cuya forma es similar a la de una de las piedras talladas del neolítico de las que se presentaba una imagen en la sección 2.

Para evaluar la importancia que tiene la determinación de la estructura poliedral de los virus hay que tener en cuenta que éstos, debido a su proceso de reproducción, están obligados a ser parásitos intracelulares; necesitan una célula hospedadora

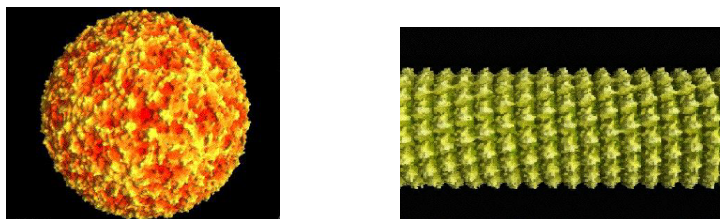


FIGURA 9. Fiebre aftosa y mosaico del tabaco

donde replicar su ácido nucleico y tomar la maquinaria sintética para reproducirse completamente y transmitirse a otras células. En este proceso, donde el metabolismo del organismo afectado se perturba, la cápside o poliedro proteico del virus protege a éste del exterior, pero a la vez es una parte fundamental que el organismo invadido reconoce para crear anticuerpos. Además, la morfología de la cápside con protuberancias y hendiduras, que se corresponden con la estructura poliedral, determina las zonas de mayor o menor accesibilidad para los anticuerpos que el sistema inmunológico del receptor puede crear.

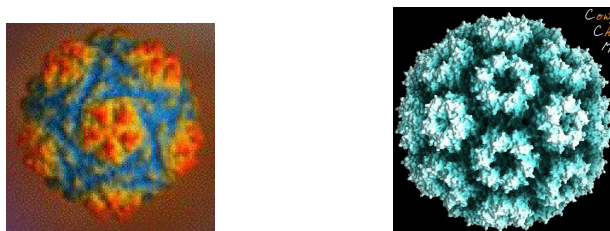


FIGURA 10. Virus: STNV, CCMV

En la Figura 10 aparece a la derecha la imagen de un virus denominado con las siglas CCMV (Cowpea Chlorotic Mottle Virus) al que corresponden las imágenes que mostraremos a continuación. Lo hemos elegido porque su estructura poliedral es exactamente un icosaedro truncado y puede apreciarse bien en la mencionada figura, que muestra la forma global de la partícula viral. Comentaremos muy esquemáticamente cómo se genera la estructura de este virus concreto como ejemplo que puede ilustrar lo que ocurre en general. La cápside del CCMV consta de 180 subunidades proteicas que tienen una composición química idéntica pero la proteína que las forma no adopta la misma conformación geométrica. Se distinguen de tres tipos: A, B y C. Precisamente la diferente conformación de estos tipos de subunidades determina la manera en la que se van a enlazar unas con otras para formar el sello protector del ácido. Matemáticamente, la unidad generadora de la estructura poliedral sería el trímero ABC, que se esquematiza como un triángulo dividido en tres regiones equivalentes A, B y C, coloreadas en gris oscuro o azul, gris o rojo y gris claro o verde respectivamente. Véase la Figura 11.

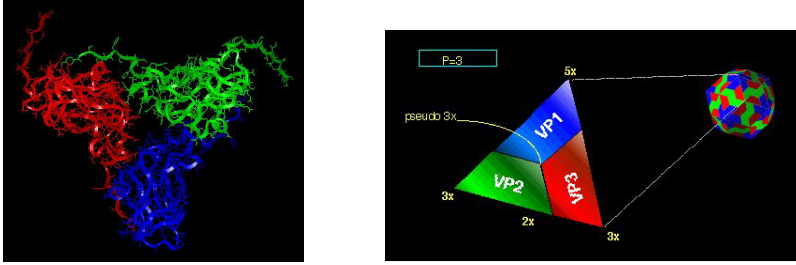


FIGURA 11. Trímero

A partir de esta unidad geométrica triangular puede obtenerse la estructura poliedral más básica del virus, que presenta simetría icosaedrica, como se observa en la Figura 12. Ahora bien, si tenemos en cuenta la disposición de las diferentes subunidades A, B, C en esta triangulación básica, podemos notar que se forman doce pentámeros, cada uno con cinco subunidades A, y veinte hexámeros, cada uno con tres subunidades B alternándose con tres subunidades C. Véanse las Figuras 12, 13.



FIGURA 12. Estructura geométrica básica

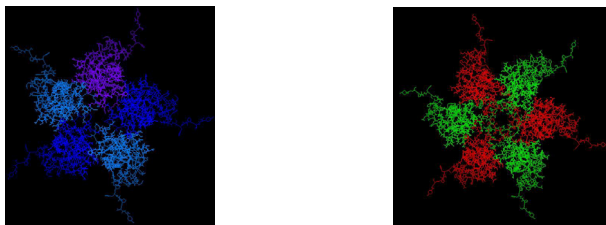


FIGURA 13. Pentámeros y hexámeros

Aparece de este modo una estructura poliedral más fina, en el sentido de que describe más exactamente la conformación final de la cápside viral a partir de las subunidades elementales. En la Figura 14 se ve a la izquierda el esquema del poliedro final (icosaedro truncado) y a la derecha la silueta de éste sobre la imagen del virus.

Muchos de los trabajos sobre virus que hemos analizado contienen, cuando es posible, la representación de la unidad geométrica estructural y el tipo de simetría

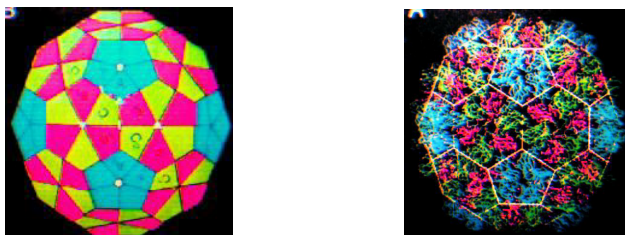


FIGURA 14. Pentámeros y hexámeros

que experimenta para formar el sello (mapa topográfico); esto determina la disposición de las subunidades proteicas y con ello la forma poliedral final del virus. Por otra parte, el ácido envuelto por la cápside de los virus, que se presenta como una madeja filamentososa de una o más hebras, es susceptible de ser estudiado con técnicas topológico-geométricas, fundamentalmente teoría de nudos. Véase la Figura 15. Existen actualmente trabajos en este sentido encaminados al análisis de los anudamientos o enlaces topológicos que presenta un ácido viral (u otro tipo de ácido genético) y sus posibles modificaciones en fenómenos de replicación o en experimentos de manipulación genética. Así, en el estudio matemático de los virus se suelen considerar dos estructuras poliedrales: la externa (poliedro de la cápside) y la interna (grafo del ácido) que pueden ser analizadas geométrica y topológicamente.

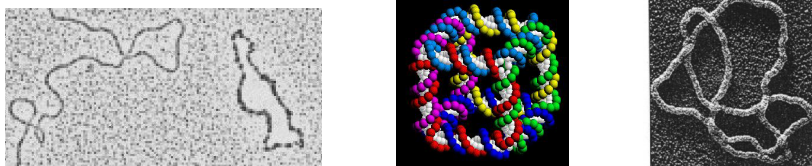


FIGURA 15. Anudamientos del ADN

La difusión de los virus en la naturaleza es enorme. Si tenemos en cuenta que numerosas enfermedades del hombre (desde el resfriado común y la gripe hasta ciertas meningitis, hepatitis, sida, algunos cánceres, etc) son causados por virus y que lo mismo ocurre con los animales y las plantas, no es extraño que Peter B. Medawar, Premio Nobel de Medicina en 1960, definiera de modo rápido a los virus así: «Una mala noticia envuelta en proteínas». Esta definición, avalada a diario en cualquier consulta médica o en los medios de comunicación, recoge el aspecto negativo que en general tienen los virus y motiva el interés por su conocimiento completo con vistas al control y curación de enfermedades causadas por ellos; pero no aborda sin embargo el aspecto positivo que en ciertos ámbitos tienen. Por ejemplo, la gran cantidad de colorido que desde el siglo XVI ofrecieron los tulipanes holandeses se debió a una enfermedad vírica; y, en otro sentido, el hecho de que numerosas enfermedades virales afecten a insectos (un número grande de ellas se recoge precisamente bajo

el nombre genérico de «poliedrosis») de forma muy selectiva, o, que para algunas actúen como vector de transmisión, está abriendo el campo para su utilización como agentes naturales de control biológico. Es tan amplia la influencia de los virus que justifica que este campo de investigación sea uno de los más interesantes y pujantes en la actualidad y que en él aparezcan estudios relativos a la estructura poliedral asociada a los virus analizados, pieza importante para su conocimiento. Además estos trabajos involucran a disciplinas tan diversas como matemáticas, informática, biología, química, medicina, veterinaria, ecología, ciencias agrícolas y forestales o economía.

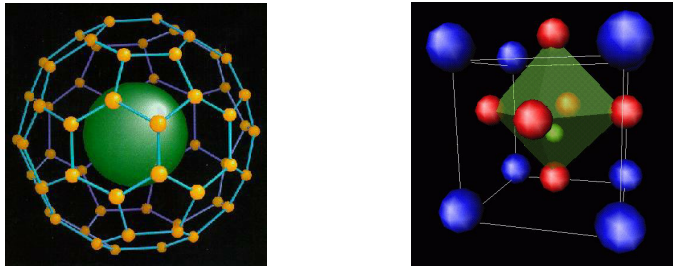


FIGURA 16. Fullerenos C₆₀ y perovskita ABX₃

En la naturaleza aparecen también estructuras poliedrales (algunas de las cuales son poliedros regulares) como cristales de diversas sustancias. Por ejemplo, el cubo aparece en los cristales de sal común, el tetraedro en los del sodio sulfantimoniato, el octaedro en los del alumbre de cromo, y el dodecaedro (no del todo regular) en los de la piritita. Es por ello que los poliedros se han utilizado siempre en temas cristalográficos relacionados fundamentalmente con la geología y la química.

Hoy en día, además de lo señalado anteriormente en el caso de los virus, muchas investigaciones abordan el estudio de estructuras poliedrales que aparecen en los campos de la biología y química moleculares y de la física nuclear. Las propiedades de estas estructuras poliedrales están relacionadas con las de los materiales analizados. Por ejemplo, la dureza y las propiedades magnéticas, aislantes o conductoras están directamente relacionadas con la estructura poliedral de las moléculas y sustancias consideradas. Y en el análisis de las posibles estructuras poliedrales asociadas a los materiales, los invariantes algebraicos y geométricos pueden clarificar algunas propiedades químicas o físicas de éstos.

Empezaremos analizando, en el campo de la química, las estructuras poliedrales más sencillas. Una de las más simples es la de grafo, es decir, un poliedro o complejo celular unidimensional. Su uso es frecuente en el estudio del fenómeno molecular; por ejemplo, se puede asociar un vértice con cada átomo y una arista con cada enlace (no importando la clase de enlace considerado). Con esta estructura, cada molécula estable determina un grafo conexo. Es fácil comprender la estrecha relación que existe entre la familia de los grafos finitos y conexos, módulo isomorfismo, y las posibles estructuras moleculares. En el caso en el que la estabilidad se alcance con un

gran número de átomos, el uso de grafos infinitos puede modelar mejor la estructura poliedral de la sustancia analizada.

Sin embargo, es posible asociar a cada molécula o sustancia estructuras poliedrales más complejas. Por ejemplo, cada elemento químico determina un subconjunto de vértices; o bien un tipo de enlaces, digamos enlaces covalentes dobles, determina unas aristas que definen un subpoliedro. Por otro lado, a algunos ciclos generados por sucesiones alternadas de átomos y enlaces que finalicen en el átomo inicial de la sucesión, se les pueden asociar caras de dimensión dos. También se pueden asociar caras mediante otros criterios; por ejemplo, considerando átomos de un mismo elemento próximos entre sí que sean coplanarios y que determinen un polígono convexo. Del mismo modo, existen partes de una molécula o de una sustancia que tienen una estructura fija, la cual determina un grupo funcional al que a su vez se le puede asociar un subpoliedro.

Una vez establecidos los criterios para asociar una estructura poliedral a una molécula o a una sustancia, se tiene que algunas de las propiedades quedan reflejadas en la estructura poliedral asociada y, en general, ésta puede ser más compleja que un solo poliedro y contener subpoliedros asociados con grupos funcionales determinados. En muchas ocasiones la estructura poliedral correspondiente está inmersa en el espacio euclídeo, lo que permite, estudiando sus grupos de simetría, analizar diversas cuestiones como por ejemplo la estructura de los empaquetados de los átomos y moléculas. La disposición ordenada de cationes y aniones está relacionada con las propiedades magnéticas de la sustancia considerada. La disposición de los enlaces en varias capas planas o en redes espaciales tiene que ver con la dureza del material considerado.

Otro aspecto interesante es el de la isomería, es decir, aquellos fenómenos asociados con sustancias que tienen esencialmente los mismos componentes pero éstos admiten distintas disposiciones geométricas, lo que puede originar diferentes propiedades. Por ejemplo, dos núcleos con igual masa y número atómico pueden presentar distintas propiedades, a causa de una estructuración diferente de sus componentes.

Actualmente existen herramientas que permiten desvelar la estructura poliedral de muchas sustancias. Se dispone de diferentes tipos de rayos, aceleradores, microscopios electrónicos, reactores nucleares y otras técnicas de tipo físico o químico.

De modo general señalaremos que en la estructura poliedral intervienen decisivamente el tamaño de los átomos y de los cationes y aniones y el tipo y capacidad de enlace que tengan los elementos que forman la sustancia a analizar. Además, a veces es interesante tener en cuenta que el tamaño y tipo de enlaces puede ser modificado por la temperatura, presión u otros factores que afecten al material considerado.

Por ejemplo, el grupo de las perovskitas tiene fórmula general ABX_3 , donde A y B son cationes y X es un anión (generalmente oxígeno), véase la Figura 16. Los cationes de tipo A ocupan los vértices de una teselación cúbica del 3-espacio euclídeo. Los baricentros de estos cubos están ocupados por cationes de tipo B. Obsérvese que cuando el número N de cationes B es muy elevado, puesto que cada vértice es compartido por ocho cubos, se tiene que el número de cationes de tipo A es $N\frac{8}{8}$. Considerando que el cubo tiene seis caras y cada cara es compartida por dos cubos, el número de caras será de $N\frac{6}{2}$. Esta disposición de los vértices y caras de

la teselación cúbica es totalmente coherente con la fórmula general de la perovskita $N(A\frac{8}{8}BX\frac{6}{2})$. Cuando los radios de los cationes y los aniones lo permiten, los aniones X se sitúan en los centros de las caras; de este modo, en cada cubo éstos expanden un octaedro cuyos vértices son de tipo X, de modo que en su interior está contenido un catión B.

Son muy interesantes los siguientes fenómenos determinados por las leyes naturales de los empaquetamientos. Si los cationes de tipo A son de radio grande, no es posible que los planos que contienen cationes de este tipo contengan simultáneamente aniones de tipo X; se producen entonces traslaciones horizontales y verticales que desplazan los aniones de los centros de las caras, generándose planos alternados de cationes y aniones que determinan una polarización magnética de la perovskita analizada. Una sustancia magnéticamente estable sometida a un cambio de temperatura puede cambiar sus propiedades magnéticas si se producen estos desplazamientos de los aniones que abandonan los centros de las caras. En cambio, cuando los cationes de tipo A son pequeños, el octaedro interno puede girar un poco, lo que permite alcanzar un equilibrio magnético.

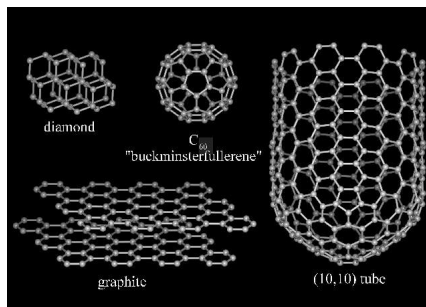


FIGURA 17. Fullerenos

Una reciente rama de la química, especialmente rica en investigación y en la que el uso de técnicas poliedrales es muy amplio, es la de los fullerenos. Este campo se inició con el descubrimiento en 1985 de la molécula C₆₀, que fue bautizada con el nombre de buckminsterfullereno, y abreviadamente se le llama fullereno, en honor del arquitecto R. B. Fuller. Véase la Figura 16. Esta molécula consiste en 60 átomos de carbono unidos mediante doce pentágonos y veinte hexágonos. Su forma es la misma que la de un balón de fútbol y aproximadamente su tamaño es al del balón como el de éste es al de la Tierra; en este caso la estructura poliedral es muy simple, en el sentido de que consta de un solo poliedro que es un icosaedro truncado.

La molécula C₆₀, llamada por muchos «la más bella molécula», fue descubierta por los investigadores H. W. Kroto, R. E. Smalley y R. F. Curl en 1985 cuando hacían estudios sobre la composición química de las estrellas. Al analizar las imágenes obtenidas por los telescopios de los observatorios astronómicos, ellos sospechaban, al igual que otros científicos, que tal composición tenía que ver con largas cadenas de moléculas de carbono. En lugar de obtenerlas por simulación mediante experimentos

con técnicas convencionales, los investigadores señalados decidieron pasar un haz de láser sobre el vapor de carbono; al hacerlo, no sólo aparecieron las cadenas de moléculas que esperaban, sino que observaron que éstas tenían una forma poliédrica totalmente inesperada, como la de un balón de fútbol. Así se descubrió el C₆₀. Estas moléculas de C₆₀ se condensan en una forma nueva de carbono sólido, una forma cristalina de carbono puro diferente de los conocidos diamante o grafito.

Aunque inicialmente el C₆₀ sólo podía producirse en muy pequeñas cantidades, lo cual restringía su uso para otros experimentos, W. Krätschen, L. Lamb, K. Fostiropoulos y D. Huffman descubrieron en 1990 el modo de producirlo en mucha mayor cantidad, lo que abrió nuevas posibilidades para las investigaciones experimentales.

El descubrimiento del C₆₀, hecho por el cual sus descubridores recibieron el Premio Nobel de Química en 1996, ha sido el inicio de un periodo de gran actividad en la química de los llamados fullerenos (compuestos de moléculas de carbono formadas con diferente número de átomos que generan estructuras poliedrales con caras pentagonales, hexagonales o incluso heptagonales). Posteriormente también se han sintetizado otros muchos fullerenos: C₇₀, C₇₆, C₇₈, C₈₂, C₈₄, etc. Muchos trabajos se centran en los fullerenos debido a que al añadirles ciertos átomos alcalinos se obtienen compuestos superconductores eléctricos.

Actualmente hay abierto un nuevo campo de investigación que permite el estudio de los posibles fullerenos a través de herramientas matemáticas tales como la teoría de grafos, poliedros, topología algebraica, teoría de grupos y geometría diferencial; en este sentido, existe una importante relación entre la clase de superficies orientadas y conexas regulares con caras pentagonales, hexagonales y heptagonales, módulo isomorfismos poliedrales, y los posibles compuestos de carbono puro del tipo anterior.

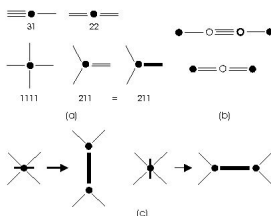


FIGURA 18. Posibles enlaces del carbono

Del carácter tetravalente del carbono C resultan cuatro posibles situaciones de un vértice que denotaremos por 31, 22, 211 y 1111 (Figura 18). Es habitual asociar a cada compuesto puro de carbono un grafo de modo que los carbonos se corresponden con los vértices y los enlaces con las aristas. La situación 31 se puede obtener considerando grafos lineales o en forma de circunferencia en los que se van alternado el enlace triple y el enlace sencillo. El enlace 22 también genera cadenas lineales o circulares en las que alternan átomo y doble enlace. En la mayoría de los fullerenos todos los enlaces son del tipo 211; en consecuencia, sus grafos asociados tienen la

propiedad de que cada vértice incide con tres aristas (grafos 3- regulares). No obstante, a cada fullereno se le pueden asociar estructuras poliedrales más complejas; es frecuente añadir una cara por cada grupo de vértices y aristas que determinan un polígono plano convexo. De este modo, cada compuesto del carbono con enlaces de tipo 211 tiene asociada una superficie. Estas superficies se pueden agrupar por capas o a través de empaquetamientos.

En los grafos 3- regulares se pueden distinguir los enlaces dobles coloreando la familia de aristas que se corresponden con los mismos. También es frecuente utilizar la relación que existe entre grafos 3- regulares y grafos 4- regulares. Nótese que si en un grafo 3- regular con aristas coloreadas, se deforma cada arista coloreada a un punto, se obtiene un grafo 4- regular. Recíprocamente, si a un grafo 4- regular le aplicamos un proceso de bifurcación en cada vértice como se señala en la Figura 18 se obtiene un grafo 3- regular con aristas coloreadas.

Es interesante señalar que a cada grafo 3- regular se le puede asociar su grupo de isometrías y, si se tienen aristas coloreadas (enlaces dobles), tomar entonces el subgrupo de aquéllas que las preservan. De este modo a cada grafo con aristas coloreadas le hemos asociado una pareja de grupos. Observemos que si en el mismo grafo 3- regular cambiamos de familia de aristas coloreadas (es decir, consideramos dos isómeros) puede suceder que el subgrupo asociado sea distinto. Sin embargo, existen ejemplos de grafos 3- regulares con aristas coloreadas que son distintos y tienen asociada la misma pareja de grupos de simetría; en este caso, se puede diseñar una herramienta matemática más fina capaz de distinguir estos isómeros. Se procede del modo siguiente: cambiando cada enlace doble por un cruce elevado de caminos, podemos asociar a cada fullereno con enlaces químicos dobles un enlace o nudo topológico susceptible de ser estudiado con técnicas homotópicas. Véase la Figura 19. Las diferentes posibles posiciones de los dobles enlaces químicos determinan enlaces topológicos distintos y la clasificación de estos isómeros se aborda a través de los invariantes homotópicos del enlace o nudo topológico asociado. Utilizando el grupo fundamental del complemento del enlace o sus invariantes de tipo polinómico se pueden distinguir isómeros con grupos de simetría iguales.

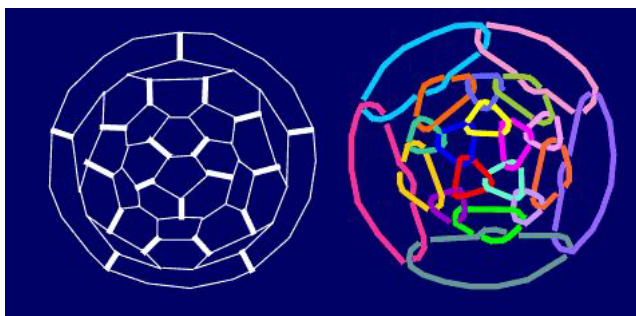


FIGURA 19. Enlace topológico de un fullereno

En el caso en el que las moléculas estables adquieran forma de superficie, es también importante la disposición que puedan presentar estos enlaces. En algunos casos las caras se unen entre sí para formar superficies con curvatura gaussiana de diferentes signos; en el caso de los grafitos se suelen presentar superficies planas. Se ha observado que por lo general las caras pentagonales corresponden a zonas de curvatura positiva, las hexagonales se relacionan con curvatura cero, y las heptagonales con curvatura negativa.

En la Figura 20 puede verse a la izquierda la superficie de un fullereno contenida en el plano hiperbólico y a la derecha la de un fullereno contenido en un toro en la que se observa claramente cómo las caras pentagonales, hexagonales y heptagonales se distribuyen en zonas con curvatura gaussiana positiva, nula o negativa respectivamente.

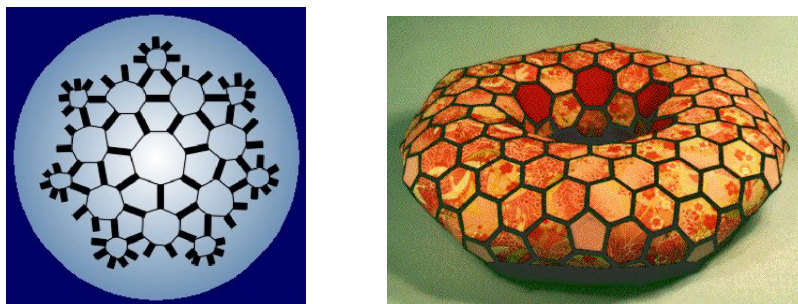


FIGURA 20. Fullerenos: heptagonal y tórico

Los ejemplos mencionados son una muestra de los cada día más abundantes trabajos de investigación en los que se emplean técnicas matemáticas relacionadas con las estructuras poliedrales asociadas a las moléculas y sustancias, tanto para descubrir propiedades de las ya sintetizadas, como para la predicción de otras nuevas.



FIGURA 21. Fuller en su laboratorio y pabellón USA

Si lo expuesto anteriormente muestra de alguna forma cómo los poliedros están muy presentes, aunque de un modo oculto a veces, en las ciencias mencionadas, es evidente su presencia e importancia en otros campos más próximos a la mayoría de las personas. Por ejemplo, en el diseño industrial las propiedades de estructuras

poliedrales han de tenerse en cuenta tanto para la fabricación, empaquetado, almacenaje o economía. Quizás aún es más evidente esto en el diseño arquitectónico, desde los edificios y poblados más sencillos hasta las edificaciones y ciudades más sofisticados, y no es una simple anécdota el hecho de que la molécula C60, cuyo descubrimiento ha supuesto un verdadero avance en campos científicos importantes, recibiera el nombre de fullereno precisamente en honor del arquitecto Richard Buckminster Fuller (1895–1983). Véase la Figura 21.

La belleza poliedral del C60 les recordaba a sus descubridores la de las famosas «cúpulas geodésicas» diseñadas por Fuller. Siguiendo la pauta de que una esfera es realmente eficiente pues encierra el mayor volumen con la menor superficie y que las geodésicas en una superficie son las curvas de menor longitud entre dos puntos, las edificaciones geodésicas que diseña Fuller adquieren su estructura poliedral a partir de piezas básicas que van encajándose de modo que se obtenga la máxima ventaja estructural y ambiental con un coste reducido. Una muestra de esto es el Pabellón de los Estados Unidos en la Expo 67 de Montreal, que puede verse en la Figura 21. Fuller no sólo ha sido un famoso arquitecto del siglo XX, sino un hombre de espíritu renacentista con obras de ingeniería y diseño en campos tan diversos como el industrial, espacial, automovilístico o cartográfico. Procuró difundir las ideas humanísticas y ecológicas que impregnan su obra a través de múltiples conferencias por todo el mundo, por lo que llegó a ser un personaje controvertido, idolatrado por muchos y denostado por otros, pero con una influencia incuestionable.



FIGURA 22. Diseños de Fuller

Por último vamos a referirnos, aunque sea muy brevemente, a la presencia de los poliedros en el ámbito de las Matemáticas, donde, si bien su estudio se ha hecho inicialmente, como el de la mayoría de los temas antiguos, dentro del campo de la Geometría, estos objetos aparecen hoy en día en diversas áreas, abordando su análisis con las diferentes herramientas que ellas ofrecen o utilizándolos como soporte para la resolución de otros problemas específicos.

Como hemos señalado al inicio de este trabajo, desde muy antiguo han llamado la atención las figuras poligonales o poliedrales que presentaban algún tipo de regularidad y los matemáticos han intentado dar respuesta a diferentes cuestiones tales como la existencia y construcción de estos objetos.

Cualquier polígono regular puede imaginarse como el resultado de dividir una circunferencia en n partes iguales ($n \geq 3$) y tomar alternativamente los puntos de división obtenidos de p en p , siendo p cualquier primo con n menor que $\frac{n}{2}$ (se dice que n es el género y p la especie del polígono). En el que caso en el que $p = 1$

se obtiene un polígono convexo y en otro caso uno estrellado. El número total de polígonos regulares de género n es $\frac{N}{2}$ donde N es el indicador de n . Respecto a la posibilidad de construir con regla y compás los polígonos regulares, Euclides, en sus Elementos, dio la del triángulo equilátero en el Libro I (Prop. 1) y la del cuadrado, pentágono, hexágono y uno de quince lados en el Libro IV (Prop. 6, 11, 15 y 16 respectivamente); y la Proposición 9 del Libro I garantiza la duplicación sucesiva del número de lados por bisección. El problema abierto de la construcción con regla y compás del resto de polígonos regulares fue parcialmente resuelto por Gauss (quien construyó a los diecinueve años uno de diecisiete lados) afirmando que es condición suficiente que los factores primos impares de n sean primos de Fermat diferentes entre sí (un número de Fermat tiene la forma $F_k = 2^{2^k} + 1$). En 1837, Wantzel probó que también la anterior condición es necesaria.

En el caso de los poliedros el grado de regularidad viene dado por la forma, número y disposición de caras y vértices. Se dice que dos vértices de un poliedro son idénticos si ambos están rodeados por el mismo número y tipo de caras y en el mismo orden. Si todos los vértices son idénticos y además todas las caras son polígonos regulares iguales se dice que el poliedro es regular. Desde muy antiguo se conocía que existen solamente cinco poliedros regulares convexos, los famosos Sólidos Platónicos. Respecto a la existencia de poliedros regulares no convexos, Kepler [20] describió dos: el pequeño y el gran dodecaedro estrellados; y Louis Poincot en 1809 redescubrió los anteriores y descubrió otros dos: el gran dodecaedro y el gran icosaedro. Cauchy, en 1813, demostró que los cuatro anteriores son todos los posibles poliedros regulares estrellados.

Rebajando la exigencia de regularidad, dentro de los poliedros convexos, reciben el nombre de Sólidos Arquimedianos o Semirregulares aquellos cuyos vértices son idénticos y las caras son polígonos regulares de dos o más tipos diferentes, excluyendo las familias infinitas de los prismas y los antiprismas. Kepler se ocupó especialmente de este tipo de poliedros, entre los que se encuentra el notable icosaedro truncado. En 1619 dio la lista, demostrando que era completa, de los 13 sólidos de este tipo que existen, aunque 12 de ellos ya habían sido redescubiertos por distintos artistas del Renacimiento. Se les llama Arquimedianos porque se sabe que fueron estudiados por Arquímedes, aunque sus trabajos originales están perdidos. Se llama dual de un poliedro dado a un nuevo poliedro en el que las caras y vértices corresponden respectivamente a vértices y caras del original. Los poliedros duales de los Arquimedianos se llaman Sólidos de Catalan [2], que fue quien los descubrió en 1865; obviamente hay 13 y sus caras no son polígonos regulares.

Continuando con la idea de caras regulares y vértices idénticos, pero admitiendo la posibilidad de caras que sean polígonos no convexos, se obtienen los Poliedros Uniformes. En 1954 Coxeter [7] conjeturó, y fue posteriormente probado por Skilling [24], que hay 75 (sin contar prismas ni antiprismas).

Si nos restringimos a poliedros convexos y nos preguntamos cuántos hay que tengan las caras regulares, además de los Sólidos Platónicos, los Arquimedianos, y las familias infinitas de prismas y antiprismas, la respuesta es que hay 92 más, los cuales reciben el nombre de Sólidos de Johnson [18], quien en 1966 dio la lista y además conjeturó que era completa, lo que fue probado en 1969 por Zalgaller [28].

Los ejemplos anteriores determinan diferentes triangulaciones en una esfera topológica. En la sección 2 aparecía la figura de una superficie tórica descompuesta en polígonos; del mismo modo, numerosos espacios (algunas variedades, variedades con singularidades, etc.) admiten descomposiciones (triangulaciones) en piezas más sencillas de dimensiones adecuadas. La generalización de estas ideas da lugar a diversas nociones geométricas, topológicas y algebraicas, que genéricamente pueden denominarse «estructuras poliedrales» o «poliedros», como son los complejos simpliciales, complejos de celdas, conjuntos simpliciales, etc.

Dentro del área de la Topología Algebraica, en la que concretamente se enmarca nuestra actividad, las estructuras poliedrales juegan un importante papel. Desde las más rígidamente geométricas, han sido la fuente de inspiración para la creación de teorías de homotopía y homología que después han sido diversificadas, generalizadas o sintetizadas con el objetivo de obtener mecanismos para poder estudiar espacios susceptibles o no de admitir estructuras poliedrales generales más o menos rígidas, como hemos visto que ocurre por ejemplo con el caso de los fullerenos mencionados anteriormente.

Señalemos que si esta estructura poliedral sólo contiene un número finito de piezas básicas, el espacio descrito por ella es compacto; así que si se desea estudiar espacios no compactos, en los que uno puede imaginar escapes hacia el infinito de una o muchas maneras, entonces las estructuras poliedrales llamadas clásicas deben estar hechas de infinitas piezas, lo cual puede ser un obstáculo a la hora de aplicar técnicas computacionales. Dentro de este último marco, estudio de los espacios no compactos, concretamente en el de la Teoría de Homotopía Propia (del que una visión panorámica puede encontrarse en [17]), se halla parte de nuestra labor de investigación, y en particular algunos trabajos donde proponemos nuevas estructuras poliedrales que incluyen piezas básicas diferentes a las habituales con el fin de obtener posibles descripciones de espacios no compactos con un número finito de piezas.

Por otra parte, también han tenido un fuerte desarrollo los trabajos de programación encaminados a la representación de espacios y al cálculo de invariantes topológicos asociados a estructuras poliedrales que los describen o aproximan. Es un hecho cada vez más frecuente trabajar con técnicas de simulación sobre diferentes fenómenos físicos celulares o moleculares, donde se utilizan formas geométricas iniciales muy sencillas que van adquiriendo mayor complejidad estructural a medida que se avanza en la aproximación al fenómeno real simulado.

Nos gustaría que lo expuesto anteriormente, aunque sólo sea una pequeña muestra, pueda servir para ilustrar hasta qué punto los poliedros están próximos a nosotros y continúan siendo unos objetos matemáticos fascinantes sobre los que merece la pena seguir avanzando en su estudio y utilización.

Terminamos recordando las palabras de Galileo Galilei:

«... La filosofía (naturaleza) está escrita en ese gran libro que siempre está ante nuestros ojos —el universo— pero no lo podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y sus símbolos son triángulos, círculos y otras

figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra; sin ello uno vaga sin esperanza en un oscuro laberinto . . . »

4. ENLACES CON PÁGINAS WEB

A continuación, mostramos una relación de páginas web relacionadas con los temas tratados en este artículo. Varias de las páginas que citamos requieren una adecuada configuración del navegador de Internet y tener instaladas las correspondientes aplicaciones de ayuda.

- <http://www.georgehart.com/> Una de las mejores páginas de poliedros, elaborada por George W. Hart; además contiene muchos enlaces interesantes.
- <http://archives.math.utk.edu/topics/geometry.html> Contiene mucha información sobre diversos tópicos de geometría y numerosos enlaces.
- <http://www.bocklabs.wisc.edu/cgi-bin/WebCatalog.cgi> Institute for Molecular Virology, Madison, Wisconsin.
- <http://www.bocklabs.wisc.edu/virusviztop.html> Otra página del instituto anterior, con visualizaciones de virus e interesantes enlaces.
- <http://www.uct.ac.za/depts/mmi/stannard/linda.html> Página de la Universidad de Cape Town, División de Microbiología Médica y Virología, dedicada a la arquitectura de los virus.
- <http://www.tulane.edu/~dmsander/garryfavweb.html> Toda la virología en la WWW. Página de la Universidad de Tulane, Nueva Orleans, sobre virología en internet.
- <http://www.tulane.edu/~dmsander/WWW/335/335Structure.html> Estudio de la estructura de los virus.
- <http://phage.bocklabs.wisc.edu/> Página del Instituto de Virología Molecular de la Universidad de Wisconsin que contiene imágenes de DNA de virus.
- <http://www.tiem.utk.edu/~gross/bioed/webmodules/DNAknot.html> Página dedicada al DNA y la teoría de nudos.
- <http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html> Página de nudos y enlaces topológicos.
- <http://www.ill.fr/dif/3D-crystall/index.html> Página dedicada a la estructura atómica de los materiales.
- <http://www.members.tripod.com/~modularity/> Artículo de S. Jablan sobre la geometría de los fullerenos.
- <http://www.mpi-stuttgart.mpg.de/andersen/fullerene/intro.html> Página del Max-Planck-Institute, Stuttgart, que dedica parte de su investigación al estudio de fullerenos.
- <http://neon.mems.cmu.edu/bucky/other-refs.html> Contiene numerosos enlaces y referencias sobre fullerenos.
- <http://www.univie.ac.at/spectroscopy/forschung.html> Página de la Universidad de Viena que contiene abundante información sobre fullerenos y enlaces interesantes.

- <http://www.susx.ac.uk/Users/kroto/> Página del grupo de investigación en fullerenos del Profesor H. Kroto de la Universidad de Sussex.
- <http://www.ornl.gov/ORNLReview/rev26-2/text/rndmain1.html> Información y películas cortas sobre fullerenos.
- <http://cnst.rice.edu/reshome.html> Página del Profesor R. E. Smalley (Rice University).
- <http://www.pa.msu.edu/cmp/csc/nanotube.html> Sitio de nanotubos.
- <http://www.bfi.org/> Página del Buckminster Fuller Institute.
- <http://www.thirteen.org/cgi-bin/bucky-bin/bucky.cgi> Página que contiene numerosa información sobre Fuller e imágenes de sus obras.

Concluimos dando la siguiente dirección, desde la que se puede descargar una versión en formato pdf, y en color, de este artículo:

- <http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/index.html>

REFERENCIAS

- [1] J. Buerger, *Elementary crystallography*, Wiley, 1956. (Replicación: MIT press, 1978.)
- [2] M. E. Catalan, Memoire sur la theorie des polyedres, *J. de L'Ecole Im. Poly.* **24** (1865), 1–71.
- [3] A. F. Costa, *Arabescos y geometría*, vídeo, UNED, Madrid, 1995.
- [4] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Dover, Nueva York, 1963.
- [5] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de geometría*, Limusa-Wiley, México, 1971.
- [6] H. S. M. Coxeter, *Regular complex polytopes*, Cambridge University Press, 1974.
- [7] H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet-Higgins y J. C. P. Miller, Uniform Polyhedra, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **246** (1953), 401–449.
- [8] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997.
- [9] R. H. Crowell y R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, GTM **57**, Springer, 1963.
- [10] M. S. Dresselhaus, G. Dresselhaus y P. Eklund, *Science of fullerenes and carbon nanotubes*, Academic Press, 1996.
- [11] B. Ernst, *El espejo mágico de M. C. Escher*, Greven, Taschen, 1994.
- [12] Euclides, *The thirteen books of Euclid's Elements*, recopilación en 3 volúmenes (con traducción, introducción y comentarios de Thomas L. Heath), Dover, 1956.
- [13] E. Flapan, *When topology meets chemistry*, Cambridge University Press, Cambridge; Mathematical Association of America, Washington, DC, 2000.
- [14] J. V. Field, Rediscovering the Archimedean polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Durer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler, *Arch. Hist. Exact Sci.* **50** (1966), 241–289.
- [15] N. D. Gilbert, T. Porter, *Knots and surfaces*, Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [16] G. H. Hardy, *Apología de un matemático*, Nivola, Madrid, 1999.
- [17] I. M. James (Editor), *Handbook of algebraic topology*, North Holland, 1995.
- [18] N. W. Johnson, Convex solids with regular faces, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 169–200.
- [19] J. Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, 1596.
- [20] J. Kepler, *The harmony of the world*, 1619 (traducido al inglés por E. J. Aiton, A. M. Duncan y J. V. Field, American Philosophical Society, 1997).
- [21] C. R. F. Maunder, *Algebraic topology*, Van Nostrand, 1970.
- [22] L. Pacioli, *De Divine Proportione*, 1509.
- [23] Platón, *Diálogos*, v. 6, Biblioteca Básica Gredos, Madrid, 1982.
- [24] J. Skilling, The complete set of uniform polyhedra, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **278** (1975), 111–135.
- [25] E. W. Weisstein, *CRC concise encyclopedia of mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

- [26] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, GTM **61**, Springer, 1978.
- [27] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy I, II, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 213–245; 453–496.
- [28] V. A. Zalgaller, *Convex polyhedra with regular faces*, Consultants Bureau, 1969.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, 26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: jose-ignacio.extremiana@dmc.unirioja.es,
luis-javier.hernandez@dmc.unirioja.es, maria-teresa.rivas@dmc.unirioja.es

PROBLEMA DE MOMENTOS DE STIELTJES Y CONVERGENCIA DE APROXIMANTES DE PADÉ PARA FUNCIONES MEROMORFAS DE STIELTJES

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ

A mi entrañable amigo Chicho

ABSTRACT. We obtain a result on convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type. Connection of Padé approximants with Stieltjes moment problem plays a key role in the proof.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se obtiene un resultado sobre convergencia de aproximantes de Padé para funciones meromorfas de Stieltjes, en la demostración juega un papel fundamental la relación entre los aproximantes de Padé y el problema de momentos de Stieltjes. Este resultado se lo presenté a Chicho buscando ideas que me dieran la luz necesaria para ver la solución completa. Hoy no está Chicho y el problema aún no está totalmente resuelto; su afirmación «eso está bien» me anima a exponerlo.

Denotemos por \mathcal{M} la clase de medidas positivas, regulares, de Borel, con soporte incluido en \mathbb{R} y con momentos de todos los ordenes (si $\mu \in \mathcal{M}$, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, x^k es integrable en el sentido Lebesgue respecto a μ). Sea $\mathcal{M}[0, \infty) = \{\mu \in \mathcal{M} : \text{sop } \mu \subset [0, \infty)\}$, donde $\text{sop } \mu$ denota el soporte de μ . Se dice que el problema de momentos de Stieltjes para $\mu \in \mathcal{M}[0, \infty)$ está determinado, o simplícidamente μ es determinada-S, si no existe otra medida en $\mathcal{M}[0, \infty)$ con los mismos momentos que μ , en caso contrario se dice que μ es indeterminada-S. De forma análoga se define el problema de momentos (en este caso de Hamburger) en \mathcal{M} , con la notación correspondiente: μ es determinada-H o indeterminada-H.

Los problemas de momentos se relacionan con muchos temas de las Matemáticas tales como: teoría de funciones armónicas y analíticas, teoría espectral de operadores, teoría de la predicción, aproximación racional, polinomios ortogonales, procesamiento de señales, etc. (ver [1], [6], la bibliografía que allí se cita y también las secciones 2 y 3 de este trabajo). Stieltjes ([16]) fue el primero que utilizó el término problema de momentos. Numerosos autores han estudiado este tema y en las citas anteriores se pueden ver los resultados fundamentales. Algunas extensiones e ideas modernas en el tratamiento de este problema se pueden ver en [13].

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 41A21, 42C05, 44A60.

Key words and phrases. Padé approximants, moment problem, orthogonal polynomials.

La investigación está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI.

Dado un desarrollo formal de Laurent en $z = \infty$,

$$(1) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k},$$

el aproximante de Padé, $\pi_n = \pi_n(f)$, de orden $n \in \mathbb{Z}_+$, para f , se define como el cociente $\pi_n = \frac{p_n}{q_n}$ de un par de polinomios cualquiera (p_n, q_n) que cumple:

- (a): $\deg(p_n) \leq n, \quad \deg(q_n) \leq n, \quad q_n \neq 0;$
 (b): $q_n(z)f(z) - p_n(z) = \frac{C}{z^{n+1}} + \dots$

Los polinomios p_n y q_n que cumplen lo anterior no son únicos, sin embargo la fracción π_n si está completamente determinada.

Para $\mu \in \mathcal{M}[0, \infty)$, denotemos por

$$\widehat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty),$$

la transformada de Markov de μ .

El teorema fundamental de este trabajo es

Teorema 1. *Sea μ determinada-S cuyo soporte no es un conjunto numerable sin puntos de acumulación en $[0, \infty)$. Sea r una fracción racional con coeficientes reales, con polos en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ y $r(\infty) = 0$. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(\widehat{\mu} + r)(z) = \widehat{\mu}(z) + r(z),$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus ([0, \infty) \cup \{r = \infty\})$. Cada polo de r atrae tantos polos de π_n como la multiplicidad del polo.

La organización de este trabajo es la siguiente: en la Sección 2 formulamos algunos resultados sobre los problemas de momentos que utilizaremos más adelante. La Sección 3 está dedicada a los aproximantes de Padé, el objetivo fundamental de esta sección es revelar el interés del Teorema 1 y sus diferencias con respecto a resultados anteriores del tema. Finalmente en la Sección 4 damos la demostración del Teorema 1.

2. PROBLEMA DE MOMENTOS

Sea $\mu \in \mathcal{M}$ con infinitos puntos en su soporte, denotemos por $\{l_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ y $\{L_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ las correspondientes sucesiones de polinomios ortonormales con respecto a μ , con coeficiente principal positivo y mónicos respectivamente. Sea α_k el coeficiente principal de l_k . Los polinomios ortogonales están determinados completamente por los momentos de la medida, luego dos medidas con iguales momentos generan la misma familia de polinomios ortogonales. Si la medida μ tiene solamente una cantidad finita de puntos en su soporte, por ejemplo m , entonces $l_k = l_m$ para todo $k \geq m$.

Es bien conocido que los polinomios l_k satisfacen las relaciones de recurrencia a tres términos:

$$(2) \quad \begin{aligned} x l_k(x) &= d_k l_{k+1}(x) + e_k l_k(x) + d_{k-1} l_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \\ x l_0(x) &= e_0 l_0(x) + d_0 l_1(x), \end{aligned}$$

donde $d_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ y $e_k = \int x l_k^2(x) d\mu(x)$, $k = 0, 1, \dots$. Las relaciones en (2), junto con la condición inicial, tienen asociada la matriz simétrica infinita (matriz de Jacobi)

$$(3) \quad \begin{pmatrix} e_0 & d_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ d_0 & e_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_1 & e_2 & d_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

esto establece un nexo entre la teoría de polinomios ortogonales (también entre los problemas de momentos) y la teoría espectral de operadores.

Sea $\{s_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ la sucesión de polinomios soluciones de las relaciones de recurrencia (2) con las condiciones iniciales

$$s_0(x) = 0, \quad s_1(x) = \frac{1}{d_0}.$$

Esta familia es linealmente independiente con $\{l_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ y junto con ella genera todas las sucesiones de polinomios soluciones de (2).

Dadas $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ es obvio que la relación « $\mu \sim \nu$ si los momentos de estas medidas coinciden» define una relación de equivalencia. Además, la clase $[\mu]$, formada por todas las medidas equivalentes con μ , es un conjunto compacto en \mathcal{M} con la topología *-débil (ver [4] para los detalles). La clase de Nevalinna \mathcal{N} está formada por las funciones analíticas en $\Im z > 0$, que transforman este conjunto en $\Im w \geq 0$.

Es obvio que si $\mu \in \mathcal{M}[0, \infty)$ es determinada-H, entonces es determinada-S. Además, se cumple:

Lema 2. *Si μ es determinada-S e indeterminada-H, entonces μ es una medida con soporte contable sin puntos de acumulación en $[0, \infty)$.*

Demostración. Junto con la demostración introducimos algunas notaciones y definiciones. Si μ es indeterminada-H es conocido (ver [1], pág. 92) que

$$\begin{aligned} A(z) &= z \sum_{k=0}^{\infty} s_k(0) s_k(z), & B(z) &= -1 + z \sum_{k=0}^{\infty} s_k(0) l_k(z), \\ C(z) &= 1 + z \sum_{k=0}^{\infty} l_k(0) s_k(z), & D(z) &= z \sum_{k=0}^{\infty} l_k(0) l_k(z), \end{aligned}$$

representan funciones enteras; además:

$$A(z)D(z) - B(z)C(z) = 1.$$

Si $f \in \mathcal{N}$, entonces existen constantes $a \geq 0$ y $b \in \mathbb{R}$ y $\nu \in \mathcal{M}$ tales que

$$f(z) = az + b + \int \frac{1 + zx}{x - z} d\nu(x).$$

También

$$\int \frac{d\nu(x)}{z - x} = \frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}, \quad \varphi \in \mathcal{N} \cup \{\infty\}, \nu \in \mathcal{M},$$

establece una correspondencia uno a uno entre $\mathcal{N} \cup \{\infty\}$ y \mathcal{M} , identificando las medidas con iguales momentos (ver pág. 98 en [1]). Las medidas asociadas a las funciones $\varphi(z) \equiv b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se le llaman \mathcal{N} -extremales.

En particular, en la clase de la medida μ , hallemos la medida \mathcal{N} -extremal que tiene soporte en $[0, \infty)$. Esta es única porque μ es determinada-S. En efecto, cuando $\varphi(z) \equiv 0$, la medida $\mu_0 \in \mathcal{M}$ tal que

$$(4) \quad \int \frac{d\mu_0(x)}{z-x} = \frac{C(z)}{D(z)},$$

tiene que ser una medida discreta con puntos de masa en los ceros de D (al ser D analítica tiene a lo más un conjunto numerable de ceros sin puntos de acumulación en \mathbb{C}), además se sabe que todos los ceros de l_k están en $(0, \infty)$, de modo que $(-1)^k l_k(x) < 0$, cuando $x \leq 0$. Luego $D(x) < 0$ para $x < 0$ y sus ceros están en $[0, \infty)$ (observar que la parte izquierda de (4) es analítica en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$). Por tanto

$$\mu_0 = \sum_{\xi: D(\xi)=0} \rho(\xi) \delta_\xi,$$

siendo el conjunto de ceros de D un conjunto discreto que contiene a 0 y está incluido en $[0, \infty)$, $\rho(\xi) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} l_k(\xi)^2}$. \square

Del principio de identidad para funciones analíticas y de la definición de medida \mathcal{N} -extremal se obtiene fácilmente que:

Lema 3 (ver [1], pág. 114). *Todas las medidas \mathcal{N} -extremales son discretas.*

Lema 4 (Riesz, ver [1], pág. 43). *Si μ es determinada-H, entonces los polinomios son densos en $L^2(\mu)$. Si μ es indeterminada-H, entonces los polinomios son densos en $L^2(\mu)$ si y sólo si μ es \mathcal{N} -extremal.*

Lema 5 (ver Teorema 3.3 en [5]). *Sea μ determinada-H, no discreta y $a \in \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:*

- 1.: *El espacio de los polinomios es denso en $L^2(|x-a|^{2k} d\mu)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*
- 2.: *$|x-a|^{2k} d\mu$ es determinada-H para todo $k \in \mathbb{N}$.*
- 3.: *Cualquiera sea la función ϕ medible y acotada por un polinomio, el espacio de los polinomios es denso en $L^2(\phi d\mu)$.*

En la demostración del Teorema 1 juega un papel fundamental el resultado siguiente:

Corolario 6. *Si μ es determinada-S y no tiene soporte contable sin puntos de acumulación en $[0, \infty)$, entonces para todo $p \geq 0$ en $[0, \infty)$, la medida $p d\mu$ es determinada-S.*

Demostración. Si μ es determinada-S y no tiene soporte contable, entonces, según el Lema 2, μ es determinada-H.

Por otra parte $|p| \leq 1+p^2$, luego, por 3. en el Lema 5, los polinomios son densos en $L^2(|p| d\mu)$. Por el Lema 4, $|p| d\mu$ es determinada-H o es \mathcal{N} -extremal. Lo último no es posible porque tendría que ser discreta (ver Lema 3). Luego $|p| d\mu$ es determinada-H y por consiguiente $p d\mu$ es determinada-S. \square

3. APROXIMANTES DE PADÉ

Asociado al desarrollo formal de Laurent (1) sea $\Lambda : \mathbb{C}(z) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\Lambda(z^k) = a_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, y definido linealmente sobre $\mathbb{C}(z)$ (el espacio de todos los polinomios con coeficientes en \mathbb{C}). Entonces de la relación **(b)**, que define a los aproximantes de Padé, no es difícil observar que los denominadores y numeradores de $\pi_n(f) = \frac{p_n}{q_n}$ satisfacen las relaciones:

$$(5) \quad \Lambda(z^j q_n) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$(6) \quad p_n(z) = \Lambda_t \left(\frac{q_n(z) - q_n(t)}{z - t} \right).$$

En la última expresión el subíndice t significa que Λ actúa sobre el polinomio $\frac{q_n(z) - q_n(t)}{z - t}$ considerado como función de t .

Dados $\mu \in \mathcal{M}[0, \infty)$ y r una fracción racional con polos en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, $r(\infty) = 0$, sea

$$f(z) = \widehat{\mu}(z) + r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{z^{k+1}}.$$

La primera serie en la segunda igualdad converge uniformemente a $\widehat{\mu}$ en cada conjunto de la forma $\{z : 0 < \alpha \leq \arg(z) \leq 2\pi - \alpha, |z| \geq \epsilon > 0\}$. La fórmula (5) toma la forma

$$(7) \quad \int x^j q_n(x) d\mu(x) + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{m_i} A_{i,k} (q_n(x) x^j)^{(k-1)} \Big|_{x=z_i} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

si $r(z) = \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{i,k}}{(k-1)!} \frac{1}{z - z_i}$. Debido a que $\pi_n(f) = f$ si $\text{sop}(\mu)$ tiene un número finito de puntos, asumiremos que $\text{sop}(\mu)$ es un conjunto infinito.

Los aproximantes de Padé tienen mucha utilidad cuando la función aproximada tiene singularidades. Un principio para los aproximantes de Padé es que los polos del aproximante convergen a las singularidades de la función aproximada y en la región de analiticidad de la función los aproximantes convergen a ella. Este principio ha sido comprobado en situaciones generales. En este sentido se debe mencionar el Teorema de Montessú de Ballore (ver [8] o [10]), que vale para las filas de la tabla de aproximantes de Padé (cuando se fija el grado del denominador y la sucesión se considera variando el grado del numerador). Cuando se considera la diagonal los teoremas más generales son:

Teorema 7 (ver [9]). *Sea G una región (abierto y conexo) tal que $\infty \in G$, $G = \widetilde{G} \setminus E$, donde \widetilde{G} es una región, siendo $E \subset \widetilde{G}$ relativamente compacto respecto a \widetilde{G} , $\text{cap}(E) = 0$ ($\text{cap}(\cdot)$ representa la capacidad logarítmica) y $\partial \widetilde{G}$ (frontera de \widetilde{G}) está contenido en la frontera del complemento de la envoltura convexa de $\partial \widetilde{G}$. Sea $\pi_n(f)$ el aproximante de Padé de orden n para (1) en $z = \infty$. Si dado un compacto cualquiera $K \subset G$, existe un $N = N(K) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se cumple que $\pi_n(f)$ no tiene polos en K , entonces π_n converge uniformemente en cada compacto de G y la función límite tiene por desarrollo de Laurent en $z = \infty$ a (1).*

Teorema 8 (ver [8]). *Sea μ una medida positiva de Borel en $[-1, 1]$ y finita, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = \varphi(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (una condición suficiente para que esto se cumpla es que $\mu' > 0$ a.e.), donde $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (la transformación conforme de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ en $\{z : |z| > 1\}$, $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0$). Sea r una fracción racional con coeficientes complejos y polos en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Entonces:

- 1.:** *Para n suficientemente grande el número de polos de $\pi_n = \pi_n(\hat{\mu} + r)$ en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ coincide con el número de polos de r . Los polos de r atraen a los polos de π_n en cantidad igual a su multiplicidad.*
- 2.:** *Si K es un compacto de $\mathbb{C} \setminus ([-1, 1] \cup \{r = \infty\})$, entonces*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in K} |f(z) - \pi_n(z)| \right)^{1/n} \leq \frac{1}{\rho(K)} < 1$$

donde $\rho(K) = \inf\{|\varphi(z)| : z \in K\}$ y $f(z) = \hat{\mu}(z) + r(z)$.

El teorema anterior es en lo esencial una consecuencia del Teorema 7 (lo referente al comportamiento de los polos escapa al Teorema 7), porque se puede tomar como región $\tilde{G} = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y E igual al conjunto formado por los polos de r .

Rakhmanov ([14]) extendió el Teorema 8 (lo referente a la convergencia) a cuando la medida tiene soporte compacto en \mathbb{R} y la función r tiene coeficientes reales. Además, él observó que el teorema anterior no es cierto cuando la fracción racional r no tiene sus coeficientes en \mathbb{R} (sus polos no son simétricos respecto al eje real) y la medida tiene soporte formado por dos intervalos en \mathbb{R} . Una extensión del Teorema de Rakhmanov es:

Teorema 9 (ver[12]). *Sea $\mu \in \mathcal{M}[0, \infty)$. Sea $r = \frac{u_d}{t_d}$ una fracción racional con coeficientes reales, polos en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ y $r(\infty) = 0$. Se supone que $\text{grad}(t_d) = d$ y que para cada polinomio l , con $\text{deg}(l) \leq d$, la medida $l t_d d\mu$ es determinada-S. Entonces:*

- 1.:** *Para n suficientemente grande $\text{deg } q_n = n$. Para tales n el número de polos de $\pi_n = \pi_n(\hat{\mu} + r)$ en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ coincide con el número de polos de r . Los polos de r atraen a los polos de π_n en cantidad igual a su multiplicidad.*
- 2.:** *π_n converge uniformemente a $\hat{\mu} + r$ en subconjuntos compactos de \mathbb{D} .*

Una condición suficiente para que se cumplan las hipótesis del Teorema 9 es que los momentos de la medida μ satisfagan la condición de Carlemann (ver [11]).

El Teorema 1 continúa en la línea de observar que ocurre con los aproximantes de Padé en presencia de singularidades de la función aproximada y ofrece una condición suficiente para la convergencia de los aproximantes de Padé más fácil de observar que la formulada en el Teorema 9. Al estar $\text{sop } \mu \subset [0, \infty)$ y la interpolación realizarse en $z = \infty$, en general, no se puede aplicar el Teorema 7 en este caso.

4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1

Las ideas de la demostración siguen fundamentalmente técnicas desarrolladas en los trabajos [7], [12] y [14].

Demostración. Sea $r = \frac{u_d}{t_d}$, irreducible y $d = \text{grad}(t_d)$. La fracción r tiene los polos en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ y sus coeficientes reales, luego podemos asumir sin pérdida de generalidad que $t_d > 0$ en $[0, \infty)$. Sea $f = \hat{\mu} + r$.

Hagamos la demostración en varias etapas:

Paso 1. Comprobemos que

$$(8) \quad \int x^k q_n(x) t_d(x) d\mu(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n - d - 1,$$

y

$$(9) \quad f(z) - \pi_n(z) = \int \frac{h(x)q_n(x)t_d(x) d\mu(x)}{h(z)q_n(z)t_d(z) z - x},$$

donde h es un polinomio cualquiera, $\text{grad } h \leq n - d$.

En efecto, la condición **(b)** de la definición de aproximante de Padé nos lleva a la relación:

$$q_n(z)t_d(z)\hat{\mu}(z) + q_n(z)u_d(z) - p_n(z)t_d(z) = \frac{C}{z^{n-d+1}} + \dots$$

Asumimos en lo que sigue que $n > d$. Igualando los correspondientes coeficientes a cero (procediendo como se obtienen (5) y (6) a partir de la definición de aproximante de Padé), nos queda (8) y

$$\int \frac{q_n(z)t_d(z) - q_n(x)t_d(x)}{z - x} d\mu(x) + q_n(z)u_d(z) - p_n(z)t_d(z) = 0,$$

luego

$$f(z) - \pi_n(z) = \int \frac{q_n(x)t_d(x) d\mu(x)}{q_n(z)t_d(z) z - x}.$$

De esta relación y de la ortogonalidad (8), se obtiene la fórmula para el resto (9).

Paso 2. Veamos una fórmula alternativa para el resto (diferencia entre el aproximante y la función aproximada) y algunas consideraciones sobre los polos del aproximante.

La condición de ortogonalidad (8), unida a las consideraciones sobre t_d , nos lleva a que q_n tiene al menos $n - d$ ceros en $(0, \infty)$ donde hay cambios de signo. Sean $\{x_{n,k} : k = 1, \dots, n\}$ los ceros de q_n , ordenados de modo que $x_{n,k}$, $k = 1, \dots, n - d_n$ ($d_n < d$) son los puntos en $(0, \infty)$ donde q_n cambia de signo. Sea $q_n(z) = q_{n,1}(z)q_{n,2}(z)$, donde $q_{n,1}$ se anula en $x_{n,k}$, $k = 1, \dots, n - d_n$ y los polinomios $q_{n,2}$ no cambian de signo en $(0, \infty)$. Sea $d\mu_n = q_{n,2}(x)t_d(x) d\mu(x)$. Consideremos

$$p_{n,1}(z) = \int \frac{q_{n,1}(z) - q_{n,1}(x)}{z - x} d\mu_n(x).$$

La ecuación (9) se reescribe (utilizamos la condición **(b)** de la definición de aproximante de Padé y que $\text{deg}(q_{n,2}) \leq d_n$)

$$(10) \quad q_{n,2}(z)t_d(z)(f(z) - \pi_n(z)) = \int \frac{d\mu_n(x)}{z - x} - \frac{p_{n,1}(z)}{q_{n,1}(z)} = \frac{C}{z^{2n-(d+d_n)}} + \dots$$

Si $\lambda_{n,k} = \int \frac{q_{n,1}(x) d\mu_n(x)}{q_{n,1}(x_{n,k})(x-x_{n,k})}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{p_{n,1}(z)}{q_{n,1}(z)} &= \sum_{j=1}^{n-d_n} \frac{\lambda_{n,j}}{z-x_{n,j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{j=1}^{n-d_n} \lambda_{n,j} x_{n,j}^k, \\ \int \frac{d\mu_n(x)}{z-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_{n,k}}{z^{k+1}}, \end{aligned}$$

donde $s_{n,k} = \int x^k d\mu_n$. Comparando las últimas dos ecuaciones con (10) obtenemos que si $n > d$, entonces para todo polinomio P de grado $< 2n - (d + d_n)$ se cumple

$$(11) \quad \int P d\mu_n = \sum_{k=1}^{n-d_n} \lambda_{n,k} P(x_{n,k}) = \Omega_n(P).$$

De esta ecuación, de la definición de $\lambda_{n,k}$ y de las condiciones de ortogonalidad (8) se obtiene que al menos $n - \frac{d+d_n}{2}$ coeficientes $\lambda_{n,k}$ son positivos.

Paso 3. Introduzcamos algunas notaciones auxiliares. Sea $\psi_n(z) = \prod (z - x_{n,k})^2$, donde el producto se toma en los índices k tales que $\lambda_{n,k} < 0$. Sea B_n el producto de todos los ceros de $q_{n,2}$ y de ψ_n cuyo módulo es mayor que $\max\{1, 2R\} = M$, donde $R = 2 \max\{|z| : t_d(z) = 0\}$.

Sea $f_n = B_n^{-1} \psi_n(x) q_{n,2}(z) t_d(z) (f(z) - \pi_n(z))$. Obviamente

$$(12) \quad f_n(z) = B_n^{-1} \left[\int \frac{\psi(x) d\mu_n(x)}{z-x} - \Omega_n \left(\frac{\psi_n(x)}{z-x} \right) \right].$$

Como

$$\frac{1}{z-x} - \frac{\psi_n(x)}{\psi_n(z)} \frac{1}{z-x} = \frac{\psi_n(z) - \psi_n(x)}{(z-x)\psi_n(z)} = K_n(x; z)$$

es un polinomio en x de grado $< d_n$, utilizando la fórmula (11), obtenemos

$$\begin{aligned} f_n(z) &= B_n^{-1} \psi_n(z) \left[\int ((z-x)^{-1} - K_n(x; z)) d\mu_n(x) - \Omega_n ((z-x)^{-1} - K_n(x; z)) \right] \\ &= B_n^{-1} \int \left(\frac{\psi_n(x)}{z-x} \right) d\mu_n(x) - \Omega_n \left(\frac{\psi_n(x)}{z-x} \right). \end{aligned}$$

Paso 4. Demostremos que la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}, n > d\}$ es normal en \mathbb{D} (está uniformemente acotada sobre cada compacto de dicho conjunto).

En efecto, si $K \subset \mathbb{D}$ es un compacto, entonces

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &\leq |B_n|^{-1} \int \left(\frac{\psi_n(x)}{|z-x|} \right) d\mu_n(x) + \Omega_n \left(\frac{\psi_n(x)}{|z-x|} \right) \\ &\leq 2|B_n|^{-1} d^{-1}(K, [0, \infty)) \int \psi_n(x) d\mu_n(x) = 2Cd^{-1}(K, [0, \infty)), \end{aligned}$$

donde $d(K, [0, \infty))$ es la distancia del compacto K a $[0, \infty)$, mientras que $C = \int (x+M)^2 d\mu(x)$.

Paso 5. Demostremos que $\{f_n : n > d\}$ converge uniformemente a 0 en \mathbb{D} .

Según lo demostrado en el *Paso 4* y el Teorema de Montel, basta observar que cada subsucesión convergente en \mathbb{D} converge puntual a 0. Sea $\{f_n : n \in \Upsilon\}$ convergente en \mathbb{D} .

Debido a que los coeficientes de los polinomios $B_n^{-1}\psi_n(x)q_{n,2}(x)$ están acotados, existe una subsucesión de Υ , Υ' , tal que $\lim_{n \in \Upsilon'} B_n^{-1}\psi_n(x)q_{n,2}(z)$ existe. Sea p su límite.

Entonces utilizando (11) se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \Upsilon'} \Omega_n(x^\nu B_n^{-1}\psi_n) &= \lim_{n \in \Upsilon'} \int x^\nu B_n^{-1}\psi_n(x)q_{n,2}(x)t_d(x) d\mu(x) \\ &= \int x^\nu p(x)t_d(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Bajo las hipótesis del teorema, según el Corolario 6, si μ es determinada-S, entonces $t_d p d\mu(x)$ es determinada-S para todo polinomio p positivo en $[0, \infty)$. Luego para toda función $g \in C_0([0, \infty))$ se cumple

$$\lim_{n \in \Upsilon'} \Omega_n(g B_n^{-1}\psi_n) = \int g(x) p(x) t_d(x) d\mu(x).$$

De (12), junto con la relación anterior para $g(x) = \frac{1}{z-x}$, se sigue que $\{f_n : n > d\}$ converge a 0.

Paso 6. Demostremos que π_n converge en capacidad a f en \mathbb{D} .

Sea $L > 0$ cualquiera y K un compacto en $\mathbb{D}_L = \mathbb{D} \cap \{z : |z| < L\}$. Denotemos por $q_{n,L}(z) = \prod_k (z - x_{n,k})$, donde el producto se toma en aquellos ceros de $q_{n,2}$ que están en D_L . De la definición de f_n , se sigue

$$\begin{aligned} f(z) - \pi_n(z) &= B_n f_n(z) (\psi_n(z) q_{n,2}(z) t_d(z))^{-1}, \\ |f(z) - \pi_n(z)| &\leq A(K) \|f_n\|_K |\psi_n(z) q_{n,L}(z) t_d(z)|^{-1}, \quad z \in K, \end{aligned}$$

donde $A(K) > 0$ es independiente de n y $\|\cdot\|_K$ es la norma del supremo sobre K . Luego

$$\{z \in K : |f(z) - \pi_n(z)| > \epsilon\} \subset \{z \in K : |q_{n,L}(z) t_d(z)| > \epsilon^{-1} A(K) \|f_n\|_K\}.$$

De esta relación y del Teorema de Fekete sobre la capacidad logarítmica de conjuntos de la forma $\{z : |t(z)| \leq \epsilon\}$ se sigue que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\text{cap}\{z \in K : |f(z) - \pi_n(z)| > \epsilon\} < ((\epsilon)^{-1} A(K) \|f_n\|_K)^{1/2d}.$$

Como la parte derecha de la relación anterior converge a 0, eso quiere decir que $\{\pi_n\}$ converge en capacidad a f en cada compacto de \mathbb{D}_L .

Paso 7. El número de polos de π_n en \mathbb{D}_L es menor o igual que d mientras que el número de polos de f es exactamente d . Luego del Lema 1 en [8] (por la convergencia en capacidad demostrada en el *Paso 6*) se sigue que realmente el número de polos de π_n en \mathbb{D} es igual a d para n suficientemente grande. Además, cada polo de f atrae tantos polos de π_n como su multiplicidad. Luego $q_{n,L} = q_{n,2} \rightarrow t_d$, $B_n \equiv 1$, $\psi_n \equiv 1$ y la primera conclusión del teorema se obtiene. Por último, de la definición de f_n obtenemos

$$f(z) - \pi_{n,n}(z) = \frac{f_n(z)}{q_{n,2}(z)t_d(z)},$$

conociendo que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0 en compactos de \mathbb{D} y $q_{n,2}$ converge a t_d el teorema queda probado. \square

REFERENCIAS

- [1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Ungar, Nueva York, 1956.
- [2] G. A. Baker, *Essential of Padé approximants*, Academic Press, 1975.
- [3] G. A. Baker y P. Graves-Morris, *Padé approximants*, tomos I y II, Addison-Wesley, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, V. 13 y 14, 1981.
- [4] C. Berg, J. P. R. Christensen y P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroup. Theory of positive definite and related functions*, Springer, 1984.
- [5] C. Berg y A. J. Durán, The index of determinacy for measures and the l^2 -norm of polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 2795–2811.
- [6] H. J. Landau, Maximum entropy and the moment problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **16** (1987), 47–77.
- [7] A. A. Gonchar, On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions, *Mat. Sb. (N.S.)* **97(139)** (1975), 607–629. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **26** (1975), 555–575.
- [8] A. A. Gonchar, On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions, *Mat. Sb. (N.S.)* **98(140)** (1975), 564–577. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **27** (1975), 503–514.
- [9] A. A. Gonchar, On uniform convergence of diagonal Padé approximants, *Mat. Sb. (N.S.)* **118(160)** (1982), 535–556. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **46** (1983), 539–559.
- [10] G. López y V. V. Vavilov, *Algunas cuestiones de la teoría de la aproximación*, Ciencia y Técnica (en imprenta).
- [11] G. LÓPEZ, On the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type, *Mat. Sb. (N.S.)* **111(153)** (1980), 308–316. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **39** (1981), 281–288.
- [12] G. López, On the moment problem and the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type, en *Constructive function theory'81* (Varna, 1981), Bulgar. Acad. Sci., Sofía (1983), 419–424.
- [13] Y. A. Kasmin, Moment problem, *Encyclopaedia of mathematics*, Kluwer Academic Publisher, M064590 1-8 (versión en CD-ROM).
- [14] E. A. Rakhmanov, On the convergence of diagonal Padé approximants, *Mat. Sb. (N.S.)* **104(146)** (1977), 271–291. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **33** (1977), 243–260.
- [15] M. Riesz, Sur le probleme des moments et le théorème de Parseval correspondant, *Acta Litt. Acad. Sci. Szeged* **1** (1923), 209–225.
- [16] T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **8** (1884), 1–122.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VI-VES, CALLE LUIS DE ULLOA s/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN
 Correo electrónico: mbello@dmc.unirioja.es

EL PRINCIPIO DE CALDERÓN-ZYGMUND

CARLOS PÉREZ Y RODRIGO TRUJILLO-GONZÁLEZ

Este artículo está dedicado a la memoria de J. J. (Chicho) Guadalupe

ABSTRACT. In this note we show some estimates for multilinear commutators with vector symbol $b = (b_1, \dots, b_m)$ defined by the expression

$$T_{\vec{b}}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{j=1}^m (b_j(x) - b_j(y)) \right] K(x, y) f(y) dy,$$

where K is the kernel of any Calderón-Zygmund operator. We generalize and sharpen both classical results from Coifman, and Coifman, Rochberg and Weiss; and also more recent results from the first author. We show that these operators are intimately related to certain appropriate Orlicz type maximal function of the form $M_{L(\log L)^\alpha}$ where the number α is related to the symbol \vec{b} .

Existe un principio no muy bien establecido en la teoría clásica de Calderón-Zygmund que de forma general afirma que todo operador integral singular está controlado, en algún sentido, por un operador maximal apropiado. El ejemplo clásico lo proporcionan los operadores de Calderón-Zygmund, los cuales, como es bien sabido, están controlados por el operador maximal de Hardy-Littlewood M . Quizás la mejor forma de expresar este principio es por medio de la siguiente desigualdad debida a Coifman [2]. Sea T un operador de Calderón-Zygmund (ver [1], [4], [6]). Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$; entonces existe una constante C que depende de la constante A_∞ de w de tal manera que

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x) dx.$$

También existe una versión débil de esta desigualdad, estableciendo que, bajo las mismas condiciones, se tiene que

$$(2) \quad \sup_{t>0} t^p w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \leq C \sup_{t>0} t^p w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}).$$

Este tipo de desigualdades engloba una gran cantidad de información sobre el comportamiento de estos operadores. Por ejemplo, para $p > 1$ y $w \in A_p$ podemos aplicar el teorema de Muckenhoupt para concluir que T es un operador acotado en $L^p(w)$. De la misma forma, si $w \in A_1$ se tiene que T es un operador acotado de $L^1(w)$ en $L^{1,\infty}(w)$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42B20, 42B25.

Key words and phrases. Singular integral operators, maximal functions, commutators, vector valued singular integral operators, A_p weights.

Por otro lado, la desigualdad (1), combinada con algunas desigualdades precisas con dos pesos del operador maximal de Hardy-Littlewood ([8]), es la clave para establecer la siguiente desigualdad óptima en el rango $p > 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M^{[p]+1} w(x) dx.$$

Observamos que aquí *no* estamos imponiendo condición alguna sobre el peso w . Este resultado fue establecido en [7] generalizando algunos resultados parciales de M. Wilson en [15]. Se puede ver aquí reflejado la relevancia de (1) pues el método de M. Wilson, que no usa (1), sólo se puede aplicar a operadores integrales singulares de convolución y con núcleos C^∞ .

Existen en la literatura otros ejemplos donde el principio de Calderón-Zygmund subyace. Quizás el más parecido a (1) es el siguiente resultado de Muckenhoupt-Wheeden que establece el control de los operadores integrales fraccionarios por sus correspondientes maximales fraccionarios:

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f(x))^p w(x) dx.$$

donde $0 < \alpha < n$ y donde, como antes, $w \in A_\infty$ y la constante C depende de la constante A_∞ de w .

En este artículo mostramos otros ejemplos de este principio para otros operadores que son más singulares que los arriba mencionado.

Para $m = 0, 1, \dots$, consideramos el *conmutador* m -ésimo de

$$T_b^m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K(x, y) f(y) dy, \quad m = 0, 1, \dots$$

Motivados por el conmutador de Calderón, estos operadores fueron definidos por Coifman, Rochberg y Weiss en [3] donde se prueba que están acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando b pertenece al espacio BMO de John-Nirenberg de funciones de oscilación media acotada.

En [10] se prueba que el operador maximal que controla a T_b^m es $M_{L(\log L)^m}$. Se puede probar que este operador, que es un caso especial de la definición (8), es comparable puntualmente al operador maximal de Hardy-Littlewood iterado $m + 1$ veces, esto es,

$$M_{L(\log L)^m} \approx M^{m+1} = \overbrace{M \circ \dots \circ M}^{(m+1 \text{ veces})}.$$

De forma precisa se tiene que existe una constante C que depende de la constante A_∞ de w tal que

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m f(x)|^p w(x) dx \leq C \|b\|_{\text{BMO}}^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} (M^{m+1} f(x))^p w(x) dx.$$

De forma similar, el mismo principio de Calderón-Zygmund se obtuvo en [10] para el conmutador *no lineal* N definido por R. Rochberg y G. Weiss en [13] dado por

$$f \rightarrow Nf = T(f \log |f|) - (Tf) \log |Tf|.$$

En este caso, el operador maximal que lo controla es M^2 : existe una constante C que depende de la constante A_∞ de w tal que

$$(5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Nf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M^2 f(x))^p w(x) dx.$$

En esta nota presentamos estimaciones similares para operadores multilineales de la forma

$$(6) \quad T_{\vec{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{j=1}^m (b_j(x) - b_j(y)) \right] K(x, y) f(y) dy,$$

donde K es el núcleo de cualquier operador integral singular de Calderón-Zygmund T y el vector $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ está definido con funciones localmente integrables.

En [11] obtenemos una versión de la desigualdad de Coifman (1) para estos operadores multilineales $T_{\vec{b}}$. Consideramos en nuestro estudio la siguiente clase de funciones con mayor control exponencial de sus oscilaciones. Para $p \geq 1$ definimos el espacio $\text{Osc}_{\text{exp } L^p}$ por

$$\text{Osc}_{\text{exp } L^p} = \{f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\text{osc}_{\text{exp } L^p}} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{\text{osc}_{\text{exp } L^p}} = \sup_Q \|f - f_Q\|_{\text{exp } L^p, Q}$$

toman el supremo sobre todos los cubos Q de lados paralelos a los ejes. Como es costumbre, $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$ denota el promedio de f sobre Q .

Denotamos por $\|g\|_{\text{exp } L^p, Q}$ el promedio de g en el cubo Q con respecto a la función de Young $\Phi(t) = e^{t^p} - 1$. En general, para una función de Young arbitraria Φ , el Φ -promedio de una función f sobre un cubo Q viene definido por

$$(7) \quad \|f\|_{\Phi, Q} = \|f\|_{\Phi(L), Q} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\},$$

al cual le asociamos el operador maximal $M_\Phi = M_{\Phi(L)}$

$$(8) \quad M_\Phi f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\Phi, Q},$$

donde el supremo lo tomamos sobre todos los cubos que contienen a x (ver [8] para estudiar propiedades y aplicaciones de estos operadores).

Observemos que del teorema de John-Nirenberg se deduce que $\text{Osc}_{\text{exp } L^1} = \text{BMO}$. También se verifica que $\text{Osc}_{\text{exp } L^p} \subsetneq \text{BMO}$ para todo $p > 1$.

En adelante supondremos que el vector símbolo $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ pertenece a la clase

$$\text{Osc}_{\text{exp } L^{r_1}} \times \dots \times \text{Osc}_{\text{exp } L^{r_m}}$$

donde $r_j \geq 1$ para cada $j = 1, \dots, m$. Para simplificar la notación, escribiremos

$$\|\vec{b}\| = \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{\text{osc}_{\text{exp } L^{r_j}}}$$

y

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_m}.$$

Nuestra versión de la desigualdad de Coifman (1) es la siguiente.

Teorema 1. *Sea $0 < p < \infty$ y sea $w \in A_\infty$. Sea $T_{\vec{b}}$ el conmutador (6) con \vec{b} como hemos fijado antes. Entonces existe una constante C , que depende de la constante A_∞ de w , tal que*

$$(9) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}}f(x)|^p w(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} (M_{L(\log L)^{1/r}}f(x))^p w(x) dx.$$

Resaltamos que no se sabía siquiera que estos operadores estuvieran acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$. La desigualdad (9) muestra que el operador maximal $M_{L(\log L)^{1/r}}$ es el que controla al conmutador multilinear $T_{\vec{b}}$. Observamos que obviamente se tiene que $M_{L(\log L)^{1/r}} \leq M_{L(\log L)^m}$, el cual, ya comentamos antes, es comparable a M^{m+1} .

Como ya hemos dicho, la desigualdad (9) es una versión generalizada del conocido resultado de Coifman de [2]. Sin embargo, el método que usamos en [11] es diferente y está basado en una estimación puntual que podemos expresar de forma general como

$$(10) \quad M_\delta^\#(T_{\vec{b}}f)(x) \leq C \|\vec{b}\| [M_{L(\log L)^{1/r}}(f)(x) + R(f)(x)]$$

donde δ es un número positivo suficientemente pequeño. R denota cierto operador «residuo» menos singular que $M_{L(\log L)^{1/r}}$. Para poder entender mejor esta desigualdad, comentaremos que (10) es una versión más general de la siguiente desigualdad puntual probada en [9]:

$$M_\delta^\#([b, T]f)(x) \leq C \|b\|_{\text{BMO}} [M^2f(x) + M_\epsilon(Tf)(x)],$$

donde $0 < \delta < \epsilon$. En este caso el operador «residuo» es $R(f) = M_\epsilon(Tf)$ de tal forma que si tomamos $\epsilon < 1$, este operador es menos singular que M^2 ya que $M_\epsilon(Tf)$ es de tipo débil (1, 1) mientras que M^2 verifica una estimación más fuerte de tipo débil $L \log L$. Estas desigualdades puntuales son variaciones de la bien conocida de Strömberg ([14, p. 417]). No obstante, este resultado de Strömberg no es suficientemente preciso para deducir los resultados presentados en este trabajo, incluso en los casos más sencillos.

Razonando como en [10, Theorem 2], del Teorema 1 se sigue la siguiente desigualdad para pesos generales.

Teorema 2. *Sea $1 < p < \infty$ y $T_{\vec{b}}$ como en el Teorema 1. Entonces, existe una constante C tal que, para cualquier peso w ,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}}f(x)|^p w(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M^{(1/r+1)p+1}w(x) dx.$$

Destacamos que el número de iteraciones de la función maximal necesarias en el último teorema es óptimo como puede comprobarse en [10, Section 5]. De hecho, de la demostración del Teorema 2 se sigue una estimación más precisa:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}}f(x)|^p w(x) dx \leq C \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M_{L(\log L)^{(1/r+1)p-1+\epsilon}}(w)(x) dx$$

donde $\epsilon > 0$, siendo el resultado falso para $\epsilon = 0$.

La estimación puntual (10) se usa también para probar el siguiente resultado de tipo débil en el espíritu de (2).

Teorema 3. *Sea $T_{\vec{b}}$ como en el Teorema 1, $w \in A_{\infty}$ y $\Phi(t) = t \log^{1/r}(e + t)$. Entonces, existe una constante positiva C , que depende de la constante A_{∞} de w , tal que*

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} w(\{y \in \mathbb{R}^n : |T_{\vec{b}}f(y)| > t\}) \\ \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} w(\{y \in \mathbb{R}^n : M_{\Phi}(\|\vec{b}\| f)(y) > t\}). \end{aligned}$$

Este resultado está íntimamente ligado al hecho probado en [9] que afirma que los conmutadores con símbolos en BMO no son operadores de tipo débil (1, 1).

Para finalizar mostraremos otra variante del principio de Calderón-Zygmund. En efecto, en [12] se obtiene una versión *vectorial* de la desigualdad de Coifman (1). Para ser precisos sea T un operador de Calderón-Zygmund como antes. Para $q > 0$ definimos su extensión vectorial

$$T_q f(x) = |Tf(x)|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x)|^q \right)^{1/q}.$$

El resultado principal es el siguiente.

Teorema 4. *Sea $1 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, y sea $w \in A_{\infty}$. Entonces, existe una constante C , que depende de la constante A_{∞} de w , tal que*

$$(11) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (T_q f(x))^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M(|f|_q)(x))^p w(x) dx.$$

De forma similar se tiene que existe una constante C , que depende de la constante A_{∞} de w , de tal manera que

$$(12) \quad \|T_q f\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C \|M(|f|_q)\|_{L^{p,\infty}(w)}.$$

Destacamos que no está nada claro como probar este resultado usando las técnicas clásicas de [2]. Nuestro método consiste en usar una desigualdad puntual de la forma

$$(13) \quad M_{\delta}^{\#}(T_q f)(x) \leq CM(|f|_q)(x)$$

donde $0 < \delta < 1$. Cuando $\delta = 1$ la desigualdad (13) es falsa y el término de la derecha se reemplaza por $M(|f|_q^r)(x)^{1/r}$, $r > 1$. Es probable que en este caso se supiera la desigualdad, pero no es suficientemente precisa para deducir nuestros resultados.

REFERENCIAS

[1] M. Christ, *Lectures on singular integral operators*, Reg. Conferences Series in Math. **77**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
 [2] R. Coifman, Distribution function inequalities for singular integrals, *Proc. Acad. Sci. U.S.A.* **69** (1972), 2838–2839.

- [3] R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), 611–635.
- [4] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [5] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland Math. Studies **116**, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [6] J. L. Journé, *Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators, and the Cauchy integral of Calderón*, Lecture Notes in Math. **994**, Springer-Verlag, Nueva York, 1983.
- [7] C. Pérez, Weighted norm inequalities for singular integral operators, *J. London Math. Soc.* **49** (1994), 296–308.
- [8] C. Pérez, On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p -spaces with different weights, *Proc. London Math. Soc. (3)* **71** (1995), 135–157.
- [9] C. Pérez, Endpoint estimates for commutators of singular integral operators, *J. Funct. Anal.* **128** (1995), 163–185.
- [10] C. Pérez, Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of the Hardy-Littlewood maximal function, *J. Fourier Anal. Appl.* **3** (1997), 743–756.
- [11] C. Pérez y R. Trujillo-González, Sharp weighted estimates for multilinear commutators, aparecerá en *J. London Math. Soc.*
- [12] C. Pérez y R. Trujillo-González, Sharp weighted estimates for vector-valued singular integral operators, prepublicación.
- [13] R. Rochberg y G. Weiss, Derivatives of analytic families of Banach spaces, *Ann. of Math. (2)* **118** (1983), 315–347.
- [14] A. Torchinsky, *Real variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, Nueva York, 1988.
- [15] J. M. Wilson, Weighted norm inequalities for the continuous square functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **314** (1989), 661–692.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, 28049 MADRID, SPAIN
Correo electrónico: carlos.perez@uam.es

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38271 LA LAGUNA,
TENERIFE, SPAIN
Correo electrónico: rotrujil@ull.es

PROBLEMAS ABIERTOS EN SERIES DE FOURIER DE JACOBI-SOBOLEV

FRANCISCO MARCELLÁN, BORIS P. OSILENKER Y IGNACIO A. ROCHA

En homenaje al Profesor José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»

ABSTRACT. In this paper we deal with several problems concerning estimates of polynomials orthogonal with respect to Sobolev inner products. These problems have been motivated by some previous work by J. J. Guadalupe et al. when the standard orthogonality using measures with mass points is considered in the study of Fourier expansions in terms of orthogonal polynomials.

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de estos últimos años, aproximadamente desde mediados los años 80, los polinomios ortogonales en espacios de Sobolev son objeto de considerable atención por un amplio número de investigadores. Una motivación para este estudio se puede encontrar en el trabajo de D. C. Lewis ([14]) en el que se aborda el problema de la aproximación por mínimos cuadrados con polinomios cuando se exigen algunas condiciones extra de suavidad; es decir, se pretende aproximar una función y, simultáneamente, algunas de sus derivadas a través de aproximantes polinómicos y de las derivadas de estos aproximantes. Cabe esperar que la proyección ortogonal en el espacio usual L^2 carezca de las propiedades deseables para que se satisfagan tales condiciones. Así pues, el problema conduce de forma natural a la consideración de productos escalares de la forma

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) d\mu(x) + \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x)g^{(k)}(x) d\mu_k(x)$$

y al estudio de las propiedades de los polinomios ortogonales asociados a dichos productos escalares. Es de suponer que las proyecciones en el correspondiente espacio de Sobolev se comporten de manera adecuada.

Por otra parte, la aplicación de las técnicas de aproximación polinómica en el tratamiento numérico de las ecuaciones en derivadas parciales, específicamente de ecuaciones de tipo elíptico o parabólico, están basadas en discretizaciones mediante

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C05.

Key words and phrases. Sobolev type orthogonal polynomials, Fourier series, Fourier projectors, estimates.

El trabajo de F. Marcellán ha sido financiado por la Dirección General de Investigación (Ministerio de Ciencia y Tecnología) de España, BFM2000-0206-C04-01, así como por el proyecto INTAS 2000-272.

métodos espectrales. Estos métodos dependen de las propiedades de los operadores de Fourier y las normas naturales que aparecen son las de los espacios de Sobolev. Se requieren entonces resultados de aproximación en este tipo de normas para el análisis numérico de las discretizaciones espectrales tipo Galerkin. Los casos particulares de Legendre y Chebyshev se pueden ver en [6].

Pensando estrictamente en términos de polinomios, se plantean diversos problemas de interés. ¿Se conservan las propiedades analíticas de los polinomios ortogonales con respecto a productos escalares estándar, esto es, productos escalares en que no están involucradas derivadas? ¿Qué ocurre con las propiedades algebraicas de los nuevos polinomios? ¿Existe una teoría de operadores en espacios de Hilbert que discurra paralelamente al estudio de los polinomios ortogonales como en el caso estándar? ¿Qué tipo de aproximantes de Padé aparecen relacionados con estos polinomios?, ¿cómo se comportan? . . .

Así pues, el interés del tratamiento de los polinomios ortogonales en espacios de Sobolev responde a diversos motivos, entre ellos:

- (a) Comparación con la teoría estándar de los polinomios ortogonales.
- (b) Teoría espectral de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- (c) Análisis de los métodos espectrales en el tratamiento numérico de problemas de contorno para ecuaciones en derivadas parciales.
- (d) Búsqueda de algoritmos para computación de series de Fourier-Sobolev en términos de polinomios ortogonales de Sobolev cuando las normas consideradas atañen a la función y a algunas de sus derivadas.

A pesar de los esfuerzos realizados, la mayor parte de los progresos alcanzados se incluyen en la consideración de algunos tipos especiales de estos productos escalares. Específicamente, el llamado producto tipo Sobolev

$$(1) \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) d\mu(x) + \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{N_k} M_{k,i} f^{(i)}(a_k) g^{(i)}(a_k),$$

donde $a_k \in \mathbb{R}$, $M_{k,i} \geq 0$ y, finalmente, $K, N_k \in \mathbb{Z}^+$, es en el que se han producido más avances.

Desde el punto de vista de las propiedades algebraicas: relaciones de recurrencia, localización de ceros, fórmulas diferenciales. . . puede decirse que la tarea está prácticamente completada. El trabajo [2] contienen una buena parte de estos resultados y una primera síntesis del tema la constituye [16].

Por lo que se refiere a las propiedades asintóticas y al estudio analítico de estos polinomios, en [15] y [19] se determina su asintótica relativa cuando μ tiene soporte compacto y se encuentra en la clase de Nevai. En el primero de ellos, [15], se obtiene también la relación existente entre los polinomios de Sobolev y las perturbaciones racionales de la transformada de Cauchy de la medida μ desde la óptica de los aproximantes de Padé, y se estudia además la asintótica cuando el producto considerado no es en general simétrico puesto que contiene la evaluación en puntos del plano complejo de un operador diferencial lineal con coeficientes constantes

actuando sobre una de las funciones,

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) d\mu(x) + \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{N_k} f^{(i)}(a_k)L_{k,i}(g; a_k).$$

Las propiedades asintóticas en estos trabajos se refieren siempre al comportamiento de los polinomios en el complemento del soporte de la medida de ortogonalidad y de los puntos exteriores en donde intervienen las derivadas de las funciones.

Referente al caso general, la asintótica es conocida cuando la segunda medida que interviene está soportada en el mismo compacto que la primera. Este problema está resuelto en [20], pero se desconoce el comportamiento de los polinomios cuando los soportes no se solapan o incluso cuando existe solapamiento pero sin relación de inclusión entre los diferentes soportes. Las dificultades de su tratamiento derivan de la no existencia de relaciones algebraicas entre los polinomios como ocurre en el producto (1).

2. SERIES DE FOURIER

2.1. Medidas de soporte compacto. En el ámbito de las series de Fourier-Sobolev, en el que se pretende situar este trabajo, son todavía pocos los resultados conocidos. Tomando como referencia lo que ocurre en el caso clásico, en [17] y [18] se estudia su comportamiento cuando el producto considerado es (1) con los puntos a_k reales y exteriores al soporte de μ siendo ésta la medida de Jacobi. Se prueba que si $(\widehat{B}_k(x))_{k=0}^\infty$ es la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a este producto, esto es,

$$\langle \widehat{B}_n(x), \widehat{B}_k(x) \rangle = \delta_{n,k}, \quad k, n = 0, 1, \dots,$$

entonces

- (a) $\sum_{n=0}^\infty \langle f, \widehat{B}_n \rangle \widehat{B}_n(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1),$
- (b) $\sum_{n=0}^\infty \langle f, \widehat{B}_n \rangle \widehat{B}_n^{(i)}(a_k) = f^{(i)}(a_k), \quad i = 0, \dots, N_k, \quad k = 1, \dots, K,$

cuando la función $f(x)$ satisface condiciones estándar. Para alcanzar estas conclusiones, son necesarias estimaciones de los $\widehat{B}_n(x)$ en el intervalo de ortogonalidad y de los polinomios y sus derivadas en los puntos a_k . Por comparación con los polinomios de Jacobi, en el intervalo $(-1, 1)$ se encuentra, salvo una constante, la misma acotación que satisfacen éstos,

$$|\widehat{B}_n(x)| \leq \frac{C}{(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}}, \quad x \in (-1, 1),$$

para alguna constante C . Referente a las derivadas en a_k , el resultado es que

$$|\widehat{B}_n^{(i)}(a_k)| \leq C \frac{n^{N_k-i}}{|a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}|^n}, \quad i = 0, \dots, N_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Esta última estimación es válida no sólo en el caso de la medida de Jacobi sino para cualquier medida que esté en la clase de Szegő.

El papel que juega el hecho de que los puntos a_k sean exteriores a $[-1, 1]$ es central, puesto que se utiliza la continuidad en dicho intervalo de la función $\frac{1}{w_N(x)}$, donde $w_N(x)$ es el polinomio cuyos ceros son los puntos a_k con multiplicidad $N_k + 1$ y $N =$

$\sum_{k=1}^K (N_k + 1)$ es su grado. De hecho, bajo estas condiciones, se ve que el espacio de Sobolev correspondiente se comporta como el producto cartesiano de $L^2(\mu)$ con \mathbb{R}^N , lo que hace las cosas especialmente sencillas. Trasladar los a_k al intervalo $[-1, 1]$ va a complicarlas inevitablemente. Desde luego, las técnicas utilizadas en estos trabajos se invalidan para el nuevo caso.

En [9] se han estudiado estimaciones de polinomios ortogonales relativos a perturbaciones de pesos generalizados de Jacobi w , esto es,

$$w(x) = h(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \prod_{i=1}^N |x-t_i|^{\gamma_i}, \quad x \in [-1, 1],$$

donde

- (a) $\alpha, \beta, \gamma_i > -1$, $t_i \in (-1, 1)$, $t_i \neq t_j$, $i \neq j$;
- (b) h es una función continua y positiva en $[-1, 1]$ y $w(h, \delta)\delta^{-1} \in L^1(0, 2)$, siendo $w(h, \delta)$ el módulo de continuidad de h .

Dichas perturbaciones consisten en la adición de puntos de masa en $\{\pm 1\} \cup \{t_i\}_{i=1}^N$. Esencialmente, se prueba que las estimaciones —cotas superiores en $[-1, 1]$ — son del mismo orden que las correspondientes a los polinomios ortogonales respecto al peso generalizado de Jacobi w . Así pues, una cuestión natural es el estudio de dichas estimaciones para polinomios ortogonales respecto a productos escalares tipo Sobolev (1) cuando los $(a_k)_{k=1}^K$ pertenecen al intervalo $(-1, 1)$ y la medida μ es absolutamente continua con $d\mu(x) = w(x) dx$.

Problema 1. Un primer paso consistiría en el estudio del peso de Jacobi propiamente dicho en la línea desarrollada en [17] y [18], aunque las fórmulas de Christoffel-Darboux presentan singularidades en los puntos de masa.

Problema 2. En un segundo paso se abordaría la presencia de masas en los puntos ± 1 . De esta forma, y utilizando la información de [3], se podrían estudiar problemas de frontera para operadores diferenciales de cuarto orden mediante técnicas de tipo Galerkin. El enfoque de los métodos de colocación para dichos problemas requiere extensiones de la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto (véase [6], capítulo 5), que se podrían enfocar de modo alternativo utilizando la ortogonalidad respecto a un funcional en los términos desarrollados en [4].

Problema 3. Finalmente, un objetivo más genérico consistiría en extender las estimaciones de [9] cuando se trabaja con productos tipo Sobolev (1) para pesos generalizados de Jacobi.

El interés de dichas estimaciones radica en su aplicación al análisis de la convergencia de las sumas parciales de Fourier-Sobolev de los polinomios ortogonales asociados al producto escalar (1).

Cuestiones relativas a la convergencia uniforme y en media surgen de manera natural y una relectura de los resultados de [10] en este contexto sería de gran interés, tanto teórico como desde la perspectiva de las aplicaciones en los métodos espectrales anteriormente señalados.

2.2. Medidas de soporte no acotado. En el caso de medidas soportadas en intervalos no acotados, los dos modelos canónicos corresponden a los pesos de Laguerre y Hermite. Ambos se pueden subsumir en los denominados pesos de Freud.

El caso tipo Laguerre-Sobolev cuando las masas están localizadas en $x = 0$ fue estudiado por R. Koekoek y H. G. Meijer en [12] desde una perspectiva algebraica, mientras que en [5] se aborda su tratamiento a través de un problema espectral.

Problema 4. Utilizando las conocidas estimaciones para los polinomios de Laguerre (véase [23], Teorema 7.6.4) parece natural abordar la obtención de estimaciones para los polinomios tipo Laguerre-Sobolev distinguiendo los casos en que la masa esté localizada en la frontera del soporte de la medida del caso en que la masa se sitúe en el semieje real positivo. Asimismo, las estimaciones para los núcleos correspondientes a dichos polinomios se pueden deducir de la extensión de la fórmula de Christoffel-Darboux al caso Sobolev.

Problema 5. El estudio de la convergencia en media de las series de Fourier respecto a los polinomios de Laguerre y Hermite fue tratado en [21] y [22]. En [10] se prueba que las perturbaciones de la medida de Laguerre basadas en la adición de una masa en $x = 0$ no altera la validez de los resultados de Muckenhoupt. Nuestro interés se centra en el tratamiento de series de Fourier para polinomios ortogonales respecto al producto escalar (1) cuando disponemos de un único punto de masa en $x = 0$ y μ es la medida de Laguerre o la de Hermite. La extensión al caso de la medida de Freud $d\mu(x) = |x|^{\alpha/2} \exp(-|x|^\beta) dx$, con $\alpha > -1$ y $\beta > 0$ es, sin duda, un problema más ambicioso.

2.3. Producto escalar con dos medidas continuas. Cuando el producto escalar es de la forma

$$(2) \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x) d\mu_1(x)$$

donde μ_0 y μ_1 son medidas no discretas, se conocen resultados de tipo analítico si estas medidas no están alejadas de las medidas clásicas. Corresponden al denominado caso de par coherente introducido por Iserles et al. [11]. No obstante, un estudio detallado de estimaciones de los correspondientes polinomios ortogonales en la línea descrita para el caso estándar está pendiente de realización.

Si $\mu_0 = \mu_1$ es el peso de Jacobi y $(Q_n)_{n=0}^\infty$ denota la sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto a (2) (que denominaremos de Jacobi-Sobolev), es bien conocido, [7], que existen sucesiones (a_n) , (b_n) , (c_n) , (d_n) tales que

$$(3) \quad Q_n(x) + a_n Q_{n-1}(x) + b_n Q_{n-2}(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x) + c_n P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) + d_n P_{n-2}^{\alpha,\beta}(x), \quad n \geq 2,$$

donde $P_n^{\alpha,\beta}$ denota el n -ésimo polinomio de Jacobi. Teniendo en cuenta las conocidas estimaciones de los polinomios de Jacobi, parece natural abordar el siguiente

Problema 6. ¿Existen estimaciones para los polinomios (Q_n) y cuál es su orden de magnitud en relación con los $(P_n^{\alpha,\beta})$?

Dada la inexistencia de una fórmula de Christoffel-Darboux para los núcleos asociados a los (Q_n) , las técnicas descritas para los productos (1) dejan de ser válidas en este caso.

Problema 7. Obtener estimaciones para los núcleos $L_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \widehat{Q}_k(x)\widehat{Q}_k(y)$ donde (\widehat{Q}_k) denota la sucesión de polinomios ortonormales correspondientes a (Q_k) .

El estudio de los coeficientes de Fourier en el caso de los polinomios de Legendre-Sobolev ha sido tratado en [11] y ha permitido una comparación entre los proyectores de Fourier de Legendre y Legendre-Sobolev. Un algoritmo para el caso Jacobi ha sido descrito en [13] y en él juega un papel central la relación (3).

Problema 8. Estudiar estimaciones para las sumas parciales enésimas de Fourier referidas a polinomios de Jacobi-Sobolev y analizar la acotación del operador de proyección de Fourier respecto a la norma de Jacobi-Sobolev.

REFERENCIAS

- [1] M. Alfaro, F. Marcellán y M. L. Rezola, Estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials, *Appl. Anal.* **67** (1997), 157–174.
- [2] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux, On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 737–757.
- [3] J. Arvesú, R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán y K. Pan, Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials: Second order differential equation and zeros, *J. Comput. Appl. Math.* **90** (1998), 137–158.
- [4] R. Álvarez-Nodarse, J. Arvesú y F. Marcellán, On a modification of the Jacobi linear functional: Asymptotic properties and zeros of orthogonal polynomials, *Acta Appl. Math.*, en prensa.
- [5] H. Bavinck, J. Koekoek y R. Koekoek, On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 347–393.
- [6] C. Bernardi y Y. Maday, *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Mathématiques & Applications **10**, Springer-Verlag, Paris, 1992.
- [7] M. G. de Bruin y H. G. Meijer, Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete Sobolev space, *Ann. Numer. Math.* **2** (1995), 233–246.
- [8] A. Foulquié Moreno, F. Marcellán y B. P. Osilenker, Estimates for polynomials orthogonal with respect to some Gegenbauer-Sobolev type inner product, *J. Inequal. Appl.* **3** (1999), 401–419.
- [9] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials relative to measures with mass points, *Mathematika* **40** (1993), 331–344.
- [10] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted norm inequalities for polynomial expansions associated to some measure with mass points, *Constr. Approx.* **12** (1996), 341–360.
- [11] A. Iserles, J. M. Sanz-Serna, P. E. Koch y S. P. Nørsett, Orthogonality and approximation in a Sobolev space, en *Algorithms for approximation, II* (Shrivenham, 1988, J. C. Mason y M. G. Cox, eds.), Chapman and Hall, Londres (1990), 117–124.
- [12] R. Koekoek y H. G. Meijer, A generalization of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), 768–782.
- [13] K. H. Kwon, J. H. Lee y F. Marcellán, Generalized coherent pairs, *J. Math. Anal. Appl.* **253** (2001), 482–514.
- [14] D. C. Lewis, Polynomial least square approximations, *Amer. J. Math.* **69** (1947), 273–278.
- [15] G. López, F. Marcellán y W. Van Assche, Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product, *Constr. Approx.* **11** (1995), 107–137.
- [16] F. Marcellán, M. Alfaro y M. L. Rezola, Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions, *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993), 113–132.
- [17] F. Marcellán, B. Osilenker y I. A. Rocha, On Fourier series of Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials, *J. Inequal. Appl.*, en prensa.
- [18] F. Marcellán, B. Osilenker y I. A. Rocha, On Fourier series of a discrete Jacobi-Sobolev inner product, prepublicación.

- [19] F. Marcellán y W. Van Assche, Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product, *J. Approx. Theory* **72** (1992), 192–209.
- [20] A. Martínez Finkelshtein, Bernstein-Szegő's theorem for Sobolev orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **16** (2000), 73–84.
- [21] B. Muckenhaupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 419–431.
- [22] B. Muckenhaupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 433–460.
- [23] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.^a edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, CALLE BUTARQUE 15, 28911 LEGANÉS, MADRID, SPAIN
Correo electrónico: pacomarc@ing.uc3m.es

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MOSCOW STATE CIVIL ENGINEERING UNIVERSITY, MOSCOW, RUSSIA
Correo electrónico: borosilr@dis.muh.ru

DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA, E.U.I.T. TELECOMUNICACIÓN, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID, CTRA. DE VALENCIA KM. 7, 28031 MADRID, SPAIN
Correo electrónico: igalvar@euitt.upm.es

FUNCIONES DE HERMITE, DERIVACIÓN FRACCIONARIA Y CIERTAS FAMILIAS DE OPERADORES

PEDRO J. MIANA

En homenaje al Prof. José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»

ABSTRACT. In this paper, we study the connection between Weyl fractional calculus of the gaussian function and Hermite functions. This relationship appears in a natural way to treat integrated families. Some particular cases are considered.

Es bien conocido ([Go], pág. 121) que el operador Laplaciano en \mathbb{R} , $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$, es el generador infinitesimal en $L^1(\mathbb{R})$ de una función coseno $(C(t))_{t \geq 0}$ uniformemente acotada:

$$C(t)f(s) = \frac{1}{2}(f(s+t) + f(s-t))$$

con $f \in L^1(\mathbb{R})$, y de un semigrupo holomorfo $(T(z))_{\Re z > 0}$ de operadores acotados, el semigrupo gaussiano,

$$T(z)f(s) = g^z * f(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4z}} f(s-t) dt$$

con $f \in L^1(\mathbb{R})$.

La relación entre estas dos familias de operadores viene expresada a través de la fórmula abstracta de Weierstrass, (ver por ejemplo, pág. 120 de [Go] o [KV]):

$$T(z)f = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4z}} C(t)f dt$$

con $\Re z > 0$ y $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Este planteamiento es fácilmente ampliado al contexto de espacios de Banach X y operadores lineales y acotados, $\mathcal{B}(X)$ (ver [Go], [Vi]).

En 1997, V. Keyantuo [Ke] probó que si A es el generador infinitesimal de una función coseno n -veces integrada, $(C_n(t))_{t \geq 0}$, en un espacio de Banach X , con $n \in \mathbb{N}$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo holomorfo $(T(z))_{\Re z > 0}$ cuya expresión explícita es:

$$T(z)x = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi z}^{\frac{(n+1)}{2}}} \int_0^{+\infty} H_n\left(\frac{t}{2\sqrt{z}}\right) e^{-\frac{t^2}{4z}} C_n(t)x dt$$

con $\Re z > 0$, $x \in X$, y H_n es el polinomio de Hermite de grado n .

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 47D62; Secondary 33E30, 26A33.
Key words and phrases. Integrated families, Hermite functions, Weyl fractional calculus.
 Esta investigación ha sido subvencionada por el proyecto PB97-0094 de la DGES.

Además V. Keyantuo comenta en su trabajo [Ke], pág. 146, «el resultado puede tomar una forma más precisa en este contexto si uno encuentra un análogo al Lema 2.3 que relacione el semigrupo $T(t)$ con la función coseno α -veces integrada $C_\alpha(s) = 1/\Gamma(\alpha) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} C(s) ds$ generada por A ».

En particular, el Laplaciano en \mathbb{R}^n es el generador infinitesimal de una función coseno α -veces integrada en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, con

$$\alpha > (n-1) \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right|.$$

El cálculo fraccionario se ha revelado como una de las mejores herramientas analíticas para tratar las familias α -veces integradas, [Mi]. En especial la fórmula de integración por partes (6) permite utilizar a las familias α -veces integradas como núcleos de expresiones integrales.

En el contexto particular de este trabajo, se hace necesario poder calcular derivadas de Weyl de orden $\alpha > 0$ de la función e^{-t^2} y relacionarlas con funciones especiales conocidas en la literatura matemática dando lugar a *fórmulas de Rodrigues* generalizadas.

Esta idea de unir el cálculo fraccionario de funciones elementales y familias de funciones especiales se ha desarrollado trabajando o bien en el contexto de cálculo fraccionario de Riemann-Liouville ([LTO], [LOT]) o bien en el contexto de cálculo fraccionario complejo ([Ca], [GR]) y algunas veces en el contexto del cálculo fraccionario de Weyl ([Sr]).

En la primera sección de este trabajo consideramos las ecuaciones clásicas de Hermite y de Weber y señalamos propiedades conocidas de sus soluciones: las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas respectivamente.

Una vez introducidas la integral y derivación fraccionaria de Weyl, se calculan explícitamente las integrales y derivadas de las funciones e^{-t^2} y $e^{-t^2/2}$ y se establece la relación con las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas respectivamente.

En la segunda sección, extendemos el resultado obtenido por V. Keyantuo a generadores infinitesimales, A , de funciones coseno α -veces integradas con $\alpha > 0$. Obtenemos una nueva versión de la fórmula abstracta de Weierstrass que relaciona estas familias de operadores con los semigrupos holomorfos generados por A .

Para terminar consideramos el caso del Laplaciano en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$, y relacionamos los resultados conocidos con los hallados en la segunda sección.

Sé que a Chicho este trabajo le habría gustado y sé que habría tenido valiosas aportaciones que hacer a este humilde nota.

1. FUNCIONES DE HERMITE, FUNCIONES CILÍNDRICAS PARABÓLICAS Y DERIVACIÓN FRACCIONARIA DE WEYL

En esta sección introduciremos las dos familias de funciones mencionadas: las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas y expresaremos las relaciones entre ellas. El cálculo fraccionario de Weyl es utilizado para probar nuevos resultados y algunos ya conocidos.

1.1. Funciones de Hermite y funciones cilíndricas parabólicas.

En los textos tradicionales (ver por ejemplo [Da], pág. 344, o [Vi], pág. 554) de ecuaciones diferenciales, la ecuación diferencial de Hermite es la siguiente:

$$w''(z) - 2zw'(z) + 2\nu w(z) = 0$$

con $\nu \in \mathbb{C}$. Se dicen *funciones de Hermite* de orden ν a la soluciones de esta ecuación diferencial. Trivialmente, si $H_\nu(z)$ es una solución de la ecuación anterior entonces $H_\nu(-z)$ es también solución, y como

$$W(H_\nu(z), H_\nu(-z)) = \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2},$$

esto es, el wronskiano es no nulo, entonces $H_\nu(z)$ y $H_\nu(-z)$ son soluciones linealmente independientes siempre y cuando $\nu \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Entre las representaciones que admite la función de Hermite consideramos la representación integral

$$H_\nu(z) = A \int_\gamma \frac{e^{-w^2+2zw}}{w^{\nu+1}} dw,$$

donde A es una constante arbitraria y γ es el camino en el plano complejo que consta de las semirrectas $(-\infty, -a)$, $(a, +\infty)$ y la semicircunferencia $|w| = a > 0$, $\Im w \geq 0$. Además $H_\nu(z)$ es una función entera en las variables z y ν .

En el caso $\nu = n \in \mathbb{N}$, entonces H_n es el llamado *polinomio de Hermite* y es tomado $A = \frac{n!}{2\pi i}$ para seguir el convenio de normalizar el polinomio de Hermite de forma que el coeficiente de z^n sea 2^n . Así, se tiene la fórmula de Rodrigues

$$(1) \quad H_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-w^2+2zw}}{w^{n+1}} dw = \frac{n!e^{z^2}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-u^2}}{(u+z)^{n+1}} du = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}.$$

Son conocidas otras representaciones integrales; entre ellas destacamos

$$(2) \quad H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2-2zt}}{t^{\nu+1}} dt$$

con $\Re \nu < 0$. También es conocido el desarrollo asintótico de las funciones de Hermite ([Da], pág. 350). Así, se tiene para $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ que

$$H_\alpha(z) \sim (2z)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k - \alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)(2z)^{2k}}, \quad z \rightarrow \infty,$$

con $-\frac{3}{4}\pi < \arg(z) < \frac{3}{4}\pi$. Por tanto $|H_\alpha(z)| \leq C(1 + |z|^\alpha)$ con $C > 0$ y $\Re z > 0$. Por último, dos relaciones conocidas de las funciones de Hermite son, la llamada relación de recurrencia a tres términos

$$H_{\nu+1}(z) - 2zH_\nu(z) + 2\nu H_{\nu-1}(z) = 0$$

y la igualdad de la derivada $H'_\nu(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z)$.

Si en la ecuación de Hermite, realizamos la sustitución de la función incógnita $w(z) = e^{\frac{z^2}{2}} u(z)$, obtenemos la igualdad

$$u''(z) + (1 + 2\nu - z^2)u(z) = 0.$$

Y si ahora cambiamos la variable $\sqrt{2}z = v$, obtenemos la llamada *ecuación de Weber*

$$u''(v) + \left(\frac{1}{2} + \nu - \frac{v^2}{4}\right)u(v) = 0$$

con $\nu \in \mathbb{C}$. Esta ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden también se obtiene ([MOS], pág. 489) separando las variables en la ecuación de ondas $\Delta u = k^2 u$ en coordenadas cilíndricas parabólicas. Las soluciones de esta ecuación diferencial se denominan *funciones de un cilindro parabólico* o *funciones de Weber-Hermite*. También es claro que si $D_\nu(v)$ es solución de la ecuación de Weber $D_\nu(-v)$ también es solución.

Estas funciones han sido objeto de un estudio más profundo que las funciones de Hermite, ver por ejemplo [WW], [AS]. Se conocen diversas representaciones de estas funciones. Tal vez la más conocida es

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right),$$

donde W es la función de Whitakker, ver [WW], pág. 347, y por tanto $D_\nu(z)$ es expresada a partir de las funciones hipergeométricas degeneradas, ver [Vi], pág. 560. $D_\nu(z)$ es un función entera en z y real si z y ν son reales.

En el caso $\nu = n \in \mathbb{N}$, se prueba la fórmula de Rodrigues

$$(3) \quad D_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{2}} = 2^{-n/2} e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

En el caso $n = 0$ entonces $D_0(z) = e^{-\frac{z^2}{4}}$. Otras fórmulas de diferenciación conocidas ([MOS], pág. 327) son

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} (e^{\frac{z^2}{4}} D_\nu)(z) &= (-1)^n (-\nu)_n e^{\frac{z^2}{4}} D_{\nu-n}(z), \\ \frac{d^n}{dz^n} (e^{-\frac{z^2}{4}} D_\nu)(z) &= (-1)^n e^{-\frac{z^2}{4}} D_{\nu+n}(z), \end{aligned}$$

donde $(-\nu)_n = (-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+n-1)$.

El desarrollo asintótico de las funciones cilíndricas parabólicas ([WW], pág. 347) para $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ es

$$D_\alpha(z) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k - \alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)2^k z^{2k}}, \quad z \rightarrow \infty,$$

con $-\frac{3}{4}\pi < \arg(z) < \frac{3}{4}\pi$. Por tanto $|D_\alpha(z)| \leq M|e^{-\frac{z^2}{4}}|(1 + |z|^\alpha)$ con $M > 0$ y $\Re z > 0$. Las relaciones de recurrencia siguientes son conocidas:

$$\begin{aligned} D_{\nu+1}(z) - zD_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ D'_\nu(z) + \frac{z}{2}D_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ D'_\nu(z) - \frac{z}{2}D_\nu(z) + D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ 2D'_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) + D_{\nu+1}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Además, en [GrR] se tabulan varias representaciones integrales de estas funciones. Entre ellas señalamos la enumerada con 3.642, (1), pág. 337,

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) e^{\frac{\gamma^2}{8\beta}} D_{-\nu} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}} \right)$$

con $\Re\beta > 0$ y $\Re\nu > 0$. De entre las que son combinaciones de funciones cilíndricas parabólicas y funciones exponenciales, (pág. 885 y ss.) necesitaremos la enumerada con 7.728, pág. 887,

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} (2t)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-pt} e^{-\frac{q^2}{8t}} D_{\nu-1} \left(\frac{q}{\sqrt{2t}} \right) dt = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-q\sqrt{p}}.$$

1.2. Derivación fraccionaria de Weyl.

Con ayuda de la derivación fraccionaria en sentido Weyl vamos a conseguir establecer relaciones entre las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas de igual orden extendiendo la igualdad (3) a cualquier orden $\nu \in \mathbb{C}$.

El factor $(-1)^n$ y la derivada de orden n que aparecen en las fórmulas (1) y (3) hace pensar que para considerar una extensión de estas igualdades a órdenes $\nu \in \mathbb{C}$, deberemos trabajar con la derivada fraccionaria de Weyl.

Recordemos que dada $f \in \mathcal{D} = \mathcal{C}_c^{(\infty)}(\mathbb{R})$, o más generalmente $f \in \mathcal{S}$ (funciones de la clase de Schwartz sobre \mathbb{R}) se define ([MR], [SKM]) la integral fraccionaria de Weyl de orden α con $\alpha > 0$ mediante la expresión

$$W^{-\alpha} f(u) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^{+\infty} (t-u)^{\alpha-1} f(t) dt$$

con $u \in \mathbb{R}$. Para definir la derivada de Weyl de orden α con $\alpha > 0$ se toma $n = [\alpha] + 1$ y se considera

$$W^\alpha f(u) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{du^n} \int_u^{+\infty} (t-u)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

Notar que si $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces $W^\alpha f = (-1)^\alpha f^{(\alpha)}$, $W^{\alpha+\beta} = W^\alpha W^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $W^0 = \text{Id}$, el operador identidad.

Fácilmente se prueba que dadas $f, g \in \mathcal{S}$ y $\alpha > 0$ entonces

$$(6) \quad \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} W^\alpha f(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds dt.$$

En [SKM], pág. 96, se encuentran formulaciones equivalentes de esta igualdad. Otra propiedad del cálculo fraccionario de Weyl es la siguiente.

Proposición 1.1. *Dada $f \in \mathcal{S}$ y $a > 0$, consideramos $f_a(t) := f(at)$. Entonces*

$$W^\alpha f_a(t) = a^\alpha W^\alpha f(at)$$

con $\alpha, t \in \mathbb{R}$.

En esta sección estamos interesados en estudiar la función

$$G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha(e^{-t^2})(t)$$

con $\alpha, t \in \mathbb{R}$. A posteriori probaremos, Teorema 1.4, que $G_\alpha(t) = H_\alpha(t)$.

Proposición 1.2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha(e^{-t^2})(t)$ entonces se cumple:

- $G'_\alpha(t) = 2tG_\alpha(t) - G_{\alpha+1}(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, y
- $G''_\alpha(t) = G_{\alpha+2}(t) - 4tG_{\alpha+1}(t) + (2 + 4t^2)G_\alpha(t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Por tanto es inmediato que

$$G''_\alpha(t) - 2tG'_\alpha(t) + 2\alpha G_\alpha(t) = G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha + 1)G_\alpha(t)$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Aplicar la definición de G_α , $\frac{d}{dt}W^\alpha(e^{-t^2}) = -W^{\alpha+1}(e^{-t^2})$ y obtenemos la primera igualdad. Para la segunda, utilizar la primera igualdad y agrupar. \square

Lema 1.3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha(e^{-t^2})(t)$. Si se cumple que

$$G_{\alpha+1}(t) - 2tG_\alpha(t) + 2\alpha G_{\alpha-1}(t) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha + 1)G_\alpha(t) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Basta aplicar derivación y la primera igualdad de la Proposición 1.2. \square

En el siguiente teorema se da la fórmula de Rodrigues para el cálculo fraccionario de Weyl de la función gaussiana.

Teorema 1.4. Dada $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = e^{-t^2} H_\alpha(t)$.

Demostración. Si $\alpha < 0$ entonces

$$\begin{aligned} W^\alpha(e^{-t^2})(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_t^{+\infty} (u-t)^{-\alpha-1} e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s+t)^2}}{s^{\alpha+1}} ds = \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s^2-2ts}}{s^{\alpha+1}} ds. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la fórmula (2) y obtenemos $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = e^{-t^2} H_\alpha(t)$. Si $\alpha = 0$, sabemos $H_0(t) = 1$ y por tanto se cumple la igualdad. En el caso en que $\alpha > 0$, tomar $n \in \mathbb{N}$ y tal que $n - \alpha > 0$, y $\beta = \alpha - n < 0$. Entonces se cumple que $G_\beta(t) = H_\beta(t)$, y por tanto

$$G_{\beta+2}(t) - 2tG_{\beta+1}(t) + 2(\beta + 1)G_\beta(t) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Reiterando el Lema 1.3, n veces, y aplicando la Proposición 1.2, obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= G_{\beta+n+2}(t) - 2tG_{\beta+n+1}(t) + 2(\beta + n + 1)G_{\beta+n}(t) \\ &= G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha + 1)G_\alpha(t) = G''_\alpha(t) - 2tG'_\alpha(t) + 2\alpha G_\alpha(t). \end{aligned}$$

Y por tanto se concluye que $G_\alpha(t) = H_\alpha(t)$ con $t \in \mathbb{R}$. \square

Notas. Otro planteamiento que se puede seguir en esta sección a la vista del Teorema 1.4 es trabajar con el concepto de derivación fraccionaria holomorfa de Weyl (ver por ejemplo [Ca], [GaR]).

El teorema anterior tiene una inmediata aplicación: estimar el módulo de H_α sin necesidad de desarrollos asintóticos. Así, obtenemos

Teorema 1.5. *Dada $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple*

- $|H_\alpha(t)| \leq (2t)^\alpha$ con $\alpha < 0$ y $t > 0$, y
- $|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha(1 + t^\alpha)$ con $\alpha > 0$ y $t \geq 0$.

Demostración. Si $\alpha < 0$, sabemos por el Teorema 1.4 que

$$e^{-t^2} H_\alpha(t) = W^\alpha(e^{-t^2})(t) = \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{-\alpha-1} e^{-s^2-2st} ds \leq e^{-t^2} (2t)^\alpha.$$

Si $\alpha > 0$, tomamos $n > \alpha$; entonces

$$\begin{aligned} e^{-t^2} |H_\alpha(t)| &= |W^\alpha(e^{-t^2})(t)| = |W^{-(n-\alpha)} W^n(e^{-t^2})(t)| \\ &\leq \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1} |H_n(t+u) e^{-u^2-2ut}| du. \end{aligned}$$

Por tanto, sabiendo H_n es un polinomio de grado n , se tiene que

$$\begin{aligned} |H_\alpha(t)| &\leq C_\alpha \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1} (1 + (t+u)^n) e^{-u^2-2ut} du \\ &\leq C_\alpha \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1} e^{-u^2-2ut} du + C_\alpha \sum_{j=0}^n t^{n-j} \int_0^{+\infty} u^{n+j-\alpha-1} e^{-u^2-2ut} du. \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula (2) a cada una de las integrales y obtenemos

$$|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha H_{-(n-\alpha)}(t) + C_\alpha \sum_{j=0}^n t^{n-j} H_{-(n+j-\alpha)}(t).$$

Por el primer apartado, deducimos que

$$|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha t^{\alpha-n} + C_\alpha \sum_{j=0}^n t^{\alpha-2j}.$$

Como H_α es una función continua en 0, es claro que $|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha(1 + t^\alpha)$ con $t \geq 0$. □

1.3. De nuevo, funciones cilíndricas parabólicas.

De igual forma que se ha trabajado con las funciones de Hermite, las funciones parabólicas cilíndricas admiten un tratamiento análogo. En el siguiente teorema presentamos los resultados obtenidos.

Teorema 1.6. *Dada $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene*

- $W^\alpha(e^{-\frac{t^2}{2}})(t) = e^{-\frac{t^2}{4}} D_\alpha(t)$ con $t \in \mathbb{R}$,
- $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}t)$ con $t \in \mathbb{R}$,
- $H_\alpha(z) = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{z^2}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}z)$ con $z \in \mathbb{C}$,

- $|D_\alpha(t)| \leq e^{-\frac{t^2}{4}} t^\alpha$ con $\alpha < 0$ y $t > 0$,
- $|D_\alpha(t)| \leq M_\alpha e^{-\frac{t^2}{4}} (1 + t^\alpha)$ con $\alpha > 0$ y $t \geq 0$.

2. FUNCIONES COSENO α -VECES INTEGRADAS Y SEMIGRUPOS HOLOMORFOS

En esta sección queremos probar directamente que los generadores de funciones coseno α -veces integradas con $\alpha > 0$ generan semigrupos holomorfos de ángulo $\frac{\pi}{2}$.

Una función coseno $(C(t))_{t \geq 0}$ está formada por operadores lineales y acotados, fuertemente continuos sobre un espacio de Banach X que satisfacen la ecuación funcional

$$2C(s)C(t) = C(s+t) + C(s-t)$$

para $s, t > 0$ y $C(0) = I$, ver [Go], pág. 120. Se define el *generador infinitesimal* (posiblemente un operador no acotado) de $(C(t))_{t \geq 0}$ como la derivada de segundo orden de esta función en el cero para aquellos $x \in X$ que exista, esto es, $A(x) := C''(0)x$ para $x \in D(A)$.

Un C_0 -semigrupo de operadores $(T(t))_{t \geq 0}$ está formado por operadores lineales y acotados, fuertemente continuos sobre un espacio de Banach X que satisfacen la ecuación funcional

$$T(s+t) = T(t)T(s)$$

para $s, t > 0$ y $T(0) = I$, ver [Go]. También se define el *generador infinitesimal* (posiblemente un operador no acotado) de $(T(t))_{t \geq 0}$ como la derivada, en este caso, de primer orden de esta familia en el cero para aquellos $x \in X$ que exista, esto es, $A(x) := T'(0)x$ para $x \in D(A)$.

Impropriamente hablado, los C_0 -semigrupos son las «funciones exponenciales» y las funciones coseno son los «cosenos trigonométricos» de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach X . Y de igual forma que en variable real, se cumple que si A genera una función coseno entonces la expresión conocida como fórmula abstracta de Weierstrass o de Poisson

$$T(t)x := \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s)x ds$$

con $x \in X$ y $t > 0$ define un C_0 -semigrupo de operadores cuyo generador infinitesimal es A .

Esta línea de investigación ha sido tratada en varios artículos y se ha considerado su generalización, primero para funciones coseno 1-vez integradas, ver [AK], Theorem 5.2, y después para funciones coseno n -veces integradas, ver [Ke], Proposition 2.5.

Definición 2.1. Dada $\alpha > 0$, una familia de operadores fuertemente continuos $C_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$ se dice que es una función coseno α -veces integrada generada por A si existe $\omega, M > 0$ tal que $\|C_\alpha(t)\| \leq M e^{\omega t}$, para $\lambda > \omega$, $\lambda^2 \in \rho(A)$ y

$$R(\lambda^2, A) = \lambda^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} C_\alpha(t) dt.$$

Es inmediato probar que si $(C_\alpha(t))_{t>0}$ es una función coseno α -veces integrada generada por A , entonces

$$(7) \quad C_\beta(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{\beta - \alpha - 1} C_\alpha(s) ds,$$

con $\beta > \alpha$ y $t > 0$, define una función coseno β -veces integrada generada también por A , para más detalles ver [Ya].

Denotaremos por $\Sigma(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |\arg(z)| < \alpha\}$.

Definición 2.2. *Un operador cerrado y densamente definido A es el generador de un semigrupo holomorfo de ángulo α si existe $T : \Sigma(\alpha) \rightarrow \mathcal{B}(X)$ holomorfa tal que $T(z + z') = T(z)T(z')$ con $z, z' \in \Sigma(\alpha)$.*

Teorema 2.3 (Proposition 2.5 y Theorem 2.6 de [Ke]). *Sea A un operador lineal densamente definido y generador de una función coseno n -veces integrada $(C_n(t))_{t>0}$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces A genera un semigrupo holomorfo de ángulo $\pi/2$ dado por*

$$T(t)x := \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} t^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} H_n\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{s^2}{4t}} C_n(s)x ds,$$

con $t > 0$, y la integral existe en sentido de Bochner con $x \in X$. Además si $\|C_n(t)\| \leq Mt^n$, entonces

$$\|T(z)\| \leq C \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Este resultado obtenido por V. Keyantuo es parcial ya que existen funciones coseno α -veces integradas con $\alpha > 0$ (ver ejemplos en el tercer párrafo) y no son consideradas directamente. Mediante las funciones de Hermite H_α podemos extender este resultado a tales valores encontrando la subyacente naturaleza de la fórmula abstracta de Weierstrass.

Teorema 2.4. *Sea A un operador lineal densamente definido y generador de una función coseno α -veces integrada $(C_\alpha(t))_{t>0}$. Entonces A genera un semigrupo holomorfo de ángulo $\pi/2$ dado por*

$$T(z)x := \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi} z^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} H_\alpha\left(\frac{s}{2\sqrt{z}}\right) e^{-\frac{s^2}{4z}} C_\alpha(s)x ds$$

con $z \in \Sigma(\pi/2)$, la integral existe en sentido de Bochner y $x \in X$. Además si $\|C_\alpha(t)\| \leq Mt^\alpha$, entonces

$$\|T(z)\| \leq C \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Tomemos $z \in \Sigma(\pi/2)$; sabemos que $\|C_\alpha(t)\| \leq Ce^{\omega t}$ con $C, \omega > 0$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(z)x\| &\leq \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi} |z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left| H_\alpha\left(\frac{s}{2\sqrt{z}}\right) e^{-\frac{s^2}{4z}} \right| \|C_\alpha(s)x\| ds \\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{s^\alpha}{2^\alpha |z|^{\frac{\alpha}{2}}}\right) e^{-\frac{s^2 \Re z}{4|z|^2}} e^{\omega s} ds \end{aligned}$$

y $T(z)$ define un operador acotado en $\mathcal{B}(X)$ con $z \in \Sigma(\pi/2)$. Claramente $T : \Sigma(\pi/2) \rightarrow \mathcal{B}(X)$ es holomorfa.

Tomemos $n > \alpha$ con $n \in \mathbb{N}$, es inmediato que A genera una función coseno n -veces integrada $(C_n(t))_{t>0}$ definido por la igualdad (7). Por el Teorema 2.3, A genera un semigrupo holomorfo dado por

$$\tilde{T}(t)x := \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} t^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} H_n\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{s^2}{4t}} C_n(s)x ds$$

con $t > 0$. Como se cumple que

$$\frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi} t^{\frac{\alpha+1}{2}}} W^{n-\alpha} \left(H_\alpha \left(\frac{s}{2\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) (s) = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} t^{\frac{n+1}{2}}} H_n \left(\frac{s}{2\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{s^2}{4t}},$$

es inmediato que $\tilde{T}(t) = T(t)$ y por holomorfía $\tilde{T}(z) = T(z)$ con $z \in \Sigma(\pi/2)$. Así, $(T(z))_{\Re z > 0}$ es un semigrupo holomorfo.

Si $\|C_\alpha(t)\| \leq Mt^\alpha$ entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(z)x\| &\leq \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi} |z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left| H_\alpha \left(\frac{s}{2\sqrt{z}} \right) \right| e^{-\frac{s^2 \Re z}{4|z|^2}} s^\alpha ds \\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{s^\alpha}{2^\alpha z^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-\frac{s^2 \Re z}{4|z|^2}} s^\alpha ds \\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2 \Re z}{4|z|^2}} s^\alpha ds + \frac{C}{|z|^{\alpha+\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2 \Re z}{4|z|^2}} s^{2\alpha} ds \\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \left(\frac{\Re z}{4|z|^2} \right)^{-\frac{(\alpha+1)}{2}} + \frac{C}{|z|^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\Re z}{4|z|^2} \right)^{-\frac{(2\alpha+1)}{2}} \leq C \left(\frac{|z|}{\Re z} \right)^{\alpha+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Notar que en este caso $(T(z))_{\Re z > 0}$ es un C_0 -semigrupo holomorfo, ver Corollary 2.7 de [Ke]. \square

Notas. La demostración del anterior teorema puede hacerse directamente sin necesidad de utilizar los resultados de V. Keyantuo. Es más, a través de este camino más largo se aprecia el papel que desempeñan las funciones de Hermite como puente entre los funciones coseno α -veces integradas y los semigrupos holomorfos. Un ejemplo de este hecho se aprecia al calcular directamente la transformada de Laplace del semigrupo holomorfo. Así, tomando $x \in D(A^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > \omega^2$, se tiene que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt < +\infty;$$

y por el Teorema de Fubini, con $\lambda > \omega^2$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt &= \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} H_\alpha \left(\frac{s}{2\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{s^2}{4t}} C_\alpha(s)x ds dt \\ &= \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} C_\alpha(s)x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} H_\alpha \left(\frac{s}{2\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{s^2}{4t}} dt ds. \end{aligned}$$

Aplicando que $H_\alpha(z) = e^{\frac{z^2}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}z)$, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} H_\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{2t}}\right) e^{\frac{-s^2}{4t}} dt = 2^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} D_\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{2t}}\right) e^{\frac{-s^2}{8t}} dt.$$

Por la ecuación (5), se sigue que

$$2^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} D_\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{2t}}\right) e^{\frac{-s^2}{8t}} dt = 2^\alpha \sqrt{\pi} \lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-s\sqrt{\lambda}}$$

y por tanto

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt = (\sqrt{\lambda})^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} C_\alpha(s)x e^{-s\sqrt{\lambda}} ds = R(\lambda, A)x$$

para todo $x \in D(A^n)$.

En el caso $0 < \alpha \leq 1$, la suposición de que A sea densamente definido no es necesaria debido al hecho de que $H_1(s) = 2s$ y se puede aplicar Fubini directamente (ver la demostración de Theorem 5.2 en [AK]).

Otra conexión entre polinomios de Hermite y semigrupos holomorfos puede ser encontrado en [TO].

3. UN EJEMPLO

En este último párrafo consideraremos los espacios $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$ y el operador laplaciano $A = \Delta_p = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ con dominio distribucional máximo.

A priori, sabemos que Δ_1 genera en $L^1(\mathbb{R}^n)$ un C_0 -semigrupo holomorfo $(g^z)_{\Re z > 0}$ llamado *gaussiano* o de *Weierstrass*:

$$g^z(s) = \frac{1}{(4\pi z)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|s|^2}{4z}}$$

con $s \in \mathbb{R}^n$ y $\Re z > 0$. Además $\|g^z\|_1 = \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\frac{n}{2}}$, ver [Si], pág. 25. Este semigrupo holomorfo actúa en $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ por convolución. Y así, es conocido (ver por ejemplo [dLP])

$$\|g^z\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{n|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}$$

y $\|g^z\|_{\mathcal{B}(C_0(\mathbb{R}^n))} \leq \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Por otro lado es conocido en la literatura matemática que Δ_p genera en algunos casos funciones cosenos acotadas o funciones coseno α -veces integradas.

Buscamos en este párrafo señalar primero las estimaciones conocidas para las funciones coseno α -veces integradas generadas por Δ_p en los espacios X ya mencionados. Aplicamos el Teorema 2.4 probado en el párrafo anterior y calculamos la norma del semigrupo holomorfo generado por Δ_p en X y lo comparamos con el valor conocido a priori.

3.1. $X = L^p(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$.

Δ_p genera una función coseno uniformemente acotada $(C(t))_{t>0}$ definida mediante la igualdad

$$C(t)f(x) = \frac{1}{2}(f(x+t) - f(x-t))$$

con $x \in \mathbb{R}$ y $f \in X$. Por el Teorema 2.3, su generador infinitesimal $\Delta_p = \frac{d^2}{dx^2}$ genera un semigrupo holomorfo que verifica la estimación

$$\|g^z\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notar en este caso que

$$\frac{1}{2} \geq \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$$

y se da la igualdad en el caso $p = 1$ y en $C_0(\mathbb{R})$.

3.2. $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$.

Por la Proposition 3.2 de [EK], Δ_p genera una función coseno α -veces integrada para $\alpha > (n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$. Por tanto, el Teorema 2.4 implica que Δ_p genera un semigrupo holomorfo para $\alpha + \frac{1}{2}$ con $\alpha > (n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$.

Es inmediato probar que

$$(n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| + \frac{1}{2} \geq n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$$

y se da la igualdad si y solo si $p = 1$. Por tanto la estimación obtenida a través del Teorema 2.4 es siempre peor que la conocida a priori.

3.3. $X = C_0(\mathbb{R}^n)$.

De igual manera que la Proposition 3.2 de [EK], se prueba que Δ_0 genera una función coseno α -veces integrada para $\alpha > \frac{(n-1)}{2}$. El Teorema 2.4 implica que Δ_0 genera un semigrupo holomorfo para $\beta > \frac{n}{2}$ y por tanto la obtenida es peor que la conocida a priori.

Nota. El hecho de no obtener mediante el Teorema 2.4 la cota predicha intuimos que es debido a las acotaciones conocidas para las funciones coseno α -veces integradas (que son obtenidas como valores fronteras de semigrupos holomorfos).

REFERENCIAS

- [AS] M. Abramowitz y I. A. Segun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Nueva York, 1968.
- [AK] W. Arendt y H. Kellermann, Integrated solutions of Volterra integrodifferential equations and applications, en *Integro-differential equations* (Proc. Conf. Trento, 1987), *Pitman Res. Notes in Math. Series* **190**, Longman Sci. Tech., Harlow (1987), 21–51.
- [Ca] L. M. B. C. Campos, On a concept of derivative of complex order with applications to special functions, *IMA J. Appl. Math.* **33** (1984),
- [Da] B. Davies, *Integral transforms and their applications*, 2.^a edición, Springer-Verlag, Berlín, 1985.
- [dLP] R. deLaubenfels y S. Piskarev, The growth rate of cosine families, *Journal Math. Anal. Appl.* **196** (1995), 442–451.

- [EK] O. El-Mennaoui y V. Keyantuo, Trace theorems for holomorphic semigroups and the second order Cauchy problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 1445–1458.
- [GaR] M. C. Gaer y L. A. Rubel, The fractional derivative and entire functions, en *Fractional calculus and its applications* (Proc. Internat. Conf., Univ. New Haven, West Haven, Conn., 1974), *Lecture Notes in Math.* **457**, Springer-Verlag, Berlín (1975), 171–206.
- [Go] J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford Mathematical Monographs, Nueva York, 1985.
- [GrR] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, Nueva York, 1980.
- [Ke] V. Keyantuo, Integrated semigroups and related partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **212** (1997), 135–153.
- [KV] V. Keyantuo y P. Vieten, On analytic semigroups and cosine functions, *Studia Math.* **129** (1998), 137–156.
- [LOT] J. L. Lavoie, T. J. Osler y R. Tremblay, Fractional derivatives and special functions, *SIAM Review* **18** (1976), 240–268.
- [LTO] J. L. Lavoie, R. Tremblay y T. J. Osler, Fundamental properties of fractional derivatives via Pochhammer integrals, en *Fractional calculus and its applications* (Proc. Internat. Conf., Univ. New Haven, West Haven, Conn., 1974), *Lecture Notes in Math.* **457**, Springer-Verlag, Berlín (1975), 323–356.
- [MOS] W. Magnus, F. Oberhettinger y R. P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer-Verlag, Berlín, 1966.
- [Mi] P. J. Miana, α -times integrated semigroups and fractional derivation, *Forum Math.*, en prensa.
- [MR] K. S. Miller y B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, Nueva York, 1993.
- [SKM] S. G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [Si] A. M. Sinclair, *Continuous semigroups in Banach algebras*, Cambridge Univeristy Press, *Lecture Note Series* **63**, Cambridge, 1982.
- [Sr] H. M. Srivastava, The Weyl fractional integral of a general class of polynomials, *Boll. Un. Mat. Ital. B (6)* **2** (1983), 219–228.
- [TO] T. Takenaka y N. Okazawa, Wellposedness of abstract Cauchy problems for second order differential equations, *Israel J. Math.* **69** (1990), 257–288.
- [Vi] I. M. Vinogradov, *Enciclopedia de las matemáticas*, Editorial MIR, Rubiños-1860, Moscú-Madrid, 1993/94.
- [WW] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1962.
- [Ya] G. Yang, α -times integrated cosine function, en *Recent advances in differential equations* (Kunming, 1997), *Pitman Res. Notes in Math. Series* **386**, Addison Wesley Longman, Harlow (1998), 199–212.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS,
 CIUDAD UNIVERSITARIA S/N, 50009 ZARAGOZA, SPAIN
 Correo electrónico: pjmiana@posta.unizar.es

EL MÉTODO DE HALLEY: POSIBLEMENTE, EL MÉTODO MÁS REDESCUBIERTO DEL MUNDO

JOSÉ A. EZQUERRO, JOSÉ M. GUTIÉRREZ,
MIGUEL A. HERNÁNDEZ Y M. AMPARO SALANOVA

A nuestro amigo y compañero Chicho

ABSTRACT. Halley's method is a third order iterative method to solve nonlinear equations. Many authors have deduced it independently. Here we try to justify, by showing different constructions, why it is said that Halley's method is the most "rediscovered" method in the mathematical literature.

Si tuviéramos que hacer una clasificación con los más famosos métodos iterativos para resolver ecuaciones, no hay duda alguna de que el método de Newton ocuparía el primer lugar. Según la opinión de varios autores y, teniendo en cuenta el número de publicaciones relacionadas con él, el método de Halley ocuparía el segundo puesto en esta ficticia clasificación. Así, por ejemplo, Traub, en su clásica monografía [19, pág. 91], dice: «*El método de Halley puede compartir con el método de la secante la distinción de ser el método más frecuentemente redescubierto en la literatura*». Confirmando este hecho, Scavo y Thoo [17] presentan un excelente artículo en el que se cuenta la historia del método, respaldada por numerosas referencias bibliográficas.

Es costumbre extendida entre los investigadores el bautizar sus descubrimientos con su propio nombre o con el de un personaje relevante en la materia. La resolución numérica de ecuaciones no lineales no escapa a esta costumbre. En este caso, dos de los métodos más conocidos, los métodos de Newton y Halley, reciben sus nombres de dos eminentes científicos británicos de finales del siglo XVII y comienzos del XVIII: Sir Isaac Newton y Edmund Halley. Pero, ¿hasta qué punto conocían estos autores los métodos cuya «paternidad» se les atribuye?

Por lo que respecta al método de Newton, parece ser que la idea que pudo tener Sir Isaac dista bastante de lo que conocemos hoy en día. Así, en una carta a sus colegas Barrow y Collins en 1669, Newton mostraba un ejemplo para resolver numéricamente una ecuación. Newton ilustraba su técnica con el ejemplo $x^3 - 2x - 5 = 0$ y argumentaba de la siguiente manera: Por tanteo, se ve que la solución está cerca de 2. Haciendo $x = 2 + \varepsilon$ y sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$(1) \quad \varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 10\varepsilon - 1 = 0.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 65-02.

Key words and phrases. Nonlinear equations, Halley's method, third order methods.

Este trabajo ha sido subvencionado por una ayuda de la DGES (ref. PB98-0198) y otra de la Universidad de La Rioja (ref. API-00/B16).

Ignorando los términos $\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2$ con el pretexto de que ε es pequeño, se llega a que $10\varepsilon - 1 = 0$ ó $\varepsilon = 0,1$. Entonces $x = 2,1$ es una aproximación de la solución mejor que la inicial.

Haciendo ahora $\varepsilon = 0,1 + \nu$ y sustituyendo en (1) se sigue que

$$\nu^3 + 6,3\nu^2 + 11,23\nu + 0,061 = 0.$$

Ignorando de nuevo los términos en ν de grado mayor o igual que dos, se llega a que $\nu = -0,0054$ y, por tanto, $x = 2,0946$ es una aproximación que mejora las anteriores. Newton indicaba que el proceso se puede repetir las veces que sean necesarias.

Como vemos, la idea de Newton consiste en añadir un término corrector a una aproximación inicial dada. Para obtener esta aproximación, lo que hace es truncar el binomio de Newton en el segundo término en expresiones del tipo

$$(a + \varepsilon)^n \simeq a^n + na^{n-1}\varepsilon.$$

De esta manera, para obtener el valor aproximado de ε simplemente hay que resolver una ecuación lineal.

Escribiendo el problema con la notación actual y llamando $p(x) = x^3 - 2x - 5$, tenemos que la nueva aproximación es

$$2 - \frac{p(2)}{p'(2)} = 2 + \frac{1}{10} = 2,1,$$

que se corresponde con la conocida formulación del método de Newton

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}.$$

Ahora bien, no se tiene constancia de que Newton usara el cálculo diferencial ni de que expresara el proceso como un método iterativo en el sentido de que una aproximación pueda ser considerada como punto de partida de la siguiente.

La idea de iteración se atribuye a Joseph Raphson, quien además simplifica el aspecto operacional de la técnica de Newton. En 1690 publica un tratado en el que se dan fórmulas explícitas para el término corrector para algunos casos particulares. En concreto, calcula los términos correctores para las ecuaciones $x^3 - r = 0$ y $x^3 - px - q = 0$ que son, respectivamente,

$$\frac{r - x_0^3}{3x_0^2} \quad \text{y} \quad \frac{q + px_0 - x_0^3}{3x_0^2 - p},$$

siendo x_0 la aproximación inicial. La contribución de Raphson ha sido tenida en cuenta históricamente, no en vano muchos autores denominan el proceso como método de Newton-Raphson. Sin embargo, en los trabajos de Raphson no se aprecia la conexión existente entre el término corrector, la función que define la ecuación y su derivada.

La incorporación del cálculo diferencial se debe a Thomas Simpson (1740) quien estableció el método tal y como lo conocemos actualmente, salvo aspectos notacionales (Simpson explicaba de forma retórica cómo obtener las aproximaciones sucesivas). Además, Simpson extendió el proceso a funciones cualesquiera, no solamente polinomios.

Posteriormente, Lagrange (1798) expresa el método con la notación actual (2) y Fourier (1831) lo bautiza como «*la méthode newtonienne*». Quizá, Fourier es el causante de la falta de reconocimiento para el trabajo de Simpson.

Con estas líneas hemos querido indicar que, en ocasiones, la «paternidad» de un método no se debe exclusivamente al científico que le da el nombre, sino que es contribución de varios investigadores. Para profundizar más en la historia del método de Newton, recomendamos el trabajo de Ypma [20].

Algo parecido ocurre con el método de Halley. Siguiendo a Bailey [1], podemos ver que Halley quedó impresionado por los trabajos del matemático francés Thomas Fautet de Lagny, quien en 1691 dio fórmulas (rationales e irracionales) para aproximar la raíz cúbica de un número. Halley, en 1708 escribe en la revista londinense *Miscellanea Curiosa* lo siguiente: «*Habiendo comprobado la eficiencia de estas fórmulas (las de de Lagny), voy a intentar encontrar la demostración*». Y he aquí la demostración de Halley para la fórmula racional. Se trata de aproximar la raíz cúbica de un número natural escrito en la forma $a^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Para ello, Halley busca un término corrector ε de forma que $(a + \varepsilon)^3 = a^3 + b$. De aquí se deduce que $b = 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3$. Despreciando el término ε^3 , se llega a que $b \simeq 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2$ y se obtienen las siguientes aproximaciones para ε :

$$(3) \quad \frac{b}{3a^2} \simeq \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{a} \simeq \varepsilon,$$

$$(4) \quad \frac{b}{3a^2 + 3a\varepsilon} \simeq \varepsilon.$$

Sustituyendo (3) en (4) se llega a

$$\varepsilon \simeq \frac{b}{3a^2 + 3a\frac{b}{3a^2}} = \frac{ab}{3a^3 + b}.$$

Esta es la fórmula racional dada por de Lagny:

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \simeq a + \frac{ab}{3a^3 + b}.$$

Si escribimos con notación actual el problema, llamando $f(x) = x^3 - a^3 - b$ y tomando $x_0 = a$, la expresión anterior se corresponde efectivamente con el primer paso del método de Halley:

$$(5) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

donde

$$(6) \quad L_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

Parece ser que Halley intentó extender sus métodos para obtener aproximaciones incluso para ecuaciones dadas por funciones trascendentes. De hecho, en un trabajo suyo de 1694 aparecen implícitamente aproximaciones del tipo (5) y también aproximaciones dadas por fórmulas irracionales. Lo que no está claro es dónde aparecieron por primera vez estas fórmulas explícitamente. Así, debemos esperar un siglo

y medio hasta que en un trabajo de Schröder (1870) podemos encontrar la iteración de Halley tal y como la conocemos actualmente. No obstante, en dicho trabajo, el método de Halley sólo aparece de pasada y sin ninguna referencia al propio Halley. Posteriormente, el método de Halley irá apareciendo con cierta frecuencia en los trabajos de muchos autores que lo irán «redescubriendo». Para hacernos una idea de este hecho, podemos consultar la historia del método que aparece en el trabajo de Scavo y Thoo [17].

En lo que sigue, vamos a exponer diferentes formas de «descubrir» el método de Halley. Pretendemos exponer estas técnicas por el interés que tienen por sí mismas y porque, además, estos procedimientos nos permitirán, mediante ligeras variantes, construir otros procesos iterativos. No se pretende asignar un descubridor a cada una de estas técnicas. En consecuencia, entendemos que los autores que citamos han trabajado en ellas, pero, eso sí, no tienen porqué ser los primeros ni los únicos en hacerlo.

No es nuestra intención realizar aquí un estudio de las características de los métodos que tratamos (convergencia local o global, orden de convergencia, análisis del error, etc.). Simplemente queremos mostrar distintas maneras de construir procesos iterativos y, en particular, el método de Halley. Del mismo modo, tampoco precisaremos las condiciones que han de cumplirse para que estas construcciones puedan realizarse. Así, supondremos que las funciones que manejaremos son todo lo continuas y derivables que deban ser.

Primera forma: a partir del desarrollo de Taylor. Según se puede leer en el artículo de Bateman [2], el trabajo de Halley para extender su método para aproximar soluciones a ecuaciones trascendentes inspiró a Brook Taylor en la consecución de su afamado teorema. El propio Taylor escribe en una carta a un colega en 1712: «*Estaba pensando en cómo aplicar el método del Dr. Halley a la ecuación de Kepler cuando se me ocurrió la forma de extender su método de extracción de raíces a todos los problemas . . .*»

La idea que presentamos a continuación es, probablemente, la manera más habitual de «redescubrir» el método de Halley. En ella empleamos el desarrollo de Taylor de una función, que como acabamos de ver es un resultado que se publicó con posterioridad a los trabajos de Newton, Raphson o Halley.

Partiendo de una aproximación x_0 de la solución de una ecuación $f(x) = 0$, buscamos una aproximación mejor de la forma $x_0 + \varepsilon$. Lo ideal sería que $f(x_0 + \varepsilon) = 0$. Teniendo en cuenta esto y usando el desarrollo de Taylor, llegamos a

$$(7) \quad 0 = f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\varepsilon^3 + \dots$$

La idea de Newton o Halley de truncar el binomio de Newton se extiende ahora al desarrollo de Taylor. De esta manera, truncando (7) en el segundo sumando se llega al método de Newton. Si añadimos un término más, es decir, si truncamos (7) en el término con potencias en ε^2 , se obtiene

$$(8) \quad 0 \simeq f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon^2,$$

y de aquí,

$$\varepsilon \simeq \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - 2L_f(x)}} \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Para evitar restar dos cantidades similares, se recomienda [19] elegir la raíz cuadrada con signo positivo. Por tanto, la nueva aproximación pasa a ser

$$(9) \quad x_1 = x_0 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L_f(x_0)}} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Este método, conocido como método de Euler o método de Halley irracional ha sido estudiado, entre otros, por Traub [19, pág. 93] y Melman [13]. La expresión correspondiente para el cálculo de raíces cúbicas, es decir, cuando $f(x) = x^3 - a^3 - b$ era conocida por Halley (y por de Lagny):

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b}{3a}}, \quad (x_0 = a).$$

Además parece ser que Halley era más partidario de las expresiones que dependían del cálculo de raíces cuadradas que de las que contenían fracciones con denominadores muy grandes. Con este comentario, Halley anuncia con siglos de antelación uno de los problemas con los que nos podemos encontrar al trabajar numéricamente. Halley creía incluso que la fórmula irracional era más precisa que la racional¹.

Sin embargo, no es este el método que ha heredado su nombre y que, con el transcurso del tiempo, ha adquirido más fama. El método en cuestión evita el cálculo de raíces cuadradas. Para ello, en la aproximación (8) se hace

$$(10) \quad \varepsilon \simeq -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon}.$$

Para no tener que resolver una ecuación de segundo grado y no tener que calcular raíces cuadradas, se sustituye el término corrector ε que aparece en el denominador anterior por la corrección del método de Newton, $\varepsilon = -f(x_0)/f'(x_0)$, para obtener así la corrección de Halley:

$$\varepsilon \simeq -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) - \frac{f(x_0)f''(x_0)}{2f'(x_0)}}.$$

El método resultante es el que se conoce como método de Halley (5):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Se observa el paralelismo que hay entre la forma de deducir el método que acabamos de comentar y el trabajo original de Halley para el cálculo de raíces cúbicas explicado con anterioridad.

Extensiones de esta misma técnica han permitido encontrar gran número de procesos iterativos. Si en lugar de sustituir el término corrector ε que aparece en el

¹Esta afirmación no es cierta en general, como lo demuestra el contraejemplo dado por $f(x) = e^x - 2$, con $x_0 = 1,3$.

denominador de (10) por la corrección del método de Newton se sustituye por otras correcciones, se obtienen otros procesos. Esta técnica, denominada de reemplazamiento, ha sido utilizada por autores como Neta [14] para definir una treintena de nuevos procesos iterativos de tercer orden.

Stewart [18] y Hamilton [9], en lugar de trabajar con la ecuación (7), la transforman en un sistema de dos ecuaciones como sigue:

$$\begin{cases} f'(x_0)\varepsilon + \frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon^2 = -f(x_0) - \frac{f'''(x_0)}{6}\varepsilon^3 + \dots \\ f(x_0)\varepsilon + f'(x_0)\varepsilon^2 = -\frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon^3 + \dots \end{cases}$$

Despreciando los términos en ε^k con $k \geq 3$, denotando u y v a las aproximaciones de ε y ε^2 respectivamente, y resolviendo el sistema resultante por la regla de Cramer, se tiene que

$$\varepsilon \simeq u = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_0) & f''(x_0)/2 \\ 0 & f'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'(x_0) & f''(x_0)/2 \\ f(x_0) & f'(x_0) \end{vmatrix}} = \frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

que es la corrección del método de Halley (5). Extensiones de esta técnica permiten encontrar procesos iterativos de distintos órdenes, a partir de expresiones que dependen de determinantes. Para obtener una información más detallada, se puede consultar el trabajo de Kalantari, Kalantari y Zaare-Nahandi [11].

Segunda forma: construcción geométrica. Es bien conocido que el método de Newton tiene una clara interpretación geométrica, ya que, dada una aproximación inicial x_0 , la siguiente aproximación, x_1 , se obtiene como la intersección de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0 con el eje de abscisas. Así, x_1 es la intersección de las rectas $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ e $y = 0$, es decir,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Por este motivo, al método de Newton se le suele denominar también como método de la tangente.

El método de reemplazamiento introducido en la sección anterior no nos permite dar una interpretación geométrica clara sobre la construcción del método de Halley. No obstante, en 1952 Salehov [16] sugiere que el método de Halley puede obtenerse aproximando una función por medio de hipérbolas. Siguiendo a Scavo y Thoo [17], para aproximar la solución de una ecuación $f(x) = 0$, a partir de un valor inicial x_0 , vamos a buscar una hipérbola de la forma

$$y(x) = \frac{(x - x_0) + c}{a(x - x_0) + b}$$

que cumpla $y(x_0) = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$ e $y''(x_0) = f''(x_0)$. Este tipo de curvas, denominadas osculatrices, coinciden con f en x_0 hasta la segunda derivada. En consecuencia, estas hipérbolas aproximan mejor a una curva que la recta tangente, donde la coincidencia sólo es hasta la primera derivada. Esta mejor aproximación se

ve reflejada en una convergencia más rápida para el método de Halley que para el de Newton. El primero tiene orden tres mientras que el segundo tiene orden dos. De forma breve, se puede decir que el orden de convergencia mide la velocidad con la que una sucesión se aproxima a su límite: a mayor orden, mayor velocidad. Volveremos a tratar el tema del orden en la última sección.

Para que la hipérbola cumpla las condiciones requeridas sus coeficientes a , b y c deben satisfacer:

$$\begin{cases} \frac{c}{b} = f(x_0), \\ \frac{b-ac}{b^2} = f'(x_0), \\ \frac{2a(ac-b)}{b^3} = f''(x_0), \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} a = \frac{-f(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)}, \\ b = \frac{2f'(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)}, \\ c = \frac{2f(x_0)f'(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)}. \end{cases}$$

Una vez encontrada la hipérbola oscultriz, tomamos como nueva aproximación su intersección con el eje de abscisas, es decir el punto tal que $y(x_1) = 0$. Dada la forma de la hipérbola, se tiene que

$$\begin{aligned} x_1 = x_0 - c &= x_0 - \frac{2f(x_0)f'(x_0)}{2f'(x_0)^2 - f(x_0)f''(x_0)} \\ &= x_0 - \frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Debido a esta interpretación geométrica, el método de Halley es llamado a veces el método de las hipérbolas tangentes.

Ideas similares se pueden utilizar para construir otros procesos iterativos, aproximando una función por otro tipo de curvas oscultrices. Por ejemplo, si en lugar de hipérbolas consideramos parábolas de la forma

$$y(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c,$$

se obtiene el método de Euler (9). Si las parábolas son de la forma

$$y(x)^2 + ay(x) + b(x - x_0) + c = 0,$$

el método obtenido es el de Chebyshev, método que presentamos en la siguiente sección.

Tercera forma: a partir de la interpolación racional inversa. Presentamos en esta sección otra técnica para construir procesos iterativos, conocida como interpolación inversa. En breve, podemos resumir el problema diciendo que se trata de resolver una ecuación $f(x) = 0$. Para ello, consideramos la función que a cada x le hace corresponder $y = f(x)$, y denotamos por $x = \phi(y)$ a su función inversa.

El problema de aproximar la solución de $f(x) = 0$ se transforma entonces en el de aproximar $\phi(0)$. Se nos ofrecen ahora distintas posibilidades, en función de las diferentes maneras de aproximar la función ϕ .

La primera de ellas consiste en aproximar $\phi(0)$ usando el desarrollo de Taylor hasta el orden dos. Esta idea se atribuye al matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev, quien presentó el método que lleva su nombre en un concurso estudiantil celebrado entre 1840 y 1841 y en el que consiguió la medalla de plata. Aunque existe una cierta unanimidad entre los científicos en atribuir a Chebyshev la «paternidad» del método, hay quien se lo atribuye a Leonhard Euler, lo cual no sería de extrañar, debido a la prolijidad científica de este insigne matemático y a que Chebyshev conocía bien la obra de Euler. No en vano, Chebyshev contribuyó a preparar una edición con algunas de las obras de Euler a finales de 1840.

Volviendo al problema de la interpolación inversa, supongamos que x_0 es una aproximación inicial de la solución de $f(x) = 0$ y sea $y_0 = f(x_0)$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi(0) &\simeq \phi(y_0) - \phi'(y_0)y_0 + \frac{1}{2}\phi''(y_0)y_0^2 \\ &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2} \frac{f(x_0)^2 f''(x_0)}{f'(x_0)^3} \\ &= x_0 - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_0)\right) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\end{aligned}$$

donde $L_f(x)$ se define en (6). A la iteración resultante

$$(11) \quad x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

se la conoce como método de Chebyshev, método de la interpolación cuadrática inversa o método de las parábolas tangentes.

Desde otro punto de vista, podemos expresar la idea de Chebyshev indicando que se ha aproximado la función inversa por un polinomio de segundo grado

$$\phi(y) \simeq a + b(y - y_0) + c(y - y_0)^2 = p(y),$$

eligiendo los coeficientes de forma que $\phi^{(k)}(y_0) = p^{(k)}(y_0)$ para $k = 0, 1, 2$. Evidentemente, este polinomio es el polinomio de Taylor de segundo orden. Pero se pueden buscar otro tipo de funciones de aproximación, como por ejemplo, aproximantes de Padé, que es lo que hace Traub en [19, Cap. 5].

Si aproximamos $\phi(y)$ por una función racional del tipo

$$\phi(y) \simeq \frac{(y - y_0) + a}{b(y - y_0) + c} = R(y),$$

exigiendo que $\phi^{(k)}(y_0) = R^{(k)}(y_0)$ para $k = 0, 1, 2$, se llega a que

$$R(y) = \frac{(2f'(x_0) + x_0 f''(x_0))(y - y_0) + 2x_0 f'(x_0)^2}{f''(x_0)(y - y_0) + 2f'(x_0)^2}.$$

Eligiendo como nueva aproximación el valor $x_1 = R(0)$ se obtiene

$$x_1 = \frac{-f(x_0)(2f'(x_0) + x_0f''(x_0)) + 2x_0f'(x_0)^2}{-f(x_0)f''(x_0) + 2f'(x_0)^2},$$

expresión que, después de operar adecuadamente, se puede escribir en la conocida forma

$$x_1 = x_0 - \frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

es decir, de nuevo, el método de Halley (5).

Cuarta forma: usando fracciones continuas. El procedimiento que mostramos en esta sección es una variante de la interpolación inversa introducida en la sección precedente. La idea fue presentada por Frame en [5]. Manteniendo la misma notación de la sección anterior, es decir, denotando $x = \phi(y)$ a la función inversa de $y = f(x)$, Frame obtuvo el siguiente desarrollo en serie de potencias para el término corrector ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= r - x_0 = \phi(0) - \phi(y_0) = \sum_{k \geq 1} c_k \nu^k \\ &= \nu - \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)} \nu^2 + \frac{3f''(x_0) - f'''(x_0)f'(x_0)}{6f'(x_0)} \nu^3 + \dots, \end{aligned}$$

donde r denota a la solución de $f(x) = 0$, $\nu = -f(x_0)/f'(x_0)$ y $c_1 = 1$, $c_2 = -f''(x_0)/(2f'(x_0))$, etc.

En la sección anterior hemos aproximado la función inversa por polinomios o aproximantes de Padé. En esta sección vamos a desarrollar en fracciones continuas el desarrollo en serie de potencias del término corrector:

$$(12) \quad \varepsilon = \sum_{k \geq 1} c_k \nu^k = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots \frac{a_j}{b_{j-1} + \frac{a_j}{b_j + \rho_{j+1}}}}}}$$

donde $\rho_j = \frac{a_j}{b_j + \rho_{j+1}}$.

Dependiendo de las diversas fracciones continuas desarrolladas y del lugar en el que las truncamos, obtendremos diversos procesos iterativos. En el desarrollo propuesto por Frame [5] se tiene que $b_0 = 0$, $b_j = 1 \forall j \geq 1$, $a_1 = \nu$ y a_{j+1} es el primer término del desarrollo en serie de potencias de ν del cociente

$$\rho_{j+1} = \frac{a_j - \rho_j}{\rho_j},$$

donde $\rho_1 = \varepsilon = \sum_{k \geq 1} c_k \nu^k$.

Así, si truncamos la fracción continua en el primer término, tenemos que

$$\varepsilon \simeq a_1 = \nu = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

y la corrección que se obtiene es la del método de Newton.

Para truncar en el segundo término se necesita calcular a_2 que, como hemos dicho, es el primer término del desarrollo en serie de potencias de ρ_2 . Como

$$\rho_2 = \frac{a_1 - \rho_1}{\rho_1} = -c_2\nu + (c_2^2 - c_3)\nu^3 + \dots,$$

se tiene que $a_2 = -c_2\nu = -L_f(x_0)/2$. Por tanto,

$$\varepsilon \simeq \frac{a_1}{1 + a_2} = -\frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

que es la corrección del método de Halley (5).

Si truncamos la fracción continua en términos superiores, se obtienen métodos de orden superior, aunque el propio Frame advierte que, siguiendo la técnica indicada unas líneas más arriba, los cálculos se complican excesivamente a partir del cuarto término. No obstante, en el mismo artículo [5] se proporciona otro procedimiento para el cálculo de los numeradores a_j y los restos ρ_j mediante el uso de determinantes.

Si en lugar del desarrollo en fracciones continuas considerado por Frame, se tienen en cuenta otros desarrollos, se obtienen otros procesos iterativos. Por ejemplo, siguiendo a Kincaid y Cheney [12, pág. 417], se puede convertir una serie en fracción continua. De hecho, la serie $\sum_{k \geq 1} c_k \nu^k$ admite el desarrollo (12) con $b_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_1 = 1/\nu$,

$$a_j = -\left(\frac{1}{c_{j-1}\nu^{j-1}}\right)^2, \quad b_j = \frac{1}{c_{j-1}\nu^{j-1}} + \frac{1}{c_j\nu^j}, \quad j \geq 2.$$

Si truncamos la fracción continua en el segundo término, el término corrector que se obtiene es el correspondiente al método de Chebyshev (11).

Quinta forma: como aceleración del método de Newton. El problema que intentan resolver los procesos iterativos es el de aproximar la solución de una ecuación $f(x) = 0$. En ocasiones, puede resultar más sencillo resolver una ecuación modificada $f(x)g(x) = 0$, donde $g(x)$ es una función convenientemente elegida. Entre otras cosas, deberá cumplir que no se anule en un entorno de la raíz buscada: si r es tal que $f(r) = 0$, entonces $g(x) \neq 0$ en un entorno de r .

Si para aproximar la solución de una ecuación empleamos el método de Newton, la situación ideal sería que la función que manejamos sea una recta, ya que, evidentemente, en este caso la solución exacta se alcanzaría en la primera iteración. Pero bueno, en la práctica no tiene mucho sentido usar el método de Newton para resolver una ecuación lineal. De hecho, los métodos iterativos se usan para resolver ecuaciones no lineales. Pero a partir de esta idea y como sugiere Brown en [3], podemos usar la función $g(x)$ para «linealizar» lo más posible la ecuación $f(x)g(x) = 0$. ¿En qué sentido?; por ejemplo, exigiendo que $(f(x)g(x))''$ se anule en $x = r$. Este «aumento de la linealidad» de la ecuación en un entorno de r debería repercutir en la velocidad de convergencia del método de Newton.

Recogiendo esta idea, Gerlach [7] prueba que cuando se aplica el método de Newton a una ecuación $\Psi(x) = 0$ donde la solución r cumple que $\Psi'(r) \neq 0$, $\Psi''(r) = 0$ y $\Psi'''(r) \neq 0$, entonces se alcanza la convergencia de orden tres, cuando en general,

el orden de convergencia del método de Newton es dos. Al tener mayor orden, la sucesión obtenida para las funciones Ψ converge más rápidamente. En la última sección trataremos con un poco más de detalle el tema del orden de convergencia.

En resumen, si $\Psi(x) = f(x)g(x)$, buscamos g de manera que $\Psi''(r) = 0$, es decir,

$$f''(r)g(r) + 2f'(r)g'(r) = 0.$$

Después de resolver esta ecuación diferencial se llega a que la solución es (salvo constantes multiplicativas)

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{f'(x)}}.$$

En consecuencia la idea de Brown y Gerlach consiste en aplicar el método de Newton a la función $\Psi(x) = f(x)/\sqrt{f'(x)}$ en lugar de a $f(x)$. ¿Cuál es la expresión del método resultante?

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

expresión que, como no podía ser menos, coincide con la del método de Halley (5).

Sexta forma: a partir de iteraciones de Laguerre. El método de Laguerre es un conocido método para encontrar las raíces de un polinomio. De forma resumida, expondremos aquí en qué consiste para mostrar después una generalización que nos llevará, entre otros, al método de Halley. Para un estudio más detallado del método de Laguerre, recomendamos al lector el libro de Ostrowski [15, Apéndice O].

Para ver cómo se construye la iteración de Laguerre, vamos a considerar un polinomio $p(x)$ de grado n con raíces reales $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$:

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

La idea del método de Laguerre parte de la derivación logarítmica de $p(x)$. Así, denotando $a_i = 1/(x - x_i)$, $A = p'(x)/p(x)$ y $B = -dA/dx$ se llega a

$$A = (\log p(x))' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i)} = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$B = -\frac{d(p'(x)/p(x))}{dx} = \frac{p'(x)^2 - p(x)p''(x)}{p(x)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i)^2} = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite deducir la siguiente desigualdad:

$$(A - a_1)^2 = (a_2 + \dots + a_n)^2 \leq (n - 1)(a_2^2 + \dots + a_n^2) = (n - 1)(B - a_1^2),$$

o equivalentemente

$$na_1^2 - 2Aa_1 - (n - 1)B + A^2 \leq 0.$$

Entonces, a_1 se encuentra situado entre las raíces de la ecuación

$$(13) \quad nu^2 - 2Au - (n - 1)B + A^2 = 0,$$

que son

$$u_1 = \frac{A - \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}}{n}, \quad u_2 = \frac{A + \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}}{n}.$$

Es más, se tiene que a_2, \dots, a_n están entre u_1 y u_2 , es decir,

$$(14) \quad u_1 \leq a_j = \frac{1}{x - x_j} \leq u_2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Este hecho permite encontrar mejores aproximaciones de las raíces de un polinomio a partir de una aproximación dada. En efecto, si la aproximación inicial x está entre dos raíces consecutivas, digamos

$$x_j < x < x_{j+1},$$

entonces

$$x_j < x - \frac{1}{u_2} < x < x - \frac{1}{u_1} < x_{j+1}.$$

Para deducir las desigualdades centrales debemos tener en cuenta que $u_1 < 0 < u_2$, ya que (14) es cierta para $j = 1, \dots, n$ y las cantidades $x - x_j$ son tanto positivas como negativas. Para las desigualdades laterales debemos aplicar la primera desigualdad de (14) a x_{j+1} y la segunda a x_j .

De esta manera se pueden construir sucesiones que aproximen las raíces más próximas de una aproximación inicial dada. Este es el que se conoce como método de Laguerre. Para una mayor información (comportamiento monótono de las sucesiones, qué ocurre cuando $x < x_1$ o cuando $x > x_n$, etc.) se puede consultar la obra de Ostrowski [15].

Cuatro años más tarde de la publicación del trabajo de Ostrowski, Hansen y Patrick extienden la construcción del método de Laguerre a funciones cualesquiera. Así, sea $f(x)$ una función de variable real o compleja con una raíz simple que denotamos r . La idea de Hansen y Patrick consiste en sustituir el grado del polinomio por un parámetro λ en la igualdad (13). De esta forma, manteniendo la notación

$$A = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad B = -A' = \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f(x)^2},$$

se buscan las soluciones de

$$\lambda u^2 - 2Au - (\lambda - 1)B + A^2 = 0,$$

donde u es una aproximación de la cantidad $1/(x - r)$. Así,

$$(15) \quad r \simeq x - \frac{1}{u} = x - \frac{\lambda}{1 \pm \sqrt{(1-\lambda)(1-\lambda + \lambda L_f(x))}} \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

La expresión que aparece en el lado derecho de la igualdad, que denotamos por x_+ , nos proporciona una aproximación de la raíz r supuestamente mejor que x .

La iteración que aparece en el trabajo de Hansen y Patrick es

$$(16) \quad x_+ = x - \frac{(\alpha + 1)}{\alpha \pm \sqrt{(1 - (\alpha + 1)L_f(x))}} \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Notemos que coincide con la que nosotros hemos dado sin más que hacer el cambio de parámetro $\alpha = 1/(\lambda-1)$. Para distintas elecciones del parámetro λ , la familia (15) contiene algunos métodos de renombre:

1. Por supuesto, cuando $f(x)$ es un polinomio y λ es su grado, el método coincide con el de Laguerre clásico.
2. Cuando $\lambda = 1$, tenemos el método de Newton.
3. Haciendo $\lambda \rightarrow \infty$, se obtiene el método

$$(17) \quad x_+ = x \pm \frac{1}{\sqrt{1 - L_f(x)}} \frac{f(x)}{f'(x)},$$

estudiado por Ostrowski en [15, pág. 111].

4. Si $\lambda = 2$, tenemos el método de Euler o método de Halley irracional (9):

$$x_+ = x - \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - 2L_f(x)}} \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

¿Y qué pasa con el método de Halley? ¿No está incluido en esta familia? No nos alarmemos; notemos que si racionalizamos la expresión (15) nos queda

$$x_+ = x - \frac{1 \pm \sqrt{(1-\lambda)(1-\lambda + \lambda L_f(x))}}{2 - \lambda - (1-\lambda)L_f(x)} \frac{f(x)}{f'(x)},$$

que para $\lambda = 0$, y eligiendo el signo $+$ en el numerador, el método correspondiente de esta familia es el «omnipresente» método de Halley (5):

$$x_+ = x - \frac{2}{2 - L_f(x)} \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Séptima forma: a partir de la definición de orden de convergencia. En la sección anterior hemos construido una familia de procesos que incluye varios de los procesos más conocidos. En esta sección intentamos encontrar las características que debe cumplir una función de iteración para que englobe a todos los procesos iterativos con un orden de convergencia determinado.

El orden de convergencia de una sucesión mide, en cierta manera, la velocidad con la que dicha sucesión se acerca a su límite (suponiendo que existe y es finito). En muchas ocasiones una sucesión viene definida a través de una iteración funcional. Eso ocurre por ejemplo con los métodos de Newton, Halley y muchos otros para resolver una ecuación $f(x) = 0$. En todos estos casos podemos escribir la sucesión resultante en la forma

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

donde F es una función que puede depender de x_n , de $f(x_n)$ y de las derivadas de f evaluadas en x_n .

Si r es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se dice que un proceso iterativo es convergente a r con orden $p > 1$ si

$$|F(x) - r| = \mathcal{O}(|x - r|^p).$$

Es sencillo comprobar que esta condición de orden se satisface si $F(x)$ posee en un entorno de r derivadas hasta el orden p y, además,

$$F(r) = r, \quad F'(r) = F''(r) = \dots = F^{(p-1)}(r) = 0, \quad F^{(p)}(r) \neq 0.$$

Entonces el proceso iterativo dado por la función de iteración F tiene exactamente orden p . Esto quiere decir que en cada iteración el número de cifras significativas con las que se va aproximando la solución r se multiplica aproximadamente por p . Tanto la definición de orden como la caracterización que hemos dado se atribuyen al matemático de finales del siglo XIX E. Schröder. Para profundizar un poco más en este concepto, se puede consultar el artículo de Ehrmann [4].

A partir de la condición suficiente anterior, y a la vista de la forma que tienen algunos de los procesos iterativos más conocidos, Gander [6] se plantea el estudio de los métodos dados por la siguiente función de iteración:

$$(18) \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}G(x).$$

En concreto, el objetivo es caracterizar la función G para que el proceso definido por la función anterior tenga orden tres.

Denotamos $u(x) = f(x)/f'(x)$. Notemos que $u'(x) = 1 - L_f(x)$, con $L_f(x)$ definido en (6).

Como $F(r) = r$, para que (18) defina un proceso iterativo de segundo orden, bastará con que

$$F'(r) = 1 - u'(r)G(r) - u(r)G'(r) = 1 - G(r) = 0,$$

es decir, $G(r) = 1$.

Como caso particular, para la función constante $G(x) = 1$, obtenemos el método de Newton.

Si queremos métodos con convergencia cúbica, necesitamos añadir la condición $F''(r) = 0$, que se traduce en

$$\frac{f''(r)}{f'(r)}G(r) - 2G'(r) = 0.$$

Teniendo en cuenta que $G(r) = 1$, nos queda

$$G'(r) = \frac{f''(r)}{2f'(r)}.$$

Estas condiciones no nos ayudan demasiado a elegir apropiadamente una función G , puesto que dependen de la raíz r . Sin embargo, si consideramos $G(x) = H(L_f(x))$, estas condiciones se traducen en

$$G(r) = H(0) = 1, \\ G'(r) = H'(0)L_f'(r) = H'(0)\frac{f''(r)}{f'(r)} = \frac{f''(r)}{2f'(r)}.$$

Esto nos permite construir fácilmente funciones H que cumplan

$$H(0) = 1, \quad H'(0) = \frac{1}{2}.$$

Algunos ejemplos de estas funciones nos han ido apareciendo a lo largo de este trabajo:

1. El método de Halley (5): $H(t) = (1 - \frac{t}{2})^{-1} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \dots$
2. El método de Chebyshev (11): $H(t) = 1 + \frac{t}{2}$
3. El método de Euler (9): $H(t) = 2(1 + \sqrt{1 - 2t})^{-1} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} + \dots$
4. El método de Ostrowski (17): $H(t) = 2(1 - t)^{-1/2} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + \dots$
5. La familia de métodos de Hansen y Patrick (16):

$$H(t) = (\alpha + 1) \left(\alpha + \sqrt{1 - (\alpha + 1)t} \right)^{-1} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{(\alpha + 3)t^2}{8} + \dots$$

Otra familia de métodos de tercer orden que también se ajusta a la forma (18) es la estudiada en [8]. En este caso,

$$H(t) = 1 + \frac{t}{2(1 - \lambda t)} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{\lambda t^2}{2} + \dots$$

siendo λ un parámetro real. Esta familia incluye, entre otros, un método muy conocido y que no nos había aparecido hasta ahora. Este es el denominado método super-Halley y se corresponde con el valor $\lambda = 1$.

Como conclusión, podemos decir que muchos de los procesos iterativos de tercer orden se ajustan a la forma de la función de iteración (18). Muchos, pero no todos. Se puede probar [4] que todos los procesos iterativos de tercer orden están dados por la función de iteración:

$$G(x) = H(L_f(x)) + f(x)^2 b(x),$$

donde b es una función arbitraria que está acotada para valores próximos de la raíz r .

REFERENCIAS

- [1] D. F. Bailey, A historical survey of solution by functional iteration, *Mathematics Magazine* **62** (1989), 155–166.
- [2] H. Bateman, Halley's method for solving equations, *Amer. Math. Monthly* **45** (1938), 11–17.
- [3] G. H. Brown Jr., On Halley's variation of Newton's method, *Amer. Math. Monthly* **84** (1977), 726–728.
- [4] H. Ehrmann, Konstruktion und Durchführung von Iterationsverfahren höherer Ordnung, *Arch. Rational Mech. Anal.* **4** (1959), 65–88.
- [5] J. S. Frame, The solution of equations by continued fractions, *Amer. Math. Monthly* **60** (1953), 293–305.
- [6] W. Gander, On Halley's iteration method, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 131–134.
- [7] J. Gerlach, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Rev.* **36** (1994), 272–276.
- [8] J. M. Gutiérrez y M. A. Hernández, A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997), 113–130.
- [9] H. J. Hamilton, A type of variation of Newton's method, *Amer. Math. Monthly* **57** (1950), 517–522.
- [10] E. Hansen y M. Patrick, A family of root finding methods, *Numer. Math.* **27** (1977), 257–269.
- [11] B. Kalantari, I. Kalantari y R. Zaare-Nahandi, A basic family of iteration functions for polynomial root finding and its characterizations, *J. Comput. Appl. Math.* **80** (1997), 209–226.
- [12] D. Kincaid y W. Cheney, *Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.
- [13] A. Melman, Geometry and convergence of Euler's and Halley's methods, *SIAM Rev.* **39** (1997), 728–735.

- [14] B. Neta, Several new methods for solving equations, *Intern. J. Computer Math.* **22** (1988), 265–282.
- [15] A. M. Ostrowski, *Solution of equations in euclidean and Banach spaces*, Academic Press, Nueva York, 1973.
- [16] G. S. Salehov, On the convergence of the process of tangent hyperbolas (en ruso), *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **82** (1952), 525–528.
- [17] T. R. Scavo y J. B. Thoo, On the geometry of Halley’s method, *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 417–426.
- [18] J. K. Stewart, Another variation of Newton’s method, *Amer. Math. Monthly* **58** (1951), 331–334.
- [19] J. F. Traub, *Iterative methods for solution of equations*, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1964.
- [20] T. J. Ypma, Historical development of the Newton-Raphson method, *SIAM Rev.* **37** (1995), 531–551.

DPTO. DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO J. L. VIVES,
26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: jezquer@dmc.unirioja.es, jmguti@dmc.unirioja.es,
mahernan@dmc.unirioja.es, masalano@dmc.unirioja.es

INSTITUCIONES: MATEMÁTICAS PARA LA ESPECIFICACIÓN EN COMPUTACIÓN

CÉSAR DOMÍNGUEZ, LAUREANO LAMBÁN, VICO PASCUAL Y JULIO RUBIO

Dedicado a Chicho

ABSTRACT. In this paper we study formally an operation on signatures. This operation assigns to each signature Σ a signature Σ_{imp} in such a way that a Σ_{imp} -model corresponds to a family of Σ -models. This construction has allowed us to analyse the data structures which were used in a symbolic computation system called EAT (a software created by F. Sergeraert to calculate the homology of iterated loop spaces). To this end we introduce the notions of institution and institution morphism and we present the components of the equational algebraic institution. Finally we show that the operation $(\)_{imp}$ induces (can be extended to) an endomorphism of the equational algebraic institution.

1. INTRODUCCIÓN

Hace unos años, los autores del presente trabajo nos empeñamos en el estudio formal de las estructuras de datos que aparecen en un programa denominado EAT (Effective Algebraic Topology). Este es un software diseñado por Sergeraert [14] y dedicado al Cálculo Simbólico en Topología Algebraica. En particular, está especializado para el cálculo de homología de espacios de lazos iterados. Desde el punto de vista de la práctica de la computación, la característica más destacable de este programa es la necesidad de construir y manipular, en tiempo de ejecución, estructuras de datos de naturaleza potencialmente infinita (objetos localmente efectivos según la terminología usada en [13]). Esto constituye una diferencia sustancial respecto de otros sistemas de Cálculo Simbólico en otras áreas de las Matemáticas distintas de la Topología Algebraica o el Álgebra Homológica. El modo de implementación usado en EAT para estas estructuras de datos fue estudiado en [9], obteniendo caracterizaciones de las implementaciones usadas en EAT en términos de objetos finales en adecuadas categorías de implementaciones.

En este trabajo apenas se incide en cuestiones relacionadas con la implementación. Por contra, el estudio que se realiza se centra fundamentalmente en aspectos que pertenecen al ámbito de la especificación. El trabajo se ha dividido en tres secciones. En la sección 2 se introduce la noción de institución. Una institución es un marco en el que realizar especificaciones. Así, la definición de institución abstraer

2000 *Mathematics Subject Classification.* 68Q65.

Key words and phrases. Institution, algebraic specification, symbolic computation.

Parcialmente subvencionado por DGES, proyecto PB98-1621-C02-01, y por Universidad de La Rioja, proyecto API-00/B28.

las componentes básicas necesarias en cualquier marco de especificación. Para ilustrar esta definición se presenta una institución particular: la institución algebraica ecuacional. En la sección 3 se introduce una operación general entre firmas que viene a formalizar el patrón que siguen las estructuras de datos en EAT. A partir de cada firma Σ se construye una firma Σ_{imp} que, desde una perspectiva computacional, puede entenderse como la firma que define a las familias de implementaciones de modelos de Σ . En el trabajo se muestra la existencia de objeto final en adecuadas subcategorías de Σ_{imp} -álgebras. Además, estos objetos finales son los modelos implementados en EAT. Por último, en la sección 4 se extiende esta operación entre firmas a un morfismo de instituciones, en particular a un endomorfismo de la institución algebraica ecuacional.

Este trabajo pretende servir para que el lector obtenga una cierta perspectiva de los temas en los que estamos investigando. Por ello, hemos procurado evitar los resultados y detalles técnicos y, por contra, hemos premeditadamente abundado en la explicación de las definiciones y en la presentación de ejemplos. Serán los lectores conocidos los que nos indiquen hasta qué punto hemos conseguido nuestro propósito.

2. INSTITUCIONES

En la producción de software en general y en el desarrollo de un tipo de datos en particular, deben separarse dos partes que no siempre resultan bien diferenciadas en la práctica: especificación e implementación. En la especificación tiene que quedar bien definido en qué consiste ese tipo de datos, es decir, cuál es su dominio y cuáles son sus operadores. Por su parte, la implementación debe proporcionar una realización del tipo: representación adecuada para el dominio y métodos que lleven a cabo las operaciones. Así, la especificación recoge toda la información que los posibles usuarios necesitan: les permitirá declarar datos del tipo y manipularlos con los operadores sin posibilidad ni necesidad de acceder a los detalles propios de la implementación.

Desde la década de los setenta se vienen usando técnicas algebraicas para la especificación de tipos de datos. El lenguaje del álgebra permite definir sin ambigüedad el conjunto de valores que constituyen el dominio de un tipo de datos y el comportamiento de sus operadores. La teoría de especificación algebraica se ha desarrollado notablemente y se han estudiado diferentes técnicas de especificación (por ejemplo, en [12], [5]).

A continuación vamos a presentar las componentes básicas de cualquier marco de especificación formal. Para ello, comenzaremos por describir brevemente uno de ellos, el conocido como *especificación algebraica ecuacional*.

Una *firma* Σ es un par de conjuntos de símbolos $\Sigma = (S, \Omega)$, los elementos de S se denominan *géneros* y los elementos de Ω *operaciones*. Cada $\omega \in \Omega$ tiene asociada una *aridad*, es decir, una secuencia no vacía de elementos de S , $s_1 \dots s_n s$, que viene a representar el perfil de la operación. En este caso, ω se refiere a una operación con n argumentos (cada uno de ellos del género correspondiente) y resultado de género s . Un *morfismo* $h : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ entre firmas $\Sigma = (S, \Omega)$ y $\Sigma' = (S', \Omega')$ es una pareja de aplicaciones conjuntistas $h = (h_1 : S \rightarrow S', h_2 : \Omega \rightarrow \Omega')$ compatible con los perfiles de las operaciones, es decir, si $\omega \in \Omega$ tiene aridad $s_1 \dots s_n s$, su imagen, $h_2(\omega)$,

tiene aridad $h_1(s_1) \dots h_1(s_n)h_1(s)$. Signaturas y morfismos de signaturas definen una categoría *SIG* que constituye el ámbito sintáctico de la especificación algebraica ecuacional.

Ilustraremos con unos ejemplos estas definiciones. Consideramos una signatura **MON** con un único género $S = \{m\}$ y cuyas operaciones son $\Omega = \{e : m, \text{bin} : mmm\}$. Usando un lenguaje apropiado para describir signaturas tenemos:

signatura MON
generos m
operaciones $e : \rightarrow m$
 $\text{bin} : m m \rightarrow m$
finsig

Ejemplos característicos de morfismos de signaturas son los renombrados de géneros y operaciones. Por ejemplo, si tomamos la signatura:

signatura MON2
generos l
operaciones $e : \rightarrow l$
 $\text{concat} : l l \rightarrow l$
finsig

la pareja $\Phi \equiv (\Phi_1, \Phi_2)$ dada por $\Phi_1(m) = l$, $\Phi_2(e) = e$, $\Phi_2(\text{bin}) = \text{concat}$ define un morfismo de signaturas que, obviamente, resulta ser un isomorfismo. Consideramos ahora la signatura definida por:

signatura GRP
generos g
operaciones $e : \rightarrow g$
 $\text{prd} : g g \rightarrow g$
 $\text{inv} : g \rightarrow g$
finsig

Entre **MON** y **GRP** podemos considerar el morfismo $\eta \equiv (\eta_1, \eta_2)$ dado por: $\eta_1(m) = g$, $\eta_2(e) = e$, $\eta_2(\text{bin}) = \text{prd}$. El morfismo η corresponde a otro tipo de morfismo natural entre signaturas: la inclusión de signaturas.

Dada una signatura $\Sigma = (S, \Omega)$, una *ecuación* en Σ es una terna $e \equiv (X, t_1, t_2)$ donde X es un conjunto de variables (cada $x \in X$ tiene asociado un género $s \in S$) y t_1, t_2 son términos (fórmulas sintácticamente correctas) sobre Σ con variables en X . Por simplicidad, no se suele indicar explícitamente el conjunto de variables X , por lo que una ecuación se suele expresar de la forma $t_1 = t_2$. Serían ecuaciones en **MON**:

$$\begin{aligned} \text{bin}(x, e) &= \text{bin}(e, x) \\ \text{bin}(x, e) &= x \\ \text{bin}(x, \text{bin}(y, z)) &= \text{bin}(\text{bin}(x, y), z) \end{aligned}$$

Es claro que un morfismo de signaturas $\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ transforma Σ -términos en Σ' -términos. Esta construcción permite definir un functor *sentencias*, $\text{Sen} : \text{SIG} \rightarrow \text{SET}$, donde SET denota la categoría de conjuntos, que asocia a cada signatura Σ el conjunto de ecuaciones en Σ .

En el ámbito de la especificación algebraica ecuacional, una *especificación* consiste en una pareja $\text{ESPEC} = (\Sigma, E)$, siendo Σ una signatura y E un conjunto de

ecuaciones en Σ . El siguiente paso será establecer un criterio para determinar la veracidad de las ecuaciones. Para ello, será necesario considerar los «sitios» (modelos) en los que poder interpretar las ecuaciones.

Fijada una signatura $\Sigma = (S, \Omega)$, una Σ -álgebra \mathbb{A} es un par de familias $\mathbb{A} = ((A_s)_{s \in S}, (\omega^\mathbb{A})_{\omega \in \Omega})$. Para cada $s \in S$, A_s es un conjunto, llamado *soporte* en \mathbb{A} del género s , y para cada $\omega \in \Omega$ de perfil $\omega : s_1 \dots s_n s$, $\omega^\mathbb{A}$ es una función $\omega^\mathbb{A} : A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n} \rightarrow A_s$, llamada *interpretación* en \mathbb{A} de la operación ω . Así, una Σ -álgebra no es sino un posible modelo matemático para la sintaxis definida por Σ . Por su parte, un *morfismo* $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ de Σ -álgebras es una familia de aplicaciones $(f_s : A_s \rightarrow B_s)_{s \in S}$ que hacen conmutativos todos los diagramas asociados a las operaciones $\omega \in \Omega$. Las Σ -álgebras y los Σ -morfismos definen una categoría, que denotaremos $Alg(\Sigma)$.

Si nos fijamos en la signatura **GRP**, una **GRP**-álgebra consiste en un conjunto que tiene un elemento distinguido (correspondiente a la operación $e : \rightarrow g$) y que dispone de dos operaciones internas, una unaria y otra binaria. En concreto, cualquier grupo resulta ser una **GRP**-álgebra. Además, los homomorfismos de grupos son morfismos de **GRP**-álgebras. Análogamente, cualquier monoide es una **MON**-álgebra.

Dado un morfismo de signaturas $\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ y una Σ' -álgebra \mathbb{A} , consideramos la Σ -álgebra \mathbb{B} que tiene como soporte de cada género s , $B_s = A_{\Phi_1(s)}$, y como interpretación de $\omega \in \Omega$ la operación en \mathbb{A} que interpreta a $\Phi_2(\omega)$, es decir, $\omega^\mathbb{B} = \Phi_2(\omega)^\mathbb{A}$. Esta construcción se extiende a un functor $Mod : SIG \rightarrow CAT^{OP}$, donde CAT^{OP} denota la dual de la categoría de categorías. Por ejemplo, la inclusión de la signatura **MON** en **GRP** induce el functor olvido entre la categoría de **GRP**-álgebras y la de **MON**-álgebras.

La última de las componentes básicas de un marco de especificación va a ser una relación entre sentencias y modelos. En nuestro caso particular, la relación que determina si un modelo satisface o no una sentencia. Dadas una Σ -álgebra \mathbb{A} y una Σ -ecuación $e \equiv t_1 = t_2$, se dice que \mathbb{A} *satisface* e , lo denotamos $\mathbb{A} \models e$, si para cada valoración en \mathbb{A} de las variables de e se cumple la igualdad $t_1 =_{\mathbb{A}} t_2$ (fijados los valores de las variables, cada Σ -término admite una única interpretación en una Σ -álgebra \mathbb{A}). De modo natural, la relación de satisfacibilidad se extiende a conjuntos de ecuaciones: $\mathbb{A} \models E$ si \mathbb{A} satisface todas las ecuaciones del conjunto E . Así, una especificación $ESPEC = (\Sigma, E)$ determina una subcategoría de $Alg(\Sigma)$, la subcategoría plena generada por aquellas Σ -álgebras que satisfacen E .

Siguiendo con el ejemplo, la signatura **GRP** se extiende a una especificación:

ESPEC GRP
generos g
operaciones $e : \rightarrow g$

$$prd : g \times g \rightarrow g$$

$$inv : g \rightarrow g$$

ecuaciones $prd(x, e) = x$

$$prd(e, x) = x$$

$$prd(prd(x, y), z) = prd(x, prd(y, z))$$

$$prd(x, inv(x)) = e$$

$$prd(inv(x), x) = e$$

finespec

La categoría de modelos de esta especificación es la categoría de grupos. De modo análogo, como subcategoría de $Alg(\text{MON})$ se obtendría la categoría de monoides.

Éstas son las cuatro componentes que constituyen un marco abstracto de especificación, lo que habitualmente aparece en la literatura con el nombre de institución: signaturas, sentencias, modelos y relación de satisfacibilidad.

Definición 2.1. Una *institución* \mathcal{I} viene dada por:

1. Una categoría SIG , llamada *categoría de signaturas* de \mathcal{I} .
2. Un functor $Sen : SIG \rightarrow SET$, llamado *functor sentencias*.
3. Un functor $Mod : SIG \rightarrow CAT^{OP}$, llamado *functor modelos*.
4. Una clase de relaciones $\models \subseteq (Mod(\Sigma) \times Sen(\Sigma))_{\Sigma \in \text{Objetos}(SIG)}$ de forma que, para cada morfismo $h : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ en SIG , $\mathbb{A}' \in Mod(\Sigma')$ y $e \in Sen(\Sigma)$ se tiene:

$$Mod(h)(\mathbb{A}') \models e \quad \text{si y sólo si} \quad \mathbb{A}' \models Sen(h)(e).$$

El ejemplo que hemos desarrollado para ilustrar la noción de institución, que se denomina habitualmente *institución algebraica ecuacional*, constituye el formalismo más extendido para la especificación de tipos de datos. De hecho, una buena parte de las instituciones en las que habitualmente se trabaja son generalizaciones o variantes del marco algebraico ecuacional. Por ejemplo, para poder especificar tipos de datos en los que algunos de los operadores sean parciales, podemos incorporar a las especificaciones de la institución algebraica ecuacional sentencias de definitud (y considerar algunas ecuaciones como condicionales), lo que modificando adecuadamente la relación de satisfacibilidad, dará lugar a una institución en la que los modelos serán álgebras parciales. Otras posibles generalizaciones se obtienen al considerar diferentes tipos de sentencias (lógica de predicados, por ejemplo).

Un marco que resulta de gran interés por su adecuación para formalizar el modo de trabajar en el paradigma de la programación orientada a objetos es la institución de las especificaciones ocultas. Eliminando detalles técnicos, la idea fundamental consiste en distinguir en las signaturas dos tipos de géneros (géneros visibles y géneros ocultos) y fijar un modelo para la parte visible de la especificación. Esto significa en la práctica que en los modelos vamos a poder distinguir lo que son los soportes de datos de lo que son los soportes para los objetos.

Referencias adecuadas sobre instituciones son [6], [1]. Para especificaciones ocultas [7].

3. LA CONSTRUCCIÓN $()_{imp}$

En algunos sistemas de software para el Cálculo Simbólico, en concreto en EAT (Effective Algebraic Topology) [14] y su sucesor Kenzo [4] que fueron diseñados para el cálculo de grupos de homología y homotopía de espacios topológicos, se hace necesaria la construcción y manipulación (en tiempo de ejecución) de estructuras de datos de naturaleza infinita. Por ejemplo, construcción de conjuntos simpliciales o de complejos de cadenas como objetos intermedios necesarios durante la ejecución de algunos de los algoritmos de cálculo. El modo en el que estas estructuras fueron implementadas en EAT fue analizado en [9] obteniendo como resultados más destacados:

1. Estas estructuras admiten especificaciones que pueden ser interpretadas como especificaciones de implementaciones de tipos de datos más básicos. Por tanto, sus implementaciones corresponden a lo que podríamos denominar «implementaciones al cuadrado».
2. Las implementaciones dadas en EAT para estas estructuras son, en cierto sentido, canónicas. Resultan ser objetos finales en adecuadas categorías de implementaciones.

En esta sección se incide fundamentalmente sobre aspectos relacionados con las especificaciones de las estructuras de datos de EAT. El lector interesado en el modo de implementación y en el estudio teórico realizado sobre el mismo puede consultar [9], [10], [3].

Aunque no representa adecuadamente la complejidad de algunos de los tipos de datos que aparecen en EAT y Kenzo, el ejemplo de grupo nos permite ilustrar el tipo de especificaciones con las que se trabaja en dichos programas. Un grupo tiene asociada la signatura GRP presentada en la sección anterior:

signatura GRP
generos g
operaciones $e : \rightarrow g$
 $prd : g \ g \rightarrow g$
 $inv : g \rightarrow g$

finsig

Ahora bien, para poder construir un grupo en tiempo de ejecución deberemos considerar un tipo de datos cuyas instancias sean grupos, cada dato nos debe permitir acceder a la información asociada a un grupo, es decir, como mínimo recuperar las operaciones de un grupo. Para ello podemos considerar la signatura:

signatura GRP_{imp}
generos $grp, elem$
operaciones $imp_e : grp \rightarrow elem$
 $imp_prd : grp \ elem \ elem \rightarrow elem$
 $imp_inv : grp \ elem \rightarrow elem$

finsig

De este modo, en cada modelo \mathbb{A} de GRP_{imp} , cada elemento z de A_{grp} (soporte del género grp), nos permite recuperar las operaciones de una GRP-álgebra mediante la

terna

$$(imp_e^{\mathbb{A}}(z), imp_prd^{\mathbb{A}}(z, -, -), imp_inv^{\mathbb{A}}(z, -)).$$

La idea que subyace es que el género *grp* representa a los grupos, más concretamente a implementaciones de grupos, mientras que el género *elem* representa a los elementos de los grupos. Este patrón de especificación se aproxima adecuadamente a las estructuras de datos usadas en EAT y, como veremos a continuación, responde a un tipo de construcción con buenas propiedades. La relación entre las firmas GRP y GRP_{imp} es un caso particular de la operación entre firmas que a continuación se describe.

Sea SIG el conjunto de firmas sobre un alfabeto concreto. Definimos $()_{imp} : SIG \rightarrow SIG$ la aplicación que, a cada firma $\Sigma = (S, \Omega)$ le asocia la firma $\Sigma_{imp} = (S_{imp}, \Omega_{imp})$ dada por

- $S_{imp} = \{imp_{\Sigma}\} \cup S$, donde imp_{Σ} es un símbolo nuevo que no está en S .
- $\Omega_{imp} = \{imp_{\omega} : imp_{\Sigma} s_1 \dots s_n s\}_{(\omega: s_1 \dots s_n s \in \Omega)}$. Por cada operación ω de aridad $s_1 \dots s_n s$ se incluye en Ω_{imp} una operación imp_{ω} cuya aridad es $imp_{\Sigma} s_1 \dots s_n s$.

En [9] puede encontrarse una extensión de esta construcción como operación entre tipos abstractos de datos.

Los siguientes ejemplos muestran la relación existente entre Σ -álgebras y Σ_{imp} -álgebras.

Ejemplo 3.1. Definimos la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{A} dada por: \mathbb{Z} es el soporte en \mathbb{A} para el género *elem* y \mathbb{N} el soporte del género *grp*. La interpretación en \mathbb{A} de las operaciones es:

$$\begin{aligned} imp_unt^{\mathbb{A}}(n) &= 0 \\ imp_prd^{\mathbb{A}}(n, z1, z2) &= z1 + z2 \\ imp_inv^{\mathbb{A}}(n, z) &= -z \end{aligned}$$

De esta forma, cada $n \in \mathbb{N}$ determina una GRP-álgebra que denotamos A_n , siendo $A_n = \langle \mathbb{Z}, \{+z, -z, 0_{\mathbb{Z}}\} \rangle$. La GRP_{imp} -álgebra \mathbb{A} admite ser descrita como una colección indexada por \mathbb{N} de copias de \mathbb{Z} .

Ejemplo 3.2. Consideramos \mathbb{B} con los mismos soportes del ejemplo anterior y operaciones:

$$\begin{aligned} imp_unt^{\mathbb{B}}(n) &= 0 \\ imp_prd^{\mathbb{B}}(n, z1, z2) &= (z1 + z2) \text{ mod } n \\ imp_inv^{\mathbb{B}}(n, z) &= -z \text{ mod } n \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos la GRP-álgebra $B_n = \langle \mathbb{Z}, \{+_{\text{mod } n}, -_{\text{mod } n}, 0_{\mathbb{Z}}\} \rangle$ que tiene el mismo comportamiento que el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (notar que B_n no es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de hecho ni siquiera es grupo, pero existe un cociente del mismo que sí lo es).

Ejemplo 3.3. Consideramos la misma firma GRP_{imp} y para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, fijo consideramos el conjunto $\langle n \rangle = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Definimos la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{C} tomando $\langle n \rangle$ como soporte para *elem* y, para el género *grp*, el conjunto $C_{grp} = \{(n_1, \dots, n_k) : k \geq 1, n_i > 1 \forall i \in \{1, \dots, k\}, n = n_1 * \dots * n_k\}$. La idea subyacente en la elección de los soportes de \mathbb{C} es que cada tupla (n_1, \dots, n_k) de C_{grp} representa

al grupo abeliano finito $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$. Por tanto, el conjunto C_{grp} está dando soporte a una familia de grupos abelianos finitos.

Para completar la definición de la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{C} hay que introducir las operaciones. Teniendo en cuenta la última observación, las operaciones de \mathbb{C} se definirán a partir de las de cada grupo $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ y, por tanto, será suficiente con dar una biyección entre el conjunto $\langle n \rangle$ y los elementos del grupo $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$. Cada elemento del grupo $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ puede representarse por una tupla (a_1, \dots, a_k) con $a_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$, para todo $i = 1, \dots, k$. Consideramos la biyección $enum_{(n_1, \dots, n_k)} : \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, \dots, n - 1\}$ definida del siguiente modo:

$$enum_{(n_1, \dots, n_k)}((a_1, \dots, a_k)) = \sum_{i=1}^k \left(\prod_{j=i+1}^k n_j \right) a_i.$$

Esta biyección nos sirve para definir las operaciones de \mathbb{C} , lo que completa la definición de la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{C} .

Por ejemplo, si $n = 12$, la tupla $(2, 2, 3)$ representa al grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La biyección $enum_{(n_1, \dots, n_k)}$ lleva a cada tupla (i, j, k) con $i, j \in \{0, 1\}$ y $k \in \{0, 1, 2\}$ al natural $6 * i + 3 * j + k \in \langle n \rangle$. La tupla $(2, 6)$ representa al grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y $(4, 3)$ a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Observar que entre los tres grupos anteriores, los dos primeros son isomorfos.

Cualquier grupo abeliano finito es isomorfo a un $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$, con $n_i \in \mathbb{N}$, $\forall i = 1, \dots, k$. Por tanto, fijado $n \in \mathbb{N}$, la familia definida en este ejemplo cubre todos los grupos abelianos finitos de cardinal n . Barriendo todos los $n \in \mathbb{N}$, se cubren todos los grupos abelianos finitos. Luego este ejemplo nos aporta un patrón común de representación para los grupos abelianos finitos.

Además, desde cualquier representación de grupos abelianos definidos sobre $\langle n \rangle$ existe, al menos, un GRP_{imp} -morfismo a la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{C} . Un tal GRP_{imp} -morfismo puede definirse de manera sencilla siempre que los elementos de $\langle n \rangle$ queden fijos.

Ejemplo 3.4. La GRP_{imp} -álgebra \mathbb{C} anterior nos permite representar familias de grupos abelianos finitos. Vamos ahora a dar una GRP_{imp} -álgebra, que llamaremos \mathbb{D} y que recoge el caso de los grupos finitos cualesquiera.

Fijamos un $n \in \mathbb{N}$ y, como en el ejemplo anterior, tomamos el conjunto $\langle n \rangle$ como soporte para el género *elem*. Consideramos como soporte para el género *grp* el conjunto $D_{grp} = \{ \text{matrices } n \times n : \text{la matriz es la tabla del producto de un grupo sobre } \langle n \rangle \}$. De cada tabla, pueden extraerse los inversos de cada elemento así como el elemento neutro, por lo que la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{D} representa de forma canónica a una familia de grupos.

Cualquier grupo finito es isomorfo a uno de los grupos indexados por el conjunto D_{grp} anterior, por lo que, barriendo todos los $n \in \mathbb{N}$, se cubren todos los grupos finitos.

Por ejemplo, fijamos $n = 6$ y consideramos el grupo de permutaciones de tres elementos que denotamos por \mathcal{S}_3 . Vamos a suponer, por concretar, que los tres elementos permutados son 1, 2 y 3. Si asignamos a cada permutación un ordinal según el orden lexicográfico, es decir, si tomamos la biyección $enum_{\mathcal{S}_3} : \mathcal{S}_3 \rightarrow \langle n \rangle$ dada por: $enum_{\mathcal{S}_3}((1 \ 2 \ 3)) = 0$, $enum_{\mathcal{S}_3}((1 \ 3 \ 2)) = 1$, $enum_{\mathcal{S}_3}((2 \ 1 \ 3)) = 2$,

$enum_{S_3}((2\ 3\ 1)) = 3$, $enum_{S_3}((3\ 1\ 2)) = 4$ y $enum_{S_3}((3\ 2\ 1)) = 5$, la siguiente matriz representa la tabla de multiplicar del grupo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desde cualquier posible representación de grupos definidos sobre $\langle n \rangle$ existe un único GRP_{imp} -morfismo a la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{D} , manteniendo fijo el soporte $\langle n \rangle$. Por ello, la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{D} es la más «general» entre las representaciones de grupos sobre $\langle n \rangle$. Esto se traducirá en una propiedad de finalidad del álgebra \mathbb{D} en una categoría adecuada.

En particular, la GRP_{imp} -álgebra \mathbb{D} da una representación para grupos abelianos finitos y, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, el GRP_{imp} -morfismo de \mathbb{C} a \mathbb{D} que mantiene fijo $\langle n \rangle$ viene dado por una aplicación que a cada tupla $(n_1, \dots, n_k) \in C_{grp}$ le asocia una matriz $n \times n$. Por ejemplo, si consideramos $n = 6$, $C_{grp} = \{(2, 3), (3, 2), (6)\}$. Para asociar una matriz a cada uno de los elementos de C_{grp} utilizamos la biyección $enum_{(n_1, \dots, n_k)}$, y así obtenemos que

$$f_{grp}((2, 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{grp}((3, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como es fácil observar, los ejemplos anteriores corresponden todos ellos a la siguiente construcción:

Proposición 3.5. *Dada una signatura $\Sigma = (S, \Omega)$ y una Σ_{imp} -álgebra*

$$\mathbb{A} = \langle A_{imp_\Sigma}, (A_s)_{s \in S}, \{imp_\omega^{\mathbb{A}} : A_{imp_\Sigma} \times A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n} \rightarrow A_s\}_{\omega \in \Sigma} \rangle,$$

cada elemento $a \in A_{imp_\Sigma}$ define una Σ -álgebra B_a de la siguiente forma:

$$B_a = \langle (A_s)_{s \in S}, \{imp_\omega^{\mathbb{A}}(a, _) : A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n} \rightarrow A_s\}_{\omega \in \Sigma} \rangle.$$

Conviene notar que todas las Σ -álgebras B_a de la familia anterior tienen los mismos soportes, es decir, una Σ_{imp} -álgebra se corresponde con una familia indexada de Σ -álgebras en la que todas las álgebras de la familia tienen los mismos soportes. Este hecho, que a nivel de modelos no es demasiado relevante, es de gran importancia a nivel de las implementaciones. En el ejemplo de la estructura grupo, no es razonable implementar todos los grupos, sino los grupos cuyos elementos tienen un mismo patrón, un mismo modo de representación en el computador.

Llevando las ideas del comentario anterior al nivel de los modelos, dada una signatura $\Sigma = (S, \Omega)$ no conviene tratar de modo conjunto toda la categoría de modelos $Alg(\Sigma_{imp})$. Así, fijado un dominio $D = (D_s)_{s \in S}$, consideramos la subcategoría de

$Alg(\Sigma_{imp})$ cuyos objetos son las Σ_{imp} -álgebras que tienen a la familia D como soportes de los géneros de S (dejando libre el soporte del género añadido imp_Σ) y cuyos morfismos son aquellos Σ_{imp} -morfismos que son la identidad sobre los géneros de S . A esta subcategoría la denotaremos $Alg^D(\Sigma_{imp})$. Es conveniente notar que, para cada dominio $D = (D_s)_{s \in S}$, la correspondiente categoría $Alg^D(\Sigma_{imp})$ no resulta ser una subcategoría plena de $Alg(\Sigma_{imp})$. El lector interesado puede encontrar un estudio más detallado de estas categorías $Alg^D(\Sigma_{imp})$ y su relación con categorías de familias indexadas sobre $Alg(\Sigma)$ en [10] y [11].

Entre todas las álgebras de $Alg^D(\Sigma_{imp})$ hay una que resulta especialmente relevante. Consideramos \mathbb{A}^{can} dada por:

- En los géneros $s \in S$, $A_s^{can} = D_s$.
- En el género imp_Σ , $A_{imp_\Sigma}^{can}$ es el conjunto de tuplas funcionales (f_1, \dots, f_k) , una función por cada operación de Ω , de forma que $\langle (D_s)_{s \in S}, (f_1, \dots, f_k) \rangle$ es una Σ -álgebra.
- La interpretación de $\omega_i \in \Omega_{imp}$ con perfil $\omega_i : imp_\Sigma s_1 \dots s_n \rightarrow s$ es

$$A_{\omega_i}^{can}((f_1, \dots, f_k), d_1, \dots, d_n) = f_i(d_1, \dots, d_n).$$

Como demuestra el siguiente resultado, el álgebra \mathbb{A}^{can} es un modelo con buenas propiedades y, por tanto, un candidato adecuado para ser implementado como modelo de $Alg^D(\Sigma_{imp})$.

Teorema 3.6. *La Σ_{imp} -álgebra \mathbb{A}^{can} es objeto final de la categoría $Alg^D(\Sigma_{imp})$.*

4. LA CONSTRUCCIÓN $()_{imp}$ COMO MORFISMO DE INSTITUCIONES

Como ya ha sido comentado, la noción de institución pretende establecer las componentes necesarias para cualquier marco en el que realizar especificaciones. De modo natural aparece la cuestión de establecer pasos entre diferentes instituciones, de forma que se puedan trasladar especificaciones de una institución a otra. Esto conduce al concepto de morfismo de instituciones [6].

Definición 4.1. Dadas dos instituciones \mathcal{I} y \mathcal{I}' , un *morfismo de instituciones* $\Phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$ consiste en:

1. Un functor $\Phi : SIG \rightarrow SIG'$ entre las correspondientes categorías de firmas.
2. Una transformación natural $\alpha : Sen' \circ \Phi \Rightarrow Sen$, es decir, para cada firma Σ de SIG una aplicación $\alpha_\Sigma : Sen'(\Phi(\Sigma)) \rightarrow Sen(\Sigma)$, transformando sentencias de $\Phi(\Sigma)$ en sentencias de Σ de forma compatible con los morfismos de firmas.
3. Una transformación natural $\beta : Mod \Rightarrow Mod' \circ \Phi$. Esta transformación vendrá dada por una clase de funtores $\beta_\Sigma : Mod(\Sigma) \rightarrow Mod'(\Phi(\Sigma))$, uno para cada firma Σ .
4. Las transformaciones α y β respetan las relaciones de satisfacibilidad de \mathcal{I} y de \mathcal{I}' . Esto es, se cumple

$$A \models_{\alpha_\Sigma} (e') \quad \text{si y sólo si} \quad \beta_\Sigma(A) \models' e'$$

para cualquier Σ -modelo A en \mathcal{I} y cualquier $\Phi(\Sigma)$ -sentencia e' en \mathcal{I}' .

De modo informal, un morfismo de instituciones proporciona relaciones entre las diferentes componentes de una institución: signaturas, sentencias y modelos, respetando las relaciones de satisfacibilidad.

En lo que sigue, se va a probar que la construcción $(\)_{imp}$ presentada en la sección anterior se puede extender a un morfismo de instituciones. En concreto, lo que aquí se desarrolla es una presentación de $(\)_{imp}$ como endomorfismo de la institución algebraica ecuacional. Otras posibilidades son estudiadas en [2] considerando esta construcción como un morfismo de instituciones entre la institución algebraica ecuacional y la institución de las especificaciones ocultas.

Dada la institución algebraica ecuacional $\mathcal{I} = (SIG, Sen, Mod, \models)$ tal y como ha sido descrita en la segunda sección de este trabajo, definimos el endomorfismo de \mathcal{I} dado por:

- Un functor $\Phi : SIG \rightarrow SIG$ que asocia a cada signatura Σ su correspondiente signatura Σ_{imp} . Recordar que Σ_{imp} tiene un género añadido a los géneros de Σ , que denotamos imp_{Σ} , y que este nuevo género es agregado como primer argumento a todas las operaciones $\omega : s_1 \dots s_n \rightarrow s$ de Σ dando lugar a las operaciones de Σ_{imp} . Dado un morfismo de signaturas $h : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ en SIG , $\Phi(h) : \Sigma_{imp} \rightarrow \Sigma'_{imp}$ es el morfismo cuya restricción a los géneros de Σ es h y tal que $\Phi(h)(imp_{\Sigma}) := imp_{\Sigma'}$. Respecto de las operaciones, $\Phi(h)(imp_{\omega}) := imp_{\omega'}$, con $\omega' = h(\omega)$.
- Una transformación natural $\alpha : Sen \circ \Phi \Rightarrow Sen$ definida por la familia de aplicaciones $\alpha_{\Sigma} : Sen(\Sigma_{imp}) \rightarrow Sen(\Sigma)$, una para cada objeto Σ de SIG , tal que la imagen por α_{Σ} de una sentencia de Σ_{imp} se obtiene eliminando todos los términos del género imp_{Σ} (que necesariamente deberán ser variables) y sustituyendo cada operación imp_{ω} de Σ_{imp} por la correspondiente operación ω de Σ .

Para que la aplicación anterior esté bien definida es necesario excluir del conjunto de sentencias aquéllas que son identidades entre variables (en concreto, entre variables del género imp_{Σ}). No obstante, no se pierde generalidad al hacer esta restricción. Las ecuaciones de la forma $z = z$ no aportan significación sobre los modelos. Una ecuación del tipo $z = z'$, de variables de un género s , se puede eliminar construyendo una especificación equivalente en la que los términos de género s sean identificados con una única constante.

- Una transformación natural $\beta : Mod \Rightarrow Mod \circ \Phi$ definida por la familia de funtores $\beta_{\Sigma} : Mod(\Sigma) \rightarrow Mod(\Sigma_{imp})$, uno para cada signatura Σ . Sobre los objetos de $Mod(\Sigma)$, la imagen por β_{Σ} de una Σ -álgebra \mathbb{A} es la Σ_{imp} -álgebra que tiene al conjunto unipuntual $\{*\}$ como soporte del género imp_{Σ} y el resto de los soportes los mismos de \mathbb{A} . La interpretación de las operaciones de Σ_{imp} en $\beta_{\Sigma}(\mathbb{A})$ es la natural:

$$imp_{\omega}^{\beta_{\Sigma}(\mathbb{A})}(*, d_1, \dots, d_n) = \omega^{\mathbb{A}}(d_1, \dots, d_n).$$

Respecto de los morfismos de $Mod(\Sigma)$, dado un morfismo de Σ -álgebras $f = (f_s)_{s \in S} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, su imagen $\beta_{\Sigma}(f)$ es $(id_{\{*\}}, (f_s)_{s \in S})$.

Resulta fácil comprobar que (Φ, α, β) define un endomorfismo de la institución algebraica ecuacional, obteniéndose el siguiente resultado.

Teorema 4.2. *Dada la institución algebraica ecuacional $\mathcal{I} = (SIG, Sen, Mod, \models)$, modificada prohibiendo las ecuaciones que identifican variables, la terna (Φ, α, β) definida anteriormente constituye un endomorfismo de \mathcal{I} .*

Para terminar el artículo, queremos indicar que las matemáticas que aquí aparecen (expresadas al uso habitual, en forma de proposiciones y teoremas) no están tan alejadas de la práctica cotidiana de la programación como podría parecer. De hecho, uno de los objetivos de nuestra línea de investigación consiste en analizar sistemas de cálculo simbólico *reales*, como EAT o Kenzo, que están en funcionamiento en varias universidades. Una de las formas de vincular estas matemáticas a los programas reales es a través de la noción de *tipo abstracto de datos* (y, más en concreto, mediante el concepto de *implementación* de un tipo abstracto de datos [8], [9]). Un tipo abstracto de datos viene dado por una signatura Σ y una clase \mathcal{C} de Σ -álgebras cerradas por isomorfismo. De este modo, una especificación $ESPEC = (\Sigma, E)$ define un tipo abstracto de datos, la clase de Σ -álgebras que satisfacen las ecuaciones de E .

En el endomorfismo anterior queda implícita una operación entre especificaciones. Dada una especificación $ESPEC = (\Sigma, E)$ de \mathcal{I} , se puede construir otra especificación $ESPEC_{imp} = (\Sigma_{imp}, E_{imp})$ donde cada ecuación e' de E_{imp} se obtiene a partir de una ecuación e de E , cuantificando con una variable z del nuevo género imp_{Σ} y aplicando la siguiente recursión en los subtérminos de e :

- Dejar sin modificación los subtérminos que sean variables.
- Sustituir los subtérminos $\omega(t_1, \dots, t_n)$ por $imp_{\omega}(z, t'_1, \dots, t'_n)$, donde cada t'_i es el transformado, por recurrencia, de t_i .

Esta nueva especificación verifica la propiedad esperada, que generaliza la proposición 3.5: si \mathbb{A} es una $ESPEC_{imp}$ -álgebra, cada elemento del soporte $A_{imp_{\Sigma}}$ define una $ESPEC$ -álgebra.

REFERENCIAS

- [1] R. Burstall y R. Diaconescu, Hiding and behaviour: An institutional approach, en *A classical mind: Essays in honour of C. A. R. Hoare*, Prentice-Hall (1994), 75–92.
- [2] C. Domínguez, L. Lambán, M. V. Pascual y J. Rubio, Hidden specification of a functional system, en *Proceedings Eurocast'2001*, Lecture Notes in Computer Science **2178** (2001).
- [3] C. Domínguez y J. Rubio, Modelling inheritance as coercion in a symbolic computation system, en *Proceedings ISSAC'2001*, ACM Press (2001), 109–115.
- [4] X. Dousson, F. Sergeraert y Y. Siret, *The Kenzo program*, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo/>, Institut Fourier, Grenoble, 1999.
- [5] H. Ehrig y B. Mahr, *Fundamentals of algebraic specification 1. Equations and initial semantics*, Springer-Verlag, 1985.
- [6] J. Goguen y R. Burstall, Institutions: abstract model theory for specification and programming, *J. Assoc. Comput. Mach.* **39** (1992), 95–146.
- [7] J. Goguen y G. Malcolm, A hidden agenda, *Theoret. Comput. Sci.* **245** (2000), 55–101.
- [8] C. Hoare, Proofs of correctness of data representations, *Acta Informatica* **1** (1972), 271–281.
- [9] L. Lambán, V. Pascual y J. Rubio, Specifying implementations, en *Proceedings ISSAC'99*, ACM Press (1999), 245–251.

- [10] L. Lambán, V. Pascual y J. Rubio, Simplicial sets in the EAT system, en *Proceedings EA-CA'99*, Universidad de La Laguna (1999), 267–276.
- [11] L. Lambán, V. Pascual y J. Rubio, An object-oriented interpretation of the EAT system, prepublicación.
- [12] J. Loeckx, H. D. Ehrich y M. Wolf, *Specification of abstract data types*, Wiley-Teubner, 1996.
- [13] J. Rubio y F. Sergeraert, Locally effective objects and algebraic topology, en *Computational Algebraic Geometry*, Birkhäuser (1993), 235–251.
- [14] J. Rubio, F. Sergeraert y Y. Siret, *EAT: symbolic software for effective homology computation*, <ftp://fourier.ujf-grenoble.fr/pub/EAT>, Institut Fourier, Grenoble, 1997.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: {cedomin,lalamban,mvico,jurubio}@dmc.unirioja.es

SOBRE ESPACIOS DE BESOV DEFINIDOS POR MEDIAS DE RIESZ

JOSÉ E. GALÉ

ABSTRACT. Let A be a densely defined, possibly unbounded closed operator on a Banach space X . Under the assumption that A has its Riesz means uniformly bounded on X , we give here a general theorem on equivalence of norms in Besov spaces associated with X and A . This theorem applies in particular to stratified Lie groups. Also, we give a description of the Besov space corresponding to the Heisenberg group, and its Kohn sub-Laplacian, in terms of the generalized Hermite functions.

1. INTRODUCCIÓN

Esta nota está escrita en homenaje a la memoria de José J. Guadalupe, matemático de amplia cultura y fina intuición, compañero y amigo. Uno de sus rasgos como investigador era su permanente atención a principios generales, leyes abstractas que dieran razón, en términos simples y diáfanos, de esa multiplicidad de fenómenos, conexión de propiedades, etc., que su ojo clínico sabía atisbar al comienzo de sus indagaciones. Hace años, tuvimos una conversación acerca de cuestiones que nos interesaban a los dos, aunque por diferentes motivos. En aquella charla salieron a relucir trabajos sobre desarrollos ortogonales, así como sobre convergencia de las medias de Cesàro, con respecto a familias de proyecciones en espacios de Banach. Éste era un tema que Chicho había empezado a estudiar a fondo siguiendo su buen sentido. Con el tiempo, aquel enfoque tan teórico nos dio juego a ambos en cuestiones más concretas. Sus comentarios de entonces han inspirado la redacción del presente trabajo, si bien al principio del mismo mi idea era poner el acento en los aspectos relativos a expansiones ortogonales y, no obstante, el artículo ha quedado centrado al final en espacios de Besov, propiamente. Es un tema, de cualquier modo, digno de la ocasión.

Los espacios de Besov, o Lipschitz generalizados, sobre \mathbb{R}^n ó \mathbb{T}^n tienen una larga historia. Aparecen estrechamente vinculados a los espacios de Sobolev y admiten formas diversas y equivalentes de describirlos: desde las más directamente afines a su resonancia lipschitziana, en términos de diferencias finitas, a las dadas mediante

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46B25, 46E30, 47A60; Secondary 33C45, 43A80.

Key words and phrases. Besov space, Riesz mean, functional calculus, orthogonal expansion, stratified group, Heisenberg group.

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por la DGES, España, formando parte del proyecto PB97-0994.

recurso al semigrupo de Poisson o al de Gauss, de reminiscencias con el problema de Dirichlet. También pueden ser definidos en versión «discreta», mediante el uso de convenientes y por otro lado «standard» descomposiciones diádicas, o como resultado de la interpolación de espacios de Sobolev entre sí, o de espacios L_p y Sobolev [9].

Las aproximaciones al tema hechas en función de semigrupos, o por otra parte, empleando descomposiciones, admiten generalización directa en el contexto de espacios de Banach. Concretamente, supongamos que X es un espacio de Banach, $\mathcal{B}(X)$ su álgebra de operadores acotados, y $(T_t)_{t>0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ un C_0 -semigrupo, fuertemente continuo y uniformemente acotado, de generador infinitesimal $-A$, $T_t = e^{-tA}$. Para $\theta > 0$, y $1 \leq q \leq \infty$ se define el *espacio de Besov sobre X , asociado a A* , como

$$\text{Lip}_{\theta,q}(X) := \left\{ \xi \in X : \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|(T_t - I)^m \xi\|^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

donde m es *cualquier* número real mayor que θ (es decir, el espacio así definido no depende de tal m). La notación anterior, sin ser la misma, está inspirada en [2].

Cuando el semigrupo T_t es holomorfo se tiene que

$$\text{Lip}_{\theta,q}(X) = \left\{ \xi \in X : \left(\int_0^\infty (t^{m-\theta} \|A^m T_t \xi\|)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

[2, p. 207]. En ambos casos las expresiones integrales que aparecen entre llaves pueden tomarse como correspondientes normas (equivalentes) en $\text{Lip}_{\theta,q}(X)$. Naturalmente, tales normas deben modificarse adecuadamente si $q = \infty$. Por comodidad sólo escribiremos en el trabajo normas integrales, obviando el caso $q = \infty$.

El espacio anterior puede también obtenerse por interpolación real; a saber, si $\mathcal{D}(A^m)$ es el dominio de definición de la potencia (no acotada) m -ésima del operador A , normado convenientemente, y $0 < \tau < 1$ entonces

$$(X, \mathcal{D}(A^m))_{\tau,q} = \text{Lip}_{m\tau,q}(X),$$

[2, p. 194]. Este hecho refleja precisamente la idea de Lions y Peetre de estudiar la interpolación a partir de la teoría de semigrupos. Es bien conocido que $K(t; \xi) \approx \sup_{0 < s \leq t} \|T_s \xi - \xi\|$, siendo $K(t; \xi)$ el K -funcional de X y $\mathcal{D}(A^m)$.

Por último, recordemos que $\text{Lip}_{\theta,q}(L_p(\mathbb{R}^n))$, asociado al laplaciano usual $\Delta := -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ sobre \mathbb{R}^n , o a su raíz cuadrada $\sqrt{\Delta}$, coincide con el espacio de Besov clásico en \mathbb{R}^n (ver [2, p. 266]).

La segunda generalización descansa en la hipótesis de la acotación uniforme de las medias de Riesz de un operador. Esta es una idea que parece deberse originariamente a J. Peetre, quien trata el caso *homogéneo* en [9]. Hay también un desarrollo independiente de H. Triebel en el caso *no homogéneo*, véase [13], que es el que consideramos aquí.

Supongamos que H es un espacio de Hilbert, X un espacio de Banach, y que ambos están inmersos en un tercer espacio vectorial topológico de Hausdorff. Supongamos también que $X \cap H$ es denso en cada uno de los X , H , en sus topologías respectivas. Sea A un operador sobre H , autoadjunto y no negativo. El teorema espectral para A nos suministra operadores $M(A) \in \mathcal{B}(H)$ dados por el cálculo

espectral usual $M(A)\xi = \int_{-\infty}^{\infty} M(u) dE(u)\xi$, $\xi \in H$, para toda función de Borel M acotada sobre \mathbb{R} , y donde $\{dE(u)\}$ es la familia de medidas espectrales correspondiente a A . Si como M tomamos la función $r_{\alpha}(u) := (1-u)_{+}^{\alpha} \chi_{[0,\infty)}(u)$, $\alpha \geq 0$, entonces tenemos definida en $\mathcal{B}(H)$ la media de Riesz $R_u^{\alpha} = u^{\alpha} r_{\alpha}(u^{-1}A)$. La hipótesis de trabajo es la siguiente.

Hipótesis. $R_u^{\alpha} \in \mathcal{B}(X)$, y

$$(\mathcal{R}_{\alpha}) \quad \sup_{u>0} \|u^{-\alpha} R_u^{\alpha}\| < \infty.$$

Esta propiedad de acotación uniforme de las medias origina un cálculo funcional para operadores continuos sobre X , en el sentido de que existe un homomorfismo acotado de álgebras de Banach $AC^{(k+1)} \rightarrow \mathcal{B}(X)$ dado por

$$f(A)\xi = \int_0^{\infty} f^{(k+1)}(u) R_u^k \xi \, du,$$

$\xi \in X$, $f \in AC^{(k+1)}$, $k > \alpha$. El álgebra $AC^{(k+1)}$ está formada por las funciones de clase $C^{(k)}$ sobre $[0, \infty)$ tales que $f^{(j)}(\infty) = 0$, ($j = 0, 1, \dots$), y $f^{(k)}$ es absolutamente continua verificando $\int_0^{\infty} |f^{(k+1)}(u)| u^k \, du < \infty$ [13], [3], [7] (aunque en la integral del cálculo aparece R_u^k en lugar de R_u^{α} eso no es problema porque de \mathcal{R}_{α} se sigue \mathcal{R}_k . De hecho el cálculo anterior vale para orden fraccionario de derivación, pero aquí nos limitaremos a considerar k entero por ser esto suficiente). Nótese que $f(A)$ no depende de $k > \alpha$.

Como es habitual, el cálculo funcional así definido puede extenderse al álgebra con unidad $AC_1^{(k+1)} = AC^{(k+1)} \oplus \mathbb{C}1$ poniendo $g(A) = f(A) + g(\infty)I$, si $g = f + g(\infty)$, con $f \in AC^{(k+1)}$.

Vamos con la definición de espacio de Besov definido mediante descomposiciones, «diádicas» y espectrales, sobre X . Sea $a > 1$. Tomamos ψ^a de clase $C^{(k+1)}$ y soporte compacto en \mathbb{R} contenido en (a^{-1}, a) , tal que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi^a(a^{-j}u) \equiv 1$. Pongamos $\psi_j^a(u) = \psi^a(a^{-j}u)$ para $j = 1, 2, \dots$, y $\psi_0^a = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^a$. Por el cálculo funcional anterior, existe $\psi_j^a(A)$ en $\mathcal{B}(X)$, para todo $j \geq 0$.

Definición 1.1. Para $\theta > 0$ y $1 \leq q \leq \infty$ diremos que $\xi \in X$ pertenece a $B^{\theta,q}(X)$ si y solo si $\sum_{j=0}^{\infty} a^{j\theta q} \|\psi_j^a(A)\xi\|^q < \infty$.

(Si $q = \infty$ la suma en j debe ser sustituida por $\sup_{j \geq 0} a^{j\theta} \|\psi_j^a(A)\xi\|$.)

A $B^{\theta,q}(X)$ le llamaremos *espacio de Besov sobre X , asociado a A* . Éste es independiente tanto de a como de la función ψ^a [13]. Lo canónico es tomar $a = 2$ y entonces escribir ψ^2 como ψ . Así se hará salvo en la demostración del Teorema 2.1. No es difícil mostrar que $B^{\theta,q}(X)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|\xi\|_{\theta,q} := (\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\theta q} \|\psi_j(A)\xi\|^q)^{1/q}$.

La definición es ciertamente una extensión pues resulta que $B^{\theta,q}(L_p(\mathbb{R}^n))$, asociado al laplaciano usual $\Delta := -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ sobre \mathbb{R}^n , o igualmente a su raíz cuadrada $\sqrt{\Delta}$, coincide asimismo con el espacio de Besov clásico sobre \mathbb{R}^n . Notemos que el semigrupo de Gauss está generado por $-\Delta$, así como el de Poisson lo está por $-\sqrt{\Delta}$.

La relación que acabamos de indicar entre semigrupos y operadores A no es casual sino profunda. Supongamos que el operador A es positivo sobre X , lo que en el caso (asumido) de satisfacer la propiedad \mathcal{R}_α , se traduce en que 0 no pertenezca al espectro de A , $\sigma(A)$. Entonces se da la interpolación

$$(X, \mathcal{D}(A^m))_{\tau,q} = B^{m\tau,q}(X),$$

[13, p. 127]. Puesto que A genera el semigrupo de operadores acotados $T_t = e^{-tA}$ sobre X dado por el cálculo funcional $e^{-tA} := \exp(-t \cdot)(A)$ resulta de ahí que

$$B^{\theta,q}(X) = \text{Lip}_{\theta,q}(X),$$

al menos cuando A es positivo.

La identidad $\text{Lip}_{\theta,q}(X) = B^{\theta,q}(X)$ no parece haber sido hecha notar expresamente con antelación (también puede que se considere parte del folklore que todo conocedor del tema supone). De hecho, la conexión con semigrupos, en este contexto, apenas ha sido esbozada [9, p. 203], [13, p. 129]. No vamos a insistir aquí en un punto de vista que se puede adoptar, y que consiste en tomar los semigrupos holomorfos, en relación con medias de Riesz y espacios de Besov, como punto de partida (éste será objeto de un trabajo subsiguiente). Pero sí que es objeto de esta nota resaltar el papel que el AC^k -cálculo puede desempeñar en la consideración de los espacios de Besov.

Terminamos esta introducción con una sencilla observación que se empleará en la sección 3. Pongamos $\rho_u(A) = u^{-k}R_u^k$, con $k > \alpha + 1$. Se tiene que $\lim_{u \rightarrow \infty} \rho_u(A)\xi = \xi$, $\forall \xi \in X$ (ver [13, p. 119]).

Lema 1.2. *Sea V subespacio denso de X . Entonces $\bigcup_{u>0} \rho_u(A)(V)$ es denso en $B^{\theta,q}(X)$. En particular, si V es $\rho_u(A)$ -invariante entonces V es denso en $B^{\theta,q}(X)$.*

Demostración. Sea $\sigma = \sup_{u>0} \|\rho_u(A)\|$. Dados $\xi \in B^{\theta,q}(X)$ y $\varepsilon > 0$, tomamos N tal que $(1 + \sigma)^q \sum_{N+1}^\infty 2^{j\theta q} \|\psi_j(A)\xi\|^q < \varepsilon^q$ y para ese N , escogemos u de manera que $\|\xi - \rho_u(A)\xi\| \leq (\sum_{j=0}^N 2^{j\theta q} \|\psi_j(A)\|^q + 1)^{-(1/q)} \varepsilon$. Entonces se obtiene fácilmente que $\|\xi - \rho_u(A)\xi\|_{\theta,q} < 2\varepsilon$.

Asimismo, $\psi_j \rho_u = 0$ siempre que $u < 2^{j-1}$; por eso existe J tal que $\psi_j(A)\rho_u(A)\xi = 0$ para todo $j > J$. Ahora basta tomar $v \in V$ con la condición

$$\|\xi - v\| \leq \sigma^{-1} \left(\sum_{j=0}^J 2^{j\theta q} \|\psi_j(A)\|^q + 1 \right)^{-(1/q)} \varepsilon$$

para obtener que $\|\rho_u(A)\xi - \rho_u(A)v\|_{\theta,q} < 2\varepsilon$. □

2. EXPRESIONES INTEGRALES DE LOS ESPACIOS DE BESOV

Existen situaciones específicas en las que resulta apropiado estudiar espacios de Besov sobre estructuras subyacentes más generales que \mathbb{R}^n ó \mathbb{T}^n , o para operadores distintos de los convencionales laplacianos. Entonces la representación del espacio depende de los objetivos del estudio a desarrollar, de modo que adopta la forma de expresión integral o en serie de tipo diádico, según convenga. En tales casos no suele hacerse mención del hecho de que ambas aproximaciones plasman el mismo

concepto, o bien, cuando se trata de probar equivalencias de normas, esto se hace con razonamientos ad hoc, e.g., en [1], [4], [6], [8], [10].

Por otra parte resulta que, con frecuencia (e. g., en todas las referencias justamente citadas), los operadores A que basan la construcción del espacio de Besov correspondiente cumplen la condición \mathcal{R}_α para algún α , y las observaciones hechas en la introducción son de aplicación. Así por ejemplo, en esta sección se da el teorema, resultado principal del artículo, que muestra que hay una infinidad de normas equivalentes en $\text{Lip}_{\theta,q}(X)$ ó $B^{\theta,q}(X)$ a añadir a las normalmente utilizadas. La demostración combina argumentos conocidos, adaptándolos al caso gracias a las buenas propiedades que satisface el cálculo con funciones de $AC^{(k)}$.

Teorema 2.1. *Sean X, H y A como antes, de modo que se satisface la propiedad $\mathcal{R}_\alpha, \alpha \geq 0$. Supongamos que $m > \theta > 0, k > \alpha$ (k entero), y $f \in AC_1^{(k+1)}$ son tales que $u^{-m}f(u) \in AC^{(k+1)}$. Entonces, para $1 \leq q < \infty$, el espacio de Besov $B^{\theta,q}(X)$ coincide con el subespacio de X formado por los vectores ξ que verifican*

$$\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t} < \infty.$$

De hecho

$$\|\xi\|_X + \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

es una norma en $B^{\theta,q}(X)$ equivalente a $\|\xi\|_{\theta,q}$.

Demostración. Sea f como en el enunciado y tal que $f(u) \neq 0$ en un abierto conteniendo $[a^{-2}, a^2]$, con $a > 1$. Tomemos ψ^a como en la introducción. Para $1 \leq \lambda \leq a$ consideremos $f_\lambda(u) := f(\lambda u)$. Claramente $f_\lambda(u) \neq 0$ si $u \in (a^{-1}, a)$, y entonces $\psi_j^a(u) = g_\lambda(a^{-j}u)f(a^{-j}\lambda u), j = 1, 2, \dots$, con $g_\lambda := \psi^a/f_\lambda \in AC^{k+1}$.

Por la sub-homogeneidad del cálculo funcional sobre X con elementos de $AC^{(k+1)}$ tenemos que, si $\xi \in X$,

$$\|\psi_j^a(A)\xi\| = \|g_\lambda(a^{-j}A)f_\lambda(a^{-j}A)\xi\| \leq C\|f_\lambda(a^{-j}A)\xi\|,$$

de donde

$$\begin{aligned} (a-1) \sum_{j=1}^\infty a^{j\theta q} \|\psi_j^a(A)\xi\|^q &\leq C^q \sum_{j=1}^\infty a^{j\theta q} \int_1^a \|f(a^{-j}\lambda A)\xi\|^q d\lambda \\ &\leq a^{\theta q+1} C^q \sum_{j=1}^\infty \int_{a^{-j}}^{a^{-j+1}} t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t} \leq C \int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

(notemos que $\|f(sA)\xi\|$ es continua en s , en particular es medible).

Para la desigualdad inversa adaptamos el argumento dado en [8, Theorem 5.1]. Sea $b > 1$ y consideremos ψ_j^b como antes. Tomando $\varphi \in C_c^{(k+1)}(\mathbb{R})$ con $\varphi(u) = 1$ en (b^{-1}, b) tenemos que $\varphi\psi^b = \psi^b$. Si $f(u) = u^m h(u)$ con $h \in AC^{(k+1)}$ entonces, para todo $t > 0, \|f(tA)\psi_j^b(A)\xi\| = t^m b^{jm} \|h(tA)(b^{-j}A)^m \varphi(b^{-j}A)\psi_j^b(A)\xi\| \leq C t^m b^{jm} \|\psi_j^b(A)\xi\|$, siendo la desigualdad (con C independiente de t y de j) consecuencia de la sub-homogeneidad del $AC^{(k+1)}$ -cálculo. Por otra parte, y por la

misma razón, $\|f(tA)\psi_j^b(A)\xi\| \leq C\|\psi_j^b(A)\xi\|$. En definitiva, se mejora la cota como $\|f(tA)\psi_j^b(A)\xi\| \leq C \min\{1, t^m b^{jm}\}\|\psi_j^b(A)\xi\|$.

Ahora, puesto que $\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^b(A)\xi$ en X (véase [13, p. 121]), resulta que para cada $t \in (b^{-k-1}, b^{-k})$,

$$\|f(tA)\xi\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|f(tA)\psi_j^b(A)\xi\| \leq C \sum_{j=0}^k t^m b^{jm} \|\psi_j^b(A)\xi\| + C \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\psi_j^b(A)\xi\|$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{b^{-k-1}}^{b^{-k}} \left(\sum_{j=0}^k t^{m-\theta} b^{jm} \|\psi_j^b(A)\xi\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} t^{-\theta} \|\psi_j^b(A)\xi\| \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C(\log b)^{\frac{1}{q}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k b^{(\theta-m)(k-j)} b^{\theta j} \|\psi_j^b(A)\xi\| \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + C(\log b)^{\frac{1}{q}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} b^{-\theta(j-k)} b^{\theta j} \|\psi_j^b(A)\xi\| \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C(\log b)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} b^{(\theta-m)k} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b^{\theta j q} \|\psi_j^b(A)\xi\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b^{-\theta k} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b^{\theta j q} \|\psi_j^b(A)\xi\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq C \left(\sum_{j=0}^{\infty} b^{\theta j q} \|\psi_j^b(A)\xi\|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

verificándose la penúltima desigualdad por convolución $l_1 - l_q$ de las sucesiones correspondientes.

Además

$$\begin{aligned} & \left(\int_1^{\infty} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t^{1+\theta q}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sup_{t>0} \|f(tA)\xi\| \right) \left(\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\theta q}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|\xi\| \\ & \leq C \left(\sum_{j=0}^{\infty} b^{-j\theta q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b^{j\theta q} \|\psi_j^b(A)\xi\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{j=0}^{\infty} b^{j\theta q} \|\psi_j^b(A)\xi\|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

donde q' es tal que $1/q + 1/q' = 1$.

Por último obsérvese que, dada f como en el enunciado, no idénticamente nula, para $[c, d]$ en el interior del soporte de f , con λ cumpliendo $c < \lambda < d$, y a tal que $1 < a < \min\{\lambda c^{-1}, \lambda^{-1}d\}$ se tiene que $[a^{-1}, a]$ queda en el interior del soporte de f_λ , y que $\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f_\lambda(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t} \sim \int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t}$. \square

Observaciones.

(1) En la demostración del teorema se prueba de hecho que otra norma equivalente a $\|\xi\|_{\theta,q}$ en el espacio de Besov $B^{\theta,q}(X)$ es la dada por

$$\|\xi\|_X + \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

A propósito, una consecuencia del teorema es que las anteriores expresiones, usando $f \in AC_1^{(k+1)}$, con o sin el supremo en $0 \leq s \leq t$, son también normas de *interpolación* (siempre que se satisfaga la propiedad \mathcal{R}_α) [2].

(2) El caso $q = \infty$ también entra en el enunciado del teorema sin más que cambiar las normas L^q integrales con respecto a la medida $\frac{dt}{t}$ por la del supremo en $t > 0$, como es usual.

(3) Entre las funciones a las cuales se aplica el teorema, es decir, aquellas f de $AC_1^{(k+1)}$ tales que $u^{-m}f(u) \in AC^{(k+1)}$, tenemos los siguientes ejemplos : $f_1 = (\exp(-u) - 1)^m$, $f_2 = \exp(-u^m) - 1$, $f_3 = u^m \exp(-u)$, $f_4 = u^{2m} \exp(-u^2)$, y otras semejantes.

Eso es muy claro con f_3 y f_4 . Que $g(u) = \frac{\exp(-u)-1}{u} \in AC^{(k+1)}$, puede verse usando su desarrollo de Taylor en $u = 0$ para la finitud de la integral \int_0^1 , y directamente para la de \int_1^∞ . Entonces $u^{-m}f_1(u) = g(u)^m \in AC^{(k+1)}$ por ser $AC^{(k+1)}$ álgebra. Por otro lado, como $AC^{(k+1)}$ es invariante por transformaciones $u \mapsto u^m$, se sigue que $u^{-m}f_2(u) = g(u^m) \in AC^{(k+1)}$.

Los anteriores ejemplos dan lugar a las funciones de operador $f(A)$ usualmente consideradas en las diversas definiciones, clásicas o abstractas, de espacios de Besov siempre que $-A$ genere un conveniente semigrupo (holomorfo) de operadores. Este es el caso bajo la hipótesis que estamos asumiendo, a saber, la condición \mathcal{R}_α de acotación uniforme de las medias de Riesz asociadas a A . Pues $e^{-z(\cdot)} \in AC^{(k+1)}$, $\Re z > 0$, y así el cálculo funcional define un C_0 -semigrupo holomorfo generado por $-A$ (comprobación sencilla). De esta forma el teorema anterior prueba *directamente* que $\text{Lip}_{\theta,q}(X) = B^{\theta,q}(X)$, y para operadores no necesariamente positivos. En particular esto se aplica a espacios de Besov $B_p^{\theta,q}(\mathcal{M})$ definidos sobre variedades de Riemann compactas \mathcal{M} o grupos de Lie estratificados $\mathcal{M} = G$, a partir de semigrupos $T_t = e^{-t\mathcal{L}}$ en L^p generados por algún sub-laplaciano \mathcal{L} «natural» sobre la variedad \mathcal{M} ó grupo G .

Es decir, y permítase la insistencia en este punto, la equivalencia de las condiciones

$$\int_0^\infty t^{-\theta q} \|(e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}} - I)^m \xi\|^q \frac{dt}{t} < \infty,$$

si $m > \theta$, por un lado;

$$\int_0^\infty (t^{m-\theta} \|(\sqrt{\mathcal{L}})^m e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}} \xi\|)^q \frac{dt}{t} < \infty,$$

si $m > \theta$, ó

$$\int_0^\infty (t^{m-\frac{\theta}{2}} \|\mathcal{L}^m e^{-t\mathcal{L}} \xi\|)^q \frac{dt}{t} < \infty,$$

si $m > \theta/2$, por otro; y finalmente

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\theta q} \|\psi_j(\mathcal{L})\xi\|^q < \infty,$$

habitualmente consideradas en la literatura ([4], [6], [8], [10]) es consecuencia transparente del teorema, tomando f_1, f_2 y f_3 en las respectivas integrales. Notemos que esto genera de manera sencilla teoremas de multiplicadores en espacios de Besov sobre grupos estratificados [13, p. 129].

(4) Las normas (equivalentes) en $B^{\theta,q}(X)$ dadas por expresiones integrales del tipo $\|\xi\|_X + \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$, admiten una escritura compacta, mediante el uso de operadores potenciales de Bessel.

Corolario 2.2. *Supóngase que $m > \theta > 0$, y $1 \leq q < \infty$. Entonces*

$$\eta(\xi) := \left(\int_0^\infty t^{(m-\theta)q} \|(I+A)^m e^{-tA}\xi\|^q e^{-t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$\xi \in X$, es una norma en $B^{\theta,q}(X)$ equivalente a $\|\xi\|_{\theta,q}$.

Demostración. La función $u \mapsto (1+u)^m(1+u^m)^{-1}$ pertenece a $AC_1^{(k+1)}$, $k > \alpha$, de donde se sigue que $\|(I+A)^m e^{-tA}\xi\| \leq C\|(I+A^m)e^{-tA}\xi\|$ y por tanto,

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &\leq C \left(\int_0^\infty t^{(m-\theta)q} \|e^{-tA}\xi\|^q e^{-t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + C \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q e^{-t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C\Gamma((m-\theta)q)^{\frac{1}{q}} \sup_{t>0} \|e^{-tA}\xi\| + C \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \sim \|\xi\|_{\theta,q}, \end{aligned}$$

por el teorema, siendo $f(u) = u^m e^{-u}$.

Recíprocamente, también la función $u \mapsto u^m(1+u)^{-m}$ está en $AC_1^{(k+1)}$, $k > \alpha$, y por eso $\|f(tA)\xi\| \leq C t^m \|(I+A)^m e^{-tA}\xi\|$. Haciendo entonces como en el teorema, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_0^1 t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + C\|\xi\|_X \\ &\leq C \left(\int_0^1 t^{(m-\theta)q} \|(I+A)^m e^{-tA}\xi\|^q e^{-t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + C\|\xi\|_X. \end{aligned}$$

Además, puesto que

$$(I+A)^{-m}\xi = \int_0^\infty t^m e^{-t} e^{-tA}\xi \frac{dt}{t},$$

resulta

$$\xi = \int_0^\infty t^\theta e^{-t/q'} t^{-1/q'} t^{(m-\theta)} e^{-t/q} t^{-1/q} (I+A)^m e^{-tA}\xi dt,$$

si $(q')^{-1} + q^{-1} = 1$. Utilizando la desigualdad de Hölder si $q > 1$, o sacando el supremo correspondiente si $q = 1$, tenemos

$$\|\xi\|_X \leq \Gamma(q'\theta)^{1/q'} \left(\int_0^\infty t^{(m-\theta)q} \|(I+A)^m e^{-tA}\xi\|^q e^{-t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

La descripción del espacio de Besov sobre \mathbb{R}^n , mediante la norma integral definida por los potenciales de Bessel del laplaciano Δ (o equivalentemente, su raíz cuadrada), parece que es debida a Flett [5]. El mismo resultado, para sublaplacianos sobre grupos estratificados, fue demostrado por Saka [10]. Ambos teoremas son consecuencia del corolario anterior.

3. ESPACIO DE BESOV SOBRE EL GRUPO DE HEISENBERG

Si el operador A tiene espectro discreto, con multiplicidades de los valores propios finitas, entonces los desarrollos ortogonales sobre H , originados a partir de su descomposición espectral, pueden tomarse alternativamente como base para la definición de los espacios de Besov en X asociados a A . Todas las familias ortogonales clásicas tienen cabida en este contexto, generando así su correspondiente espacio de Besov [13, p. 153], [9]. Vamos a seguir ese orden de ideas para describir espacios de Besov sobre el grupo de Heisenberg \mathbb{H}^n mediante las funciones de Hermite generalizadas.

Recordemos que el grupo de Heisenberg es $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con la operación $(z, t) \cdot (w, s) = (z + w, \frac{1}{2}\Im(z \cdot \bar{w}) + t + s)$. Considerado en \mathbb{H}^n , \mathbb{C}^n se llama *espacio de fases* y su estructura viene delimitada por la convolución «de torsión»

$$g \times h(z) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z - w)h(w)^{(i/2)\Im(z \cdot \bar{w})} dw,$$

para la cual $L_1(\mathbb{C}^n)$ es un álgebra *no conmutativa*.

La familia de funciones de Hermite en \mathbb{R}^n se define mediante $\Phi_\mu = h_{\mu_1} \otimes \dots \otimes h_{\mu_n}$, si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n$, donde $h_k(t) = c_k \frac{d^k}{dt^k} [e^{-t^2}] e^{t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (c_k es una constante de normalización). Se llama *función de Hermite generalizada* $\Phi_{\mu,\nu}$, sobre \mathbb{C}^n , a la transformada de Fourier-Wigner de Φ_μ y Φ_ν , es decir,

$$\Phi_{\mu,\nu}(z) = (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot u} \Phi_\mu\left(u + \frac{y}{2}\right) \Phi_\nu\left(u - \frac{y}{2}\right) du,$$

si $z = x + iy$.

Espacio de Besov sobre el espacio de fases.

El operador diferencial elíptico $L = \Delta_z + \frac{|z|^2}{4} - i \sum_{j=1}^n (x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j})$ satisface la propiedad \mathcal{R}_α con $\alpha > n - \frac{1}{2}$ [11, p. 152], y su espectro es $\{\lambda_k = 2k + n : k = 0, 1, 2, \dots\}$, siendo el espacio N_k de vectores propios asignado a λ_k de dimensión infinita y con base ortonormal $\{\Phi_{\mu,\nu} : |\nu| = k, \mu \in \mathbb{N}_0^n\}$. Denotamos la proyección de $H = L_2(\mathbb{C}^n)$ sobre N_k mediante P_k y como $c_{\mu,\nu}$ los coeficientes de Fourier ($f | \Phi_{\mu,\nu}$), dada f en $L_2(\mathbb{C}^n)$. Se tiene

$$\begin{aligned} P_k f &= \sum_{|\nu|=k} \sum_{\mu} c_{\mu,\nu} \Phi_{\mu,\nu} \\ &= \sum_{|\nu|=k} f \times \Phi_{\nu,\nu} = f \times \sum_{|\nu|=k} \Phi_{\nu,\nu} = (2\pi)^{-n/2} f \times \varphi_k, \end{aligned}$$

donde φ_k es la función de Laguerre $\varphi_k = L_k^{n-1}(|z|^2/4)e^{-|z|^2/4}$ [12, p. 20]. Por tanto

$$f = \sum_{\mu} \sum_{\nu} c_{\mu,\nu} \Phi_{\mu,\nu} = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} f \times \varphi_k$$

y de aquí que para cada j la descomposición espectral de $\psi_j(L)f$ sea

$$\psi_j(L)f = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j(2k+n) \sum_{|\nu|=k} \sum_{\mu} c_{\mu,\nu} \Phi_{\mu,\nu} = \sum_{2^{j-1} < \lambda_k < 2^{j+1}} \psi_j(2k+n)f \times \varphi_k.$$

Por densidad tenemos que la anterior igualdad se verifica para todo $f \in L_p(\mathbb{C}^n)$, si $1 \leq p < \infty$ ($f \in C_0(\mathbb{C}^n)$ si $p = \infty$). Esta sencilla observación genera el siguiente corolario. Por $B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ entendemos el espacio de Besov sobre el espacio de fases $B^{\theta,q}(L_p(\mathbb{C}^n))$.

Corolario 3.1. $B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ está formado por las funciones de $L_p(\mathbb{C}^n)$ que verifican

$$\left[\sum_0^{\infty} 2^{j\theta q} \left(\int_{\mathbb{C}^n} \left| \sum_{2^{j-1} < \lambda_k < 2^{j+1}} \psi_j(2k+n)f \times \varphi_k(z) \right|^p dz \right)^{-\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

De hecho, la expresión que antecede coincide con la norma de $B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ definida por la descomposición $\{\psi_j\}$.

En el corolario el espacio de Besov está descrito en términos de las funciones de Laguerre. Las expansiones ortogonales vienen «encriptadas» en la convolución con aquellas. Si queremos que las funciones de Hermite generalizadas aparezcan explícitamente topamos con el problema de que $\sum_{\mu} c_{\mu,\nu} \Phi_{\mu,\nu}$ no tiene por qué converger en $L_p(\mathbb{C}^n)$. Entonces procedemos como sigue.

Sea \mathcal{H}_f el espacio de combinaciones lineales finitas de funciones de Hermite generalizadas.

Corolario 3.2. Para todo $\theta > 0$ y $1 \leq p, q < \infty$, $\mathcal{H}_f \subseteq B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$. Más aún, $B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ es la completación de \mathcal{H}_f en la norma

$$\left[\sum_0^{\infty} 2^{j\theta q} \left\| \sum_{2^{j-1} < \lambda_k < 2^{j+1}} \psi_j(2k+n) \sum_{|\nu|=k} \sum_{\mu \text{ finito}} c_{\mu,\nu} \Phi_{\mu,\nu} \right\|_p^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. Del hecho de que $h(\mathcal{L})\Phi_{\mu,\nu} = h(2|\nu|+n)\Phi_{\mu,\nu}$ para todo $h \in AC^{(k+1)}$ se deduce que $\mathcal{H}_f \subseteq B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ y que \mathcal{H}_f es $\rho_u(A)$ -invariante. Además \mathcal{H}_f es denso en $L_p(\mathbb{C}^n)$ [12, p. 23]. Entonces el enunciado se sigue del Lema 1.2. \square

Espacio de Besov sobre el grupo de Heisenberg.

Sobre el grupo de Heisenberg \mathbb{H}^n existe un único (salvo constante) operador diferencial invariante por traslaciones a izquierda y por rotaciones, y homogéneo de grado 2. Este operador, denotado por \mathcal{L} , se llama *sublaplaciano de Kohn* en \mathbb{H}^n . Está estrechamente ligado al operador L considerado antes y, aunque no es elíptico, satisface buenas estimaciones subelípticas. El espectro de \mathcal{L} viene determinado por las representaciones irreducibles de \mathbb{H}^n sobre \mathbb{R}^n , o representaciones de Schrödinger $(\pi_{\lambda})_{\lambda>0}$, dadas por $\pi_{\lambda}(z, t)\varphi(u) = e^{i\lambda t} e^{i\lambda(x \cdot u + \frac{1}{2}x \cdot y)}\varphi(u + y)$, si $(z, t) \in \mathbb{H}^n$, $\varphi \in$

$L_2(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{R}^n$. Entonces, via el paso por la colección de operadores de Hermite escalonados $\pi_\lambda(\mathcal{L}) \equiv \Delta + \lambda^2 \|\cdot\|^2$, se ve que las funciones-vectores propios de \mathcal{L} son $e^{i\lambda t} \Phi_{\mu,\nu}(\sqrt{\lambda}z)$ de correspondientes valores propios $(2|\mu| + n)\lambda$. De manera que $\sigma(\mathcal{L})$ es $[0, \infty)$ «descompuesto» en rayos k -ésimos $\varrho_k = \{(2k + n)\lambda : \lambda \neq 0\}$. Es pues una parte discreta de rayos continuos. Para el análisis espectral del laplaciano \mathcal{L} la herramienta básica es la noción de proyección espectral sobre cada rayo k -ésimo

$$Q_k : f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f * e_k^\lambda d\beta(\lambda), \quad L_2(\mathbb{H}^n) \rightarrow \varrho_k.$$

En la fórmula de Q_k , la convolución $f * e_k^\lambda$ es respecto al grupo \mathbb{H}^n , $e_k^\lambda(z, t) := e^{i\lambda t} \varphi_k(\sqrt{|\lambda|}z)$ para cada $(z, t) \in \mathbb{H}^n$, donde $\varphi_k(w) = (2\pi)^{n/2} \sum_{|\mu|=k} \Phi_{\mu,\mu}(w)$, $w \in \mathbb{C}^n$, y β es la medida sobre \mathbb{R} dada por $d\beta(\lambda) = (2\pi)^{-n-1} |\lambda|^n d\lambda$.

Tenemos entonces que la descomposición L_2 de f viene dada como

$$f(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f * e_k^\lambda(z, t) d\beta(\lambda)$$

y que también

$$\psi_j(A)f = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j((2k + n)|\lambda|) f * e_k^\lambda d\beta(\lambda)$$

para todo $j = 0, 1, \dots$. Si se quiere tratar con descomposiciones L_p se debe resolver primeramente la cuestión de que las proyecciones Q_k no están directamente definidas sobre $L_p(\mathbb{H}^n)$. Un análisis detallado del problema revela que Q_k es un operador del tipo Calderón-Zygmund, lo que ciertamente permite extenderlo a todo $L_p(\mathbb{H}^n)$ como operador acotado, pero *tenemos* que restringirnos a considerar $1 < p < \infty$, prescindiendo de los valores $p = 1$ ó ∞ . Más aún, la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j((2k + n)|\lambda|) f * e_k^\lambda d\beta(\lambda)$ define un operador acotado sobre $L_p(\mathbb{H}^n)$ (ver [12, p. 61]).

En segundo lugar, está la cuestión de la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty}$. Para esto nos apoyamos en [12, p. 65].

Sea \mathcal{Q}_f el subespacio de $L_p(\mathbb{H}^n)$ formado por las funciones que se escriben como $\sum_{k=1}^N c_k Q_k h$, $h \in L_p(\mathbb{H}^n)$ y denotemos por $B_p^{\theta,q}(\mathbb{H}^n)$ el espacio de Besov sobre \mathbb{H}^n asociado al laplaciano de Kohn \mathcal{L} .

Corolario 3.3. *Para cada $\theta > 0$, $1 < p < \infty$, y $1 \leq q < \infty$, $Q_k f \in B_p^{\theta,q}(\mathbb{H}^n)$ para toda $f \in L_p(\mathbb{H}^n)$. Más aún, $B_p^{\theta,q}(\mathbb{H}^n)$ es la completación de \mathcal{Q}_f en la norma*

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\theta q} \left\| \sum_{k \text{ finito}} \int_{2^{j-1} < |\lambda| < 2^{j+1}} \psi_j((2k + n)|\lambda|) f * e_k^\lambda d\beta \right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. Por [12, Corollary 2.2.6] \mathcal{Q}_f es denso en $L_p(\mathbb{H}^n)$. Además, si $k = 0, 1, \dots$, y $u > 0$ entonces

$$\rho_u(\mathcal{L})Q_k h = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_u((2k + n)|\lambda|) h * e_k^\lambda d\beta(\lambda) = Q_k M h,$$

según [12, p. 61], donde $Mh \in L_p(\mathbb{H}^n)$, por ser $\lambda \rightarrow \rho_u((2k+n)|\lambda|)$ un L_p -multiplicador acotado sobre \mathbb{R}^n . Tenemos que $Q_k h$ es $\rho_u(\mathcal{L})$ -invariante. El resto se sigue del Lema 1.2. \square

REFERENCIAS

- [1] H. Bahouri, P. Gérard y C.-J. Xu, Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg, *J. Anal. Math.* **82** (2000), 93–118.
- [2] P. L. Butzer y H. Berens, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer-Verlag, Nueva York, 1967.
- [3] P. L. Butzer, R. J. Nessel y W. Trebels, Multipliers with respect to spectral measures in Banach spaces and approximation I, *J. Approx. Theory* **8** (1973), 335–356.
- [4] T. Coulhon y L. Saloff-Coste, Semi-groupes d'opérateurs et espaces fonctionnels sur les groupes de Lie, *J. Approx. Theory* **65** (1991), 176–199.
- [5] T. M. Flett, Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3) **22** (1971), 385–451.
- [6] G. B. Folland, Lipschitz classes and Poisson integrals on stratified groups, *Studia Math.* **66** (1979), 37–55.
- [7] J. E. Galé y T. Pytlik, Functional calculus for infinitesimal generators of holomorphic semi-groups, *J. Funct. Anal.* **150** (1997), 307–355.
- [8] A. Jensen y S. Nakamura, Mapping properties of functions of Schrödinger operators between L^p spaces and Besov spaces, en *Spectral and scattering theory and applications*, Adv. Stud. Pure Math. **23**, Math. Soc. Japan, Tokio (1994), 187–209.
- [9] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces equations*, Duke Univ. Math. Series **1**, Duke University, Durham, N.C., 1976.
- [10] K. Saka, Besov spaces and Sobolev spaces on nilpotent Lie groups, *Tôhoku Math. J.* **31** (1979), 383–437.
- [11] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, Mathematical Notes **42**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
- [12] S. Thangavelu, *Harmonic analysis on the Heidenberg group*, Progress in Mathematics **159**, Birkhäuser Boston, Boston, 1998.
- [13] H. Triebel, *Fourier analysis and function spaces*, Teubner, Leipzig, 1977.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS,
CIUDAD UNIVERSITARIA S/N, 50009 ZARAGOZA, SPAIN
Correo electrónico: gale@posta.unizar.es

EL FRACTAL DE CHICHO

MANUEL BENITO, JOSÉ M. GUTIÉRREZ Y VÍCTOR LANCHARES

ABSTRACT. The aim of this communication is to present some properties of a fractal object Chicho was thinking about. The fractal is obtained by iteration of a complex function that defines an iterative process which is an implicit version of that generates the well-known Mandelbrot set.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los procesos iterativos que derivan de la aplicación sucesiva de una función en el plano complejo se enmarca dentro de lo que denominamos sistemas dinámicos discretos [2]. El objetivo principal es entender, para cada punto, el comportamiento a largo plazo del proceso iterativo. De esta forma, si T es una cierta función de \mathbb{C} en \mathbb{C} , se pretende entender cuál es el comportamiento de la sucesión $\{T^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ para cada $z \in \mathbb{C}$, que se denomina órbita de z por T . A partir de aquí llegamos a lo que se denomina conjunto de Julia: el subconjunto de puntos z de \mathbb{C} para los cuales la órbita de z por T está acotada [6].

Los conjuntos de Julia son sorprendentemente complejos incluso para funciones relativamente simples como son las cuadráticas. Es precisamente la familia de funciones cuadráticas $Q_c(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$ la que ha dado lugar a numerosos trabajos de investigación [1], [5], [9], y a partir de la cual surge el conocido conjunto de Mandelbrot [4], [7], [8]. Se denomina conjunto de Mandelbrot, \mathcal{M} , al subconjunto de \mathbb{C} formado por los números c para los cuales la órbita de 0 por Q_c está acotada, es decir, la sucesión $\{Q_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. Además \mathcal{M} es el conjunto de puntos $c \in \mathbb{C}$ para los cuales el correspondiente conjunto de Julia es conexo.

Si escribimos $z = x + iy$ y $c = a + ib$, la sucesión de puntos $\{Q_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene dada en forma recursiva por

$$(1) \quad x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n + b, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

Para la misma se conocen numerosas propiedades, entre las cuales destaca la de que la sucesión es acotada sólo si $|c| \leq 2$, o lo que es lo mismo, el conjunto de Mandelbrot se encuentra dentro del disco de centro el origen y radio 2.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 37F45.

Key words and phrases. Mandelbrot set, iteration of functions, fractal images.

El primer autor disfruta, durante el curso 2000–01, de una licencia de estudios otorgada por la Consejería de Educación, Cultura, Juventud y Deportes del Gobierno de La Rioja.

El segundo autor agradece la financiación recibida a través del proyecto DGES PB98-0198.

El tercer autor agradece la financiación recibida a través del proyecto DGES PB98-1576.

Consideremos ahora la siguiente variante implícita de la sucesión (1) propuesta por Chicho y uno de los autores en un reciente trabajo [3]:

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \quad y_{n+1} = 2x_{n+1}y_n + b, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

La sucesión (2) corresponde a la función

$$T_{a+ib}(x + iy) \equiv T(x, y) = (x^2 - y^2 + a, 2(x^2 - y^2 + a)y + b),$$

que es una modificación de la función $Q_c(z) = z^2 + c$ de la que resulta el conocido conjunto de Mandelbrot. Así, podemos preguntarnos por las propiedades del subconjunto de \mathbb{C} formado por los c para los cuales la órbita de 0 por T_c está acotada. A este conjunto lo denominaremos *conjunto de Chicho* y lo denotaremos como \mathcal{CH} .

Dado que la función T_c es ahora cúbica y no cuadrática, el decidir si el conjunto de Chicho está contenido en algún disco de radio finito no resulta evidente en absoluto. No obstante, se pueden establecer algunas propiedades elementales sobre esta cuestión, aunque sin llegar a decidir si \mathcal{CH} está o no acotado.

En lo que sigue presentamos alguna de estas propiedades y damos también una representación gráfica del conjunto de Chicho. Somos conscientes de que pueden establecerse otras muchas propiedades y de que es posible que puedan surgir interesantes conexiones con otros campos de las Matemáticas. Baste decir que los únicos puntos donde T_c cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, están situados sobre una de las rectas $x = \frac{1}{2}$ ó $y = 0$, al igual que lo que afirma la conjetura de Riemann sobre los ceros de la función *zeta*.

PROPIEDADES

La primera propiedad del conjunto de Chicho \mathcal{CH} es heredada del conjunto de Mandelbrot. Ella se refiere al comportamiento de la órbita de 0 por T_c cuando $c \in \mathbb{R}$. En efecto, si λ es un número real, la sucesión $\{T_\lambda^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que resulta ser la misma que la definida por Q_λ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Si llamamos $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a esta sucesión

$$(3) \quad u_n = T_\lambda^n(0) = u_{n-1}^2 + \lambda, \quad u_1 = \lambda,$$

entonces

Propiedad 1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada si y sólo si $-2 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$.

Demostración. Para ello observemos que si la sucesión tiene límite ℓ , éste verificará, teniendo en cuenta (3),

$$\ell^2 - \ell + \lambda = 0,$$

y por tanto

$$(4) \quad \ell = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}.$$

Es decir, si la sucesión tiene límite ha de ser $\lambda \leq \frac{1}{4}$.

Sea $\lambda > 0$ entonces, $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, y además

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 + \lambda) - (u_{n-1}^2 + \lambda) = (u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}),$$

siendo

$$u_2 - u_1 = u_1^2 > 0.$$

Así, es inmediato probar, por inducción, que la sucesión es monótona creciente en sentido estricto.

- Si $\lambda > \frac{1}{4}$ como la sucesión no tiene límite y es estrictamente creciente no puede estar acotada y por lo tanto resulta

$$u_n = T_\lambda^n(0) \longrightarrow +\infty.$$

- Si $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$ podemos ver que la sucesión está acotada superiormente. En efecto, $u_1 < \frac{1}{2}$ y supongamos que $u_n \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$u_{n+1} = u_n^2 + \lambda \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto la sucesión tiene límite y éste viene dado por (4) tomando el signo $-$ ya que

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} > \frac{1}{2} \quad \text{para } \lambda \neq \frac{1}{4}.$$

Sea, ahora, $-2 \leq \lambda \leq 0$; entonces la sucesión está acotada. En efecto, por un lado se verifica

$$u_1 = \lambda \implies -|\lambda| \leq u_1 \leq |\lambda|.$$

Por otro lado, supongamos que $-|\lambda| \leq u_n \leq |\lambda|$, entonces

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n^2 - |\lambda| \leq |\lambda|^2 - |\lambda| = |\lambda|(|\lambda| - 1) \leq |\lambda|, \\ u_{n+1} &= u_n^2 - |\lambda| \geq -|\lambda|, \end{aligned}$$

es decir, $-|\lambda| \leq u_{n+1} \leq |\lambda|$ y por tanto la sucesión está acotada.

Si, finalmente, $\lambda < -2$, se tiene

$$u_2 = u_1^2 - |\lambda| = |\lambda|^2 - |\lambda| = |\lambda|(|\lambda| - 1) \geq |\lambda|$$

y, por inducción, $u_n \geq |\lambda|, \forall n > 1$. Además, $u_2 - u_1 > 0$ y, puesto que

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}),$$

resulta inmediato ver que la sucesión es monótona creciente en sentido estricto. Ahora bien, si la sucesión estuviera acotada superiormente el límite tendría que venir dado por (4), pero se cumple, para $\lambda < -2$,

$$|\lambda| \geq \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2},$$

por lo que el límite no puede existir y, en consecuencia,

$$u_n = T_\lambda^n(0) \longrightarrow +\infty.$$

□

Con esto sabemos localizar el conjunto de Chicho sobre el eje real, pero falta ver cómo es este conjunto fuera del mismo. En este sentido sería interesante el poder establecer alguna cota para el conjunto, como existe para el de Mandelbrot. Esta cuestión no parece de fácil resolución, no obstante, podemos acotar el conjunto de puntos $c \in C$ para los cuales la sucesión $\{T_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene como límite un punto. Esto puede hacerse a partir de los puntos fijos de la aplicación T_c que define el conjunto \mathcal{CH} , ya que si la órbita de 0 tiene como límite un punto, éste necesariamente debe ser un punto fijo, siempre que éste sea atractor. De esta manera podemos establecer la siguiente propiedad:

Propiedad 2. *El conjunto de puntos $c = a + bi \in \mathbb{C}$ para los cuales la función T_c tiene un punto fijo atractor se sitúa en el interior de la curva*

$$(r^2 - 2)r \cos 2\theta - 2r - r^3 + 8 \cos \theta \\ = r |\sin \theta| \sqrt{2(8 + 4r^2 + r^4 - 16r \cos \theta - r^2(r^2 - 4) \cos 2\theta)},$$

donde $a = (1 - r^2 \cos 2\theta)/4$ y $b = (r^2 \sin 2\theta)/4$.

Demostración. Los puntos fijos de la aplicación

$$T_{a+ib}(x + iy) = (x^2 - y^2 + a, 2(x^2 - y^2 + a)y + b)$$

vienen determinados por las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a = x, \\ 2xy + b = y, \end{cases}$$

que resultan ser las mismas que las que surgen de la aplicación Q_c , es decir, que son las mismas ecuaciones que las de los puntos fijos del conjunto de Mandelbrot.

Siguiendo los mismos pasos que para calcular los puntos fijos de Q_c , realizamos los siguientes cambios de variables:

$$x - 1/2 = u, \quad y = v, \quad 1 - 4a = \alpha, \quad 4b = \beta,$$

con lo que el sistema se transforma en

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = \alpha/4, \\ 8uv = -\beta. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos dos puntos fijos:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{4}, -\frac{\beta}{2\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} \right), \\ P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{4}, \frac{\beta}{2\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} \right).$$

Para dilucidar si un punto fijo es o no atractor debe verificarse que la norma 2 de la matriz jacobiana, evaluada en dicho punto, es menor que 1. Es decir, tiene que

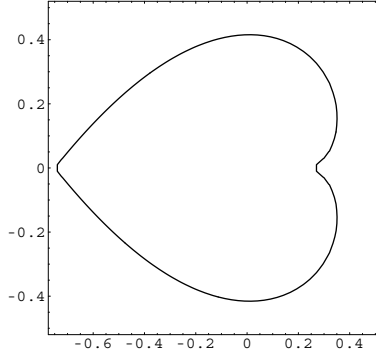


FIGURA 1. Región donde T_c tiene un punto fijo atractor.

verificarse que el radio espectral de la matriz $J^T J$ es menor que 1 en el punto fijo, siendo J la matriz jacobiana de la aplicación T_c .

Denotemos por $\hat{T}_c(u, v)$ a la aplicación obtenida tras aplicar los cambios de variable anteriores a la función $T_c(x, y)$, entonces la matriz jacobiana de \hat{T}_c es

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 2u + 1 & -2v \\ 2v(2u + 1) & 2(u + 1/2)^2 - 6v^2 + (1 - \alpha)/2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $J^T J$ resultan ser

$$\lambda_1 = p - \sqrt{p^2 - (1 + 2u)^4}, \quad \lambda_2 = p + \sqrt{p^2 - (1 + 2u)^4},$$

con $p = (1 + 2u)^2 + 4v^2(u + 2u^2 + 2v^2) > 0$. Así, se tiene que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ y además

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(J^T J) = (1 + 2u)^4.$$

Si algún punto fijo es atractor, se debe cumplir $\lambda_1 \lambda_2 < 1$. En P_1 :

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{2 + \sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{2} \right)^4 > 1,$$

luego P_1 no es atractor.

En P_2 :

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{-2 + \sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{2} \right)^4,$$

que puede ser menor que 1, luego P_2 es un posible atractor.

La condición para que P_2 sea un atractor es que en dicho punto el radio espectral de J sea menor que uno, es decir, $\lambda_2 < 1$.

Sustituyendo las coordenadas de P_2 en λ_2 , y tras realizar el cambio a coordenadas polares dado por

$$\begin{cases} \alpha = r^2 \cos 2\theta, \\ \beta = r^2 \sin 2\theta, \end{cases}$$

la condición $\lambda_2 = 1$ se traduce en la siguiente relación implícita:

$$(r^2 - 2)r \cos 2\theta - 2r - r^3 + 8 \cos \theta \\ = r |\sin \theta| \sqrt{2(8 + 4r^2 + r^4 - 16r \cos \theta - r^2(r^2 - 4) \cos 2\theta)},$$

Deshaciendo los cambios efectuados, esta ecuación se transforma en otra relación implícita en términos de las variables originales a y b cuya gráfica es la curva en forma de corazón que se muestra en la figura 1. El conjunto de puntos $a + ib$ para los cuales la función T tiene un punto fijo atractor se sitúa en el interior de dicho corazón. \square

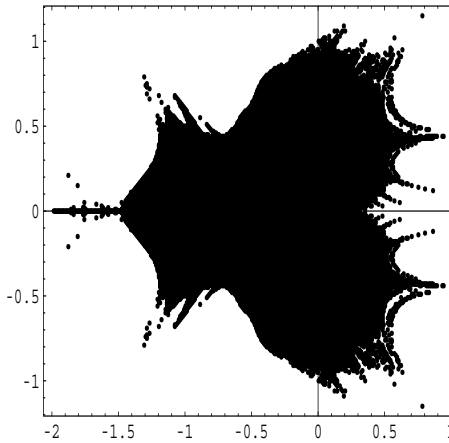


FIGURA 2. Conjunto de puntos $c \in C$ para los cuales la órbita de 0 por T_c se encuentra en el disco de centro el origen y radio 2.

Podríamos, ahora, proceder a estudiar los puntos fijos de T_c^2 y así sucesivamente con el fin de establecer los límites donde localizar las órbitas que convergen a un n -ciclo, con $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esto resulta extremadamente complejo y nos conformamos con dibujar el aspecto que presenta el conjunto de Chicho. Así, en la figura 2 están representados todos aquellos puntos para los cuales la órbita de 0 por T_c se encuentra en el disco de centro el origen y radio 2 después de 15 iteraciones. La elección de este radio es arbitraria, pero el conjunto de puntos obtenido no cambia si aumentamos el radio, por lo que parece poder conjeturarse que el conjunto de Chicho está contenido en el disco de centro el origen y radio 2 al igual que el conjunto de Mandelbrot.

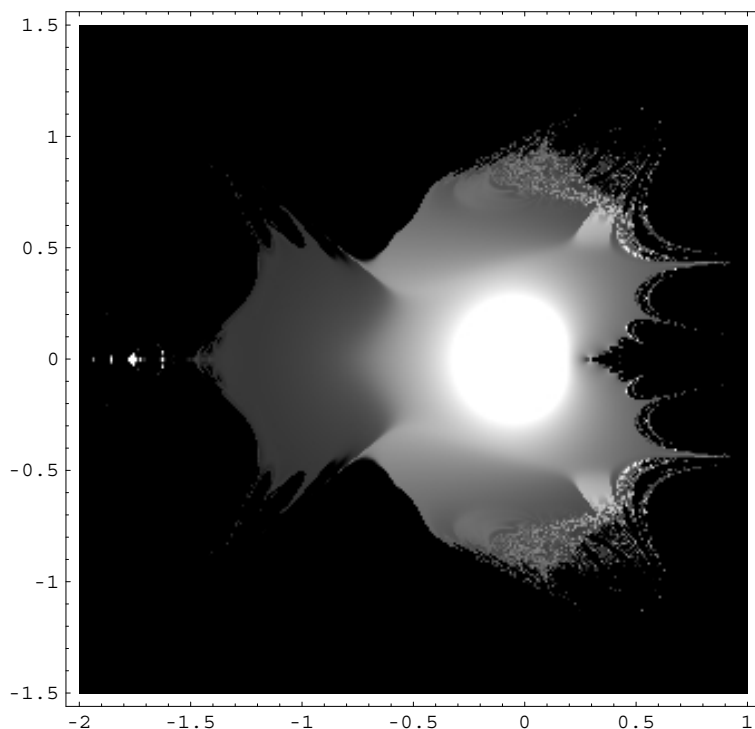


FIGURA 3. Representación del conjunto de Chicho a partir de la norma de $T_c^{15}(0)$.

A una conclusión parecida se llega si representamos el conjunto de Chicho ateniéndonos a la norma de $T_c^n(0)$ para un cierto valor de n . Si la sucesión no es convergente su norma tenderá con rapidez a infinito y será muy grande incluso para valores de n relativamente pequeños. De esta manera, si asignamos un color a cada punto del plano según sea la norma de $T_c^n(0)$ correspondiendo el color blanco a norma 0 y el color negro a norma infinito obtenemos la figura 3, donde se ha tomado $n = 15$. En esta figura podemos apreciar una zona de color blanco que está contenida en la curva que se menciona en la propiedad 2.

REFERENCIAS

- [1] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.
- [2] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, 1991.
- [3] M. Benito y J. J. Guadalupe, Dibujando mediante iteraciones, *Números* **42** (2000), 15–28.
- [4] R. L. Devaney, The Mandelbrot set, the Farey tree, and the Fibonacci sequence, *Amer. Math. Monthly* **106** (1999), 289–302.
- [5] M. de Guzmán, M. A. Martín, M. Morán y M. Reyes, *Estructuras fractales*, Labor, Barcelona, 1993.

- [6] G. Julia, Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles, *J. Math. Pures Appl.* **8** (1918), 47–245.
- [7] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman, 1977.
- [8] B. B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance and dimension*, Freeman, 1977.
- [9] H. O. Peitgen y P. H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, 1986.

INSTITUTO SAGASTA, GLORIETA DEL DOCTOR ZUBÍA S/N, 26003 LOGROÑO, SPAIN
Correo electrónico: mbenit8@palmera.pntic.mec.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VI-
VES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN
Correo electrónico: vlancha@dmc.unirioja.es, jmguti@dmc.unirioja.es

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EXTRAPOLACIÓN DE PESOS

JAVIER DUOANDIKOETXEA

ABSTRACT. The extrapolation theorem for weights due to José L. Rubio de Francia is a very useful tool in the study of weighted inequalities. In this paper we present a proof for the A_p classes which is simpler than the usually given one and include some thoughts about the extension of this proof to a more general setting.

1. INTRODUCCIÓN DESDE EL RECUERDO

La primera vez que encontré a Chicho fue hace mucho tiempo, en Jarandilla de la Vera, en 1982. Más tarde, cuando tuvimos ocasión de conocernos mejor, me empezó a parecer como un hermano mayor. Entre tanto, yo también había pasado a formar parte del pequeño grupo que tuvo la suerte de ser dirigido por José Luis Rubio de Francia, al que él ya pertenecía, así que lo de la hermandad hasta tenía una base «científica».

Cuando ya no puede ser pienso que me hubiera gustado estar con él más veces, para escucharle hablar de esto y de lo otro, porque Chicho tenía muchas cosas que contar. De vez en cuando hablábamos de las Canarias (y de la Caldera de Taburiente), que yo nunca había visitado. Coincidencias de la vida, murió mientras yo visitaba Canarias por primera vez, y cuando vea la Caldera, habré ido a La Palma para su homenaje. De matemáticas, hablamos pocas veces, pero recuerdo que alguna vez hablamos de pesos y el tema, tan ligado a José Luis Rubio de Francia y su entorno, me parece muy apropiado para dedicarle unas páginas a Chicho.

A partir del resultado de Muckenhoupt ([12]) de principios de los setenta para el operador maximal de Hardy-Littlewood, hubo cantidad de trabajos sobre desigualdades con peso: distintos operadores, caracterizaciones, propiedades, aplicaciones, nuevas demostraciones, etc. Pero destacan dos resultados básicos: factorización y extrapolación. El teorema de extrapolación es un invento de José Luis Rubio de Francia, un resultado precioso. Lo anunció en [14] y apareció completo en [15], con una prueba no constructiva que utiliza desigualdades vectoriales. Después, J. García-Cuerva dio una demostración constructiva sin pasar por la teoría vectorial ([9]), que es la manera en que ahora se presenta en la mayoría de sitios; B. Jawerth ([11]) extendió los resultados y J. L. Rubio los formuló en el marco de los retículos de Banach ([16], [17]). Hay además otras formulaciones que dejaré sin mencionar. A pesar

2000 *Mathematics Subject Classification*. 42B25, 47B38.

Key words and phrases. Weighted inequalities, extrapolation, maximal functions.

Financiado en parte por el proyecto EB051/99 de la UPV-EHU.

de todo, yo tengo la impresión de que la extrapolación no ha sido bien aprovechada (a lo mejor por eso no mereció más que una nota en [20, pág. 223]).

Para el lector que no la conozca, me parece interesante reproducir la explicación que José Luis nos dejó en [16] de cómo llegó a este teorema:

Recientemente, B. Jawerth me preguntó, transmitiendo la curiosidad en este sentido de otros investigadores en la teoría de desigualdades con peso, cómo había llegado a pensar en la posibilidad de un tal teorema de extrapolación. Mi respuesta fue que, pensando en términos abstractos (factorización de operadores, etc.) y sabiendo que hay un operador lineal (e.g., la transformada de Hilbert) que está acotada en $L^p(w)$ si y sólo si $w \in A_p$ ($1 < p < \infty$), el teorema era obvio, y de hecho, yo lo descubrí durante un viaje en autobús sin necesidad de hacer ningún cálculo, simplemente con la reflexión anterior. Dicha reflexión se basa en que las propiedades de acotación de un operador lineal se hallan contenidas en las desigualdades en espacios L^2 con pesos que tal operador satisface.

(También Poincaré contó en *Science et méthode* cómo se le ocurrió la solución a una cuestión sobre funciones fuchsianas en la que llevaba tiempo trabajando al ir a subir al autobús. Parece que en las campañas oficiales a nadie se le ha ocurrido explotar esta virtud del uso del transporte público.)

En ([3], ejercicio 1, página 43) propuse una organización de la prueba del teorema de extrapolación para pesos A_p que requiere menos trabajo conceptual y es la que aparece en [5] a sugerencia de D. Cruz-Uribe (traductor al inglés y colaborador en la revisión y puesta al día), en lugar del resultado sin pesos que aparecía en el original en castellano.

En este artículo presento en primer lugar esa demostración y discuto después su adaptación a otros operadores maximales. Creo que se ven claramente cuáles son los elementos esenciales que intervienen en un teorema de este tipo.

2. EXTRAPOLACIÓN PARA LAS CLASES A_p

Comienzo recordando definiciones posiblemente familiares para los lectores. La función maximal de Hardy-Littlewood es el promedio de la función sobre cubos que contienen al punto, es decir,

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde Q es un cubo. Se trata de estudiar los espacios de medida $L^p(\mu)$ en los que el operador está acotado o satisface una desigualdad de tipo débil. B. Muckenhoupt demostró en [12] que si M es de tipo débil (p, p) con respecto a una medida μ (por tanto, también si es fuerte), ésta tiene que ser absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue así que podemos limitarnos a hablar de su densidad w y escribiremos $L^p(w)$ el espacio de medida correspondiente.

Se dice que una función localmente integrable w está en la clase A_p para $1 < p < \infty$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty$$

y está en A_1 si

$$Mw(x) \leq Cw(x) \quad \text{c.t.p.}$$

Teorema 1 ([12]). *La condición necesaria y suficiente para que M esté acotado en $L^p(w)$ si $p > 1$, o para que sea de tipo débil (p, p) con respecto al peso w si $1 \leq p < \infty$, es que w esté en A_p .*

La demostración de este teorema, así como las propiedades de las clases A_p , se puede encontrar en los libros mencionados en la bibliografía ([5], [10], [20]). Enuncio a continuación las propiedades que usaremos en la prueba del teorema de extrapolación.

Teorema 2 (Propiedades de los pesos A_p).

1. $A_q \subset A_p, 1 \leq q < p$.
2. $w \in A_p$ si y sólo si $w^{1-p'} \in A_{p'}$.
3. Si $w_0, w_1 \in A_1$, entonces $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$.
4. Si $w \in A_p, 1 \leq p < \infty$, existe $\epsilon > 0$ tal que $w^{1+\epsilon} \in A_p$.
5. Si $w \in A_p$, existe $q < p$ tal que $w \in A_q$.
6. Si $Mu(x)$ es finito en casi todo punto, $(Mu)^s \in A_1$ para todo $0 < s < 1$.

Las tres primeras propiedades son fáciles de verificar. La cuarta y la quinta se obtienen de un resultado difícil, la desigualdad de Hölder al revés, que satisfacen los pesos A_p ; la sexta se puede probar directamente (véanse las referencias citadas).

Es interesante notar que la tercera propiedad es, en realidad, una caracterización (teorema de factorización). Pero mientras la parte enunciada se deduce inmediatamente de las definiciones, la recíproca es más difícil de probar.

Veamos a continuación el teorema de extrapolación de José Luis Rubio de Francia para las clases A_p .

Teorema 3 (Extrapolación). *Sea T un operador acotado en $L^r(w)$ para algún $r \geq 1$ y para todo peso $w \in A_r$ (con cota que sólo depende de la constante A_r de w), entonces T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_p, 1 < p < \infty$.*

Demostración. (1) Probamos primero que si $1 < q < r$ y $w \in A_1$, entonces T está acotado en $L^q(w)$. Sea $f \in L^q(w)$ y $V = Mf$. Por el teorema de Muckenhoupt V es finito en casi todo punto, luego por el apartado 6 del teorema 2, $V^{(r-q)/(r-1)}$ está en A_1 , puesto que $r - q < r - 1$, y por la propiedad 3, wV^{q-r} está en A_r . Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q w &= \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q V^{-(r-q)q/r} V^{(r-q)q/r} w \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^r w V^{q-r} \right)^{q/r} \left(\int_{\mathbf{R}^n} V^q w \right)^{(r-q)/r} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f|^r w V^{q-r} \right)^{q/r} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f|^q w \right)^{(r-q)/r} \\ &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} |f|^q w; \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se deduce de la hipótesis sobre T y del teorema de Muckenhoupt, y la tercera desigualdad de $|f(x)| \leq V(x)$ en casi todo punto y $q - r < 0$, de modo que $V(x)^{q-r} \leq |f(x)|^{q-r}$ en casi todo punto.

(2) Mostramos ahora que si $1 < p < \infty$ y q es tal que $1 < q < \min(p, r)$, T está acotado en $L^p(w)$ para $w \in A_{p/q}$. El teorema 3 se deducirá de la propiedad 5 del teorema 2.

Fijemos $w \in A_{p/q}$; por dualidad existe $u \in L^{(p/q)'}(w)$ de norma 1 tal que

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^p w \right)^{q/p} = \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q w u.$$

Para $s > 1$, $wu \leq M((wu)^s)^{1/s}$ y $M((wu)^s)^{1/s} \in A_1$. Por tanto, utilizando la primera parte de la prueba

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q w u &\leq \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q M((wu)^s)^{1/s} \\ &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} |f|^q M((wu)^s)^{1/s} \\ &= C \int_{\mathbf{R}^n} |f|^q w^{q/p} M((wu)^s)^{1/s} w^{-q/p} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f|^p w \right)^{q/p} \left(\int_{\mathbf{R}^n} M((wu)^s)^{(p/q)'/s} w^{1-(p/q)'} \right)^{1/(p/q)'}. \end{aligned}$$

Como $w \in A_{p/q}$, por la propiedad 2, $w^{1-(p/q)'}$ $\in A_{(p/q)'}$. Si ahora tomamos s suficientemente cercano a 1, $w^{1-(p/q)'}$ $\in A_{(p/q)'/s}$ por la propiedad 5. Por el teorema 1, la segunda integral se acota por

$$C \int_{\mathbf{R}^n} (wu)^{(p/q)'} w^{1-(p/q)'} = C.$$

Esto termina la prueba. \square

La ventaja de esta prueba está en que es más fácil bajar en el índice si sólo pedimos pesos A_1 y para subir utilizamos el resultado que se prueba en la primera parte y no la hipótesis directamente.

Si $s > 1$, sin más que escoger $V = (Mf^s)^{1/s}$ en la primera parte de la prueba podemos obtener una variante del teorema anterior.

Teorema 4. *Sea T un operador acotado en $L^r(w)$ para todo peso $w \in A_{r/s}$ (con cota que sólo depende de la constante del peso w), entonces T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_{p/s}$, $s < p < \infty$.*

Para dar otra variante necesitamos unas definiciones. Sea $\lambda > 1$, diremos que $w \in A_p^\lambda$ para $1 < p < \infty$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\lambda' / (\lambda' - p)} \right)^{(\lambda' - p) / \lambda'} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty,$$

y diremos que $w \in A_1^\lambda$ si $M(w^\lambda)(x) \leq Cw^\lambda(x)$ c.t.p. El siguiente teorema, que aparece en [18], se prueba como antes.

Teorema 5. *Sea $1 < r < \lambda'$ y T un operador acotado en $L^r(w)$ para todo $w \in A_r^\lambda$ (con constante que sólo depende de la constante del peso). Entonces, T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_p^\lambda$ y todo $p \in (1, \lambda')$.*

3. EXTENSIÓN A OTROS OPERADORES

Si analizamos la prueba veremos que estamos utilizando varios elementos que son exclusivos de la función maximal de Hardy-Littlewood, lo que parece restringir su uso con otros operadores.

3.1. Sobre la primera parte de la prueba. Para $f \in L^p(w)$ basta con tener $V \in L^p(w)$ que cumpla

$$|f(x)| \leq V(x) \text{ c.t.p.}, \quad MV(x) \leq CV(x) \text{ c.t.p.}, \quad \|V\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}.$$

(En realidad, $V = Mf$ no cumple la segunda condición si no se eleva a una potencia menor que uno.) Para construir una función V con estas propiedades no necesitamos tener expresamente el operador maximal de Hardy-Littlewood, cualquier operador positivo acotado en $L^p(w)$ sirve igual aplicando lo que se ha dado en llamar *algoritmo de Rubio de Francia* (terminología introducida por S. Bloom en [1]), es decir,

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} N^{-k} M^k f(x),$$

donde N es el doble de la norma de M en $L^p(w)$ y M^k es el operador obtenido al iterar k veces M .

También usamos la parte fácil de la factorización, es decir, $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$. Esta inclusión se comprueba inmediatamente a partir de la condición A_p de Muckenhoupt. ¿Podríamos conseguirla sin ella? En realidad, usamos algo menos, $w_0 w_1^{s-p} \in A_p$ para algún $s > 1$, y esto es fácil de probar por interpolación. Observemos primero que es fácil de probar que M está acotado en $L^p(w)$ si $w \in A_1$ (véase, por ejemplo, [5, teorema 2.16], [10, teorema 2.12]). Entonces, el operador $f \mapsto w_1^{-1} M(w_1 f)$ está acotado en $L^s(w_0 w_1^s)$ para $w_0 \in A_1$ y en $L^\infty(w_0 w_1^s)$, así que basta interpolar y escribir el resultado en L^p . Para repetir este argumento con otro operador positivo sólo necesitamos que esté acotado para pesos de tipo A_1 .

3.2. Sobre la segunda parte de la prueba. La elección del peso A_1 que mayor a uw la podemos hacer igualmente con el algoritmo de Rubio de Francia mencionado. Además, estamos utilizando las propiedades de dualidad y la desigualdad de Hölder inversa para recuperar la clase A_p .

Si consideramos $B_p = \{w : w^{s(1-p')} \in A_{p'} \text{ para algún } s > 1\}$, la prueba funciona directamente con esta clase de pesos. Sólo utilizamos las propiedades de las clases A_p para asegurarnos de que este conjunto coincide con A_p , de modo que a falta de éstas para otro operador distinto del maximal de Hardy-Littlewood, el teorema de extrapolación dará el resultado en la clase B_p .

3.3. Intervienen dos operadores. Sea S un operador lineal y positivo y S^* su adjunto. S está acotado en $L^1(w)$ si y sólo si $S^*w \leq Cw$ en casi todo punto y está acotado en $L^p(w)$ si y sólo si S^* está acotado en $L^{p'}(w^{1-p})$. Además, un argumento como el de más arriba prueba que está acotado en $L^p(w_0 w_1^{1-p})$ si $S^*w_0 \leq Cw_0$ y $Sw_1 \leq Cw_1$ en casi todo punto. Tenemos los ingredientes para enunciar y

probar un teorema de extrapolación análogo al teorema 3. Lo que me interesa resaltar con este ejemplo es que intervienen dos operadores si S no es autoadjunto.

3.4. Otro enunciado para el teorema de extrapolación. Dado un operador \mathcal{M} que es un supremo de operadores lineales positivos, llamamos \mathcal{M}^* al supremo de su adjuntos y definimos

$$W_1(\mathcal{M}) = \{w : \mathcal{M}^*w \leq w \text{ c.t.p.}\}$$

y, si $1 < p < \infty$,

$$W_p(\mathcal{M}) = \{w : \mathcal{M} \text{ está acotado en } L^p(w)\}.$$

(Si \mathcal{M} es lineal, las dos definiciones coinciden para $p = 1$; para la función maximal de Hardy-Littlewood los operadores \mathcal{M} y \mathcal{M}^* coinciden.) Diremos que \mathcal{M} es *admissible* si $W_1(\mathcal{M}) \subset W_p(\mathcal{M})$ para todo $p > 1$. Definimos también

$$\begin{aligned} B_p(\mathcal{M}) &= \{w : w^{s(1-p')} \in W_{p'}(\mathcal{M}^*) \text{ para algún } s > 1\} \\ &= \bigcup_{s>1} \{w^{(1-p)/s} : w \in W_{p'}(\mathcal{M}^*)\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las observaciones previas, la prueba del teorema de extrapolación se puede copiar para probar el siguiente teorema.

Teorema 6. *Sea \mathcal{M} un operador admisible. Si T está acotado en $L^r(w_0w_1^{s-r})$ para todo $1 < s < r$ y todos los pesos $w_0 \in W_1(\mathcal{M})$ y $w_1 \in W_1(\mathcal{M}^*)$ (con cota que sólo depende de las constantes de la condición W_1 y de s), entonces T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in B_p(\mathcal{M})$ y todo $1 < p < \infty$.*

Definición.

1. Diremos que \mathcal{M} no tiene *pesos extremales* si para todo p y todo $w \in W_p(\mathcal{M})$ existe $s > 1$ tal que $w^s \in W_p(\mathcal{M})$.
2. Diremos que \mathcal{M} tiene la *propiedad de dualidad* si $W_{p'}(\mathcal{M}^*) = \{w^{1-p'} : w \in W_p(\mathcal{M})\}$.

Cuando \mathcal{M} tiene estas dos propiedades se tiene $B_p(\mathcal{M}) = W_p(\mathcal{M})$ y la conclusión del teorema es que T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in W_p(\mathcal{M})$.

4. ALGUNOS EJEMPLOS

Si tomamos como \mathcal{M} el operador maximal fuerte definido como el supremo de los promedios sobre todos los rectángulos de \mathbf{R}^n de lados paralelos a los ejes (que coincide con \mathcal{M}^*), todo funciona como en el caso de la función maximal de Hardy-Littlewood porque no tiene pesos extremales y cumple la propiedad de dualidad. Del mismo modo podríamos considerar otros operadores maximales de los que aparecen en [11].

Si escogemos como \mathcal{M} el operador maximal de Hardy-Littlewood a la derecha en \mathbf{R} , \mathcal{M}^* es el operador maximal de Hardy-Littlewood a la izquierda. Sus pesos se estudian en [19]; el teorema 6 se aplica y como \mathcal{M} tiene las propiedades de dualidad y no existencia de pesos extremales, la conclusión vale con $W_p(\mathcal{M})$.

Sea Ω una función no negativa e integrable en la esfera unidad S^{n-1} . Definimos la función maximal

$$M_{\Omega}f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{R^n} \int_{|y|<R} \Omega(y') |f(x-y)| dy,$$

donde $y' = |y|^{-1}y$. El supremo de los adjuntos es $M_{\tilde{\Omega}}$ con $\tilde{\Omega}(y) = \Omega(-y)$. En [22] se prueba, siguiendo el método de [15], que si $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ para algún $q > 1$, los pesos no extremales de $\mathcal{M} = M_{\Omega} + M$ (donde M es el operador de Hardy-Littlewood) se pueden extrapolar. Como esos pesos no extremales se pueden factorizar y tienen una propiedad de dualidad, el teorema 6 también vale (la hipótesis se cumple con w_0 no extremal, pero eso es suficiente).

El operador M_{Ω} entra dentro de una familia de operadores maximales (algunos también considerados en [22]) para los que en [4] se describen clases de pesos a los que se puede aplicar el teorema 6. Mencionaremos entre ellos el operador maximal esférico diádico (supremo de promedios sobre esferas de radios diádicos) para el que en [7] se prueba que tiene pesos extremales y además no cumple la propiedad de dualidad.

El teorema de extrapolación se puede aplicar para obtener desigualdades con peso para operadores integrales singulares de tipo homogéneo con núcleo no regular, a partir de los resultados para $p = 2$. La ventaja de la extrapolación y de considerar las clases asociadas a M_{Ω} es clara cuando se compara con resultados parciales anteriores ([2], [21]). Lo mismo se puede decir para las funciones cuadráticas de [8]; en [6] obtenemos mejores resultados con menos trabajo.

5. OTRAS OBSERVACIONES

5.1. Dos pesos. Si repasamos la segunda parte de la prueba del teorema 3 comprobaremos que podemos deducir resultados con dos pesos, a partir de resultados con un peso. Diremos que el par $(u, v) \in S_p$ si M está acotado de $L^p(v)$ en $L^p(u)$.

Teorema 7. *Sea T un operador acotado en $L^r(w)$ para algún $r \geq 1$ y para todo peso $w \in A_r$ (con cota que sólo depende de la constante A_r de w); entonces, si $1 < p < \infty$, T está acotado de $L^p(v)$ en $L^p(u)$ siempre que $(v^{s(1-p')}, u^{s(1-p')}) \in S_p$ para algún $s > 1$.*

Ahora no podemos evitar la potencia $s > 1$ como en el teorema 3 original, porque la propiedad 4 del teorema 2 no se cumple para pares de pesos distintos. Se puede ver que los pesos de la conclusión coinciden con los pesos no extremales de S_p .

No debe extrañar la conclusión con dos pesos partiendo de desigualdades con un peso, porque para pesos no extremales se puede incluir un peso de la clase A_p entre ellos ([13]); con este resultado, el teorema 7 también es consecuencia directa del teorema original.

5.2. Operadores más singulares. Las hipótesis del teorema 6 no requieren que el operador maximal \mathcal{M} esté acotado en los espacios para los que el operador T debe estarlo; esto puede parecer una observación inútil pero, como en otras situaciones, el operador maximal esférico sirve para aclarar las ideas. Este operador no está acotado

si $p \leq n/(n-1)$ ni siquiera para $w \equiv 1$ y, claramente, $1 \in W_1(\mathcal{M})$ (ahora $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$). Por tanto, no es admisible en el sentido definido más arriba. Sin embargo, hay algunos resultados posibles.

Recientemente, en [6] mostramos que cierta función cuadrática singular está acotada en $L^2((w_0 w_1^{-1})^{1/s})$ para pesos $w_0, w_1 \in W_1(\mathcal{M})$ y $s > 1$, lo que es suficiente para aplicar la primera parte de la prueba del teorema de extrapolación; la conclusión es que un operador que satisfaga esa propiedad está acotado en $L^p(w^{1/s})$, para $p < 2$ y $s > 1$, si $w \in W_1(\mathcal{M})$ y además $w \in W_{p/(2-p)}(\mathcal{M})$. Debido a las restricciones impuestas por la función maximal esférica, esta última condición no se cumple para cualquier p ni siquiera si $w \equiv 1$, en cuyo caso vale si $p/(2-p) > n/(n-1)$, o sea, $2n/(2n-1) < p \leq 2$; para estos valores de p también valen los pesos $w(x) = |x|^\alpha$ con $1-n < \alpha < 0$ (véase [7]). De modo que salen desigualdades con peso para índices p para los que la función maximal esférica no está acotada. También se pueden dar resultados para $p > 2$.

Al hilo de este ejemplo me gustaría mencionar una cuestión que encuentro interesante por sí misma: ¿es cierta la inclusión $W_1(\mathcal{M}) \subset W_p(\mathcal{M})$ para el operador maximal esférico cuando $p > n/(n-1)$, al menos para los pesos no extremales de $W_1(\mathcal{M})$? Si la respuesta es afirmativa, $2n/(2n-1) < p \leq 2$ y $w^s \in W_1(\mathcal{M})$ para $s > 1$ son las únicas condiciones en el resultado del párrafo anterior.

5.3. Desigualdades débiles. En la hipótesis del teorema 3 se pueden reemplazar las acotaciones fuertes por acotaciones débiles (en la conclusión resultan acotaciones fuertes). La prueba que presentamos también funciona en este caso y, de hecho, basta con modificar la primera parte. Definimos $E_\lambda = \{x : |Tf(x)| > \lambda\}$ y sea $w \in A_1$. Entonces

$$w(E_\lambda) := \int_{E_\lambda} w \leq \left(\int_{E_\lambda} w V^{q-r} \right)^{q/r} \left(\int_{\mathbf{R}^n} V^q w \right)^{(r-q)/r}$$

y la elección de V es como arriba. Ahora, T satisface desigualdades débiles para el peso $w \in A_1$ si $1 < q < r$; del teorema de interpolación de Marcinkiewicz se deducen las desigualdades fuertes para pesos A_1 .

REFERENCIAS

- [1] S. Bloom, Solving weighted inequalities using the Rubio de Francia algorithm, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 306–312.
- [2] J. Duoandikoetxea, Weighted norm inequalities for homogeneous singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **336** (1993), 869–880.
- [3] J. Duoandikoetxea, *Desigualdades con peso en análisis armónico*, Séptima Escuela Venezolana de Matemáticas, Universidad de los Andes (Mérida, Venezuela), 1994.
- [4] J. Duoandikoetxea, Almost orthogonality and weighted inequalities, *Contemp. Math.* **189** (1995), 213–226.
- [5] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [6] J. Duoandikoetxea y E. Seijo, Weighted inequalities for square functions through extrapolation, aparecerá en *Studia Math.*
- [7] J. Duoandikoetxea y L. Vega, Spherical means and weighted inequalities, *J. London Math. Soc.* **53** (1996), 343–353.
- [8] Y. Ding, D. Fan y Y. Pan, Weighted boundedness for a class of rough Marcinkiewicz integrals, *Indiana Univ. Math. J.* **48** (1999), 1037–1055.

- [9] J. García-Cuerva, An extrapolation theorem in the theory of A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 422–426.
- [10] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland Math. Studies **116**, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [11] B. Jawerth, Weighted norm inequalities: linearization, localization and factorization, *Amer. J. Math.* **108** (1986), 361–414.
- [12] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207–226.
- [13] C. J. Neugebauer, Inserting A_p -weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 644–648.
- [14] J. L. Rubio de Francia, Factorization and extrapolation of weights, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 393–395.
- [15] J. L. Rubio de Francia, Factorization theory and A_p weights, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 533–547.
- [16] J. L. Rubio de Francia, Acotación de operadores en retículos de Banach y desigualdades con peso, *Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **18** (1985), 187–204.
- [17] J. L. Rubio de Francia, Linear operators in Banach lattices and weighted L^2 inequalities, *Math. Nachr.* **133** (1987), 197–209.
- [18] F. J. Ruiz, *Teoría de Calderón-Zygmund para funciones vectoriales y desigualdades con peso*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 1983.
- [19] E. Sawyer, Weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297** (1986), 53–61.
- [20] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
- [21] D. K. Watson, Weighted estimates for singular integrals via Fourier transform estimates, *Duke Math. J.* **60** (1990), 389–399.
- [22] D. K. Watson, Vector-valued inequalities, factorization and extrapolation for a family of rough operators, *J. Funct. Anal.* **121** (1994), 389–415.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO-EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA, APARTADO 644, 48080 BILBAO, SPAIN

Correo electrónico: mtpduzuj@lg.ehu.es

ALGUNAS HISTORIAS SOBRE ÁLGEBRAS NO ASOCIATIVAS Y SUPERÁLGEBRAS

PETRA M. ARNAL, JESÚS LALIENA Y SARA SACRISTÁN

En memoria de José Javier Guadalupe, Chicho

ABSTRACT. Jordan and Lie algebras and superalgebras are introduced, and the big relationship with associative algebras and superalgebras is shown. This relationship has been classically used to study several questions, as for example simplicity, semisimplicity, ideals or maximal subalgebras of Lie and Jordan algebras obtained from a simple associative algebra. The same problems are again interesting in superalgebras.

1. ÁLGEBRAS NO ASOCIATIVAS

Como es bien sabido un álgebra es un conjunto con tres operaciones binarias $(A, +, \cdot_\phi, \cdot)$ de modo que $+$ y \cdot son internas y \cdot_ϕ es externa, siendo ϕ un anillo conmutativo, asociativo y unitario (o un cuerpo). Además se pide que $(A, +, \cdot_\phi)$ sea un ϕ -módulo o un ϕ -espacio vectorial, si ϕ es un cuerpo, y también que la tercera operación « \cdot » sea bilineal respecto de las dos anteriores, es decir, distributiva respecto de $+$ y verificando que $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b) \forall \lambda \in \phi$ y $\forall a, b \in A$.

Si pensamos en los polinomios sobre un cuerpo, por ejemplo el de los números reales, $\mathbf{R}[X]$, con las operaciones usuales, se tiene un álgebra en la que el producto interno es conmutativo. Esto ya no es así si pensamos en las matrices 2×2 sobre los reales, $M_2(\mathbf{R})$, porque el producto de matrices no es conmutativo. Sin embargo en ambos ejemplos lo que sí es cierto es que el producto interno es asociativo. Son por tanto ejemplos de álgebras llamadas álgebras asociativas, y notemos que otro modo de definir un álgebra asociativa sería tomar un ϕ -módulo $(A, +, \cdot_\phi)$ que además fuera un anillo, un anillo asociativo $(A, +, \cdot)$, y que verificase que $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$.

Pero los anillos, o las álgebras, no son siempre asociativos, y podríamos citar aquí ahora varios ejemplos sencillos donde la asociatividad no se verifica. Uno bastante común y básico es el álgebra de los vectores fijos del espacio, es decir, $(\mathbf{R}^3, +, \cdot_{\mathbf{R}}, \times)$, donde \times denota el producto vectorial. El producto vectorial en \mathbf{R}^3 no es ni conmutativo, ni asociativo. Verifica, eso sí, que

$$a \times a = 0, \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c + b \times (a \times c).$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 17A70; Secondary: 16W10, 16W55, 17C50.

Key words and phrases. associative algebras, involutions, associative superalgebras, superinvolutions, Jordan structure, Lie structure.

El primer y segundo autor están subvencionados por los proyectos PB97-1291-CO3-02 y API-00/B04.

Y estas dos identidades definen lo que se denomina un *álgebra de Lie*. Las álgebras de Lie son por tanto un tipo de álgebras no asociativas, quizás el tipo más importante.

Una forma natural de hacerlas aparecer es tomar un álgebra asociativa $(A, +, \cdot, \phi, \cdot)$ y cambiar el producto interno « \cdot » por el siguiente producto que denotamos con corchetes: $[a, b] = ab - ba$, donde hemos omitido el punto de la operación interna originaria, como haremos de aquí en adelante (es decir hemos puesto ab en vez de $a \cdot b$). Lo que se obtiene entonces es un álgebra de Lie y se denota A^- . El Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt prueba que en realidad cualquier álgebra de Lie es una subálgebra de una A^- . De hecho se puede construir para un álgebra de Lie, L , un álgebra asociativa, A , de modo que L es una subálgebra de A^- . Este es un resultado que resulta bastante útil en el trabajo con álgebras de Lie.

Otra forma de conseguir álgebras de Lie es tomar un álgebra asociativa $(A, +, \cdot, \phi, \cdot)$ (por ejemplo $M_3(\mathbf{R})$ con las operaciones usuales), considerar una involución en A , es decir, una aplicación ϕ -lineal $*$: $A \rightarrow A$ tal que $(ab)^* = b^*a^*$ (por ejemplo la trasposición de matrices en $M_3(\mathbf{R})$), y tomar el conjunto de elementos antisimétricos de A , usualmente denotado $K(A)$, es decir $K(A) = \{a \in A : a^* = -a\}$. Entonces $K(A)$, con la operación corchete anteriormente definida, es un álgebra de Lie, es decir, $(K(A), +, \cdot, \phi, [,])$ es álgebra de Lie (en nuestro ejemplo, las matrices antisimétricas 3×3 reales serían un álgebra de Lie con la operación corchete). De esta manera se obtienen interesantes ejemplos de álgebras de Lie.

Al efectuar el proceso anterior uno se podría preguntar qué pasa con el otro trozo del espacio vectorial A , y pensemos que en adelante ϕ es un cuerpo con característica distinta de 2. Queremos decir que la involución $*$ permite partir A en suma directa de dos subespacios vectoriales: el que forman los elementos antisimétricos $K(A)$, y el que forman los elementos simétricos, que usualmente se denota $H(A)$ (en el ejemplo propuesto, las matrices 3×3 simétricas reales):

$$A = K(A) \oplus H(A).$$

En efecto, claramente dado un elemento $a \in A$, se puede poner como suma de uno antisimétrico $\frac{a-a^*}{2}$ y uno simétrico $\frac{a+a^*}{2}$. $H(A)$ no es una subálgebra de A y tampoco de A^- debido a que el producto de elementos simétricos con el producto normal o con el corchete no da otra vez un elemento simétrico (en el ejemplo, el producto de matrices simétricas no es una matriz simétrica).

Esto fue un hándicap para los físicos que trabajaban en mecánica cuántica a principios del siglo XX. Como cuenta K. McCrimmon en [15], de hecho, ellos buscaban un objeto algebraico infinito dimensional esencialmente diferente de las conocidas matrices complejas. Porque éstas, en efecto, constituyen un álgebra asociativa, pero en ella las operaciones usuales de suma, multiplicación por escalar o producto no tienen significado físico, porque no dan lugar a operaciones observables. Sin embargo al tomar únicamente las matrices hermitianas, es decir, las simétricas respecto de la involución que consiste en trasponer y conjugar la matriz, sí eran operaciones observables la suma de matrices simétricas, el producto por escalar y las siguientes:

$$ab + ba, \quad aba, \quad a^n.$$

Fue Pascual Jordan quien, en 1934, pensó en que lo mismo que de un álgebra asociativa A se puede obtener una de Lie, A^- , cambiando el producto de A por el corchete, igualmente se podría cambiar el producto de A por el producto definido por

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba),$$

y de este modo obtener una nueva álgebra, denotada A^+ . La nueva álgebra, con el nuevo producto llamado simetrizado, tiene la particularidad de que si tiene una involución, $*$, entonces $H(A)$, los elementos simétricos de A por la involución, son una subálgebra de A^+ . Esto quiere decir que en el caso de matrices complejas hermitianas, el nuevo producto permite obtener nuevamente matrices hermitianas. E incluso que, teniendo en cuenta que $x^2 = x \circ x$ y que $xyx = 2(x \circ y) \circ x + x^2 \circ y$, las operaciones observables $x^n, xyx, xy + yx$ pueden expresarse a partir de las de A^+ .

La cuestión es que al igual que ocurre con la A^- , A^+ no es asociativa, aunque sí conmutativa. Verifica las dos siguientes propiedades algebraicas de las que parecen derivar todas las demás:

$$a \circ b = b \circ a, \quad (a^2 \circ b) \circ a = a^2 \circ (b \circ a).$$

A las álgebras $(J, +, \cdot, \phi, \circ)$ que verifican estas dos identidades se les llamó *álgebras de Jordan* en honor a P. Jordan.

Al contrario de lo que ocurre con las álgebras de Lie, no toda álgebra de Jordan J es subálgebra de una A^+ con A álgebra asociativa. Las que verifican esto se les dice *especiales* y las que no *excepcionales*. Algo que da una idea de la importancia de estas últimas, así como de la importancia de las álgebras de Jordan del tipo $H(A)$, para un álgebra asociativa con involución, A , es por ejemplo la clasificación de las álgebras de Jordan finito dimensionales sobre \mathbf{R} formalmente reales (es decir de modo que $a^2 + b^2 = 0$ en el álgebra implica que $a = 0, b = 0$). De los cinco tipos de álgebras de Jordan que aparecen en la clasificación (ver [9]) uno es un álgebra de Jordan excepcional y cuatro son especiales, y de entre estos cuatro, tres son del tipo $H(A)$ donde A es un álgebra asociativa con involución (en concreto $A = M_n(D)$ donde D es el cuerpo de los números reales, ó el cuerpo de los números complejos ó el álgebra de cuaternios de Hamilton).

Estos hechos referentes a estos dos importantes tipos de álgebras no asociativas, las de Lie y de Jordan, nos llevan al siguiente planteamiento. Si uno coge un álgebra asociativa, A , básica, estructuralmente hablando, es decir, simple (sin ideales propios y con producto no cero), y suponemos que A tiene una involución. ¿También $K(A)$, el álgebra de Lie de los elementos antisimétricos, es simple?, ¿o cómo es $K(A)$? Y $H(A)$, el álgebra de Jordan de elementos simétricos, ¿es simple? Estas cuestiones fueron respondidas por Herstein en los años 50 y aparecen en [8]. Pero antes de continuar con esto hablemos primero de otro ente matemático surgido también de la Física.

2. SUPERÁLGEBRAS

A mediados de los años 70 empezaron a ser de interés las álgebras A que pudieran partirse en suma directa de dos espacios vectoriales $A = A_0 \oplus A_1$ de modo que

$A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ (con los índices sumados módulo 2). En parte lo que se conocía ya antes con el nombre de álgebras Z_2 -graduadas, aunque luego ya explicaremos lo que se quiere decir con lo de en parte.

En la física de partículas, al estudiar el fenómeno de la supersimetría, era necesaria una estructura algebraica con una componente par (A_0) que recogiera el comportamiento de los bosones y una componente impar (A_1) representando a los fermiones. Los físicos denominaron a estas álgebras superálgebras y con ellas era posible estudiar a la vez objetos simétricos y antisimétricos.

Una *superálgebra asociativa* es un álgebra asociativa Z_2 -graduada. Dos ejemplos de superálgebras asociativas son los siguientes:

1) $A = M_n(F)$ con F un cuerpo, donde

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A \in M_r(F), B \in M_s(F) \right\},$$

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix} : C \in M_{r \times s}(F), D \in M_{s \times r}(F) \right\},$$

con $r + s = n$. Esta superálgebra asociativa se denota $M_{r,s}(F)$.

2) $A = A_0 \oplus A_1$ con

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in M_r(F) \right\},$$

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} : B \in M_s(F) \right\}.$$

Otro ejemplo es el álgebra $G = G_0 \oplus G_1$ donde G_0 tiene como base sobre un cuerpo F el conjunto $\{1, e_{i_1} \dots e_{i_n}\}_{n \in 2Z}$ y G_1 tiene como base sobre F el conjunto $\{e_{i_1} \dots e_{i_n}\}_{n \in 2Z+1}$ con $e_{i_j} \in \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$, y el producto de G viene dado a partir del hecho de que $e_i e_j = -e_j e_i$. G es una superálgebra asociativa, y es conocida con el nombre de superálgebra de Grassmann. Aunque no es tan sencillo como los anteriores, sin embargo resulta particularmente interesante. La razón de su interés radica en que, en realidad, lo que desde el punto de vista físico importaba no era analizar álgebras Z_2 -graduadas sin más que fueran asociativas o de Lie o de Jordan, y ahora vamos a explicar lo que decíamos antes de que una superálgebra es sólo en parte un álgebra Z_2 -graduada. Lo que originariamente interesó fue un álgebra Z_2 -graduada $A = A_0 \oplus A_1$ de modo que al tomar el producto tensorial $G \otimes_F A$, y quedarse con la parte par $G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$, lo que se denomina envolvente de Grassmann, se obtenga un álgebra de Lie. Esto es lo que se conoce con el nombre de *superálgebra de Lie*, que es diferente de un álgebra de Lie Z_2 -graduada. De hecho, una superálgebra de Lie ($L = L_0 \oplus L_1, +, \cdot, \phi, [,]$) verifica las identidades

$$[a, b] = -(-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a],$$

$$(-1)^{\bar{a}\bar{c}}[[a, b], c] + (-1)^{\bar{b}\bar{c}}[[b, c], a] + (-1)^{\bar{c}\bar{b}}[c, a], b] = 0,$$

donde $\bar{a} = 0$ si $a \in L_0$, $\bar{a} = 1$ si $a \in L_1$, y $[,]$ denota el producto interno de L . Como puede observarse L_0 es en realidad un álgebra de Lie, pero sin embargo el producto de elementos de L_1 es conmutativo.

Ejemplos de superálgebras de Lie se pueden obtener de una manera similar a como obteníamos ejemplos de álgebras de Lie a partir de álgebras asociativas. Es decir, tomemos una superálgebra asociativa $A = A_0 \oplus A_1$ y cambiemos el producto interno de A por el siguiente producto:

$$[a, b]_s = ab + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}ba.$$

A la nueva superálgebra se le denota A^{s-} , y uno puede probar que la envolvente de Grassmann, $G(A^{s-})$, es un álgebra de Lie, con lo que A^{s-} es una superálgebra de Lie.

Lo cierto es que casi a la vez que se estudiaban las superálgebras de Lie, se empezaron a estudiar otros tipos de superálgebras. En efecto, en 1975, V. Kac (ver [10]) clasificaba las superálgebras de Lie simples (aquí simples significa sin ideales graduados) finito dimensionales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, y en 1977 (ver [11]), las superálgebras de Jordan simples finito dimensionales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

El motivo no era únicamente extender la teoría. En seguida se pudo observar que cuestiones complicadas al tratar un tipo de álgebras se aclaraban al tomar la superálgebra del tipo correspondiente. Por citar algunos ejemplos, la pregunta sobre si es resoluble el radical de Jacobson de un álgebra de Jordan libre de rango numerable, se responde negativamente debido a la existencia de la superálgebra de Jordan de Kac 10-dimensional. O el problema en álgebras de Jordan de saber si era nilpotente el ideal generado en el álgebra por un divisor de cero absoluto. Este problema tenía y tiene una respuesta negativa conocida, debido a la existencia del contraejemplo conocido por el sugerente nombre de Monstruo de Pchelintsev (que hacía honor a su complejidad). Pues bien, este monstruo, a la luz de las superálgebras de Jordan de corchetes de Poisson resulta muy poco monstruoso.

Las superálgebras de Jordan se manifestaron así como útiles, y no sólo como motivo de curiosidad. Algo parecido había ocurrido ya con sus parientes ancestros, las álgebras de Jordan, que por ejemplo sirvieron, en 1989, a E. Zelmanov para probar el casi centenario problema de la teoría de grupos, conocido como «Problema restringido de Burnside» (lo que le valió una medalla Fields en 1994).

Así que las superálgebras de Jordan comenzaron muy pronto a estudiarse, como decíamos. Y una superálgebra de Jordan es un álgebra Z_2 -graduada, $J = J_0 \oplus J_1$ de modo que su envolvente de Grassmann $G(J)$ es un álgebra de Jordan. En una superálgebra de Jordan se verifican las identidades

$$ab = (-1)^{\bar{a}\bar{b}}ba, \quad \sum_{\text{cíclic}(a,b,c)} (-1)^{\bar{c}(\bar{a}+\bar{d})} [ab, d, c],$$

donde $[ab, d, c] = ((ab)d)c - (ab)(dc)$, y el sumatorio es en los sumandos que resultan de rotar cíclicamente a, b, c . Al igual que pasaba con las superálgebras de Lie, las de Jordan no son por tanto álgebras de Jordan Z_2 -graduadas: J_0 sí es un álgebra de Jordan, pero el producto en J_1 es anticonmutativo.

Nuevamente aquí, como en el caso de álgebras de Jordan, uno puede obtener a partir de una superálgebra asociativa, $A = A_0 \oplus A_1$, una superálgebra de Jordan

cambiando el producto interno de A por el producto supersimetrizado:

$$a \circ_s b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}ba).$$

En efecto, en este caso el álgebra resultante que se denota A^{s+} verifica que $G(A^{s+})$ es un álgebra de Jordan.

Podríamos preguntarnos si en superálgebras se pueden obtener a partir de una superálgebra asociativa con involución, una superálgebra de Lie y una de Jordan. La respuesta es que sí, pero cambiando algo la definición de involución en la línea que empieza a ser ya habitual.

Si echamos un vistazo a los «superconceptos» que hemos introducido, se observa que la línea habitual hasta ahora ha consistido en tomar los viejos y cambiar los signos en las identidades, de modo que si tomamos el primer sumando como referencia, en los demás hay que multiplicar en cada uno por menos uno tantas veces como trasposiciones de elementos impares hagamos.

Así que con esta regla la definición de *superinvolución* en $A = A_0 \oplus A_1$ sería la de un aplicación lineal $*$: $A \rightarrow A$ que respete la graduación (es decir, que $A_i^* \subseteq A_i$ con $i = 0, 1$) y tal que

$$a^{**} = a, \quad (ab)^* = (-1)^{\bar{a}\bar{b}}b^*a^*.$$

En esta situación, si A es una superálgebra asociativa, se tiene que $K(A) = \{a \in A : a^* = -a\}$ es una superálgebra de Lie y una subálgebra de A^{s-} . Y $H(A) = \{a \in A : a^* = a\}$ es una superálgebra de Jordan y una subálgebra de A^{s+} . Ambos ejemplos de superálgebras, junto con las superálgebras A^{s-} y A^{s+} juegan un relevante papel en el estudio de las superálgebras correspondientes, por ejemplo en la clasificación de las superálgebras simples de Lie y Jordan (ver [10] y [11]).

Estos hechos, que repiten la situación que ya se tenía en el estudio de álgebras de Lie y Jordan, y que fueron tratados entonces por I. Herstein y otros discípulos suyos (T. Erickson, C. Lanski, ...), motivaron el trabajo que en el siguiente párrafo se va a describir.

3. SUPERÁLGEBRAS DE LIE DE ELEMENTOS ANTISIMÉTRICOS

En [7], C. Gómez-Ambrosi y I. Shestakov investigaron la estructura de Lie de los elementos antisimétricos de una superálgebra asociativa simple A con superinvolución sobre un cuerpo de característica $\neq 2$, salvo para unos pocos casos de dimensión pequeña que fueron estudiados por P. Arnal y J. Laliena en [1].

El tema no estaba agotado aquí porque cabía estudiar la estructura de Lie de los elementos antisimétricos en otras situaciones menos exigentes para A . Ya en los años 70, T. Erickson y C. Lanski habían estado buscando cómo es la estructura de $K(A)$ y también de $[K(A), K(A)]$ (donde $[K(A), K(A)]$ denota el subespacio vectorial generado por los elementos de la forma $[a, b]$ con $a, b \in K(A)$, que en efecto son un álgebra de Lie, subálgebra de A^-) cuando A es un álgebra prima o semiprima con involución (ver [3] y [13]).

Así que los resultados sobre superálgebras asociativas simples con superinvolución podía pensarse que podrían ser extendidos a superálgebras asociativas primas (es

decir, sin $I = I_0 \oplus I_1$, $J = J_0 \oplus J_1$ ideales graduados distintos de cero de A tales que $IJ = 0$).

Así fue, y en [5] C. Gómez-Ambrosi, I. Shestakov y J. Laliena probaron que las superálgebras de Lie $K(A)$ y también $[K(A), K(A)]_s$ no tienen por qué ser simples, al igual que ocurre con álgebras, y tienen como ideales los del tipo $[J \cap K, K]_s$ con J un ideal de A , verificándose que si A tiene parte impar no cero entonces estos ideales son siempre distintos de cero. Además, salvo casos excepcionales, todos los ideales de las superálgebras de Lie K y $[K, K]$ son de esta clase, con la excepción de los obvios subespacios U contenidos en $Z = \{a \in A_0 : [a, b] = 0 \ \forall b \in A\}$.

Respecto a la estructura de ideales de A^{s-} , ya antes, en 1993, F. Montaner había probado que eran subespacios que debían contener a $[A, A]_s$ o que debían estar contenidos en Z , salvo si A era un álgebra de cuaternios.

4. SUBÁLGEBRAS MAXIMALES DE SUPERÁLGEBRAS ASOCIATIVAS

Una vez conocido lo que ocurre con las estructuras de Lie de A^{s-} y $K(A)$, cabría preguntarse por lo que ocurre con la estructura de Jordan de las superálgebras de Jordan A^{s+} y $H(A)$ cuando A es una superálgebra asociativa simple con superinvolución. F. Montaner, en 1993, probó que si A es no conmutativa entonces A^{s+} es superálgebra de Jordan simple (ver [6]); y D. King, en 1993, que si además A no es un álgebra de cuaternios, entonces $H(A)$ es superálgebra de Jordan simple (ver [12]).

Con esto queda puesto de manifiesto que éste es un método de obtener superálgebras de Jordan simples, que se confirma al ver la clasificación de Kac a la que ya hemos aludido varias veces (ver [11]).

La cuestión que surge es si esto se puede usar para estudiar otras cuestiones estructurales de las superálgebras de Jordan. Y en efecto así se demuestra, por ejemplo, en los hechos siguientes probados por C. Gómez-Ambrosi y J. Laliena en [4]: Que se puede construir un radical de Jacobson en superálgebras de Jordan inspirado en el radical de Jacobson para superálgebras asociativas; que con respecto a este radical dada una superálgebra A asociativa, no conmutativa y prima entonces A es semisimple si y sólo si A^{s+} es semisimple; y que si A es asociativa, no conmutativa, con superinvolución y prima respecto de $*$ entonces A es semisimple si y sólo si $H(A)$ es semisimple.

Una manera de conocer a fondo una estructura es estudiar su retículo de subestructuras. Entre las subestructuras resultan significativas, por ejemplo, las subestructuras maximales. Volviendo al caso de álgebras, el asunto es si lo mismo que la simplicidad o semisimplicidad de un álgebra asociativa A llevaba a la simplicidad o semisimplicidad de A^+ ó de $H(A)$ (algo que también era conocido en álgebras por el trabajo de K. McCrimmon de 1969, [14]), se trataba de ver si las subálgebras maximales de A llevan o tienen algo que ver con las de A^+ ó las de $H(A)$.

Un artículo de M. Racine, [16], de 1974, respondía a esta pregunta estudiando las subálgebras maximales de álgebras de Jordan simples especiales finito dimensionales sobre un cuerpo de característica no 2. Para ello aprovechó la situación anterior, y fue dando los siguientes pasos:

— Primero describió las subálgebras maximales de álgebras asociativas simples centrales finito dimensionales.

— Después, y a partir de los resultados anteriores, describió las subálgebras maximales de álgebras asociativas simples centrales finito dimensionales con involución, salvo un error que le llevó a omitir un caso.

— Finalmente, y usando todo esto, clasificó las subálgebras maximales de álgebras de Jordan especiales simples y finito dimensionales.

En 1999, A. Elduque, J. Laliena y S. Sacristán descubrieron y enmendaron el error de M. Racine para álgebras, y describieron las subálgebras maximales de superálgebras asociativas simples centrales finito dimensionales, y de superálgebras asociativas simples centrales finito dimensionales con superinvolución (y cuando decimos subálgebras de superálgebras queremos decir subálgebras graduadas).

El objetivo es llegar, a partir de estos resultados, a describir las subálgebras maximales de las superálgebras especiales de Jordan simples finito dimensionales. Por especial entenderemos que sea subálgebra de una A^{s+} . Éste es el trabajo que nos ocupa ahora.

REFERENCIAS

- [1] P. M. Arnal y J. Laliena, Lie and Jordan structures in associative superalgebras with superinvolutions: special cases, en *Proceedings of the International Conference on Jordan Structures* (Málaga, 1997), Univ. Málaga, Málaga (1999), 15–23.
- [2] A. Elduque, J. Laliena y S. Sacristán, Maximal subalgebras of associative superalgebras, enviado a publicar.
- [3] T. E. Erickson, The Lie structure in prime rings with involution, *J. Algebra* **21** (1972), 523–534.
- [4] C. Gómez-Ambrosi y J. Laliena, On the semisimplicity of special Jordan superalgebras, en *Nonassociative algebra and its applications* (São Paulo, 1998), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **211**, Marcel Dekker, Nueva York (2000), 181–187.
- [5] C. Gómez-Ambrosi, J. Laliena y I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a prime superalgebra with superinvolutions, *Comm. in Algebra* **28** (2000), 3277–3291.
- [6] C. Gómez-Ambrosi y F. Montaner, On Herstein's constructions relating Jordan and associative superalgebras, *Comm. in Algebra* **28** (2000), 3743–3762.
- [7] C. Gómez-Ambrosi y I. P. Shestakov, On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with superinvolutions, *J. Algebra* **208** (1998), 43–71.
- [8] I. N. Herstein, *Rings with involution*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1976.
- [9] P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. of Math.* **35** (1934), 29–64.
- [10] V. G. Kac, A sketch of Lie superalgebra theory, *Comm. Math. Phys.* **53** (1977), 31–64.
- [11] V. G. Kac, Classification of simple Z -graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, *Comm. in Algebra* **5** (1977), 1375–1400.
- [12] D. L. King, *Linear and quadratic Jordan superalgebras*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Virginia, 1993.
- [13] C. Lanski, Lie structure in semiprime rings with involution, *Comm. in Algebra* **4** (1976), 731–746.
- [14] K. McCrimmon, On Herstein's theorems relating Jordan and associative algebras, *J. Algebra* **13** (1969), 382–392.
- [15] K. McCrimmon, The Russian revolution in Jordan algebras, *Algebras Groups Geom.* **1** (1984), 1–61.
- [16] M. Racine, On maximal subalgebras, *J. Algebra* **30** (1974), 155–180.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, 26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: pearnal@dmc.unirioja.es, jesus.laliena@dmc.unirioja.es, ssacristan@virtualcom.es

PERSPECTIVAS EN LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS

J. M. ALDAZ Y A. BRAVO

*En memoria de Chicho, a quien, entre otras cosas,
debemos nuestro interés por la Teoría de los Números*

ABSTRACT. We explore, in a fairly elementary fashion, a variety of topics in the Theory of Numbers, presenting along the way some conjectures and open problems.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta contribución de carácter expositivo es presentar brevemente algunos resultados y conjeturas en la Teoría de los Números, de tal modo que despierten en los no especialistas el deseo de aprender más sobre la materia, y con la esperanza de que incluso los especialistas encuentren aquí algo de interés.

Los problemas que a lo largo de la historia se han planteado en relación con los números naturales frecuentemente han originado una gran variedad de técnicas para su resolución, notablemente en el Álgebra y el Análisis, pese a lo cual muchos de estos problemas continúan sin resolverse.

El primer problema abierto que presentamos es probablemente el más antiguo de toda la Matemática:

¿Existen números perfectos impares?

Recordemos que la secta pitagórica atribuía a los naturales diversas propiedades de carácter místico. La noción de que todo era número o razón entre números llevó directamente al estudio de la conmensurabilidad del lado de un cuadrado con su diagonal, y eventualmente a la demostración de la irracionalidad de la raíz de dos, lo que por cierto no encajaba muy bien con dicha doctrina.

En este contexto cultural era inevitable que se explorasen relaciones más o menos ocultas entre distintos naturales. Se desarrollaron así nociones como la de *número perfecto*: n es perfecto si es igual a la suma de todos sus divisores propios, es decir, aquellos divisores estrictamente menores que n .

El número perfecto más pequeño es $6 = 1 + 2 + 3$. Euclides probó que si $2^\alpha - 1$ es primo, entonces $2^{\alpha-1}(2^\alpha - 1)$ es perfecto. Por su parte, Euler demostró que todo número perfecto par tiene esta forma (mencionamos que si $2^\alpha - 1$ es primo

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11–01.

Key words and phrases. Number Theory.

La investigación del primer autor está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI y la ayuda API-01/B38 de la UR.

La investigación del segundo autor está subvencionada por el proyecto BFM2000-0026 de la DGI.

entonces α también lo es; esta condición con frecuencia se añade en los textos a la caracterización precedente). Por tanto, los perfectos pares se conocen perfectamente, valga la redundancia, pero de los perfectos impares ni siquiera se sabe si existe alguno.

Si la respuesta al problema anterior es positiva, entonces quizá se resuelva mediante el uso de ordenadores, los cuales han tenido ya una incidencia considerable como medio de someter conjeturas a pruebas diversas. Con frecuencia los matemáticos actúan como el rey del cuento, que disparaba una flecha, y allá donde hubiese caído colocaba la diana. De modo que si un problema no sale, siempre se puede cambiar más o menos ligeramente hasta que se obtenga algún resultado, o bien hasta que se convierta en una conjetura o problema distinto. De esta forma nuevos conceptos y definiciones van desarrollándose. En relación a los números perfectos, mencionamos las siguientes variantes. Sea $s(n)$ la suma de los divisores propios de n , para $n > 1$. Con esta notación n es perfecto si $s(n) = n$. Además, decimos que los números m y n son *amigos* si $s(m) = n$ y $s(n) = m$, y finalmente que n_1, \dots, n_k son *sociables* si $s(n_1) = n_2, \dots, s(n_{k-1}) = n_k, s(n_k) = n_1$. Definamos $S_1(n) = s(n)$, y para $k \geq 1$, $S_{k+1}(n) = s(S_k(n))$. La conjetura de Catalan-Dickson afirma lo siguiente:

Para todo n , la sucesión $\{S_k(n)\}_{k=1}^{\infty}$ contiene tan solo un número finito de términos distintos.

Es decir, o bien la sucesión termina al ser $S_k(n)$ primo para algún k , en cuyo caso $S_{k+1}(n) = 1$ y el siguiente término no está definido, o bien la sucesión cae en un ciclo de números amigos o sociables. El número más pequeño para el que se desconoce si la sucesión anterior contiene infinitos términos distintos o no es 276. Resultados obtenidos mediante el uso de ordenadores en este tema, así como información adicional, pueden hallarse en [3, 2].

Vemos pues que algunos problemas de Teoría de Números han despertado interés desde los albores de nuestra civilización, mostrando en ocasiones considerable resistencia a los ataques, primero de la razón pura, y últimamente de la razón asistida por el silicio.

Las distintas secciones de este trabajo, aunque relacionadas entre sí, han sido escritas de modo que puedan leerse independientemente unas de otras, y en el orden que el lector desee.

2. LOS NÚMEROS PRIMOS

Las dos «realidades fundamentales» sobre los primos son: (i) que hay muchos, y (ii) que son escasos. O más precisamente, su número es infinito pero su densidad o frecuencia es cero. En general usaremos p para denotar a un primo arbitrario.

Sería concebible a priori que bastase una cantidad finita de primos para, tomando productos, obtener todos los naturales. Como es bien sabido, la primera demostración de que este no es el caso se debe a Euclides, quien notó que dados los N primeros primos p_1, \dots, p_N , debe haber otro en el intervalo $(p_N, p_1 p_2 \cdots p_N + 1]$, ya que el extremo superior no es divisible por ninguno de los números p_1, \dots, p_N .

Este argumento puede reusarse, con variaciones menores, para obtener resultados análogos sobre primos en determinadas progresiones aritméticas. Por ejemplo, para

ver que existen infinitos primos de la forma $4n + 3$, dados los N primeros primos p_1, \dots, p_N en la sucesión $\{4n + 3\}_{n=0}^{\infty}$, existe al menos otro más en el intervalo $(p_N, 4p_1p_2 \cdots p_N - 1]$, puesto que $4p_1p_2 \cdots p_N - 1$ debe tener algún divisor primo de la forma $p = 4k + 3$.

La prueba más «original» que conocemos sobre la infinitud de los primos se debe a Furstenberg ([8]): declaramos abiertos básicos en \mathbb{Z} a las sucesiones aritméticas (junto con el vacío), y consideramos la topología generada por dicha base. Cada sucesión aritmética, además de un abierto, también es un conjunto cerrado, al ser su complementario unión finita de sucesiones aritméticas. Si el número de primos es finito, entonces la unión sobre todos los primos $\cup_p \{np : n \in \mathbb{Z}\}$ es un cerrado, luego su complementario $\{1, -1\}$ es abierto, lo que contradice el hecho de que los abiertos básicos no vacíos son infinitos.

La demostración de Euclides nos proporciona un intervalo de longitud finita en el que necesariamente encontraremos un nuevo primo. Usando argumentos más complicados, se puede reducir el tamaño de dicho intervalo. Así, el postulado de Bertrand nos dice que entre n y $2n$ siempre hay un primo, y el postulado generalizado de Bertrand, que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon)$ tal que si $m > N(\varepsilon)$, entonces hay un primo entre m y $(1 + \varepsilon)m$. El postulado generalizado de Bertrand es consecuencia directa del Teorema de los Números Primos, que enunciaremos más adelante.

Otra prueba de la infinitud de los primos fue dada por Euler, quien demostró el resultado más fuerte

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty.$$

La considerable importancia histórica de este teorema se debe fundamentalmente a que, para obtenerlo, Euler definió la siguiente función:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{donde } s \in (1, \infty),$$

probando la fórmula producto

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

que revela la conexión entre ζ y los números primos.

De hecho, la conexión es mucho más profunda de lo que aparece a primera vista. Riemann reinterpretó $\zeta(s)$ como función de una variable compleja s . La serie es claramente convergente en $\{\Re s > 1\}$, y Riemann demostró que tal función puede extenderse analíticamente a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, conjeturando que:

Todos los ceros de ζ en la banda crítica $\{0 \leq \Re s \leq 1\}$ se encuentran sobre la recta $\{\Re s = 1/2\}$.

Esta es la celebrada Hipótesis de Riemann, considerada por muchos el problema abierto más importante de todas las Matemáticas, y por cuya resolución el Instituto Clay ofrece un millón de dólares. Para los jóvenes hay otro premio: una medalla.

De la fórmula producto de Euler, válida en $\{\Re s > 1\}$, se deduce fácilmente que ζ no se anula en $\{\Re s > 1\}$. Tomando límites desde la derecha, puede verse (pero no

fácilmente, la prueba es muy astuta) que tampoco se anula sobre $\{\Re s = 1\}$, lo cual implica el Teorema de los Números Primos. La demostración en 1896 de que ζ no tiene ceros en $\{\Re s = 1\}$ sirvió a Hadamard y a de la Vallée Poussin para alcanzar la inmortalidad (matemática).

Sea $\pi(x)$ el número de primos menores o iguales que x . La Hipótesis de Riemann, de ser cierta, implicaría que las desviaciones de $\pi(x)$ con respecto a la fórmula asintótica dada por el Teorema de los Números Primos, son «las mínimas posibles». Pero de momento, ni siquiera se ha conseguido probar la existencia de algún $\varepsilon > 0$ tal que ζ esté libre de ceros en $\{\Re s > 1 - \varepsilon\}$.

Por lo que se refiere a la segunda «realidad fundamental» sobre los primos, claramente cuanto mayor es un número natural, menor es la «probabilidad» de que sea primo, al tener por debajo más potenciales divisores. Demostramos a continuación que la frecuencia de los primos entre n y $2n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, es decir, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{n} = 0.$$

Una estimación muy conocida, que resulta útil tanto para probar el postulado de Bertrand como el propio Teorema de los Números Primos, es la siguiente: puesto que cada primo p tal que $n < p \leq 2n$ divide al numerador del coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ pero no al denominador, tenemos que $\prod_{n < p \leq 2n} p$ divide a $\binom{2n}{n}$, luego

$$n^{\pi(2n) - \pi(n)} < \prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

Tomando logaritmos se obtiene

$$(\pi(2n) - \pi(n)) \log n < 2n \log 2,$$

de donde se sigue que el límite anterior es cero. Como veremos a continuación, de aquí se deduce fácilmente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$$

(resultado que también puede obtenerse directamente modificando, con un poco más de esfuerzo, el argumento anterior). Siendo la diferencia entre

$$\frac{\pi(2n)}{2n} \quad \text{y} \quad \frac{\pi(2n+1)}{2n+1}$$

despreciable para n grande, claramente

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(2n)}{2n},$$

puesto que el lado izquierdo tan solo se distingue del derecho en que no consideramos enteros impares en este último. Por otra parte,

$$\begin{aligned} 2 \limsup \frac{\pi(2n)}{2n} &= \limsup \frac{\pi(2n)}{n} \\ &\leq \limsup \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{n} + \limsup \frac{\pi(n)}{n} \end{aligned}$$

$$= \limsup \frac{\pi(n)}{n} = \limsup \frac{\pi(2n)}{2n},$$

luego todos los límites existen y valen cero.

El Teorema de los Números Primos nos proporciona la conducta asintótica de $\pi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

En vez de usar

$$\frac{x}{\log x}$$

para aproximar $\pi(x)$, puede emplearse el logaritmo integral

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

en general con mejores resultados (es fácil comprobar que $\frac{x}{\log x}$ y $\text{Li}(x)$ son asintóticamente equivalentes). De hecho, la Hipótesis de Riemann es equivalente a la siguiente versión óptima del Teorema de los Números Primos:

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1/2} \log x).$$

Se sabe que el error no puede ser menor.

Mencionamos por último la siguiente acotación explícita para el n -ésimo primo p_n : Si $n > 1$, entonces

$$n \log n + n(\log \log n - 10) < p_n < n \log n + n(\log \log n + 8);$$

y comenzando con valores más altos de n , las constantes -10 y 8 pueden sustituirse por otras mejores.

El lector interesado en proseguir más allá encontrará buena parte de lo que aquí se ha relatado en los libros de texto habituales de Teoría de Números, mientras que para resultados más especiales sobre los primos, hemos usado (y recomendamos) [11]. La mejor demostración que conocemos del Teorema de los Números Primos es la versión de D. Zagier de la prueba de D. J. Newman (véase [12]). No nos cabe duda de que en el futuro reemplazará a las que hoy en día pueden hallarse en los libros de texto.

3. LA FUNCIÓN ϕ DE EULER

Además de la distribución de los primos, nos interesa conocer qué sucede con los números que son coprimos con un entero positivo dado. La función ϕ de Euler $\phi(n)$ cuenta el número de enteros positivos menores o iguales que n y primos con n . Naturalmente, a la hora de probar resultados interesa no una descripción verbal como la anterior, sino una fórmula que nos dé el valor de ϕ sobre cada $n \geq 1$. Tal fórmula es

$$(1) \quad \phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

con la convención de que el producto vacío vale 1.

Como sucede con otras funciones aritméticas, la conducta de ϕ es irregular y en ocasiones difícil de predecir. Parece intuitivamente claro, y además es cierto, que

cuando $n \rightarrow \infty$ lo mismo ocurre con $\phi(n)$: números grandes tienen muchos coprimos por debajo. Pero naturalmente hay muchas formas de acercarse al infinito, y puede interesarnos averiguar cómo lo hace $\phi(n)$.

Por ejemplo, planteémosnos la pregunta:

¿Existe algún entero positivo n tal que $\phi(n) > \phi(6n)$?

Pudiera pensarse que dado que $6n$ es «bastante más grande» que n , simplemente por «fuerza bruta» $6n$ tendrá más coprimos por debajo que n , es decir, que la desigualdad contraria $\phi(n) < \phi(6n)$ es cierta. Además, un examen de lo que sucede para valores pequeños de n refuerza esta conjetura.

¿Pero qué ocurre si n es «grande»? La fórmula (1) requiere conocer la factorización en primos de n , lo que para naturales arbitrarios de, digamos, 200 dígitos o más, está completamente fuera del alcance de los algoritmos existentes hoy en día (en esta falta de algoritmos eficientes de factorización se basan los métodos modernos de criptografía). De modo que una estrategia puramente computacional deja de funcionar cuando n pasa del centenar largo de dígitos. Pero dado que la diferencia $6n - n$ tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$, si n es grande, esperamos que suceda lo mismo que cuando n es pequeño, y «con mayor razón».

De hecho, las anteriores consideraciones apuntan en el camino correcto. Puede verse, por aplicación directa de (1), que efectivamente $\phi(n) < \phi(6n)$ para todo n . Ahora bien,

¿qué sucede si comparamos $\phi(6n)$ con $\phi(6n + 1)$?

En este caso el tamaño de $6n$ y $6n + 1$ es parejo, siendo su diferencia la mínima posible, de modo que cabe esperar que se produzcan oscilaciones en la desigualdad. Y efectivamente así ocurre: la desigualdad cambia de sentido un número infinito de veces. Pero entonces, si lo que sospechamos resulta ser cierto, ¿en qué consiste la dificultad de la que hablábamos al principio de este párrafo? En que la evidencia numérica para valores pequeños de n puede resultar engañosa: hemos comprobado, mediante un sencillo programa de ordenador, qué sucede con cada $n \leq 335\,000\,000$, y en cada caso se verifica que $\phi(6n) < \phi(6n + 1)$ (no se conoce el número más pequeño para el cual la desigualdad se invierte, aunque determinarlo tampoco debería resultar excesivamente complicado).

Si comparamos $\phi(30n)$ con $\phi(30n + 1)$, de nuevo la evidencia numérica parece sugerir que la desigualdad $\phi(30n) < \phi(30n + 1)$ siempre se cumple. De hecho, G. Martin ha determinado el menor n tal que $\phi(30n) > \phi(30n + 1)$: es del orden de 2.329×10^{1115} . En estos dos casos el tamaño de las sucesiones aritméticas empleadas es similar, con lo que a priori no hay razones para conjeturar que el valor de ϕ sobre una de ellas dominará siempre su valor sobre la otra. ¿Qué pasa si utilizamos, por ejemplo, n y $6n + 1$? Computaciones realizadas por María Iriarte, estudiante de Licenciatura en la Universidad de La Rioja, muestran que para toda $n \leq 10^{10000}$ tenemos $\phi(n) < \phi(6n + 1)$. Empleando coeficientes más grandes, encontramos que para toda $n \leq 10^{10000000}$, se verifica $\phi(210n) < \phi(6\,469\,693\,230n + 31)$.

Y sin embargo, en todos los ejemplos anteriores la desigualdad se invierte un número infinito de veces, como consecuencia del siguiente teorema de D. J. Newman sobre la conducta de ϕ en sucesiones aritméticas:

Sean a, b, c, d , enteros no negativos tales que $a, c > 0$. Si $ad - bc \neq 0$, entonces para infinitos valores de n ,

$$\phi(an + b) < \phi(cn + d).$$

De hecho, una versión más fuerte de este resultado también es cierta:

Sean a, b, c, d enteros no negativos tales que $a, c > 0$. Entonces existe una sucesión $\{n_k\}$ tal que

$$(2) \quad \lim_k \frac{\phi(an_k + b)}{\phi(cn_k + d)} = 0$$

si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

La idea básica de por qué este sorprendente resultado es válido, puede ilustrarse de modo sencillo utilizando un par concreto de sucesiones aritméticas: tomamos $\{cn + d\} = \{2n\}$ y $\{an + b\} = \{2n + 1\}$. Para escoger n_k nos interesa que en términos relativos el numerador sea lo más pequeño posible. Dado que

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

y que cada factor en el lado derecho es menor que uno, escogemos n con el máximo posible de divisores primos, y estos tan pequeños como podamos. En nuestro caso concreto, puesto que $\{2n + 1\}$ es impar, tomamos

$$2n_k + 1 := \prod_{i=2}^k p_i.$$

La fórmula producto de Euler nos dice que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)^{-1}.$$

Haciendo que $s \rightarrow 1$ concluimos que

$$\infty = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1},$$

o equivalentemente, que

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 0,$$

obteniéndose el mismo resultado si el producto comienza con cualquier otro índice distinto de 1. Por tanto,

$$\lim_k \frac{\phi(2n_k + 1)}{2n_k + 1} = \prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 0.$$

Como

$$\lim_k \frac{\phi(2n_k + 1)}{\phi(2n_k)} = \lim_k \frac{\frac{\phi(2n_k + 1)}{2n_k + 1}}{\frac{\phi(2n_k)}{2n_k}},$$

basta comprobar que el denominador está acotado inferiormente por un número estrictamente positivo. Ahora bien, ¿qué primos dividen a $2n_k = \prod_{i=2}^k p_i - 1$? Evidentemente 2 es uno de ellos. Si $q > 2$ es primo y divide a $\prod_{i=2}^k p_i - 1$, entonces $q > p_k$. Por consideraciones evidentes de tamaño, no puede haber más de k primos q con esta propiedad, de donde se sigue que

$$\frac{\phi(2n_k)}{2n_k} = \prod_{q|2n_k} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^k \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{p_k}.$$

La prueba concluye notando que esta última expresión tiende a $(2e)^{-1}$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Probablemente sea posible demostrar un resultado aún más fuerte. No es particularmente complicado verificar que si $ad - bc = 0$, entonces el cociente

$$\frac{\phi(an + b)}{\phi(cn + d)}$$

toma sólo un número finito de valores cuando n recorre los enteros positivos. Creemos, aunque de momento su demostración nos ha eludido, que la siguiente afirmación es cierta: si $ad - bc \neq 0$, entonces la sucesión

$$\left\{ \frac{\phi(an + b)}{\phi(cn + d)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es densa en $[0, \infty)$.

Naturalmente, existen abundantes problemas abiertos sobre la conducta de ϕ . Dos conjeturas relacionadas entre sí, una de las cuales ha sido resuelta recientemente, son las de Sierpiński y Carmichael. Sea n un entero positivo. Carmichael conjeturó que:

Si la ecuación $\phi(x) = n$ tiene una solución, entonces tiene al menos dos soluciones.

Es decir, para ningún entero positivo n se da el caso que $\phi(x) = n$ tenga exactamente una solución. Kevin Ford ha demostrado que no hay contraejemplos por debajo de $10^{10\,000\,000\,000}$, pero en principio nada excluye que los haya por encima de esa cifra.

Por su parte, Sierpiński conjeturó que:

Para todo $k > 1$ existe un n tal que la ecuación $\phi(x) = n$ tiene exactamente k soluciones.

Recientemente Kevin Ford ha probado que la conjetura de Sierpiński es cierta.

En esta sección aprovechamos para citarnos: la prueba de (2) en el caso general aparece en [1]. El resultado de D. J. Newman se publicó en [5], y la determinación del entero más pequeño que satisface $\phi(30n) > \phi(30n+1)$, en [4]. Para las conjeturas de Sierpiński y Carmichael nos remitimos a los artículos originales de Kevin Ford [6] y [7].

4. LA CONJETURA abc

Describimos en esta última sección la que, según Serge Lang, es una de las mejores conjeturas del siglo.

Consideremos dos enteros coprimos a y b , tales que cada uno de ellos tiene pocos factores primos, por ejemplo 2^n y 3^m , con n y m grandes. Entonces $a + b$ también es coprimo con a y con b . Aparte de eso ¿es posible decir algo interesante sobre la factorización de $a + b$ en primos? Veamos algunos ejemplos concretos:

$$2^{10} + 3^{10} = 13 \times 4621$$

$$2^{20} + 3^{20} = 41 \times 97 \times 281 \times 3121$$

$$2^{30} + 3^{30} = 13 \times 61 \times 2341 \times 4621 \times 24001$$

$$2^{40} + 3^{40} = 17 \times 401 \times 1783433557073281$$

$$2^{50} + 3^{50} = 13 \times 4621 \times 11701 \times 9802501 \times 104189401$$

$$2^{94} + 3^{90} = 8727963568087732232932026045561125726029033$$

$$2^{100} + 3^{100} = 41 \times 97 \times 281 \times 3121 \times 742801 \times 20017001 \times 9937984196743741414107401.$$

Observamos que, al contrario de lo que sucede con a y b , los factores primos de $a+b$ aparecen con exponentes muy bajos (en los ejemplos anteriores, con exponente 1). De modo que se verifica la desigualdad

$$a + b \leq \prod_{p|ab(a+b)} p.$$

En el caso general no cabe esperar una acotación tan simple, al ser posible que algún factor primo de $a + b$ aparezca con potencia mayor que 1. Pero una acotación del tipo

$$a + b \leq K \left(\prod_{p|ab(a+b)} p \right)^{1+\varepsilon},$$

donde $\varepsilon > 0$ y K es una constante, sí resulta verosímil. En esencia este es el contenido de la conjetura *abc*. El nombre viene de que en vez de emplearse a, b , y $a + b$, la conjetura se suele enunciar de forma más simétrica:

Supongamos que los enteros a, b, c son coprimos dos a dos y satisfacen $a+b+c = 0$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $K(\varepsilon)$, dependiente de ε pero no de a y b , tal que

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq K(\varepsilon) \left(\prod_{p|abc} p \right)^{1+\varepsilon}.$$

Como se ve, de ser cierta la conclusión, nos proporcionaría información fundamental sobre la factorización de sumas de enteros en primos. No es pues sorprendente que resulte útil para abordar el problema de la existencia o no de soluciones de ecuaciones diofánticas. Por ejemplo, la versión débil de la conjetura *abc* que se obtiene al reemplazar «para todo $\varepsilon > 0$ » por «existe un $\varepsilon > 0$ », implica la siguiente versión débil del Teorema de Fermat-Wiles:

Existe una constante $M(\varepsilon)$ tal que, para todo $n \geq M(\varepsilon)$, la ecuación $x^n + y^n = z^n$ carece de soluciones no triviales en enteros.

Veamos cómo deducir esta versión de la conjetura débil *abc*. Decir que $x^n + y^n = z^n$ carece de soluciones no triviales en enteros es claramente equivalente a decir que carece de soluciones en enteros positivos. Supongamos que los enteros positivos x, y

y z satisfacen $x^n + y^n = z^n$. Hemos de probar que existe un $M(\varepsilon)$ tal que $n < M(\varepsilon)$, es decir, que n está acotada (en el Teorema de Fermat-Wiles la cota explícita es 3).

Cancelando factores comunes si los hubiera, podemos asumir que x, y y z son coprimos dos a dos. Usando la conjetura débil tenemos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} z^n &\leq K(\varepsilon) \left(\prod_{p|x^n y^n z^n} p \right)^{1+\varepsilon} = K(\varepsilon) \left(\prod_{p|xyz} p \right)^{1+\varepsilon} \\ &\leq K(\varepsilon) (xyz)^{1+\varepsilon} < K(\varepsilon) (z^3)^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dado que $z \geq 2$, tomando logaritmos tenemos que las únicas soluciones posibles se obtienen cuando

$$n < 3(1 + \varepsilon) + \frac{\log K(\varepsilon)}{\log z} \leq 3(1 + \varepsilon) + \frac{\log K(\varepsilon)}{\log 2} =: M(\varepsilon),$$

como queríamos demostrar.

Si bien este resultado es más débil que el de Wiles, la técnica empleada también resulta útil al estudiar ecuaciones diofánticas donde la conexión con las curvas elípticas no existe, y por tanto los métodos de Wiles son inaplicables.

La conjetura *abc* se debe a Masser y Oesterle (1985). Históricamente surgió a partir de un resultado análogo para polinomios, el Teorema de Mason-Stothers, probado primero por Stothers (1981) e independientemente por Mason (1983). Información adicional sobre la conjetura puede hallarse, por ejemplo, en [9] y [10].

REFERENCIAS

- [1] J. M. Aldaz, A. Bravo, S. Gutiérrez y A. Ubis, A theorem of D. J. Newman on Euler's ϕ function and arithmetic progressions, *Amer. Math. Monthly* **108** (2001), 364–367.
- [2] M. Benito, W. Creyaufmüller, J. L. Varona y P. Zimmermann, Aliquot sequence 3630 ends after reaching 100 digits, *Experiment. Math.*, por aparecer.
- [3] M. Benito y Juan L. Varona, Advances in aliquot sequences, *Math. Comp.* **68** (1999), 389–393.
- [4] G. Martin, The smallest solution of $\phi(30n + 1) < \phi(30n)$ is ..., *Amer. Math. Monthly* **106** (1999), 449–451.
- [5] D. J. Newman, Euler's ϕ function on arithmetic progressions, *Amer. Math. Monthly* **104** (1997), 256–257.
- [6] K. Ford, The distribution of totients, *Ramanujan J.* **2** (1998), 67–151.
- [7] K. Ford, The number of solutions of $\phi(x) = m$, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 283–311.
- [8] H. Furstenberg, On the infinitude of primes, *Amer. Math. Monthly* **62** (1955), 353.
- [9] S. Lang, Old and new conjectured Diophantine inequalities, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **23** (1990), 37–75.
- [10] M. Nathanson, *Elementary methods in number theory*, Graduate Texts in Mathematics **195**, Springer-Verlag, Nueva York, 2000.
- [11] P. Ribenboim, *The new book of prime number records*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
- [12] D. Zagier, Newman's short proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly* **104** (1997), 705–708.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN
 Correo electrónico: aldaz@dmc.unirioja.es

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF MICHIGAN, ANN ARBOR, MI 48109-1109, USA
 Correo electrónico: anabz@math.lsa.umich.edu

CONVERGENCIA RELATIVA DE POLINOMIOS ORTOGONALES VARIANTES

BERNARDO DE LA CALLE YSERN Y GUILLERMO LÓPEZ LAGOMASINO

En recuerdo de los buenos momentos pasados con Chicho

ABSTRACT. We consider the relative asymptotic behaviour of orthogonal polynomials with respect to varying measures supported on the real line and the unit circle. The main feature of the results is the generality of the class of measures studied.

1. INTRODUCCIÓN

Consideraremos el problema de la convergencia relativa para medidas cuyo soporte esté contenido en la circunferencia unidad, si bien es posible describirlo sin dificultad en una situación más general. Sea ρ una medida de Borel finita y positiva en $[0, 2\pi]$. Sea h una función no negativa en $[0, 2\pi]$ tal que $h \in L^1(d\rho)$. Denotamos por $\varphi_n(d\rho)$ al n -ésimo polinomio ortonormal respecto a la medida $d\rho$ y por $\varphi_n(h d\rho)$ al correspondiente polinomio de la medida $h d\rho$. El problema de la convergencia relativa (o comparativa) consiste en encontrar condiciones para que exista $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(h d\rho)/\varphi_n(d\rho)$ y calcular su expresión.

Si la medida ρ cumple $\log \rho' \in L^1[0, 2\pi]$ se dice que ρ pertenece a la CLASE DE SZEGÖ y se define la FUNCIÓN DE SZEGÖ asociada a ρ , $S(\rho'; \cdot)$, mediante la expresión

$$S(\rho'; z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{w+z}{w-z} \log \rho'(\theta) d\theta \right\}, \quad w = e^{i\theta}, \quad |z| \neq 1.$$

La clase de Szegő aparece en la resolución del así llamado problema extremal de Szegő (para información sobre el mismo pueden consultarse, por ejemplo, [Fr], [Ni] y [Sz]). Si φ_n es el n -ésimo polinomio ortonormal respecto a la medida ρ se cumple el conocido teorema de Szegő (véase [Fr], capítulo V)

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} = S(\rho'; z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\{z : |z| > 1\}$. De este modo, el problema de la convergencia relativa puede considerarse una extensión de la teoría de Szegő ya que si $d\rho = d\theta/(2\pi)$ se tiene $\varphi_n(d\rho) = z^n$.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 42C05, 30E15; Secondary: 30E10.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, varying measures, relative asymptotics.

El trabajo de los dos autores ha sido parcialmente financiado por la Dirección General de Investigación, Ministerio de Ciencia y Tecnología, a través del proyecto BFM2000-0206-C04-01 y además, en el caso de G. López, por el INTAS.

En el caso de que las medidas $h d\rho$ y $d\rho$ pertenezcan ambas a la clase de Szegő, la aplicación directa de la fórmula (1) implica

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(h d\rho)(z)}{\varphi_n(d\rho)(z)} = \frac{S(h\rho'; z)}{S(\rho'; z)} = S(h; z), \quad |z| > 1.$$

Este resultado no es completamente satisfactorio, pues para la existencia del segundo miembro de la igualdad anterior sólo es necesario que $\log h \in L^1[0, 2\pi]$. Por ello, las investigaciones se han centrado en buscar las condiciones más débiles posibles para que se verifique (2). En [Ra], Rakhmanov anuncia sin demostrar que la condición necesaria $\log h \in L^1[0, 2\pi]$ no es suficiente y conjetura que $\log h \in L^p[0, 2\pi]$, $p > 2$ sí lo es. En cualquier caso el problema permanece abierto.

El primer problema de convergencia comparativa fue planteado por A. A. Gonchar en [Go], al estudiar la convergencia de los aproximantes Padé a funciones meromorfas tipo Markov. En su trabajo obtuvo una fórmula del tipo (2) (la medida ρ soportada en un intervalo real) bajo las hipótesis de que h fuera una fracción racional con polos fuera del soporte de ρ y $\rho' > 0$ en casi todo punto. Puede consultarse también, en relación con este tema, [Lo88].

En toda su generalidad, el problema de la convergencia relativa fue planteado primero por P. Nevai en [Ne]; más tarde, fue estudiado por Rakhmanov, [Ra], y Máté, Nevai y Totik, [Ma84] y [Ma87]. En estos trabajos, aparte de otros resultados, se encuentran teoremas que garantizan la existencia del límite (2) imponiendo a la función h condiciones no demasiado restrictivas. Así mismo hay fórmulas comparativas sobre el soporte de la medida con hipótesis tipo Lipschitz sobre h . En [Lo90] se demuestran resultados análogos para polinomios ortogonales respecto a medidas variantes, a fin de trasladar los teoremas a medidas con soporte en el eje real. El propósito de este trabajo es demostrar alguna de las fórmulas que aparecen en los artículos anteriores para una clase general de medidas variantes, aquellas que verifican la condición de admisibilidad fuerte.

2. DEFINICIONES Y RESULTADOS AUXILIARES

El contexto natural para el estudio de la convergencia fuerte de polinomios ortogonales lo constituye los espacios de Hardy. Nosotros nos limitaremos a definir los espacios \mathbb{H}_p y enunciar un resultado que será utilizado en las demostraciones. Para una consulta más detallada véase [Ru], donde aparecen estos temas de modo suficiente. Para más información pueden consultarse las monografías [Du] y [Ko].

Sea f una función analítica en el disco unidad abierto. Sea p un número real positivo. Denotamos

$$M_p(f; r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad r < 1.$$

Se dice que la función f , analítica en el disco unidad abierto, pertenece al ESPACIO DE HARDY \mathbb{H}_p si verifica

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} M_p(f; r) < \infty.$$

Si $p \geq 1$, el espacio \mathbb{H}_p tiene estructura de espacio normado definiendo la norma de f como $\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1^-} M_p(f; r)$. Claramente, $\mathbb{H}_s \subset \mathbb{H}_r$ si $r < s$.

El resultado que utilizaremos más adelante es el siguiente:

Teorema 2.1. *Toda función que pertenezca al espacio \mathbb{H}_1 admite límites radiales finitos en casi todo punto. Es decir, si $f \in \mathbb{H}_1$, entonces, para casi todo punto $\theta \in [0, 2\pi]$, existe*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}).$$

Este límite define una función $f^*(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$ que pertenece al espacio $L^1[0, 2\pi]$. Más aún, f es la INTEGRAL DE POISSON de f^* , esto es

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it})P(z, e^{it}) dt, \quad |z| < 1,$$

donde $P(z, w) = \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}$ es el NÚCLEO DE POISSON.

Sean ρ_n y ρ medidas de Borel, finitas y positivas en $[0, 2\pi]$. Por $\rho_n \xrightarrow{*} \rho, n \rightarrow \infty$, denotamos la CONVERGENCIA DÉBIL* de ρ_n a ρ cuando n tiende a infinito. Es decir, para toda función 2π -periódica f , continua en $[0, 2\pi]$, se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\rho_n(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\rho(\theta).$$

Sea ρ una medida de Borel compleja y regular en $[0, 2\pi]$ (en el sentido que la medida de cualquier conjunto de Borel $B \subset [0, 2\pi]$ es el supremo de las medidas de los conjuntos compactos de $[0, 2\pi]$ contenidos en B y el ínfimo de las medidas de los conjuntos abiertos de $[0, 2\pi]$ que contienen a B). La NORMA de ρ se define como

$$\|\rho\| = |\rho|([0, 2\pi]),$$

donde $|\rho|$ denota la medida positiva dada por la variación total de ρ . Esta aplicación define una norma en el espacio de todas las medidas de Borel complejas y regulares. Una sucesión de medidas de Borel complejas regulares $\{\rho_n\}$ converge en norma a ρ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n - \rho\| = 0.$$

Es bien sabido que todas las medidas de Borel finitas y positivas son regulares, por lo que este tipo de convergencia se aplica también a las medidas que estamos manejando (pueden verse estos conceptos y resultados en [Ru], por ejemplo).

Sea $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de Borel finitas y positivas en el intervalo $[0, 2\pi]$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ el soporte de ρ_n contiene un número infinito de puntos. Por $d\theta/2\pi$ denotamos la medida de Lebesgue en $[0, 2\pi]$, y por $\rho'_n = 2\pi d\rho_n/d\theta$ la derivada de Radon-Nykodym de $d\rho_n$ con respecto a $d\theta/2\pi$. Por \mathbb{N} (respectivamente $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) denotamos el conjunto de números naturales (resp. enteros, reales, complejos).

Sea $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n tiene grado n y todos sus ceros $\{w_{n,i}\}, 1 \leq i \leq n$, pertenecen al disco unidad cerrado.

Suponemos que los índices se toman de tal manera que si $w = 0$ es un cero de W_n de multiplicidad m entonces $w_{n,1} = w_{n,2} = \dots = w_{n,m} = 0$. Consideramos

$$d\sigma_n(\theta) = \frac{d\rho_n(\theta)}{|W_n(z)|^2}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Es necesario, para llegar a algún resultado concreto, establecer cierto tipo de conexión entre las medidas ρ_n y, a su vez, entre éstas y los polinomios W_n . A estas relaciones las llamaremos condiciones de admisibilidad.

Definición 2.1. *Fijemos un número entero $k \in \mathbb{Z}$. Se dice que $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ si:*

- (i) *Existe una medida de Borel ρ finita y positiva en el intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $\rho_n \xrightarrow{*} \rho, n \rightarrow \infty$ y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\rho'_n(\theta) - \rho'(\theta)| d\theta = 0.$$

- (ii) *$\rho' > 0$ en casi todo punto de $[0, 2\pi]$.*
- (iii) *$\|d\sigma_n\| = \int_0^{2\pi} d\sigma_n(\theta) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$.*
- (iv) *$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (1 - |w_{n,i}|) = +\infty$.*
- (v) *$\int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{-k} |z - w_{n,i}|^{-2} d\rho_n(\theta) \leq M < +\infty, z = e^{i\theta}, n \in \mathbb{N}$ (esta condición sólo se aplica en el caso que k sea un número entero negativo).*

En [Lo89] la definición de admisibilidad fuerte se presenta de manera análoga pero la parte $d\rho_n$ de las medidas variantes no depende de n . Es claro que, en esa situación, la condición (i) deja de tener relevancia alguna.

No es difícil probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n - \rho\| = 0$ implica (i) de la definición anterior. La condición (iii) de admisibilidad fuerte garantiza que para cada par (n, m) de números naturales se puede construir un POLINOMIO ORTONORMAL VARIANTE $\varphi_{n,m}(z) = \alpha_{n,m} z^m + \dots$ que está unívocamente determinado por las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{z}^j \varphi_{n,m}(z) d\sigma_n(\theta) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad z = e^{i\theta}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_{n,m}(z)|^2 d\sigma_n(\theta) &= 1, \quad \text{gr } \varphi_{n,m} = m, \quad \alpha_{n,m} > 0. \end{aligned}$$

Sea $\Phi_{n,m}(z) = z^m + \dots = (\alpha_{n,m})^{-1} \varphi_{n,m}(z)$ y consideremos el POLINOMIO RECÍPROCO $\Phi_{n,m}^*(z) = z^m \overline{\Phi_{n,m}(1/z)}$. Para cualquier sucesión de medidas de Borel positivas $\{\sigma_n\}$ tal que $\int_0^{2\pi} d\sigma_n(\theta) < +\infty, n \in \mathbb{N}$, se cumplen las siguientes relaciones, que no son más que simples reformulaciones de resultados bien conocidos (obsérvese que n permanece fijo en cada fórmula):

$$(4) \quad \Phi_{n,m+1}(w) = w\Phi_{n,m}(w) + \Phi_{n,m+1}(0)\Phi_{n,m}^*(w),$$

$$(5) \quad \Phi_{n,m+1}^*(w) = \Phi_{n,m}^*(w) + \overline{\Phi_{n,m+1}(0)}w\Phi_{n,m}(w),$$

$$(6) \quad (\alpha_{n,m+1})^2 = (\alpha_{n,m})^2 + |\varphi_{n,m+1}(0)|^2,$$

$$(7) \quad |\Phi_{n,m+1}(0)| \leq C \int_0^{2\pi} \left| \frac{|\varphi_{n,m}(z)|^2}{|\varphi_{n,m+1}(z)|^2} - 1 \right| d\theta, \quad z = e^{i\theta},$$

donde C es una constante independiente de n y m . Puede consultarse la demostración de (4)–(6) en el capítulo 1 de [Va], para la de (7) véase el teorema 2 en [Ma85].

En [Ca] aparece el siguiente teorema del que se deducen, siguiendo técnicas estándar, los demás resultados citados en esta sección. Véase dicho artículo para las demostraciones.

Teorema 2.2. *Si $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{|\varphi_{n,n+k}(z)|^2}{|\varphi_{n,n+k+m}(z)|^2} - 1 \right| d\theta = 0,$$

uniformemente en $m \in \mathbb{N}$.

Combinando (4)–(7) y usando el teorema 2.2, obtenemos

Teorema 2.3. *Si $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$, entonces*

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n,n+k+1}(0) = 0,$$

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n,n+k+1}}{\alpha_{n,n+k}} = 1,$$

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n,n+k+1}(w)}{\Phi_{n,n+k}(w)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k+1}(w)}{\varphi_{n,n+k}(w)} = w, \quad |w| \geq 1,$$

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n,n+k+1}^*(w)}{\Phi_{n,n+k}^*(w)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k+1}^*(w)}{\varphi_{n,n+k}^*(w)} = 1, \quad |w| \leq 1.$$

En (10)–(11) la convergencia es uniforme en los subconjuntos compactos de las regiones indicadas.

Siguiendo el esquema del lema 5 en [Lo87] se prueba de modo análogo:

Teorema 2.4. *Si la terna $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, j)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n,n+k}^*(w)}{\Phi_{n,n+k}(w)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k}^*(w)}{\varphi_{n,n+k}(w)} = 0, \quad |w| > 1,$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$, uniformemente en compactos de $\{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$.

Necesitaremos, por último, el siguiente teorema que aparece en [Ca].

Teorema 2.5. *Si $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$, entonces para toda función f medible Borel y acotada en $[0, 2\pi]$ y para cada número natural $m \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{\varphi_{n,n+k}(z) \overline{\varphi_{n,n+k+m}(z)} z^m}{|W_n(z)|^2} d\rho_n(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta.$$

Los resultados anteriores pueden utilizarse para demostrar diferentes teoremas sobre polinomios ortogonales variantes con soporte en la recta real del modo que puede verse, por ejemplo, en [Ca] y [Lo89]. Se relacionan ambos tipos de polinomios usando básicamente el hecho que una medida soportada en el intervalo $[-1, 1]$ define, mediante proyección, una medida en la circunferencia unidad. Nosotros haremos uso de esta construcción en la sección siguiente para demostrar un teorema de convergencia relativa en la recta real.

Sea $\{w_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios con coeficientes reales tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$: $\text{gr } w_{2n} = i_n, 0 \leq i_n \leq 2n$; y $w_{2n} \geq 0$ en $[-1, 1]$. Si $i_n < 2n$, consideramos que $x_{2n,i} = \infty$ para $1 \leq i \leq 2n - i_n$; si además, $i_n > 0$, entonces $\{x_{2n,i}\}_{2n-i_n+1 \leq i \leq 2n}$, denota el conjunto de ceros de w_{2n} . Cuando $i_n = 2n$, $\{x_{2n,i}\}_{1 \leq i \leq 2n}$ es el conjunto de ceros de w_{2n} .

Consideremos $d\tau_n = d\mu_n/w_{2n}$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^1 \frac{d\mu_n(x)}{w_{2n}(x)} < +\infty,$$

puede construirse una tabla de polinomios $\{l_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$, tal que $l_{n,m} = \beta_{n,m} x^m + \dots$, $\beta_{n,m} > 0$, es el m -ésimo POLINOMIO ORTONORMAL con respecto a τ_n ; es decir, estos polinomios están unívocamente determinados por el hecho de tener coeficiente conductor positivo y verificar las siguientes relaciones:

$$\int_{-1}^1 l_{n,k} l_{n,m} d\tau_n(x) = \delta_{k,m}.$$

De acuerdo con las condiciones anteriores, $w_{2n}(\cos \theta)$ es no negativo para $\theta \in \mathbb{R}$ y, de este modo, (véase el teorema 1.2.1 de [Sz]) existe un polinomio algebraico $W'_{2n}(w)$, de grado i_n , cuyos ceros están en \overline{U} tal que

$$w_{2n}(\cos \theta) = |W'_{2n}(e^{i\theta})|^2, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Es fácil ver que los ceros de W'_{2n} son los puntos

$$\left\{ \frac{1}{\Psi(x_{2n,i})} \right\}_{2n-i_n+1 \leq i \leq 2n},$$

donde Ψ denota la aplicación conforme de $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ en $\{|w| > 1\}$, tal que $\Psi(\infty) = \infty$ y $\Psi'(\infty) > 0$ (en $[-1, 1]$ Ψ se extiende de manera que su función inversa sea continua en $\{|w| = 1\}$). Tómese $W_{2n} = w^{2n-i_n} W'_{2n}$; entonces, el grado de W_{2n} es igual a $2n$ y

$$w_{2n}(\cos \theta) = |W_{2n}(e^{i\theta})|^2, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Los polinomios $l_{n,m}$ están estrechamente relacionados con los polinomios $\varphi_{2n,2m}$, polinomios ortonormales con respecto a la medida σ_{2n} definida por

$$d\sigma_{2n}(\theta) = d\tau_n(\cos \theta) = \frac{d\mu_n(\cos \theta)}{|W_{2n}(z)|^2}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Esto es, $\sigma_{2n}(E) = \tau_n(\{\cos \theta; \theta \in E\})$ siempre que $E \subset [0, \pi]$ ó $E \subset [\pi, 2\pi]$. De modo que escribiendo $\sigma_{2n}(\theta) = \sigma_{2n}(\{0 \leq t \leq \theta\})$, tenemos

$$\sigma_{2n}(\theta) = \begin{cases} G_n(1) - G_n(\cos \theta) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ G_n(1) + G_n(\cos \theta) & \text{si } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

donde $G_n(x) = \int_{-1}^x d\tau_n(t)$, $x \in [-1, 1]$, en todo punto θ donde σ_{2n} sea continua o equivalentemente, en casi todo punto de $[0, 2\pi]$. Luego

$$\sigma'_{2n}(\theta) = |\operatorname{sen} \theta| G_n(\cos \theta) = |\operatorname{sen} \theta| \frac{\mu'_n(\cos \theta)}{|W_{2n}(e^{i\theta})|^2} = |\operatorname{sen} \theta| \tau'_n(\cos \theta),$$

en casi todo punto de $[0, 2\pi]$. Obsérvese que se cumple que $\sigma' > 0$ en casi todo punto si $\tau' > 0$ en casi todo punto, donde

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \tau(1) - \tau(\cos \theta) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \tau(1) + \tau(\cos \theta) & \text{si } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

y τ es cualquier medida del mismo tipo que τ_n . Para cada n fijo, usaremos la conocida fórmula (véase el teorema V.1.4 de [Fr])

$$(14) \quad l_{n,m}(x) = \frac{\varphi_{2n,2m}(w) + \varphi_{2n,2m}^*(w)}{w^m \sqrt{2\pi(1 + \Phi_{2n,2m}(0))}},$$

donde $\Phi_{2n,2m} = \frac{\varphi_{2n,2m}}{\alpha_{2n,2m}}$ y $x = \frac{1}{2}(w + 1/w)$. Si $L_{n,m} = \frac{l_{n,m}}{\beta_{n,m}}$, la relación anterior se escribe

$$(15) \quad L_{n,m}(x) = \frac{\Phi_{2n,2m}(w) + \Phi_{2n,2m}^*(w)}{(2w)^m (1 + \Phi_{2n,2m}(0))}.$$

Denotaremos $d\rho_n(\theta) = d\mu_n(\cos \theta)$. Establecemos ahora una condición de admisibilidad fuerte en la recta real.

Definición 2.2. Sea $k \in \mathbb{Z}$ fijo, se dice que $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, k)$ es fuertemente admisible en $[-1, 1]$ si $(\{\rho_n\}, \{W_{2n}\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$.

No es difícil comprobar, debido a la relación existente entre las medidas en la circunferencia y en la recta real, que la definición anterior equivale a que la terna $(\{\mu_n\}, \{w_{2n}\}, k)$ satisfaga las siguientes condiciones:

- (I) Existe una medida de Borel finita y positiva μ en el intervalo $[-1, 1]$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, $n \rightarrow \infty$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |\mu'_n - \mu'| dx = 0.$$

- (II) $\mu' > 0$ en casi todo punto de $[-1, 1]$.

- (III) $\|d\tau_n\| = \int_{-1}^1 d\tau_n(x) < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$
- (IV) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \left(1 - \frac{1}{|\Psi(x_{2n,i})|}\right) = +\infty.$
- (V) $\int_{-1}^1 \prod_{i=1}^{-k} \left|1 - \frac{x}{x_{2n,i}}\right|^{-1} d\mu_n(x) \leq M < +\infty, \quad n \in \mathbb{N},$ donde $\frac{x}{x_{2n,i}} \equiv 0$ si $x_{2n,i} = \infty$ (esta condición sólo se aplica en el caso en que k sea un número entero negativo).

3. RESULTADOS Y DEMOSTRACIONES

En toda la sección se entenderá que $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ y utilizaremos $\varphi_{n,m}(d\sigma_n)$ para denotar al polinomio de grado m ortonormal con respecto a la medida $d\sigma_n$. Necesitamos primero el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea h una función medible Borel no negativa en $[0, 2\pi]$.*

- (a) *Si existe un polinomio Q tal que $|Q(z)|h^{-1}$ está acotada en $[0, 2\pi]$ y $(\{hd\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces, para cualquier función f Riemann integrable en $[0, 2\pi]$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$ fijo, se cumple*

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) |Q(z)|^2 \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(h d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}(z) \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) |Q(z)|^2 h^{-1}(\theta) d\theta.$$

- (b) *Si existe un polinomio Q tal que $|Q(z)|h$ está acotada en $[0, 2\pi]$ y $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces, para cualquier función f Riemann integrable en $[0, 2\pi]$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$ fijo, se cumple*

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\theta) |Q(z)|^2 \left| \frac{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(h d\sigma_n)}(z) \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) |Q(z)|^2 h(\theta) d\theta.$$

Demostración. Los enunciados (a) y (b) se prueban usando los mismos argumentos; llevaremos a cabo la demostración del apartado (a). Más aún, para simplificar la notación, sólo consideraremos el caso $k = 0$ (la prueba es análoga para un k arbitrario) y usaremos los siguientes convenios en la notación

$$\varphi_{n,m} = \varphi_{n,m}(d\sigma_n), \quad \psi_{n,m} = \varphi_{n,m}(h d\sigma_n), \quad \varphi_n = \varphi_{n,n}, \quad \psi_n = \psi_{n,n}.$$

Sea T_m un polinomio trigonométrico arbitrario de grado $m \leq n$; entonces (véase [Fr], capítulo V, teorema 2.2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{T_m(\theta)}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta) d\sigma_n(\theta).$$

Escojamos Q de grado j y $m \leq n - j$; entonces el grado de $T_m(\theta)|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2$ es igual a n y de la igualdad anterior se deduce que

$$(18) \quad \int_0^{2\pi} \frac{T_m(\theta) |Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta) h^{-1} |Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2 h d\sigma_n(\theta).$$

Como $(\{hd\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $|Q(z)|h^{-1}$ está acotada en $[0, 2\pi]$, las fórmulas (13) y (18) implican

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} T_m(\theta) \frac{|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta) h^{-1} |Q(z)|^2 d\theta.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} T_m(\theta) \left| \frac{Q\psi_{n,n-j-m}(z)}{\varphi_n} \right|^2 d\theta - \int_0^{2\pi} T_m(\theta) \left| \frac{Q\psi_n}{\varphi_n} \right|^2 d\theta \right| \\ & \leq \sup_{|z|=1} \left| 1 - \left| \frac{\psi_n}{\psi_{n,n-j-m}}(z) \right|^2 \right| \int_0^{2\pi} |T_m(\theta)| \frac{|Q\psi_{n,n-j-m}(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta. \end{aligned}$$

Según (19), (9) y (10) (aplicado a $h d\sigma_n$) el segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero y, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} T_m(\theta) \frac{|Q\psi_n(z)|^2}{|\varphi_n(z)|^2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_m(\theta) |Q(z)|^2 h^{-1} d\theta.$$

En este punto pueden usarse argumentos de aproximación (como los del teorema 1.5.4 de [Sz]) y demostrar que el polinomio trigonométrico T_m puede sustituirse por una función Riemann integrable arbitraria. Esto prueba (16); (17), como dijimos anteriormente, se obtiene de modo análogo. \square

Podemos ahora demostrar convergencia relativa de los polinomios ortonormales con respecto a $h d\sigma_n$ y $d\sigma_n$.

Teorema 3.1. *Sea $(\{d\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Sea h una función medible Borel en $[0, 2\pi]$ verificando:*

1. *Existe un polinomio $Q \not\equiv 0$ tal que $|Q(z)|h^{\pm 1}(\theta)$ está acotada en $[0, 2\pi]$.*
2. *$h \geq 0$ en $[0, 2\pi]$.*
3. *$(\{hd\rho_n\}, \{W_n\}, k)$ es fuertemente admisible en $[0, 2\pi]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Entonces

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k}(h d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}(d\sigma_n)}(z) = S(h; z),$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de $\{z : |z| > 1\}$.

Demostración. En primer lugar, observemos que las hipótesis 1 y 2 implican $\log h \in L^1([0, 2\pi])$ (por lo que existe la función de Szegő $S(h; z)$). Nos será más cómodo probar la relación equivalente

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n,n+k}^*(h d\sigma_n)}{\varphi_{n,n+k}^*(d\sigma_n)}(z) = S^*(h, z) = \overline{S(h, 1/\bar{z})},$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de U (la fórmula (21) se obtiene de (20) haciendo el cambio de variable $z \rightarrow 1/\bar{z}$ y conjugando).

Teniendo en cuenta (11), vemos que es suficiente probar (21) para $k = 0$. Como antes, para simplificar la notación, ponemos $\varphi_n = \varphi_n(d\sigma_n)$, $\varphi_n^* = \varphi_n^*(d\sigma_n)$, $\psi_n = \varphi_n(h d\sigma_n)$, $\psi_n^* = \varphi_n^*(h d\sigma_n)$. Podemos suponer que el polinomio Q de las hipótesis

del teorema no se anula en U pues tales ceros no influyen en la acotación de $|Q|h^{\pm 1}$ en $[0, 2\pi]$. Por tanto, las funciones $Q\psi_n^*/\varphi_n^*$ son analíticas y nunca se anulan en U . Por lo que, utilizando la fórmula de Poisson,

$$\log \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(e^{it}) \right|^2 P(z, e^{it}) dt.$$

Usando la desigualdad de Jensen, se obtiene

$$\left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(e^{it}) \right|^2 P(z, e^{it}) dt.$$

Como $|\varphi_n(e^{it})| = |\varphi_n^*(e^{it})|$ y $|\psi_n(e^{it})| = |\psi_n^*(e^{it})|$, gracias a (16), obtenemos

$$(22) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{-1}(e^{it}) |Q(e^{it})|^2 P(z, e^{it}) dt,$$

lo que, a su vez, implica que $\{\psi_n^*/\varphi_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$, está uniformemente acotada en subconjuntos compactos de U (recordemos que Q no tiene ceros en U). Consideremos ahora una subsucesión arbitraria $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n \in \Lambda} \frac{\psi_n^*}{\varphi_n^*}(z) = S_\Lambda(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de U . En virtud de lo que fue dicho anteriormente es suficiente probar que para cualquier tal subsucesión Λ se tiene $S^* \equiv S_\Lambda$.

Sea $r \in (0, 1)$ arbitrario. Usando (16) una vez más, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(QS_\Lambda)(re^{it})|^2 dt = \lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(re^{it}) \right|^2 dt \\ & \leq \lim_{n \in \Lambda} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{Q\psi_n^*}{\varphi_n^*}(e^{it}) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{-1}(t) |Q(e^{it})|^2 dt. \end{aligned}$$

Así, $QS_\Lambda \in \mathbb{H}_2$ y el límite $\lim_{r \rightarrow 1} (QS_\Lambda)(re^{it})$ existe en casi todo punto $t \in [0, 2\pi]$. Por otra parte, de acuerdo con (22), para cada $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ fijo, tenemos

$$|(QS_\Lambda)(rz)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^{-1}(t) |Q(e^{it})|^2 P(rz, e^{it}) dt.$$

Es bien sabido que el límite del segundo miembro de esta desigualdad existe, cuando $r \rightarrow 1$, para casi todo $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Por tanto, tomando dicho límite en ambos miembros y aplicando el teorema de Fatou (véase, por ejemplo, el capítulo 11 de [Ru]), se obtiene que $|S_\Lambda(z)|^2 \leq h^{-1}(\theta)$ en casi todo punto de $[0, 2\pi]$.

Probemos ahora que la desigualdad contraria también se verifica en casi todo punto. De hecho, razonando de la misma manera que antes, obtenemos

$$\log \left| \frac{Q\varphi_n^*}{\psi_n^*}(z) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{Q\varphi_n^*}{\psi_n^*}(e^{it}) \right|^2 P(z, e^{it}) dt,$$

lo cual, con la ayuda de la desigualdad de Jensen y (17) implica

$$|(QS_{\Lambda}^{-1})(rz)|^2 = \lim_{n \in \Lambda} \left| \frac{Q\varphi_n^*(rz)}{\psi_n^*} \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) |Q(e^{it})|^2 P(rz, e^{it}) dt,$$

donde z es arbitrario. Tomando límites cuando $r \rightarrow 1$, obtenemos $|S_{\Lambda}^{-1}(z)|^2 \leq h(\theta)$ en casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Esto, junto con la desigualdad anterior, da $|S_{\Lambda}(z)|^2 = h^{-1}(\theta)$ en casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Más aún, S_{Λ}^{-1} además de S_{Λ} pertenecen a \mathbb{H}_2 por lo que $\log S_{\Lambda}$ pertenece a \mathbb{H}_1 y se tiene, utilizando (3)

$$\begin{aligned} \log |S_{\Lambda}(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |S_{\Lambda}(e^{it})| P(z, e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log h^{-1}(t) P(z, e^{it}) dt = \log |S^*(z)|, \end{aligned}$$

lo cual implica que S_{Λ} y S^* son iguales salvo un factor de módulo 1, pero $S^*(0) > 0$ y

$$S_{\Lambda}(0) = \lim_{n \in \Lambda} \frac{\alpha_{n,n}(h d\sigma_n)}{\alpha_{n,n}(d\sigma_n)} \geq 0.$$

Por tanto $S_{\Lambda}(z) \equiv S^*(z)$. □

Como consecuencia casi directa de los resultados anteriores, se puede demostrar un teorema de convergencia relativa para polinomios ortogonales con respecto a medidas cuyo soporte sea un intervalo real.

Teorema 3.2. *Sea $(\{d\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k)$ fuertemente admisible en $[-1, 1]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Sea h una función medible Borel en $[-1, 1]$ que verifica*

1. *Existe un polinomio $Q \not\equiv 0$ tal que $|Q(x)|h^{\pm 1}(x)$ está acotada en $[-1, 1]$.*
2. *$h \geq 0$ en $[-1, 1]$.*
3. *$(\{hd\mu_n\}, \{w_{2n}\}, 2k)$ es fuertemente admisible en $[-1, 1]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n,n+k}(h d\tau_n)}{l_{n,n+k}(d\tau_n)}(x) = S(h^*(\theta) |\sen \theta|; \Psi(x)),$$

donde el límite es uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y $h^*(\theta) = h(\cos \theta)$.

Demostración. Consideramos la función h^* definida en $[0, 2\pi]$ mediante $h^*(\theta) = h(\cos \theta)$. Como en el teorema anterior, hagamos $k = 0$ (el caso k arbitrario es análogo) y pongamos

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi_{2n,2n}(d\sigma_{2n}), & \varphi_n^* &= \varphi_{2n,2n}^*(d\sigma_{2n}), \\ \psi_n &= \varphi_{2n,2n}(h^* d\sigma_{2n}), & \psi_n^* &= \varphi_{2n,2n}^*(h^* d\sigma_{2n}). \end{aligned}$$

Denotemos, por último, a los polinomios mónicos asociados a ψ_n y φ_n por Φ_n y $\tilde{\Phi}_n$, respectivamente.

Debido a la relación (14) (aplicada a $l_{n,n}(h d\tau_n)$ y $l_{n,n}(d\tau_n)$) y siendo $z = \Psi(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{l_{n,n}(h d\tau_n)}{l_{n,n}(d\tau_n)}(x) &= \frac{\psi_n(z) + \psi_n^*(z)}{\varphi_n(z) + \varphi_n^*(z)} \frac{\sqrt{1 + \Phi_n(0)}}{\sqrt{1 + \tilde{\Phi}_n(0)}} \\ &= \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} \frac{1 + \frac{\psi_n^*(z)}{\psi_n(z)}}{1 + \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)}} \frac{\sqrt{1 + \Phi_n(0)}}{\sqrt{1 + \tilde{\Phi}_n(0)}}, \quad x \notin [-1, 1]. \end{aligned}$$

Y ahora el resultado se deduce del teorema 3.1, teniendo en cuenta (8) y (12). \square

REFERENCIAS

- [Ca] B. de la Calle Ysern y G. López Lagomasino, Weak convergence of varying measures and Hermite-Padé orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **15** (1999), 553–575.
- [Du] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and Applied Mathematics **38**, Academic Press, Nueva York, 1970.
- [Fr] G. Freud, *Orthogonal polynomials*, Pergamon Press, Nueva York, 1971.
- [Go] A. A. Gonchar, On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions, *Math. USSR-Sb.* **26** (1975), 555–575.
- [Ko] P. Koosis, *Introduction to H_p spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [Lo87] G. López Lagomasino, On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and the convergence of multipoint Padé approximants, *Math. USSR-Sb.* **56** (1987), 207–219.
- [Lo88] G. López Lagomasino, Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials, *Math. USSR-Sb.* **64** (1989), 207–227.
- [Lo89] G. López Lagomasino, Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures, *Constr. Approx.* **5** (1989), 199–219.
- [Lo90] G. López Lagomasino, Relative asymptotics for polynomials orthogonal on the real axis, *Math. USSR-Sb.* **65** (1990), 505–529.
- [Ma84] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, What is beyond Szegő theory of orthogonal polynomials, en *Rational approximation and interpolation* (Tampa, Fla., 1983, P. R. Graves-Morris, E. B. Saff y R. S. Varga, eds.), Lect. Notes in Math. **1105**, Springer, Berlín (1984), 502–510.
- [Ma85] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, Asymptotics for the ratio of leading coefficients of orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **1** (1985), 63–69.
- [Ma87] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, Extensions of Szegő's theory of orthogonal polynomials, II, III, *Constr. Approx.* **3** (1987), 51–72; 73–96.
- [Ne] P. Nevai, *Orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. **213**, Providence, RI, 1979.
- [Ni] E. M. Nikishin y V. N. Sorokin, *Rational approximation and orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [Ra] E. A. Rakhmanov, On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the circle with weights not satisfying Szegő's condition, *Math. USSR-Sb.* **58** (1987), 149–167.
- [Ru] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, Alhambra, Madrid, 1985.
- [Sz] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.^a edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [Va] W. Van Assche, *Analytic aspects of orthogonal polynomials*, Katholieke Universiteit Leuven, manuscrito, 1993.

DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA, E. T. S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID, JOSÉ G. ABASCAL 2, 28006 MADRID, ESPAÑA

Correo electrónico: bcalle@math.etsii.upm.es

DPTO. DE MATEMÁTICAS, ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR, UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, UNIVERSIDAD 30, 28911 LEGANÉS, ESPAÑA

Correo electrónico: lago@math.uc3m.es

**EXTENSIONES DE LAS
 DESIGUALDADES TIPO KHINCHINE-KAHANE
 PARA LA BOLA UNIDAD DE ℓ_q^n , $0 < q < 1$**

JESÚS BASTERO Y MIGUEL ROMANCE

En recuerdo al profesor José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»

ABSTRACT. We study the behaviour of moments of order p of affine and quadratic forms with respect to the tail volume of the unit ball of ℓ_q^n ($0 < q < 1$) and we give some Kahane-Khinchine type inequalities for them.

Una de las propiedades más destacables de las funciones de Rademacher $\{r_i(\cdot)\}_{i=0}^{+\infty}$ definidas, para $t \in [0, 1]$, por

$$r_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0, \\ \text{sign}(\text{sen}(2^n \pi t)), & \text{si } i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

es que generan ℓ_2 en cada $L_p[0, 1]$, para cada $0 < p < +\infty$. Este resultado, conocido como desigualdades de Khinchine (véase, por ejemplo, [14]), asegura que para cada $0 < p < +\infty$ existen constantes positivas A_p, B_p tales que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Este tipo de desigualdades no es en absoluto particular de las funciones de Rademacher y se repite en diferentes situaciones y en muy distintas circunstancias. Un método que permite encontrar otras situaciones en las que existen este tipo de desigualdades nos lleva al terreno de la probabilidad, ya que podemos identificar las funciones de Rademacher con una familia de variables aleatorias independientes de Bernoulli $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{+\infty}$ (es decir, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toman solamente los valores 1 y -1 con probabilidad $1/2$). Entonces las desigualdades de Khinchine aseguran que existe constante $C > 0$ tal que

$$(1) \quad \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^p \right)^{1/p} \leq C \sqrt{p} \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^2 \right)^{1/2},$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B20; Secondary 52A40.

Key words and phrases. Khinchine-Kahane inequality, equivalence of moments, Gromov-Milman inequality, convex bodies.

Los autores están parcialmente subvencionados por un proyecto financiado por la DGES (España).

para cualquier familia de escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y para cualquier $p \geq 2$. Siguiendo esta línea, cabe preguntarse si existen desigualdades de tipo Khinchine para otras familias de variables aleatorias. Es fácil comprobar que la existencia de este tipo de desigualdades para una familia de variables aleatorias independientes $\{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$ es equivalente a que la familia tenga un *decrecimiento de tipo exponencial*, es decir que exista una constante $C' > 0$ tal que, para cualquier colección de escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n a_i X_i \right| > t \|(a_i)\|_2 \right\} \leq C' \exp(-Ct^2),$$

donde $\|(a_i)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}$. Este es el caso, por ejemplo, de una familia de variables aleatorias gaussianas independientes $\{g_i\}_{i=1}^{+\infty}$ (véase, por ejemplo, [6]).

Otra vía por la que se pueden extender las desigualdades de Khinchine es estudiar si existen desigualdades de este tipo, pero con carácter vectorial. Los principales resultados en esta dirección son las desigualdades de Kahane (véase [11] y [12]), que aseguran que si X es un espacio normado entonces para cualquier $0 < p < +\infty$ y para cualesquiera vectores $x_1, \dots, x_n \in X$ se tiene que

$$A_p \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\| dt \leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\| dt,$$

donde $A_p, B_p > 0$ son constantes absolutas independientes de p , de n y del espacio normado X .

En una línea completamente diferente a ésta, Gromov y Milman ([8]) demostraron que se tienen desigualdades de la forma (1) en otra situación: la medida de Lebesgue normalizada en un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Notemos que $|\cdot|$ denotará indistintamente tanto la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n como el valor absoluto, sin que esto signifique ninguna confusión pues el contexto resolverá cualquier posible duda. El resultado fundamental que probaron es el siguiente:

Teorema 1 (Desigualdad de Gromov-Milman). *Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n (es decir, un conjunto compacto en \mathbb{R}^n con interior no vacío). Para cualquier forma lineal $f(x)$ definida en \mathbb{R}^n se tiene que*

$$(2) \quad \left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq Cp \left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

para todo $p \geq 2$, donde $C > 0$ es una constante absoluta independiente de K y de la dimensión de \mathbb{R}^n . Es más,

$$|\{x \in K; |f(x)| > t \|f\|_2\}| \leq C|K| \exp(-Ct).$$

De este resultado se desprende que para cualquier forma lineal $f(x)$ definida en \mathbb{R}^n se tiene que

$$(3) \quad \|f\|_{L_{\psi_1}(K, dx)} \leq C \|f\|_{L_2(K, dx)}$$

con $C > 0$ constante absoluta, siendo $L_{\psi_1}(K, dx)$ el espacio de Orlicz generado por la función de Orlicz $\psi_1(t) = e^t - 1$ con la medida de Lebesgue normalizada y concentrada en K . En efecto, si denotamos

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

entonces, si $C > 0$, usando el resultado de Gromov-Milman,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K|} \int_K \exp\left(\frac{|f(x)|}{C\|f\|_2}\right) dx &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K \frac{|f(x)|^i}{C^i \|f\|_2^i i!} dx \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{C^i i!} \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(Ce)^i \sqrt{2\pi i}} \leq 2, \end{aligned}$$

siempre que C sea suficientemente grande.

Este resultado de Gromov y Milman admite diversas aplicaciones en la teoría local de espacios de Banach (como, por ejemplo, dar estimaciones de la constante de isotropía de cuerpos convexos tal y como se muestra en [5] y [17]) y además marca un camino para extender las desigualdades tipo Khinchine-Kahane a otras situaciones, en principio muy distintas a las planteadas con las funciones de Rademacher.

Siguiendo esta vía pero empleando técnicas completamente distintas, Borell probó (véase [16]) que se tiene una desigualdad tipo Gromov-Milman para cualquier medida μ de Borel en \mathbb{R}^n que sea *logarítmicamente cóncava*, es decir que verifique

$$\mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda},$$

para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ y cualquier pareja de conjuntos μ -medibles $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. La idea clave de la demostración de este hecho se basa en el siguiente resultado de Borell (véase [3], [4]):

Teorema 2 (Lema de Borell). *Si μ es una medida de Borel en \mathbb{R}^n logarítmicamente cóncava y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo simétrico respecto al origen con $\mu(A) = \theta > 1/2$, entonces*

$$(4) \quad \mu((tA)^c) \leq \theta \left(\frac{1 - \theta}{\theta} \right)^{\frac{1+t}{2}},$$

para cualquier $t > 1$.

A partir de este resultado G. Pisier probó (véase [16]) que si μ es una medida de Borel en \mathbb{R}^n logarítmicamente cóncava y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma, entonces

$$\|f\|_p \leq C_{pq} \|f\|_q,$$

para todo $p, q > 0$, donde C_{pq} es una constante que solo depende de p y q , y $\|f\|_p$ denota el valor

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

En esta línea, Latała ([13]) demostró que se puede conseguir que C_{pq} sólo dependa de p , es decir para cualquier $p > 0$

$$\|f\|_p \leq C_p \|f\|_0,$$

donde

$$(5) \quad \|f\|_0 = \exp \left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \log |f(x)| d\mu(x) \right).$$

O. Guédon ([9]), por su parte, ha probado que el resultado también es cierto para $q \in (-1, 0]$, definiendo $\|f\|_q$ de forma natural si $q < 0$. Para ser más precisos, ha demostrado que

$$\|f\|_1 \leq \frac{4e}{1+q} \|f\|_q,$$

para cualquier $q \in (-1, 0]$.

A la vista de la desigualdad de Gromov-Milman, una pregunta natural es si existen este tipo de desigualdades cuando se consideran formas que no sean lineales o seminormas.

Fue J. Bourgain (véase [5]) quien encontró desigualdades del tipo Gromov-Milman válidas para polinomios en lugar de formas lineales, respondiendo así una pregunta planteada anteriormente por V. D. Milman. El resultado principal de J. Bourgain es el siguiente:

Teorema 3 (Desigualdad de Bourgain). *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Para cualquier polinomio f en \mathbb{R}^n de grado d*

$$(6) \quad \left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq Cp^{C'd} \frac{1}{|K|} \int_K |f(x)| dx,$$

para todo $p > 0$, donde C, C' son constantes absolutas independientes de K y de la dimensión de \mathbb{R}^n . Es más, existe constante absoluta tal que, para cualquier $t > 0$,

$$(7) \quad |\{x \in K; |f(x)| > t\|f\|_1\}| \leq e^{-t^{c/d}} |K|.$$

Como consecuencia, $\|f\|_{L_\psi(K, dx)} \leq C^d \|f\|_1$, siendo $L_\psi(K, dx)$ el espacio de Orlicz generado por la función de Orlicz $\psi(t) = e^{ct/d} - 1$ con la medida de Lebesgue normalizada y concentrada en K . Dicho de otro modo

$$\frac{1}{|K|} \int_K \exp \left(\frac{|f(x)|}{C\|f\|_2} \right)^{c/d} dx \leq 2,$$

para cualquier polinomio de grado d , siendo C constante absoluta.

Del mismo modo que empleando el lema de Borell se obtienen desigualdades del tipo Gromov-Milman para medidas logarítmicamente cóncavas, Bobkov (véase [2]) demostró que existen desigualdades del tipo Bourgain para medidas de Borel μ logarítmicamente cóncavas, llegando a probar que

$$\|f\|_{L_\psi(K, d\mu)} \leq C^d \|f\|_1,$$

para cualquier polinomio de grado d , siendo $L_\psi(K, d\mu)$ el espacio de Orlicz generado por la función $\psi(t) = e^{t/d} - 1$ y la medida μ .

En relación con este tipo de extensiones de las desigualdades de Khinchine-Kahane para familias más generales que las formas lineales se ha probado recientemente que la desigualdad de Khinchine-Kahane original para funciones de Rademacher admite extensiones válidas para formas cuadráticas (véase los trabajos de Il'in [10] o Gnedenko [7]).

Notemos que si K es un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n entonces, μ_K definida para cada boreliano $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ como $\mu_K(A) = |A|/|K|$ es una medida de Borel logarítmicamente cóncava, sin más que recordar la desigualdad de Brunn-Minkowski, por lo que los resultados de Borell, Latała, Guedón y Bobkov se pueden interpretar como extensiones de las desigualdades de Gromov-Milman y Bourgain. Sin embargo, si eliminamos la condición de convexidad del conjunto K , perdemos, en general, el carácter de logarítmico concavidad de la medida μ_K , por lo que podemos preguntarnos si tienen sentido desigualdades tipo Gromov-Milman o Bourgain para medidas μ_K , con K no convexo.

Parece natural comenzar el estudio de desigualdades tipo Gromov-Milman-Bourgain para familias de conjuntos que exhiban propiedades parecidas a los conjuntos convexos. Un claro ejemplo de una familia de este tipo es la de las bolas unidad de los espacios ℓ_q^n con $0 < q < 1$. A continuación vamos a probar que para esta colección de conjuntos se tienen desigualdades tipo Gromov-Milman-Bourgain, gracias a las excelentes propiedades de simetría de estos conjuntos. Las demostraciones de estos hechos van a pasar por dar desigualdades tipo Gromov-Milman y Bourgain válidas para cuerpos compactos en general con buenas propiedades de simetría y pueden encontrarse en el trabajo, en preparación, [1].

Sea K un compacto en \mathbb{R}^n tal que tiene volumen (medida de Lebesgue) positiva y verifica la siguiente propiedad de *simetría*: un punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ pertenece a K si y solo si $(\pm x_1, \dots, \pm x_n)$ pertenece a K para cualquier elección de signos ± 1 .

Sea $\varphi(p, K)$ el valor definido por

$$(8) \quad \varphi(p, K) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\left(\frac{1}{|K|} \int_K |x_i|^p \right)^{1/p}}{\left(\frac{1}{|K|} \int_K |x_i|^2 \right)^{1/2}}$$

El siguiente resultado da una desigualdad de tipo Gromov-Milman para conjuntos compactos con la condición de simetría anterior y válida para formas lineales en la que aparece explícitamente involucrado $\varphi(p, K)$. Asimismo, incluimos la demostración del mismo pues es un ejemplo ilustrativo del tipo de técnicas que se emplean para dar extensiones de desigualdades del tipo Gromov-Milman.

Proposición 4. *Sea K un conjunto compacto con volumen positivo verificando la condición de simetría anterior y sea a un vector en \mathbb{R}^n . Si $p \geq 2$, entonces se cumple que*

$$(9) \quad \left(\frac{1}{|K|} \int_K |\langle a, x \rangle|^p dx \right)^{1/p} \leq C \varphi(p, K) \sqrt{p} \left(\frac{1}{|K|} \int_K |\langle a, x \rangle|^2 dx \right)^{1/2},$$

donde $C > 0$ es una constante absoluta.

Demostración. Sea $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toma los valores ± 1 con probabilidad $1/2$ (variables aleatorias de Bernoulli). Es claro que, gracias a la condición de simetría de K ,

$$\frac{1}{|K|} \int_K |\langle a, x \rangle|^p dx = \frac{1}{|K|} \int_K \left| \sum_1^n a_i \varepsilon_i x_i \right|^p dx$$

para cualquier elección de signos ε_i , $1 \leq i \leq n$. Entonces, promediando y usando las desigualdades clásicas de Khinchine se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K|} \int_K |\langle a, x \rangle|^p dx &= \frac{1}{|K|} \int_K \mathbb{E} \left| \sum_1^n a_i x_i \varepsilon_i \right|^p dx \\ &\leq C^p p^{p/2} \frac{1}{|K|} \int_K \left(\sum_1^n a_i^2 x_i^2 \right)^{p/2} dx \\ &\leq C^p p^{p/2} \left(\sum_1^n a_i^2 \left(\frac{1}{|K|} \int_K |x_i|^p dx \right)^{2/p} \right)^{p/2} \\ &\leq C^p p^{p/2} \varphi(p, K)^p \left(\sum_1^n \frac{1}{|K|} \int_K a_i^2 |x_i|^2 dx \right)^{p/2} \\ &= C^p p^{p/2} \varphi(p, K)^p \left(\frac{1}{|K|} \int_K |\langle a, x \rangle|^2 \right)^{p/2} \end{aligned}$$

□

A la vista del resultado anterior, podemos preguntarnos si tendrán sentido desigualdades de tipo Gromov-Milman para conjuntos compactos K con volumen positivo y que verifiquen ciertas condiciones de simetría si se consideran familias \mathcal{F} de funciones más generales que las formas lineales, es decir si se tendrá, siguiendo la idea de las desigualdades de Bourgain, que

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C\alpha(p) \left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

para todo $p \geq 2$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.

Parece lógico comenzar el estudio de este tipo de desigualdades considerando familias de funciones parecidas a la familia de las formas lineales, por lo que no parece descabellado comenzar con la familia de las formas afines. Notemos que, en caso de que K sea convexo, se obtiene automáticamente un resultado tipo Gromov-Milman para cualquier aplicación afín, sin más que hacer un cambio de variable que transforme la integral de la forma afín sobre K en una integral de una forma lineal sobre un trasladado de un cuerpo convexo $K + a$, que vuelve a ser convexo y por tanto se puede usar el resultado de Gromov-Milman. A priori, esta técnica de demostración no va a servir para generar desigualdades de tipo Khinchine-Kahane válidas para formas afines, ya que la condición de simetría impuesta a K queda

inoperante al hacer traslaciones. Sin embargo esta dificultad puede salvarse, tal y como muestra el siguiente resultado.

Proposición 5. *Sea K un conjunto compacto con volumen positivo y tal que verifica la condición de simetría anterior. Si a es un vector de \mathbb{R}^n y m es un número real, entonces, para cualquier $p \geq 2$,*

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K |m + \langle a, x \rangle|^p dx \right)^{1/p} \leq C \varphi(p, K) \sqrt{p} \left(\frac{1}{|K|} \int_K (m + \langle x, a \rangle)^2 dx \right)^{1/2},$$

donde C es una constante absoluta.

Otra familia sobre la que podemos estudiar la validez de desigualdades tipo Bourgain es la familia de las formas cuadráticas. Para ello debemos primero introducir algo de notación. Sea $\gamma(p, K)$ el valor definido por

$$(10) \quad \gamma(p, K) = \max_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{\left(\frac{1}{|K|} \int_K |x_i x_j|^p \right)^{1/p}}{\left(\frac{1}{|K|} \int_K |x_i x_j|^2 \right)^{1/2}}$$

para cada $2 \leq p$.

El siguiente resultado da una desigualdad de tipo Bourgain para conjuntos compactos con la condición de simetría anterior y válida para ciertas formas cuadráticas en la que aparece explícitamente involucrados $\varphi(p, K)$ y $\gamma(p, K)$.

Proposición 6. *Sea K un conjunto compacto con volumen positivo verificando la condición de simetría anterior y sea $C = (c_{ij})$ una matriz real $n \times n$ tal que $c_{ij} = c_{ji}$ y $c_{ii} = 0$. Si $p \geq 2$, entonces*

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K \left| \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j \right|^p dx \right)^{1/p} \leq Cp \left[\sum_{i,j=1}^n c_{ij}^2 \left(\gamma^2(p, K) \frac{1}{|K|} \int_K |x_i x_j|^2 dx + \varphi(p, K)^4 \left(\frac{1}{|K|} \int_K |x_i|^2 dx \right) \left(\frac{1}{|K|} \int_K |x_j|^2 dx \right) \right) \right]^{1/2},$$

donde $C > 0$ es una constante absoluta.

Debemos decir que la idea de la demostración de este resultado es diferente a la que podemos ver en la proposición 4 y usa técnicas de cálculo parecidas a las empleadas por Il'in para dar una extensión de las desigualdades de Khinchine a formas cuadráticas (véase [10]).

Los resultados anteriores se pueden interpretar como desigualdades tipo Gromov-Milman-Bourgain para conjuntos compactos con volumen positivo y verificando ciertas propiedades de simetría, si bien, en las desigualdades aparecen explícitamente $\varphi(p, K)$ y $\gamma(p, K)$, valores sobre los que, a priori, no se tiene ningún control. Cabe esperar que, dependiendo de las propiedades que tenga el conjunto K , se podrá tener una información más precisa del valor de $\varphi(p, K)$. Como caso particular de esto, se pueden dar estimaciones de $\varphi(p, K)$ y $\gamma(p, K)$ cuando K es la bola unidad de los

espacios ℓ_q^n denotada por

$$B_q^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n |x_i|^q \leq 1 \right\},$$

donde $0 < q \leq \infty$, tal y como muestra el siguiente resultado.

Proposición 7. Sean $0 < q < +\infty$ y $2 \leq p < \infty$. Entonces, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$(i) \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |x_i|^p dx \right)^{1/p} \sim_q \left(\frac{p}{n+p} \right)^{1/q},$$

$$(ii) \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |x_i x_j|^p dx \right)^{1/p} \sim_q \left(\frac{p}{n+p} \right)^{2/q} \left(\frac{n}{n+p} \right)^{1/pq},$$

donde \sim_q quiere decir que el cociente esta acotado superior e inferiormente por una constante que sólo depende de q . Como consecuencia,

$$\varphi(p, B_q^n) \leq C_q p^{1/q} \quad y \quad \gamma(p, B_q^n) \leq C'_q p^{2/q},$$

donde C_q y C'_q son constantes que solo dependen de q .

Usando estas estimaciones, ya podemos dar una desigualdad tipo Gromov-Milman para B_q^n de forma bastante precisa. Además, del mismo modo que las desigualdades de Gromov-Milman sirven para establecer relación entre la norma en $L_p(K, dx)$ y la norma de Orlicz $L_{\psi_1}(K, dx)$, se puede establecer un resultado de esta misma naturaleza pero en caso de que K sea B_q^n ($0 < q < 1$).

Corolario 8. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma afín y $0 < q < 1$. Si para cada $0 \leq p < +\infty$ denotamos

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

entonces existe constante $C_q > 0$, que solo depende de q , tal que

$$(11) \quad \|f\|_p \leq C_q p^{\frac{1}{q} + \frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

Además existen $C'_q, C''_q > 0$ que solo dependen de q , tales que

$$(12) \quad \frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} \exp \left(\left| \frac{f(x)}{C'_q \|f\|_2} \right|^{\frac{2q}{2+q}} \right) dx \leq 2$$

y también

$$|\{x \in B_q^n; |f(x)| > t\}| \leq C''_q |B_q^n| \exp(-C''_q t^{\frac{2q}{2+q}}).$$

Nota 9. Se puede comprobar que si fijamos $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\varphi(p, B_q^n) \leq C_q n^{1/q}$$

para todo $p \geq 2$. Por lo que, si prefijamos la dimensión n , se obtiene que para todo $0 < q < +\infty$ y para cualquier forma afín f

$$(13) \quad \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C_q n^{1/q} \sqrt{p} \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

es decir que si prefijamos la dimensión para las bolas B_q^n con $1 \leq q < +\infty$ se obtiene una mejor estimación que con las desigualdades de Gromov-Milman válidas para un cuerpo convexo K general.

En la misma línea del corolario anterior, las estimaciones obtenidas en la proposición 7 para la bola B_q^n también nos permiten enunciar las siguientes desigualdades de tipo Bourgain para la bola unidad de los espacios ℓ_q^n ($0 < q < +\infty$).

Corolario 10. *Sea $C = (c_{ij})$ una matriz real $n \times n$ tal que $c_{ij} = c_{ji}$ y $c_{ii} = 0$. Consideremos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $0 < q < 1$. y denotamos para cada $p \geq 2$*

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/2},$$

entonces existe constante C_q , que solo depende de q , tal que

$$(14) \quad \|f\|_p \leq C_q p^{1+\frac{4}{q}} \|f\|_2.$$

Además existen $C'_q, C''_q > 0$ que solo dependen de q , tales que

$$(15) \quad \frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} \exp \left(\left| \frac{f(x)}{C'_q \|f\|_2} \right|^{\frac{q}{4+q}} \right) dx \leq 2$$

y también

$$|\{x \in B_q^n; |f(x)| > t\}| \leq C''_q |B_q^n| \exp(-C''_q t^{\frac{q}{4+q}}).$$

Nota 11. Análogamente a lo que ocurría con las desigualdades tipo Gromov-Milman para B_q^n , se puede comprobar que fijado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\gamma(p, B_q^n) \leq C_q n^{2/q}$$

para todo $p \geq 2$. Por lo que, si prefijamos la dimensión n , para todo $0 < q < +\infty$ y para cualquier forma cuadrática f en las condiciones del corolario anterior, se tiene que

$$(16) \quad \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C_q n^{4/q} p \left(\frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Por tanto, si prefijamos la dimensión, para las bolas B_q^n con $1 \leq q < +\infty$ y las formas cuadráticas que aparecen en el corolario anterior se obtiene una mejor estimación que con las desigualdades de Bourgain válidas para un cuerpo convexo K general y un polinomio cualquiera de grado 2.

A la vista de que para la colección de bolas unidad de los espacios ℓ_q^n se tienen desigualdades tipo Gromov-Milman y Bourgain, se puede preguntar si este tipo de resultados será válido para la familia de los cuerpos q -convexos, con $0 < q < 1$, ya que las bolas unidad de los espacios ℓ_q^n son los ejemplos clásicos de conjuntos q -convexos. Recordemos que un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es q -convexo ($0 < q < 1$) si dados $x, y \in K$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que $\alpha^q + \beta^q = 1$ entonces $\alpha x + \beta y \in K$. Es fácil comprobar que si K es un cuerpo q -convexo (es decir, un conjunto q -convexo compacto con interior

no vacío), la medida μ_K asociada no es, en general, logarítmicamente cóncava, si bien verifica que si $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$ son tales que $\alpha^q + \beta^q = 1$, entonces

$$\mu_K(\alpha A + \beta B) \geq 2^{n-\frac{n}{q}} \mu_K(A)^\alpha \mu_K(B)^\beta.$$

A pesar de que es bien conocido que en teoría local de espacios de Banach la familia de los cuerpos q -convexos ($0 < q < 1$) tiene un comportamiento parecido en algunos casos a la familia de los cuerpos convexos, Litvak (véase [15]) ha demostrado que en este caso los resultados esperables para los cuerpos q -convexos no van a ser acordes con las desigualdades tipo Gromov-Milman-Bourgain conocidas para cuerpos convexos, puesto que ha probado que es imposible que se obtenga una desigualdad de la forma

$$\left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C_p \frac{1}{|K|} \int_K |f(x)| dx,$$

válida para cualquier forma lineal f , par cualquier q -convexo y para todo $p > 0$, siendo C_p una constante independiente de la dimensión de \mathbb{R}^n . Sin embargo, si se es un poco menos ambicioso y se permite que C_p pueda variar con la dimensión, se puede dar un resultado tipo Gromov-Milman válido para cuerpos q -convexos. Las técnicas necesarias para obtener este tipo de resultado pasan por obtener una extensión del lema de Borell que permitía dar desigualdades tipo Gromov-Milman para medidas logarítmicamente cóncavas, pero esta vez para medidas μ_K con K cuerpo q -convexo. Usando una extensión de este tipo del lema de Borell, se puede dar una desigualdad de tipo Gromov-Milman de la forma

$$(17) \quad \left(\frac{1}{|K|} \int_K |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C_p C_q^n \frac{1}{|K|} \int_K |f(x)| dx,$$

válida para cualquier cuerpo y para cualquier $p > 0$, siendo $C_p, C_q > 0$ constantes que solo dependen de p y q respectivamente, resultado en el que aparece explícitamente la dependencia de la dimensión n .

REFERENCIAS

- [1] J. Bastero y M. Romance, en preparación.
- [2] S. G. Bobkov, Remarks on the growth of L^p -norms of polynomials, en *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math. **1745**, Springer, Berlín (2000), 27–35.
- [3] C. Borell, The Brunn-Minkowski inequality in Gauss spaces, *Invent. Math.* **12** (1974), 239–252.
- [4] C. Borell, Convex measures on locally convex spaces, *Ark. Math.* **30** (1975), 207–216.
- [5] J. Bourgain, On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets, en *Geometric aspects of functional analysis (1989–90)*, Lecture Notes in Math. **1469**, Springer, Berlín (1991), 127–137.
- [6] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, Nueva York, 1957.
- [7] B. D. Gnedenko, The best constant in an inequality of Khinchin type for quadratic forms, *Russ. Math. Soc.* **55** (2000), 340–341.
- [8] M. Gromov y V. Milman, Brunn theorem and a concentration of volume phenomena for symmetric convex bodies, en *Israel seminar on GAFA (1983/84)*, V, Tel Aviv Univ., Tel Aviv, 1984.
- [9] O. Guédon, Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponent, *Mathematika* **46** (1999), 165–173.
- [10] P. V. Il'in, A generalization of Khinchin's inequalities to the case of quadratic forms, *Russ. Math. Soc.* **54** (1999), 1244–1245.

- [11] J. P. Kahane, *Series of random functions*, Heart Math. Monographs, Lexington, Mass., Heart & Co., 1968.
- [12] S. Kwapien, A theorem on the Rademacher series with vector coefficients, en *Probability in Banach spaces* (Proc. First Internat. Conf., Oberwolfach, 1975), Lecture Notes in Math. **526**, Springer-Verlag, Berlín (1976), 157–158.
- [13] R. Latała, On the the equivalence between geometric and arithmetic means for log-concave measures, en *Convex Geometric Analysis* (Berkeley, CA, 1996), *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **34**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999), 123–127.
- [14] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I. Sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlín, 1977.
- [15] A. E. Litvak, Kahane Khinchin's inequality for quasinorms, *Canad. Math. Bull.* **43** (2000), 368–379.
- [16] V. D. Milman y G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Math. **1200**, Springer-Verlag, Berlín, 1986.
- [17] G. Paouris, On the isotropic constant of non-symmetric convex bodies, en *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math. **1745**, Springer, Berlín (2000), 239–243.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, 50009 ZARAGOZA, ESPAÑA

Correo electrónico: bastero@posta.unizar.es, mromance@posta.unizar.es

ECHEGARAY Y LA MODERNIZACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN ESPAÑA. LAS LECCIONES DEL ATENEO

MARIANO HORMIGÓN BLÁNQUEZ Y M.^A DE LOS ÁNGELES MARTÍNEZ GARCÍA

ABSTRACT. In the last years of the XIXth century and the first ones of the XX, the influential and multifaceted engineer José Echegaray gave some mathematical courses in the Escuela Superior del Ateneo Científico y Literario de Madrid. Among these courses the more remarkable ones, for their importance, were those dedicated to the Galois theory and elliptic functions. In this work, it is analyzed the content of these lessons, their social impact and their significance in the process of modernization of mathematics in Spain from one Century ago.

Pensado y escrito como acto de recuerdo y homenaje a nuestro entrañable compañero y amigo José Javier Guadalupe Hernández, Chicho, este trabajo ha sido deliberadamente elegido, entre otras posibles opciones, en función de las preferencias intelectuales que Chicho defendió a lo largo de su intensa y productiva vida. Cualquiera de los que estuvimos más o menos cerca de él sabemos de su interés en, su esfuerzo por, y su dedicación al progreso de las matemáticas —sin adjetivos— en España. En este contexto —y como quiera que Chicho sí consideraba que las matemáticas eran una ciencia construida históricamente por la acción acumulativa del trabajo de las inteligencias humanas— la historia de las matemáticas debía tener un sesgo concreto, al que procuraremos aproximarnos en el presente trabajo.

1. SALSA MATEMÁTICA PARA LOS GUIOS DEL ESPÍRITU

Este trabajo está basado en dos capítulos de la historia de las matemáticas en España que, a pesar de la frecuencia con que, parcialmente, se les ha tomado como ejemplo, no han dejado de tener interés para explicar y entender los procesos históricos que producen la modernización de los conocimientos matemáticos en un país o contexto geográfico determinado. Esos capítulos son los de la introducción en España de la llamada teoría de Galois y las funciones elípticas. La razón de unir estos dos temas no es caprichosa, ambos estuvieron y están en el núcleo de las áreas de interés matemático a lo largo del siglo XX, aunque con las lógicas fluctuaciones que impone el tiempo, ambos merecieron la atención de una institución tan importante para la historia contemporánea de España como el Ateneo de Madrid, en cuya tribuna fueron —ambos— explicados por un personaje tan polifacético y tan significativo como José Echegaray.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 01A55, 01A60, 12F10, 33E05.

Key words and phrases. History of mathematics, Spain, Echegaray, XIXth and XXth centuries, Galois theory, elliptic functions.

Usualmente, ha sido la teoría de Galois el tema preferido a la hora de aproximarse a la situación de las matemáticas en España en el momento del despegue representado por la reacción en torno a la crisis de la pérdida de los territorios españoles en América y Asia. Por varias razones. La teoría de Galois conlleva en sí misma varias variables que la han hecho particularmente atractiva al interés de algunos historiadores de las matemáticas en general y de las españolas en particular. En general, por la personalidad rupturista del autor, Galois, que da nombre a la teoría, por su desgraciada y corta biografía y por la importancia que adquirió el tema en el proceso de conformación de las matemáticas contemporáneas. Sobre este tema, como ya se ha dicho, el propio EcheGARAY publicó, en dos entregas, sus cursos del Ateneo [7, 8], además de los resúmenes que aparecieron en la *Revista de Obras Públicas*, en *Madrid Científico* y en otras publicaciones.

El segundo tema, el de las funciones elípticas, ha sido, sin duda, menos habitual tanto en lo que se refiere a la propia historiografía matemática mundial como en la concerniente a España. En ello influye el aspecto insoslayable de la propia dificultad interna de su desarrollo, a pesar del interés que suscitó debido a las múltiples aplicaciones que se les encontraron y de las buenas obras introductorias que se redactaron en el siglo XIX para su enseñanza o para el inicio de la investigación. En el caso concreto que nos ocupa y que representa la alternativa en la Corte —aunque fuera por la puerta de la Escuela Superior del Ateneo— del tema, también incide el hecho de que EcheGARAY no redactara, al contrario de lo que sucedió con la teoría de Galois, una obra sobre las lecciones que impartió desde 1898 a 1901 sobre funciones elípticas. Y aunque la *Revista de Obras Públicas* volvió, como en las lecciones anteriores, a recoger un extracto de parte de su contenido, realizado por Juan González Piedra [16], ha merecido mucha menor atención, situación que intentaremos equilibrar aquí.

Por lo tanto ya tenemos definido el campo sobre el que vamos a trabajar. También hemos señalado el personaje al que vamos a seguir, EcheGARAY, y el medio en el que se inyectaron las nuevas ideas, el extrauniversitario. Viene esto a cuento de las virtudes del antiguo y meritorio oficio de enseñar, porque sobre la renovación matemática en el sentido del avance, del progreso, toda reflexión debe ser bienvenida, para, en lo posible, no cometer hogaño errores en los que se incurrió antaño. La modernización matemática española que desemboca en el apreciable nivel alcanzado en las últimas décadas del siglo XX, tiene raíces antiguas, junto a evidentes lagunas no tan antiguas.

A pesar de las dificultades derivadas de la escasez presupuestaria, las matemáticas españolas decimonónicas van viendo aumentar su calidad a empujones de voluntarismo. Ingenieros civiles, docentes universitarios y de secundaria, maestros, ingenieros, artilleros, marinos y otros militares, y gente culta de las capas sociales dominantes, en general, prodigan sus esfuerzos en pro de afianzar en la enseñanza materias científicas y, en concreto, de matemáticas. No era ni una tarea fácil ni fue cosa de un día. Equiparar el prestigio de los conocimientos matemáticos a los de las lenguas clásicas, la gramática o la religión conllevó una batalla —en algunas ocasiones sorda, en otras más estridente— que hoy parece impensable. Pero hubo que darla. Y se progresó cuando se copió bien. Las más de las veces, quienes quisieron dejarse atrapar por irrefrenables raptos de creación original, sin base bibliográfica que los

sustentase, hicieron un papel más bien decepcionante. Gracias a esos impulsos, *gracias* también, a la cicatera política de sueldos que obligaba a muchos profesores a tener que publicar libros que los estudiantes adquirieran para mejorar sus niveles de subsistencia, se importaron muchas ideas matemáticas útiles para la instrucción de los escolares¹. Además, para quien quisiera hacer una carrera, era muy conveniente saber idiomas. No necesario, porque ya se sabe, que quien tiene padrinos no necesita meterse en sutilezas lingüísticas, ni tampoco por el prurito o el placer de la comunicación. Simplemente, para poder estudiar más y mejor. Así, por tanto, el siglo XIX está lleno de esfuerzos beneméritos de matemáticos que, antes de que la realidad de las rutinas les cayera encima, secándoles el cerebro para el resto de sus días o antes de que decidieran dedicarse a otros asuntos que consideraran más urgentes para el bien del país, colaboraron en la tarea del *progreso matemático*, uno de los más adecuados términos a la síntesis histórica de la época. Juan Justo García, Vallejo, García de San Pedro, Lista, Odriozola, Cortázar, Jerónimo del Campo, Sánchez Cerquero, Vázquez Queipo, son algunos pocos nombres que ilustran ese difícil tránsito que supuso en España la construcción del estado liberal en el contexto matemático a lo largo de los dos primeros tercios del siglo XIX. Luego vino el Sexenio Revolucionario, tan lleno de entusiasmo como de ingenuidad y estupidez, y luego la Restauración Monárquica y los turnos.

A pesar de que la parte final del siglo XIX en España tuvo como telones de fondo la última de las guerras dinásticas carlistas y las de Cuba y Filipinas, hubo también algo más de acierto y de constancia en la política de provisión de plazas, en la construcción de infraestructuras y en algunas dotaciones educativas. Mas el caso es que el tema de la ciencia en general y el de las matemáticas en particular fue calando en la sociedad española y entre las tareas del gobierno —aunque, sin excesos desmedidos—. Y con el tramo final del siglo entran en escena algunos autores que en distintos campos van a acometer la tarea de la renovación. Y no es que los del periodo anterior ignorasen donde se encontraba el camino por el que se debía transitar, porque no puede olvidarse que Vallejo asistió en la década de los veinte a las lecciones de Cauchy, que Gauss fue elegido miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Madrid, o que la nada fácil memoria de Riemann [24] del año 1854, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, fue publicada en la revista de la Academia tan sólo veinte años después. Y eso, en las concretas coordenadas intelectuales de España, indicaba perspicacia y actualidad de conocimientos. Claro que para la última fecha que hemos escrito —1874— las cosas habían cambiado desde el punto de vista intelectual, bastante. En ese momento, se había llevado a cabo a cabo una Revolución que había dado con la reina en el exilio, se habían intentado cocinar políticamente guisos como el estreno de una dinastía distinta a la borbónica e incluso el ensayo de una república y se habían organizado partidos políticos diversos que alcanzaban ya, incluso, a determinados sectores de los trabajadores. Comenzaba a despuntar la industria por determinadas

¹No sólo para la metrópoli. El tan usual camino del exilio que muchos españoles se vieron obligados a tomar, sobre todo durante el reinado de Fernando VII, tuvo efectos colaterales, por una vez incruentos y beneficiosos, en las jóvenes repúblicas americanas, recientemente independizadas. *Vid.* [5].

zonas del país y algunos viajes ya se hacían en tren. Por tanto, si no vientos huracanados de cambio, alguna brisa de transformación estructural ya se dejaba notar. Y las matemáticas no se iban a quedar al margen, porque uno de los campos de confrontación ideológica mejor delimitados fue el de las ciencias y muy en concreto el de las matemáticas². No vamos a extendernos mucho sobre este tema, extensamente tratado en nuestra historiografía, que es conocido como el de la *Polémica de la Ciencia española*³. Simplemente señalaremos que fue, por las dos partes, un debate propio de la distorsión de los espejos del Callejón del Gato, que Valle-Inclán immortalizó en su versión esperpéntica de la realidad española.

En esa Polémica, un alarde de destrezas oratorias corrió a cargo de un ya afamado ingeniero de caminos, político en activo del más alto nivel, exitoso dramaturgo y gran aficionado a las matemáticas de su tiempo, José Echegaray Eizaguirre. No era el único, desde luego. En otros puntos del país, si seguimos a Rey Pastor, el pamplonés y residente en Zaragoza, García de Galdeano, o el catedrático Eduardo Torroja también comenzaban su particular empeño en pro de la renovación de los saberes matemáticos. Pero desde el punto de vista del conocimiento público y de la influencia general, no cabe duda que el autor de *El gran galeoto*, se llevaba la palma. Echegaray ya había escrito⁴ artículos de matemáticas en la *Revista de Obras Públicas*, algunas memorias y libros de geometría, de cálculo de variaciones y otras contribuciones que le llevaron a ocupar un sillón en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, institución a la que se incorporó con un discurso incendiario —eran tiempos prerrevolucionarios— sobre la *Historia de las Matemáticas Puras en nuestra España*. Sus dotes para la escenificación produjeron un texto desgarrador y lleno de efectos del que han quedado algunas lapidarias frases para la posteridad. Echegaray, que clamaba en todas las tribunas muy justamente por la necesidad de que el estado de cosas cambiara —en eso coincidía con otros muchos, aunque no lo hicieran entre sí en la fórmula que debía aplicarse tras la negación de lo existente— señalaba:

«La ciencia matemática nada nos debe; no es nuestra; no hay en ella nombre alguno que labios castellanos puedan pronunciar sin esfuerzo.»

E inaugurando una práctica que se convertiría en costumbre en la España de la época apuntaba su lista de eminencias en la historia de las matemáticas, que aquí reproducimos en texto corrido:

«La resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado se debe a Ferri⁵, a Tartaglia, a Cardan y a Ferrari, italianos. El álgebra a Viete, francés. La teoría de ecuaciones, al mismo Viete, francés, y a Harriot, inglés. La geometría analítica, a Descartes, francés también. El cálculo diferencial a Newton y Leibnitz, inglés el primero, alemán el segundo. La teoría de los números y el análisis indeterminado, a Fermat y Bachet de Meziriac, franceses ambos. Las fracciones continuas a Brouncker,

²Sobre historiografía *Vid.* [2, 3]. Una versión más resumida puede leerse en [4].

³Una siempre aprovechable antología sobre la *Polémica* sigue siendo [11].

⁴Una bibliografía científica de Echegaray junto a una antología de textos y un estudio crítico puede verse en [26].

⁵Grafía actual en el texto, pero no en los nombres propios en los que no hemos cambiado las erratas. Cardan es obvio que se trata de Cardano y Ferri tiene que ser del Ferro.

inglés. Los logaritmos a Neper, inglés también. La geometría superior a Desargues, francés. Las series a Wallis y Mercator, inglés el primero, alemán el segundo. El cálculo integral a Leibnitz, Newton y los Bernoulli. Al francés Monge, la geometría descriptiva. El cálculo de variaciones, al piomontés Lagrange» [26, p. 180].

Sin que pueda decirse que hay errores de bulto, sí que es una enorme travesura simplificadora, reducir la historia de las matemáticas a esa breve relación. Pero para la tesis previa de Echegaray y para sus efectos era conveniente, porque, a continuación, iba a señalar la causa del problema (que fácilmente hubiera podido extender a todos los países del mundo salvo Italia, Francia, Inglaterra, Alemania, Suiza, por los Bernoulli, y la curiosa referencia al Piamonte). Dicha causa es que «la razón, la facultad más noble del ser que piensa, languidece y decae (en España), y con ella todo languidece y muere al fin» [26, p. 181].

Con lo cual es fácil deducir que la historia de las matemáticas en España en el periodo comprendido entre el Renacimiento y el siglo XIX, se terminaba pronto. Hubiera podido reducirlo, y en cierta manera lo hace, a dos palabras: *No hay*. Al margen del análisis del discurso, para el que éste que no es lugar y al margen, también, de lo bienintencionado de su fin, que al fin y al cabo, pretendía arrinconar la fea costumbre hispánica de alardear hasta de lo que no se tenía, la argumentación estaba orientada a constatar que, en matemáticas puras España marchaba con bastante retraso respecto a otros países europeos. Un inciso, quizás impertinente, pero que viene a cuento, está ligado al hecho del énfasis que el ingeniero de caminos y profesor de matemáticas en la escuela de su ramo profesional puso en el matiz de las matemáticas puras. ¿En las aplicadas, por ventura, no había retraso? Bien, de cualquier forma, parecía oportuno señalar en tan elevada tribuna que, en lo referente al progreso matemático, había mucho tajo por delante.

Por su rotundidad el discurso de ingreso en la Academia de Ciencias tuvo para Echegaray algún problema en su curriculum social. Porque, años después, cuando Echegaray había añadido a su copioso curriculum técnico-científico-político-literario nada menos que el Premio Nobel de Literatura de 1904, se prodigaron los homenajes y publicaciones encomiásticas en torno a su persona. Como es sabido, algunos premios tienen la propiedad de situar a sus beneficiarios en categorías por encima del bien y del mal y el Nobel es, por supuesto, uno de ellos. Así, por ejemplo, una colección expresivamente titulada *Los Grandes Españoles* de la Imprenta de Alrededor del Mundo, dedicó su segunda entrega, obra de los periodistas Luis Antón del Olmet y Arturo García Carraffa [22], al personaje Echegaray⁶. Se conserva en la Biblioteca del Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de la Universidad de Zaragoza el ejemplar en el que figura la dedicatoria autógrafa del propio Echegaray a los autores, por lo que consideramos que de toda la amplia literatura que sobre nuestro ingeniero se generó en aquellos años, este texto debía contar con su aquiescencia⁷. Los autores, en nombre de la casa editora, se justificaban, en un

⁶El primer número de la colección había sido dedicado a Galdós, luego aparecerían los de Maura y Moret.

⁷Aquiescencia de larga estela, porque cuando la Sociedad Matemática Española decidió celebrar el *Homenaje* correspondiente al Primer Centenario del nacimiento de Echegaray en las páginas de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, encargando para ello colaboraciones especiales a

prólogo titulado *Nuestra gratitud*, de las críticas recibidas por el hecho de que *unos escritores «católicos» pusieran su admiración, su trabajo, sus plumas en el libro de Galdós*⁸. Para apresurarse a decir:

«Esta Biblioteca no ha nacido con un criterio estrechuco, sórdido. Ha nacido pensando en los grandes hombres españoles, que no son de otra manera sino grandes. Y así biografiaremos a los varones insignes que el catolicismo ha formado. Esta Biblioteca no tiene banderías parciales. Sólo tiene una hermosa y noble bandera: la bandera española» [22, pp. 8–9].

Es interesante estudiar los perfiles con que, en el referido contexto editorial, a pesar de su corte hagiográfico, se enfocó el discurso anteriormente mencionado, que es calificado de *áspero, crudo y hasta agresivo*, y que, por lo tanto, *produjo, a pesar de las felicitaciones y elogios de rúbrica, pésimo efecto en algunos centros y colectividades*⁹. Claro que para los periodistas Olmet y Carraffa, justificadas, porque

«hay que tener en cuenta que en aquella época, todo lo que fuera rebajar a España, a empañar sus glorias, se recibía con censura, pues no ocurría entonces lo que desgraciadamente ocurre ahora, que los que escarnecen a la patria encuentran aplauso y simpatía en muchos sitios».

Duras frases para un autor perteneciente al conjunto de los grandes de España, si no de cuna, sí de hechos. Por ello, se ven obligados a afirmar a continuación que «aun cuando la intención del discurso de Echegaray era sana, honrada y sincera, fue a la vez una nota discordante y levantó protestas».

Pero para que no queden dudas de la percepción que se tuvo del famoso discurso, sigamos con la sucinta explicación de sus biógrafos:

«La culpa de que no tuviéramos grandes matemáticos la atribuía D. José al fanatismo religioso, a la Inquisición y a sus tormentos, que habían destrozado los instintos científicos de los españoles... Muchos periódicos combatieron su discurso... y la polémica fue ruda, porque D. José contestó a todos en el mismo tono que había empleado en su discurso... Hoy ya, aun cuando D. José sostiene la tesis de aquel discurso, considera que fue inoportuno, y que sus compañeros de Academia fueron muy corteses.»

Verdaderamente, el discurso de ingreso en la Academia de Echegaray, a pesar de sus lagunas y deficiencias internas, es un hito en la historiografía matemática española, ante el que las únicas respuestas razonables, deberían haber sido, para el pasado, el repaso riguroso de la documentación realizado por gente competente —cosa que no se hizo, porque las glorias del pasado español fueron expuestas por gentes de letras— y, para el presente, dos medidas complementarias. La primera, la voluntad política del gobierno de dotar financieramente la estructura matemática del país; la segunda, la voluntad personal de quienes se consideraran matemáticos

José Augusto Sánchez Pérez y a Octavio de Toledo, el primero de ellos recomienda: «Quien quiera deleitarse con su biografía, extensa y completa, puede acudir [...] a las entrevistas de Antón del Olmet y García Carraffa (sic)». Véase [27, p. 49].

⁸[22, p. 8]. Las comillas son del original.

⁹Las citas textuales correspondientes al discurso se encuentran en el capítulo XVII de la obra que lleva por título *Echegaray Académico de Ciencias. Un discurso y una gran batalla. No hay matemáticas* [22, pp. 97–98].

de ponerse a trabajar, para evitar que en la posteridad se pudieran seguir esgrimiendo argumentos similares sobre la historia de las matemáticas en España. Nadie podrá negar que Echegaray se aprestó a ello, continuando, a diferencia de otros colegas académicos, con sus tareas de escritor matemático tras su incorporación a la docta corporación. Así, en la bibliografía de Echegaray correspondiente al último tercio del siglo XIX hay contribuciones sobre algunos capítulos de física, como la termodinámica, la teoría de la luz, la electricidad y el magnetismo, entre otros, y también de matemáticas, como la Geometría Superior o los determinantes. Artículos y libros que, como no podían dejar de recordar sus biógrafos, no le supusieron ninguna *utilidad pecuniaria* [22, p. 102]. En conjunto, no es ciertamente parca la producción de Echegaray en los campos de la ciencia en este periodo y, si se la une a su actividad política —cuando terminó el sexenio había sido ya tres veces ministro—, y a su producción literaria, que cabe calificar de intensa a partir del inicio de la Restauración, es ciertamente, descollante.

Es cierto que Echegaray tenía facilidad para escribir, facultad no necesariamente presente en todos los científicos y, además, tenía olfato para distinguir los temas importantes. No puede escaparse a los analistas actuales, sin embargo, que era difícil, debido a la plétora de actividades en la que anduvo implicado toda su vida, que pudiera exhibir finuras excepcionales en todos los temas que le interesaban. Si no hubiera sido el afamado dramaturgo y el conocido político que fue, es muy posible que no hubiera alcanzado la categoría de más importante matemático de la España de tu tiempo. Pero como se dieron esas condiciones, la autoridad de Echegaray como matemático fue creciente y su influencia llegó hasta jóvenes en estado de eferescencia hipercrítica como demuestran las opiniones del propio Rey Pastor en la segunda década del siglo XX. Echegaray, como tantos otros ejemplos de la historia, acudió a las matemáticas —y también a la física— en busca de sosiego, tras su trabajo teatral o sus avatares políticos, y entonces lo hizo eligiendo temas innovadores en el contexto español y, al mismo tiempo, consagrados ya en la comunidad matemática internacional. Las matemáticas fueron para Echegaray *la salsa que iba bien a todos los guisos del espíritu*. En la biografía de Olmet y Carraffa tantas veces aludida hay una referencia explícita a esta dedicación:

«—Otra nota interesante, don José. A muchas personas les ha causado extrañeza sus múltiples aficiones al parecer contradictorias. Sobre todo les ha sorprendido su afición a las matemáticas y a la ciencia en general, y a la vez a la poesía y a la dramática.

»—Es cierto. También han llegado hasta mi esas noticias; y yo me admiro de la admiración de esas personas. Las matemáticas forman una salsa que vienen bien a todos los guisos del espíritu. Las matemáticas armonizan con la música y con el arte en general. Como que todas son armonía, variedades en una o en otra forma que se revuelven en una alta y bella unidad.

»—Pero de todas sus aficiones, la más intensa, la que le sedujo siempre fue la afición a las matemáticas.

»—Sin duda alguna.

»—La literatura, la dramática, según se desprende del relato de su vida, no despertaron en usted entusiasmo tan ardiente, pasión tan grande. Su vocación por el

teatro se esfumó en algunas épocas para volver a resucitar después. En cambio, su afición a las matemáticas. . .

»—Fue constante, y fue siempre en aumento. Ocasiones hubo en que el afán de ganar dinero, de resolver el problema de la vida, me animó a cultivar la dramática. En cambio mi afición a las matemáticas era más desinteresada, más pura, más honda, más grande, en una palabra» [22, pp. 182–183].

También en este breve diálogo se aprecia otra componente de la personalidad de Echegaray: su *afición* a las matemáticas. Aderezada con otros atributos, pero afición al fin y al cabo, que es algo diferente del trabajo constante, regular, riguroso, en una palabra, profesional, que otros desarrollaron. Al fin y al cabo, la formación regular de Echegaray fue la de ingeniero de caminos y si su afición a las matemáticas fue pura, honda y grande, nunca fue exclusiva. Por eso, dio saltos tan sorprendentes en el ámbito de las ciencias físico-matemáticas. Sin incurrir en notables gazapos, porque era listo y porque nunca se planteó innovar, sino trabajar para poner al servicio de la comunidad matemática conocimientos positivos sobre los que otros pudieran trabajar. Ello no obstante, algunos desarrollos matemáticos de evidente modernidad —como los espacios de muchas dimensiones— le hicieron incurrir en algún desliz impropio de su talento. En realidad, Echegaray tenía pautas, más aplicables a la dramaturgia que a la ciencia, pero siempre actuó con pautas. En el caso de la producción de sus obras teatrales, más de sesenta, aproximadamente la mitad en verso y a mitad en prosa, llegó a condensar su metodología en un soneto ([22, p. 182]):

Escojo una pasión, tomo una idea:
 un problema, un carácter. Y lo infundo
 cual densa dinamita, en lo profundo
 de un personaje que mi mente crea.
 La trama, al personaje le rodea
 de unos cuantos muñecos que en el mundo
 ó se revuelcan en el cieno inmundo
 ó se calientan á la luz febea.
 La mecha enciendo. El fuego se prepara,
 el cartucho revienta sin remedio,
 y el astro principal es quien lo paga.
 Aunque á veces también en este asedio
 que al arte pongo y que al instinto halaga,
 me coge la explosión de medio a medio.

Con esos elementos no cabe extrañarse ante la repetitiva hechura de su producción teatral ni, por tanto, de las mordaces críticas que sobre su literatura vertieron algunos creadores contemporáneos suyos. No obstante, tampoco es situación tan exótica, ya que se podría considerar muy similar a la de ciertos matemáticos, que enganchados a un problema tipo, repiten y repiten ejercicios a base de cambiar bien la pasión, bien el personaje o algunos muñecos conceptuales que le rodean.

2. DOS CAPÍTULOS SOBRE LA INTRODUCCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEAS EN ESPAÑA

En ese contexto global y con esa polifacética personalidad, se implicó Echegaray en el Ateneo Científico y Literario de Madrid. Esta entidad, como otras de su tiempo —tales como las Casas del Pueblo o los Ateneos Libertarios, por ejemplo— jugó un papel difusor de todo tipo de cultura, que pretendió transmitir, a veces por exceso a veces por defecto, y con distinto éxito, conocimiento de diversos campos que el Estado hurtaba a la mayoría de la población española. El Ateneo madrileño, núcleo de efervescencia intelectual en todos los órdenes de la vida de la Villa y Corte durante muchos decenios, no se privó de incurrir en los ámbitos más elevados y difíciles. Para ello invitó a prestigiosos científicos a impartir su doctrina por medio de conferencias, a las que eran invitados algunos intelectuales residentes fuera de Madrid —tal fue el caso de García de Galdeano— y cursos, que fueron casi exclusivamente impartidos por gentes de la capital. Entre ellos, naturalmente, se contó con Echegaray, que eligió tres temas: la teoría de Galois, las funciones elípticas y las ecuaciones diferenciales¹⁰. Del tercero, titulado *Ecuaciones Diferenciales en general y, en particular, las lineales*, impartido durante el curso 1904–1905, ha quedado poca huella¹¹, sin duda debido a los nuevos derroteros personales del ya Premio Nobel, y los nuevos cargos que fue acumulando —desde Presidente de Tabacalera, hasta Presidente de la Sociedad Matemática Española, pasando por una cátedra en la Facultad de Ciencias—. De los otros dos, el más conocido y estudiado es el de la teoría de Galois, impartido durante los cursos 1896–1897 y 1897–1898. Por último, el segundo, sobre las funciones elípticas, es el que más duró, aunque tuviera una menor plasmación escrita que el correspondiente a la resolución de ecuaciones.

2.1. La resolución de ecuaciones de grado superior y teoría de Galois.

La exposición de Echegaray de sus lecciones sobre la resolución de ecuaciones y la exposición sistemática de la teoría de Galois no fue precisamente clandestina. Además de tener como marco el Ateneo, él mismo las publicó en dos visibles volúmenes, sobre todo el primero, de unas 500 páginas, y fueron, además, reseñadas por cuantos exégetas y comentaristas glosaron la vida privada, la pública, los milagros y la muerte, del Premio Nobel de Literatura. Ya en los mismos días del curso, las lecciones de Echegaray en el Ateneo fueron seguidas por algunas publicaciones científico-técnicas. En concreto, la veterana *Revista de Obras Públicas*, tan cuidadosa siempre de cuantas cuestiones puedan ser producidas por los ingenieros de caminos, se ocupó de las lecciones del Ateneo con puntilliosidad. Y otras publicaciones de carácter más divulgativo, como el interesante *Madrid Científico*, dieron noticia del hecho. Los libros producidos por las lecciones han sido muchas veces aludidos y algunas veces menos

¹⁰Una referencia cuantitativa a los cursos, extensión, número de alumnos y otras incidencias se encuentra en [30].

¹¹La más visible es un trabajo de quince páginas en el tomo inaugural de la revista de la Academia del año 1904. *Vid.* [9, pp. 137–152].

estudiados¹². Las páginas de las revistas han sido menos veces citadas y casi ninguna leídas y comentadas. Sin embargo tienen un enorme interés, porque revelan la imagen viva y directa de una situación más implicada en la vida intelectual de la España de hace un siglo.

Como ya hemos señalado, la teoría de Galois cerraba el ciclo histórico englobado por el concepto de *álgebra clásica*, epígrafe en el que se recogían todas las aportaciones dirigidas a la resolución de ecuaciones, encuadradas por la seguridad, aunque a veces no fuera más que intuitiva, del teorema fundamental del álgebra. Y aunque pueda parecer extraño a consideraciones más próximas a las nuestras, el álgebra clásica, incluida la teoría de Galois, podía permitir una puesta al día bastante rápida de conocimientos y una lectura directa de textos matemáticos de vanguardia, que en algunos casos tenían la claridad de manuales y que estaban avalados por centros científicos de prestigio. Sólo así puede explicarse la temprana atención y afición por la disciplina del propio EcheGARAY y su encomiástica reclamación en los sesenta de que se siguiese el libro que Serret iba mejorando para la Sorbona. Esto, como ya hemos dicho, se ha comentado bastante. En lo que ya se ha afinado menos es en las trastiendas que conllevaban algunas de estos planteamientos críticos, porque la airada posición de EcheGARAY, otra vez del año 1866, hacia el Plan que se instauró estaba llena de música, aunque no de lirismo. El famoso Plan ante el que nuestro ingeniero de caminos bramaba en la *Revista de Obras Públicas* porque se impartiese en España, entre otras cosas, la teoría de Galois, era otra de las florecillas que le estaban cayendo de las manos al tristemente célebre Manuel de Orovio, heredero intelectual de los desaguizados de la *Noche de San Daniel* generados por el caduco y apergaminado Alcalá Galiano. En una de las crisis universitarias más graves de la historia de España y en los primeros soplos de los vientos de cambio revolucionario que recorrerían el país un par de años después, EcheGARAY estaba, a cuenta del álgebra y Serret, echando más leña a un fuego atizado con vehemencia por Castelar, Pi Margall, Salmerón y buena parte de la sociedad española.

Y ya que hemos nombrado a Serret, convendrá advertir que no fue por tanto ni difícil ni exótico, en este caso, fijarse en los capítulos del álgebra que ya se impartían en el nivel superior de Francia y que no se daban en España. Los restantes ingredientes ayudaban bastante. La gente de ciencias que pugnaba por la renovación curricular eran bastante jóvenes, estaban llenos de fervor antiborbónico y querían ardientemente que las cosas cambiaran en España. ¿Qué mejor modelo que el del joven Galois inmolado por sus ideales en una desgarradora trama romántica? Por ese conjunto de razones, la llamada teoría de Galois, pasó a ocupar uno de los puntos de interés intelectual en el contexto de las matemáticas de la época en las que quizás sea conveniente abundar en la referencia a Serret como uno de los nexos principales de la conexión española en la teoría de Galois. Mas vayamos por partes.

Aunque la historia se trocea mucho cuando se trata de algún aspecto tan concreto como el aquí estamos manejando, parece estar bastante claro que el tema de la

¹²Entre las más recientes referencias a las lecciones cabe citar los trabajos de Garma [14, 15]. También la edición de José Manuel Sánchez tantas veces citada recoge una síntesis de las lecciones. Mas quien quiera hacerse una idea, resumida pero cabal, de lo expuesto por EcheGARAY, debe leer [10].

aludida bisagra entre el álgebra clásica de la resolución de ecuaciones y el álgebra moderna de las estructuras estaba conscientemente en el ambiente. Dicho en otras palabras, si no hubieran existido los actores que protagonizan el drama, hubieran participado otros que hubieran producido una evolución similar a la que conocemos. Mas, como a menudo suele suceder, los relatos cuajan de una determinada forma, oscureciendo algunos hechos y sacando a primer plano otros. Las explicaciones y justificaciones pueden ser muy variadas y no siempre de rango científico. En el tema que nos ocupa, ya a comienzos del último tercio del siglo XVIII, por razones intrínsecas a la comunidad matemática internacional de su tiempo, quedaron postergadas las aportaciones de Edouard Waring, frente a los potentes resultados alcanzados por Vandermonde y Lagrange, a pesar de la condición del primero de *lucasian professor*. En el primer tercio de siglo siguiente, las trágicas biografías de un exótico nórdico como Abel o del jovencísimo Galois oscurecieron otras aportaciones hasta límites lindantes con la injusticia histórica. Llama, por ejemplo, la atención, el olvido que cayó —y ha seguido cayendo— sobre las serias aportaciones de Ruffini al tema. Y llama aún más la atención porque Paolo Ruffini era un católico casi tan fanático como Cauchy, aunque este aspecto no le otorgara tantos dividendos de fama como a su colega francés [6]. Luego vino la publicidad otorgada por las broncas entre Louiville y Libri en la Academia de Ciencias de París —con un Cauchy presente, impávido ante lo que salía a la luz—, y a continuación los trabajos de Betti, de Kronecker —en medio también de un debate racista en Alemania—, de Lejeune Dirichlet, de Cayley, de Sylvester y de otros, hasta que otro joven de 25 años, Dedekind, declamara filosóficamente¹³ para dos alumnos, de 8 a 9 de la mañana, en su habitación de Gottinga, el primer curso universitario sobre la teoría de Galois [29]. Corría el semestre de invierno del año 1856–57. Pero como el joven Dedekind no era un fanático del *papering*, el curso —más propiamente de teoría de grupos— quedó inédito hasta 1981.

Aunque los manuscritos de Dedekind sobre temas algebraicos quedaron en el cajón, el tema impregnaba hasta tal punto el ambiente que el término grupo apareció en quinto volumen de la *English Cyclopædia*, en la voz *Matemáticas, terminología reciente* y con la firma de Arthur Cayley. Sin embargo, el primer texto universitario en el que apareció la referencia a las *recherches* de Galois fue el *Cours d'Algèbre Supérieure* de Serret [28], como ya hemos dicho uno de los manuales más famosos del siglo XIX. En concreto ocurrió en el tomo II de la tercera edición publicada en 1866. Eso es lo que se leyó en España. Como muchos textos franceses de la época su difusión fue rápida. Al año siguiente cruzaba el Atlántico, dos años después aparecía la versión alemana y, por eso, no es nada raro que los Pirineos no resultaran barrera infranqueable para este nuevo libro del profesor de la Sorbona. Luis Español resume la quinta sección del libro de la siguiente forma [10, p. 66]:

«La última es la sección dedicada a la resolución algebraica de ecuaciones, que empieza por las ecuaciones de grados tres y cuatro, sigue con la demostración del teorema de Abel sobre la quintica, reproduciendo una demostración de Wantzel, y con un estudio particular de las ecuaciones abelianas y de una ecuación de grado

¹³Según los testimonios que los propios alumnos dejaron, Dedekind hablaba y de vez en cuando escribía algo en algún papel.

nueve asociada a los puntos de inflexión de una cúbica; el último capítulo lo forman cincuenta páginas dedicadas a las investigaciones de Galois, Hermite y Kronecker, añadidas en sucesivas ediciones, pero que no llegan a formar un cuerpo de doctrina elaborado de la teoría de Galois.»

Serret se quedaría ahí y con él todos los matemáticos que se acercaron al álgebra superior de la mano de sus libros. Ni siquiera actualizó su exposición con las aportaciones de su aventajado discípulo Camille Jordan en su *Traité des Substitutions et des Equations Algébriques* (1870) en el que se aclaraban definitivamente las nebulosas —el *velo*, lo llamó Gino Loria— en torno a la resolubilidad por radicales y, lo que es más importante, se colocaba en un lugar preeminente en el conjunto de las matemáticas de la época a la teoría de grupos. Como Serret no quiso remozar sus libros, sus lectores no sólo se fueron quedando progresivamente anticuados sino que se desconectaron de la avalancha de innovaciones que se fueron generando en los trabajos de dos jóvenes admiradores de la obra de Jordan: Klein y Lie. A ellos se les añadirían sin solución de continuidad más contribuciones de Dedekind, Kummer, Kronecker, su discípulo Netto, Fricke, Hasse, Frobenius, Hölder y algunos más que fueron derivando la cimentación estructural de la teoría de Galois de los grupos hacia los cuerpos con elementos cada vez más abstractos. Todo esto se escapó de la percepción española en el primer momento de su publicación por razones en las que no es necesario abundar. Las principales, posiblemente, la ausencia de público y el retraso en la concepción de los planes de estudio de los centros superiores en los que se enseñaban matemáticas. Lo cual no es reproche hostil para quienes en condiciones difíciles porfiaban en modernizar los conocimientos en España. Hay que reconocer que este tipo de informaciones innovadoras no se captan si no se está en la vorágine de la línea de frente investigador y ahí no podía estar cualquiera. Cuando, por ejemplo, García de Galdeano, el mejor lector entre los matemáticos españoles de la España de la Restauración, quiso poner un delantal erudito a la parte superior de su *Tratado de Algebra con arreglo a las teorías modernas* [12], y justificar precisamente esa modernidad, arrancó su libro de la siguiente manera [12, p. I]:

«Desde hace algunos años se incluyen en los Tratados escritos para los alumnos de los diversos grados de enseñanza las teorías más modernas de la Matemática, según acreditan el Curso de Algebra del señor Serret y...»

Fijarse en las obras francesas no estaba mal, ya que Francia seguía siendo una potencia indiscutida en matemáticas y, por eso, Galdeano sitúa su base de cimentación en un autor y una obra mundialmente admitidos como valiosos y, por tanto, seguidos. Luego, además, añade una plétora de autoridades recientes y pasadas. Entre las primeras Salmon, Faà de Bruno, Tait, Jordan¹⁴, Hermite, Casorati, Hoüel, Baltzer, Briot, Rubini, Laurent, Cayley y Sylvester; entre los más alejados en el tiempo Descartes, Newton, Rolle, Lagrange, Fourier, Cauchy, Sturm, Abel y Galois. Y en lugar privilegiado, destacando su influencia, Wronski. Para un país como España en 1886, esta pléyade de nombres indica un excelente olfato rastreador de matemáticas de excelente calidad. Otra cosa era captar en las publicaciones periódicas más destacadas las vías nuevas de trabajo en Algebra —y también en Análisis, en Geometría

¹⁴Escrito como Jordán

y cualquier otra rama de las matemáticas, porque no es que hubiera muchos para repartirse el trabajo—. Además, tan sólo dos años después, en la *Crítica y Síntesis de Álgebra*, seguiría corrigiendo el tiro.

En síntesis, en los años finales del siglo XIX, los científicos españoles de cultura matemática más amplia sabían que en la tarea de incorporación de capítulos importantes de la disciplina estaba pendiente la teoría de Galois en su globalidad y en su detalle y, alguno en concreto como García de Galdeano, tenía su plasmación en su ánimo y en sus propósitos. De ahí que cuando Echegaray pasó a ejercer su magisterio en la cátedra del Ateneo, la elección del tema de la resolución de ecuaciones y de la teoría de Galois, le cubriera con claridad dos aspectos. El primero era el de tratar un tema importante en la consideración europea general. En ese sentido, nadie podía criticar el tema del curso por inadecuado o inactual desde el punto de vista matemático. El segundo aspecto, materializado con la publicación del curso, era el de poner a disposición del público interesado unos textos, cuyo desarrollo solamente era, en todo caso, conocido en España por una minoría. Así por ejemplo, Luiña en el resumen que realizó para la *Revista de Obras Públicas* se sintió en la necesidad de explicar las motivaciones profundas de la elección del tema en los siguientes términos [18, p. 461]:

«No sabemos cuáles son los motivos que han inducido al Sr. Echegaray a elegir este tema con preferencia a otros menos áridos que él; pero es casi seguro que no tuvieron pequeña parte en la elección dos importantes consideraciones. La una es el deseo de que nuestra nación, ya que por causas de todos conocidas no puede contribuir con trabajos propios al adelantamiento de las ciencias, no quede en atraso lamentable respecto al conocimiento de lo que en otras partes se trabaja. [...] La otra consideración [...] es de otra naturaleza: el Sr. Echegaray, en quien se juntan amigablemente la ciencia y el arte, es partidario entusiasta de todo lo dramático, de todo lo emocional, y si la vida de Abel, por lo que tuvo de dramática, le determinó a dárnosle a conocer con el justo sobrenombre del Newton del Norte ¡cómo no había de elegir para tema de sus conferencias el que tan íntimamente se relaciona con los trabajos de Galois, de aquel adolescente que tuvo tan trágico fin, de aquél exaltado en materias políticas que a los veintiún años de edad había echado los cimientos de la nueva Álgebra, viendo con los ojos de la adivinación —ya que no es fácil concebir que lo hiciera con los de la razón serena— lo que no supieron ver los más eminentes matemáticos, el mismo Abel entre ellos!»

Otra cosa, fue el resultado, porque como la historia no siempre va al paso que los estudiosos desearían, cuando Echegaray se aprestó a rellenar la laguna de la ignorancia algebraica resultó que ésta que se había convertido en un lago de mayores dimensiones. En ese sentido hay que entender que el trabajo difícilmente podía ser absolutamente inobjetable. Además, hay que encuadrar este tipo de iniciativas en el contexto específico de las realidades españolas, con la cúpula de su incipiente comunidad matemática firmemente pertrechada en Madrid desde donde influía —y cuando podía, controlaba— los organismos de selección y promoción de personas, los contenidos de los planes de docencia y el prestigio de los derroteros investigadores. Echegaray demostró bastante habilidad para enfocar un tema que podía levantar ciertas ampollas en algunos colegas del claustro madrileño, fanáticos partidarios de

la geometría *antialgebraizante*, colegas que como acabamos de apuntar disfrutaban en ese momento de una posición de creciente influencia.

Desde el punto de vista de la interioridad del problema para esas fechas la acumulación de literatura sobre la teoría de Galois era notable e incluso plural. En la línea puramente algebraica destacaba la publicación en tres volúmenes en Alemania del *Lehrbuch der Algebra* de Heinrich Weber de los que el primero —precisamente el que contenía los elementos de la teoría de Galois— aparecería en 1895. Este Tratado fue el elemento más importante en cuestiones algebraicas en las tres primeras décadas del siglo XX. Y su importancia, como señala Español, fue rápidamente detectada en España por García de Galdeano, sobre todo a partir de la aparición de la traducción francesa en 1898. Pero no fue el único. En el mismo año 1895 un profesor de la Facultad de Ciencias de Nancy, H. Vogt, publicaba un texto de carácter didáctico, que se considera continuación del tratado de Jordan, prologado nada menos que por Tannery. El mismo año 1895 Borel y Drach alumbraban otro libro sobre teoría de números y álgebra superior. Por último, en ese mismo año aparecía el tercer volumen del universalmente admirado *Tratado de Análisis* de E. Picard y en él se incluía un capítulo sobre las *analogías entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones algebraicas*, que venía a representar una teoría de Galois para las ecuaciones diferenciales lineales. Además, como es obvio, se publicaron obras de síntesis en otros países europeos entre las que cabe destacar el curso de Petersen para la Escuela Politécnica de Copenhague y que fue traducido al italiano en 1891. Precisamente en Italia, aparecerían en 1899 las *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* que tuvieron una notable influencia en el país transalpino.

Mas vayamos ya con las lecciones de Echegaray. Por lo que se sabe y por lo que acabamos de resumir hasta aquí, está claro que el tema de las resolubilidad de las ecuaciones algebraicas, la teoría de grupos y la exposición de la teoría de Galois estaba lejos de ser un coto cerrado. Libros y memorias en número cada vez mayor poblaban los anaqueles de las bibliotecas especializadas y una cadenciosa sucesión de artículos iban, a la vez, cerrando los problemas clásicos y abriendo nuevas perspectivas de desarrollo. Estos temas, además, ya formaban parte de los currícula científicos habituales en algunas universidades y centros técnicos superiores de Europa y América del Norte. En ese contexto, señaladas las grandes coordenadas de las intenciones profundas de Echegaray, poca originalidad se podía esperar en un curso introductorio y difícilmente podía esperarse un cierto alarde de modernidad. Por lo tanto, como señala Luis Español [10, p. 72],

«Echegaray inició la explicación de la teoría de Galois, en la línea Serret-Jordan [... y ...] si alguno de los pocos que resistieron los cursos los siguieron verdaderamente, quedaría en condiciones de abordar el estudio de la teoría de Galois en la obra del alemán [Weber].»

Aunque casi todos los analistas de la obra de Echegaray advierten un estilo teatral de exposición, con una exuberancia de ejemplos que le llevaron incluso a introducir algún gazapo indeseado y aunque no atendió la importancia intrínseca del Tratado de Weber, las lecciones cumplieron un positivo papel en el sentido de la modernización de las matemáticas en España. Con los cursos y los libros, se rellenó la laguna del

desconocimiento a la que hemos alusión anteriormente o se afianzaron unos peldaños sobre los que se podía alcanzar esa modernidad algebraica. Para Laura Toti [29, p. 143], el trabajo de Echegaray revela un conocimiento *muy bueno* de los trabajos de Serret, Jordan, Netto y Petersen y una fijación especializada en la versión de Picard. Y esto es de destacar porque explica la habilidad de Echegaray para enfocar el tema sin demasiadas aristas cortantes para los geómetras más recalcitrantes. La opción de Petersen, un profesor de una politécnica, como él, y de Picard son un escudo de prevención respecto a la cúpula matemática madrileña sobre la ola de geometrismo —y geometrismo particularizado— que se impuso en España de claras concepciones divergentes, cuando no hostiles, hacia las nuevas concepciones algebraicas que se iban extendiendo por Europa. Y aunque para Echegaray el Análisis Matemático anduviese por las Facultades de Ciencias con medio siglo de retraso respecto a la marcha de los países de nuestro entorno, lo cual indica una cierta preterición curricular, sobre ese ámbito del conocimiento no habían caído más prevenciones que las derivadas de las preferencias geométricas. De ahí que la elección de Picard, autoridad conocida y contrastada donde las hubiera, le otorgaba un salvoconducto de modernidad y calidad que podía defenderlo de cualquier ataque interesado o malévolo¹⁵. Por tanto, debemos concluir que la exposición de la teoría de Galois —en cuyo contenido no entramos por ser materia habitual de los curricula docentes universitarios del último tramo del siglo XX— llevada a cabo por Echegaray fue una aportación correcta y eficaz. La evolución posterior del álgebra española se puede continuar por el trabajo de Español tantas veces citado.

2.2. Las funciones elípticas. El segundo tema elegido por Echegaray para la cátedra del Ateneo fue otro asunto también aludido de forma abundante en la literatura y, al igual que la teoría de Galois, escasamente tratado en España, a pesar de su progresiva incorporación a los programas de los centros superiores de enseñanza técnica en varios países de Europa. Mas, a diferencia de lo que había sucedido con el curso sobre la resolución de ecuaciones, Echegaray no plasmó en un libro el contenido de sus clases, quedando para la posteridad como —de momento— único elemento de referencia de la actividad los resúmenes que otro alumno de la Escuela de Caminos, Juan González Piedra, redactó y publicó en la *Revista de Obras Públicas* [16] y, aun así, de forma claramente abreviada pues lo que definitivamente vio la luz se limitó a una docena de páginas. Para Echegaray, como ingeniero, los temas de interés aplicado no le producían prevención. Ya lo advirtió Luiña con el curso de álgebra, cuando al acotar algunos retrasos en matemáticas puras, afirmó, de pasada, que en el terreno de las aplicaciones las Escuelas de Ingenieros iban reduciendo las distancias. En el fondo, el político Echegaray estaba sentando opinión de que también en los ámbitos no finalistas de la ciencia el concurso de los ingenieros de estado era decisivo. Y como para muestra basta un botón él eligió un capítulo del análisis en ese momento inexistente en las facultades de ciencias pero que le daba pie para extenderse sobre el entramado global del análisis matemático. Además, según los muchos dimes y diretes que la vida del Premio Nobel generó y según algunas

¹⁵La referencia al retraso del Análisis en las Facultades de Ciencias fue recogida en el texto de Luiña correspondiente a la primera conferencia [18].

autorreferencias del propio Echegaray, autores como Legendre y Abel tuvieron una participación notable en su proceso de formación como matemático y Legendre y Abel son significativos en la historia de las funciones elípticas.

No hay que ver especiales tramas ni conciliábulos en esta irrupción de Echegaray en temas que hubieran debido de ser propios de los profesores de la Facultad de Ciencias de Madrid, ya que esa tensión estructural provenía, por lo menos administrativamente, de tiempos de la Ley Moyano si no de antes. El debate sobre la calidad de los conocimientos —quién sabía más— y sobre los contenidos —qué matemáticas había que enseñar en cada sitio— fue muy vivo a la largo de todo el siglo XIX. . . y del XX¹⁶. Echegaray era, ante todo, ingeniero, aunque su vinculación profesional con su gremio fuese como profesor de matemáticas. Por eso podía representar un puente personal entre la comunidad matemática y el cuerpo de ingenieros y esa relación los temas de análisis matemático podían materializar competencias doctrinales por parte de los ingenieros y modernización curricular para los dirigentes de los matemáticos. Además, Echegaray era un hombre combativo, pertenecía al grueso de los ingenieros anteriores al 68 y, por ello, en general, sus proyecciones humanas, políticas y profesionales se decantaron casi siempre del lado de las querencias progresistas. Así, aunque como dice Sáenz Ridruejo [25, p. 106], *a lo largo del último cuarto del siglo [XIX] los ingenieros de Caminos viraron hacia el conservadurismo*, además de que siempre quedaron reductos de oposición política activa, algunos veteranos, entre los que ya se encontraba Echegaray, guardaron algunos efluvios de divergencia con las posiciones oficialistas en diferentes ámbitos de la vida social española. Las lecciones sobre las funciones elípticas pueden entenderse como una de ellas.

Como tantas cuestiones concernientes a las matemáticas contemporáneas, la idea de una categoría especial de conceptos vinculados a la elipse arranca del siglo XVII. Fue Wallis quien al calcular la longitud del arco de una elipse en forma paramétrica se encontró con una expresión trascendente de la forma

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{b^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi} d\phi = a \int \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} d\phi,$$

donde a es el semieje mayor, e la excentricidad y ϕ el parámetro angular que, por su procedencia, se comenzó a conocer como integral elíptica. Este tipo de expresiones fueron uno de los primeros escollos con los que los matemáticos que comenzaron a desarrollar el cálculo integral —Leibniz y los Bernoulli, principalmente— se toparon a la hora de reducir sus cálculos a funciones algebraicas o trascendentes más manejables y sencillas¹⁷. A partir de ahí y como quiera que integrales de este tipo aparecían en problemas de rectificación de la hipérbola, de la espiral logarítmica, de la lemniscata, de la parábola cúbica, tan atractivas para los hermanos Bernoulli, y en otros problemas como los del cálculo del área de un cono oblicuo o el movimiento de un cuerpo atraído por dos centros fijos, un elenco cada vez mayor de matemáticos (Fagnano, Maclaurin, Euler, Lambert, Lagrange, etc) comenzaron a sistematizar el estudio de estas expresiones, en el que se fue pasando paulatinamente de los intentos por explicitar el sofisticado cálculo de las integrales (elípticas) a la teoría

¹⁶Una rápida incursión sobre estos temas puede verse en [1, 17, 19].

¹⁷Una breve historia de estos conceptos se puede ver en [23].

de las funciones (elípticas). Muchos problemas servirían, a lo largo del tiempo, de caldo de cultivo a la propagación del interés por este capítulo del análisis y no sólo en el ámbito matemático. Desde el movimiento del péndulo simple hasta el cálculo de un anemómetro de doble sentido con sensibilidad constante y hasta la teoría del calor, pasando el movimiento de los planetas atraídos por una fuerza céntrica, curvas elásticas o el péndulo esférico, las funciones elípticas se hicieron huéspedes habituales de los desarrollos del análisis matemático y de la física matemática.

La primera versión sistemática de la teoría fue hecha por Legendre quien antes de que finalizara el siglo XVIII abordó el establecimiento de una teoría general de las funciones elípticas, clasificando su tipología, sus formas canónicas y sus tablas. Trabajos sucesivos le condujeron a la redacción de su gran tratado en tres volúmenes sobre funciones elípticas e integrales eulerianas que apareció entre 1825 y 1832, el año de su muerte. Aunque el *Tratado* de Legendre, gracias a su claridad expositiva, tuvo la misma gran aceptación que sus restantes obras de referencia sobre geometría o teoría de números, en el mismo tiempo de su aparición, se publicaban ya potentes generalizaciones y avances teóricos de Abel y Jacobi, que representaron una carrera científica —de tintes ciertamente dramáticos— que revolucionaron la teoría gracias a la incorporación, entre otros conceptos, de las funciones inversas, los números complejos y la doble periodicidad. Como es sabido, la muerte impidió a Abel terminar su obra en este capítulo. Jacobi, sin embargo, sí pudo publicar en 1829 los *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* (Nuevos fundamentos de la teoría de las funciones elípticas) que a la vuelta de diez años estudió Weierstrass. Las funciones elípticas cambiaron la vida de Weierstrass —que decidió dedicarse a las matemáticas [31, p. 507]— y cambiaron la estimación de las funciones elípticas que fueron elevadas al máximo rango de interés matemático. Esto, si bien no fue inmediato, comenzó a materializarse tras la publicación de su trabajo sobre la teoría de las funciones abelianas en el influyente *Journal de Crelle* en 1854. Este trabajo sirvió para que se le abrieran las puertas de la comunidad matemática de Berlín de la que en poco tiempo llegó a ser su patrón indiscutido. Desde esta privilegiada posición, además de lanzar el programa de aritmetización del análisis, en el que la mayoría nos hemos formado, colocó a las funciones elípticas en un lugar de selecta atención. Weierstrass cerró el ciclo iniciado con la inversión de Jacobi y, como en los restantes capítulos del análisis cimentó la teoría con el desarrollo en series enteras, al tiempo que redujo las funciones fundamentales de Jacobi de tres a una. Nos queda todavía a los historiadores de las matemáticas discriminar más finamente cuáles de las aportaciones realizadas desde el Seminario de Berlín se deben al Maestro y cuáles son obra del talento e iniciativas de sus competentes discípulos y colaboradores. De hecho, el compendio en tres volúmenes de Halphen titulado *Traité des fonctions elliptiques* y publicado entre 1886 y 1891 cuando, por tanto, Weierstrass todavía vivía, está compuesto en la órbita analítica alemana en la que se destacan las singulares aportaciones, entre otros, de Schwarz. Y esto no significa que los restantes franceses se estuvieran quietos. Un lustro después de que Weierstrass publicara su primer trabajo sobre las funciones abelianas en el *Journal für reine und angewandte Mathematik*, veía la luz el *Traité des fonctions doublement périodiques* de Briot y Bouquet —en el que las funciones elípticas se identificaban

como funciones meromorfas doblemente periódicas— que cambiaría su título en la segunda edición de 1875 por el de *Théorie des Fonctions Elliptiques*, ya plenamente pensado para la docencia. Posteriormente, la obra de Halphen ya citada y la de Appel y Lacour de 1897, *Principes des fonctions elliptiques et applications*, cerrarían un siglo de aportaciones y avances.

Hasta aquí hemos hecho una muy sucinta sinopsis de la evolución a rasgos gruesos de la evolución del tema, considerando casi exclusivamente los grandes libros que jalonaron el siglo XIX, esto es, antes de que Echegaray cogiera el clarión para acometer el curso en la Escuela Superior del Ateneo. No se tienen datos aún fiables de si en España se había acometido un curso de estas características, por ejemplo en alguna de las academias preparatorias para el ingreso en las Escuelas de Ingenieros que proliferaban por Madrid, aunque en Francia y en Alemania ya había una dilatada tradición. Jacobi las incluyó en su programa en 1827 en Königsberg, Liouville dio un curso en la Politécnica en 1847, y Hermite y Bertrand continuaron la experiencia en este mismo centro en años posteriores.

Por lo que se refiere a España, la primera mención eficaz sobre las funciones elípticas está vinculada a la Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos. En el programa para el ingreso en la Escuela correspondiente al curso 1885–86, publicado [20, p. 477] en la *Gaceta de Madrid* entre el 12 y el 17 de noviembre de 1885, figuran dentro de la *Segunda Parte de Cálculo* y bajo el epígrafe *Teorías diversas*, las funciones elípticas. Los aspectos que los alumnos debían conocer eran los siguientes [20, p. 525]:

Principios Generales: Integrales denominadas funciones elípticas. Amplitud, módulo, parámetro. División en tres especies. La longitud del arco de elipse, contado desde un vértice del eje menor, se expresa por una función elíptica de segunda especie.

Teoremas fundamentales: Teorema fundamental de las funciones elípticas de primera especie. Funciones inversas de primera especie. Fórmulas para su transformación. Analogía con las que se emplean para transformar las funciones trigonométricas. Doble periodicidad de las funciones inversas de primera especie. Teorema fundamental de las funciones elípticas de segunda especie. Teorema fundamental de las funciones elípticas de tercera especie.

Los textos recomendados eran: la segunda edición de los conocidos *Éléments de Calcul* de Duhamel —de los años 1860–61—, el suplemento dedicado a funciones elípticas del *Tratado* de Bertrand de finales de la misma década y una memoria —de paradero todavía desconocido— del ingeniero de caminos Manuel Pardo. Por otra parte, José Ríus y Casas publicó en 1889 un libro de un centenar de páginas sobre el *Origen y propiedades fundamentales de las funciones elípticas*.

Algo, hasta el momento no aclarado, debió ocurrir, porque en el siguiente programa para el ingreso en la mencionada Escuela publicado en la *Gaceta de Madrid* el 24 de abril de 1896, la mención a las funciones elípticas había desaparecido [20, p. 539].

Por lo tanto, cuando Echegaray propuso desarrollar en el Ateneo un programa sobre la *Teoría de las funciones elípticas* durante el curso 1898–99 no existía ningún otro en España. Echegaray lo impartiría hasta el año académico 1900–1901 y para

el siguiente cambió su rótulo por el de *estudio de las funciones abelianas*. Los cursos comenzaron siendo semestrales —de noviembre a abril— y se desarrollaron a lo largo de 14 sesiones [30, p. 291], si bien al curso siguiente el número de lecciones se amplió a 21. Solamente se conserva, además de los resúmenes de González Piedra, una referencia al Programa contenida en una carta de Echegaray al Presidente del Ateneo, Segismundo Moret¹⁸, en la que hace constar que va a hablar de: *Métodos y notaciones de Jacobi. Funciones doblemente periódicas. Los mismos problemas del curso anterior por el método de Weierstrass. Aplicaciones de las funciones elípticas a la geometría y a la mecánica. Otras aplicaciones: resolución de la ecuación de quinto grado.*

Como ya hemos señalado en varias ocasiones no queda más rastro del contenido interno del curso de Echegaray en el Ateneo que los resúmenes que uno de los asistentes, el alumno de Caminos, Juan González Piedra, realizó en la *Revista de Obras Públicas*. Esto no quiere decir que fuera la única referencia, porque más de treinta años después, un personaje tan importante como Octavio de Toledo se sintió en la necesidad de pergeñar sus recuerdos en las páginas de *Homenaje* a Echegaray que la Sociedad Matemática Española, con motivo de cumplirse el primer centenario de su nacimiento, incluyó en la *Revista Matemática Hispano-Americana*, a pesar de tener que confesar las flaquezas de su memoria [21]. Y conste que fue una pena —lo de las flaquezas—, porque Octavio de Toledo atestigua que eran asistentes asiduos Leonardo Torres Quevedo; Luis Gaztelu Marqués de Echeandía, ingeniero de caminos como el conferenciante; el General Benítez y Parodi; una de las mujeres pioneras de las matemáticas españolas, María de la Rigada, catedrática de la Normal; el profesor de Geodesia, Eduardo León; y el mismo Octavio de Toledo que confesaba no haberse perdido ni una sesión y seguía alabando la claridad expositiva de Echegaray.

Así que para hacer un juicio sobre el curso hay que volver a González Piedra y al esbozo de programa del propio Echegaray. Vaya por delante que los resúmenes del brillante alumno de Caminos no son exhaustivos. Se cortan abruptamente tras señalar la forma general de una integral elíptica y decir que la integración de ésta depende de las tres especies de funciones elípticas. Al parecer no continuó¹⁹. Pero en lo que queda hay claves interesantes para entender el curso, los propósitos de Echegaray y su nivel.

Echegaray, según el resumen de González Piedra, arrancó el curso con consideraciones de carácter general y algunas referencias bibliográficas [16, pp. 16–17]. En el punteo de la evolución histórica de la teoría señala Echegaray los siguientes estadios: 1º) Legendre —el primero que se dedicó al estudio de las funciones elípticas de modo didáctico y ordenado—. Pero es poco elegante y artificioso. 2º) Jacobi, sus principales trabajos y notaciones dignos de consulta. 3º) Abel, encuentra la doble periodicidad. 4º) Segunda edición del Briot y Bouquet —aproximación a las funciones elípticas por la vía de Cauchy de la variable compleja (integrales imaginarias)—. 5º)

¹⁸Reproducida en [23].

¹⁹Desde luego no lo hizo en la *Revista de Obras Públicas*. Javier Ortiz, que lo ha buscado con intensidad también, advierte en su trabajo que no conoce la continuación.

Los alemanes y Weierstrass²⁰ —desarrollo de la doble periodicidad, simplificación de los cálculos, reducción del polinomio de cuarto grado bajo el radical a uno de tercero, la integral general de Legendre queda como caso particular—. 6º) Ampliación: memoria de Weierstrass y la obra de Halphen, de la que acredita su conocimiento.

Si se comparan estos capítulos con los hitos que hemos señalado antes no pueden quedar muchas dudas respecto al nivel de modernidad del material utilizado y del propósito del curso. Mas lo que es más notable es el interés de Echegaray de comenzar por el principio, por el concepto de función y a partir del ejemplo del arco de elipse, la clasificación en funciones algebraicas y trascendentes. Hace referencia a las series convergentes, que considera *perfectamente conocidas*. A continuación pasa a las funciones derivadas, pero ¿existe siempre derivada siempre que la función sea continua? Echegaray explica con la pluma de González Piedra que *hay funciones que, a pesar de su continuidad perfecta, tienen la derivada completamente indeterminada en todos sus puntos* [16, p. 76]. Tema siguiente: Funciones integrales. Integrales elementales e integrales desconocidas. Operaciones. Integrales elípticas. Integrales hiperelípticas. Ejemplos. Determinación de las tres formas que pueden presentar las integrales elípticas. Transformaciones.

Y hasta aquí llega el resumen.

Sin embargo, hay un elemento más cuyo comentario no podemos hurtar pues tiene que ver incluso con la magia de las funciones elípticas que se ha vivido en la sorprendente evolución de la reciente solución del Gran Fermat. Es una percepción envolvente de las matemáticas contemporáneas en la que se pretenden destacar las relaciones entre entes matemáticos aparentemente inconexos. Nos referimos al último de los epígrafes de la carta dirigida a Moret a la que hemos aludido anteriormente, el que se refiere a la solución de la ecuación de quinto grado. Este propósito es un rasgo de evidente modernidad conceptual matemática. Tras un largo recorrido por las rutas del análisis surge una perspectiva tan ajena como la famosa ecuación cuántica que aborda y trata por medio de las funciones elípticas. Algo similar, que ya había ensayado en la presentación del curso de la teoría de Galois al elegir el modelo Picard para su desarrollo. Este resultado debido a Hermite pertenece a una larga serie de notas que el matemático francés dedicó a las aplicaciones matemáticas o físicas de las funciones elípticas a partir de 1846 y que cultivaría ya durante toda su vida activa.

3. UNA OPINIÓN CUALIFICADA. NI CAUCHY NI RIEMANN

Como ya hemos señalado en varias oportunidades, Echegaray fue un hombre indudablemente famoso en su tiempo sobre el que se amontonaron exégesis y comentarios cuando desapareció para siempre. En el cúmulo de reflexiones retrospectivas que se dedicaron hubo de todo. Desde el mundo literario, en el que había alcanzado los más altos galardones y en el que había amasado mucho dinero, no hubo mucha piedad y comprensión hacia su obra y lenguas ácidas hubo que le prodigaron bastantes

²⁰El relator debió de dudar con este nombre porque una vez lo escribe con W y otra con V, lo cual indica que Echegaray lo debió pronunciar bien.

denuestos. En el de la ciencia, sin embargo, lo general fueron los parabienes. Entre las necrológicas que se publicaron hay una, muy desconocida, que le brindó Zoel García de Galdeano, quien le sucedería en la Presidencia de la Sociedad Matemática Española. Éste sintió la necesidad, al conocer la noticia de la muerte de Echegaray, el 14 de septiembre de 1916, de escribir tres días después un breve opúsculo que le imprimió la Tipografía de Casañal [13], en la que reprodujo un retrato del año 1875. Por su rareza y brevedad, transcribimos esta cualificada y autorizada opinión:

«Dificilísimo es avalorar el mérito del genio.

»El genio en la humanidad tiene las más diversas manifestaciones en las artes, en la ciencia y en la vida de la sociedad.

»El genio es un punto de vista general que se pierde más allá de nuestras previsiones y de nuestros cálculos y aparece lo mismo en los tonos con que el pintor traduce en el lienzo las manifestaciones de la Naturaleza y de las pasiones y todo orden de sentimientos humanos, que en los recónditos secretos de la Ciencia, que en la victoria final dentro de la región de las luchas humanas. Y por esto el genio tiene las más variadas representaciones en la vida, en toda época y en toda finalidad posible.

»Al lado de las manifestaciones del arte, en poesía, música y pintura, figura el científico y el estadista. Cada rama de la intelectualidad humana tiene una parte compleja por desentrañar que exige potente esfuerzo. Y sólo muy contados humanos tienen en sí concentrado ese poder que, expansionándose, produce efectos que nos asombran y no dan lugar a la reflexión tardía para aquilatar lo que no puede apreciarse.

»Los grandes matemáticos han llenado el mundo de las ideas por una superabundancia de producción ilimitada, extendida en todos los sentidos, abarcando lo mismo la región del número que la de las formas geométricas, que la de las fuerzas y energías de la naturaleza, que la región de los átomos y de los astros.

»Los grandes estadistas, del fondo insondable de las pasiones, de las finalidades, de las luchas humanas y de la realidad del medio ambiente, han sabido dirigir la vida general hacia el bienestar, el progreso y el orden moral.

»Por eso se ve cuán difícil es llegar a la cumbre, desde este fondo de negrura en que la idea, en la Ciencia y la acción en la Vida se hallan sumergidas hasta que algún poder suficientemente intensivo las eleva y distingue, haciendo brotar la luz que ilumina de tiempo en tiempo las épocas de la vida humana.

»Hay que ver, para juzgar a Echegaray, su modo de presentarse en la vida de nuestra España, siempre turbada por luchas intestinas, cuando no por luchas exteriores que han amenguado constantemente las energías patrias.

»Echegaray en matemáticas, no fue un Cauchy ni un Riemann, ni como estadista Bismarck o un Metternich, ni como poeta tal vez un Petrarca o Dante o un Lope de Vega; pero aquellos arriba citados respiraron un ambiente ya purificado por las corrientes ideales de ilustres predecesores. Un Cauchy tuvo por predecesores un Lagrange y un Laplace, como un Petrarca o un Calderón lo tuvieron en un Virgilio o en el bullicioso Aristófanes, en los trágicos griegos, desde el tenebroso Esquilo hasta el adusto Sófocles, y los actuales físicos y químicos los tuvieron, desde Pascal

y Newton hasta Davy, Cavendish, Gay-Lussac y muchos otros eminentes guías, sobre cuyos resultados pudieron hacer progresar la ciencia.

»Pero cuando Echegaray apareció como alumno brillante, excepcional y sin rival alguno en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, apenas en España se había constituido la segunda enseñanza bajo la Ley de Moyano, ni la Real Academia de Ciencias, que por entonces se hallaba en estado embrionario, cuando ya las otras Reales Academias de San Petersburgo, de Berlín, de París y de Londres estaban pletóricas de los trabajos de Euler, de Gauss, de Lagrange, de Laplace y de otros muchos talentos.

»Echegaray llegó a un desierto azotado por el simoun (sic) de las luchas civiles, cuando el edificio nacional se hallaba en estado de equilibrio inestable, flotando bajo los más encontrados impulsos. Y desde este momento entró en la lucha por la vida, aromatizada no obstante por una invencible aspiración a los purísimos ideales de la Ciencia, como infatigable obrero que se propone roturar campos estériles, a fin de obtener con labor pertinaz, abundantes y sabrosos frutos.

»Por un lado, al aparecer por vez primera en el periodo de las Constituyentes que señalaba una profunda conmoción en nuestra existencia nacional, pudo figurar ya, desde su primera brillante improvisación en el Congreso de Diputados, entre los primeros de aquella incomparable pléyade de talentos nacionales, sucesores de los Antonio María López y su émulo Donoso Cortés, el poético Martínez de la Rosa, el batallador González Bravo, que fueron los Cánovas del Castillo, Castelar, Martos, Manterola, Monescillo, Moyano, Nocedal, Olózaga, Pi y Margall, Pidal y Mon, Ríos Rosas, Romero Robledo, Salmerón, Ayala, Alonso Martínez y muchos otros egregios varones, honra de la intelectualidad española; y por esto, en su larga vida ha ocupado los más elevados puestos de la política y de la administración, desde ministro hasta gobernador del Banco de España, en cuyas varias parcelas distribuía la multiplicidad de sus encontrados talentos.

»Pero en alas de su poderoso genio, no le bastaron ya estas ardorosas refriegas de la vida pública, sino que aún quiso sondear el abismo de las pasiones humanas, dedicando su universal talento al teatro, consiguiendo adueñarse del público nacional, con trascendencia al extranjero, durante treinta años en que dominó como dueño absoluto de la escena, a pesar de ese lastre perpetuo que mina lentamente los más enérgicos impulsos y persiste en todas las evoluciones de nuestro modo de ser. Y el premio Nobel fue uno de los blasones de su gloria que resume el veredicto de sus contemporáneos.

»Otra de las varias facetas y de las más brillantes, es la que a las ciencias exactas y físico-químicas se refiere, en la vida de este talento universal, personificación de todo el siglo XIX en España, que con él se despidió para siempre de nosotros, cerrando aquel ciclo glorioso de estadistas, oradores insuperables y poetas.

»Repito, Echegaray no fue un Cauchy o un Riemann ¡hubiera tan solo dedicado su preclaro talento a la Matemática pura y ciertamente lo habría sido!

»Pero era preciso desbrozar el terreno y lanzar en él, después de roturado, abundante y fecunda semilla.

»Para esto, Echegaray tenía un talento insuperable. Su talento vulgarizador ha llegado a los más recónditos antros de las inteligencias incultas. Su orgullo y su

tenacidad tendían a este noble fin. Todos, con encanto, hemos leído sus preciosos artículos sobre Física, que constituyen ejercicios sugestivos *a la vista* que dilataban el campo de nuestra imaginación, subyugada por los esplendores de la Ciencia y aun a la Química llevó sus lucubraciones matemáticas, dejando en ellas los resplandores de su talento original.

»Citaremos entre las múltiples producciones de su fecunda pluma, la locomotora eléctrica, la tracción eléctrica, las energías del radium, la navegación aérea, las experiencias de Santos Dumont, los inventos del Sr. Torres Quevedo, la fotografía del sonido, la locomotora, el transporte de la fuerza, las unidades eléctricas, el acetileno, la fuerza del sol, la fabricación del diamante, el barón de Cauchy, el Newton del Norte (Abel), las fotografías de los colores, los explosivos como fuerzas motrices, el transporte eléctrico de las fotografías, las fuerzas muertas y las fuerzas vivas, la telegrafía óptica, las manchas del sol y la meteorología, la dinamo, los tranvías eléctricos, los rayos X, la fuerza de las mareas, el kinoscopio, el espacio de muchas dimensiones, cuestiones entresacadas de las muchas que constituyen su vasto repertorio de su literatura científica, publicado bajo el título comprensivo de *Ciencia popular*, que contrapuesto a los títulos de su teatro dramático, constituyen los dos polos opuestos de la mentalidad española en que de continuo ejercitó su flexibilísimo talento.

»Y aun, avanzando un poco hacia las regiones de lo abstracto ¡quién no lee con especial encanto sus problemas de Geometría elemental en los que nos hace ver cómo las ideas se enlazan por sencillas sustituciones de equivalencia que nos permite ver con luz meridiana todos los eslabones conducentes a la resolución de cada problema!

»En cuanto a la variedad de los asuntos, hay que admirar cómo recorría los más diversos y remotos campos. El telequino, la telegrafía sin hilos, la navegación submarina, las máquinas eléctricas, las solares, etc., todo enaltecido por la magia de su estilo.

»Respecto a la intensión de su labor, bastará decir que durante su larga vida fue el mantenedor asiduo de la *Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, empleando además su jamás atenuada energía en la contestación a no pocos recipiendarios.

»Aparte de sus numerosos trabajos en la *Revista de la Marina de la Habana*, de la que fue asiduo colaborador, y otras varias en la que distribuía lo excedente de su exuberante fecundidad, de trabajos aislados como uno acerca de la *Termodinámica*, otro acerca de los *determinantes*, de sus conferencias sobre las funciones elípticas, sus dos tomos acerca de las ecuaciones de Galois; no se publicó un tomo de la Real Academia de Ciencias, sin contener algún trabajo principalmente acerca de la Mecánica, cuya especialidad conocía cual nadie, como ilustre ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, y sobre todo acerca de la Física Matemática, que constituía sus amores científicos, de la cual había ya publicado varios tomos y prometiéndose publicar otros muchos, como testimonio de una actividad que sólo ha podido truncar el frío de la muerte.

»Sea el nombre de Echegaray bandera, emblema y estímulo permanente de la juventud que hoy aspira con su labor y entusiasmo al engrandecimiento de la patria.

»Zaragoza 17 Septiembre 1916.»

No necesita esta especie de recordatorio muchos comentarios explicativos, pero no queremos dejar de hacer uno relativo a la verdadera manía de comparar a los hombres con los genios. Las lecciones del Ateneo demuestran la validez de Echegaray como un matemático bien formado, bastante al día de la evolución de los acontecimientos y, al decir de sus oyentes, excelente expositor. A qué viene entonces sacar a relucir a Cauchy o a Riemann. La generosidad de García de Galdeano le llevaba a sostener que si Echegaray se hubiera dedicado sólo a las matemáticas hubiera podido llegar a ser como Cauchy o Riemann. O no. Quién puede saberlo. Hubiera sido verdaderamente insólito que en la comunidad matemática española de la época hubiera surgido un matemático de esa especie. De hecho, como sostenía Echegaray, no han existido nunca después de la Edad Media. Echegaray fue en ese sentido más pragmático y más eficaz. Estudió temas importantes que puso a disposición de la comunidad matemática y de la sociedad españolas. Contribuyó a afianzar estos estudios y a que se aumentara su valor social. Así hizo avanzar el nivel de las matemáticas en España y acrecentar el prestigio de España en la comunidad matemática internacional. En definitiva, eso es lo importante porque es lo que queda.

REFERENCIAS

- [1] E. Ausejo, Las desavenencias de un matrimonio de conveniencia: Apuntes para la historia de la enseñanza de las matemáticas entre los ingenieros, en *Ciencias, Educación e Historia* (X. A. Fraga, ed.), Seminario de Estudios Galegos, Sada (1997), 215–227.
- [2] E. Ausejo y M. Hormigón, La historia de las matemáticas en España. Primera parte: un arma cargada de futuro, *Saber y Tiempo* **6**, ABJB, Buenos Aires (1998), 25–50.
- [3] E. Ausejo y M. Hormigón, La historia de las matemáticas en España. Segunda parte: la matemática hispana en la producción histórico-matemática española contemporánea, *Saber y Tiempo* **7**, ABJB, Buenos Aires (1999), 151–162.
- [4] E. Ausejo y M. Hormigón, The history of mathematics in Spain, *Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaft, Technik und Medizin (NTM (N.S.))* **7**, Birkhäuser Verlag, Basilea (1999), 13–20.
- [5] E. Ausejo y M. Hormigón, Mathematics for independence: from Spanish liberal exile to the young American republics, *Historia Math.* **26** (1999), 314–326.
- [6] J. Cassinet, Paolo Ruffini (1765–1822): la résolution algébrique des équations et les groupes de permutations, *Boll. Storia Sci. Mat.* **8**, Unione Matematica Italiana, Bologna (1988), 21–69.
- [7] J. Echegaray, *Resolución de ecuaciones y teoría de Galois*, Hijos de García, Madrid, 1897.
- [8] J. Echegaray, *Lecciones sobre resolución de ecuaciones y teoría de Galois*, Hijos de García, Madrid, 1898/1902.
- [9] J. Echegaray, Notas sobre ecuaciones diferenciales, *Revista de la RACEFN* **1** (1904), 137–152.
- [10] L. Español, Julio Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo, en *Matemática y región: La Rioja. Sobre matemáticos riojanos y matemáticas en La Rioja* (L. Español, ed.), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño (1998), 63–122.
- [11] E. García Camarero y E. García Camarero (Introducción, selección y notas), *La polémica de la ciencia española*, Alianza Editorial, Madrid, 1970.
- [12] Z. García de Galdeano, *Tratado de álgebra con arreglo a las teorías modernas. Parte segunda: Tratado superior*, Imprenta y Librería de Fando y Hermano, Toledo, 1888.
- [13] Z. García de Galdeano, *Echegaray*, Tipografía de Casañal, Zaragoza, 1916.
- [14] S. Garma, La primera exposición de la teoría de Galois en España, *Llull* **2** (3) (1979), 7–14.
- [15] S. Garma, Echegaray y la teoría de Galois, en *Cinquanta anys de ciència i tècnica a Catalunya. Entorn l'activitat científica d'E. Terradas (1883–1950)*, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona (1987), 149–161.

- [16] J. González Piedra, Teoría de las funciones elípticas. Extracto de las conferencias dadas por D. José Echegaray en el Ateneo de Madrid, *Revista de Obras Públicas* **46** (1899/1900), 16–17, 75–76, 84–85, 94, 383–385, 391–393.
- [17] C. Hernanz y J. Medrano, Las matemáticas en los planes de estudios de ingenieros y arquitectos entre los siglos XVIII y XIX, en *Ciencias, Educación e Historia* (X. A. Fraga, ed.), Seminario de Estudios Galegos, Sada (1997), 265–270.
- [18] M. Luiña, Ateneo de Madrid. Conferencias del Señor Echegaray, *Revista de Obras Públicas* **43** (1896), 461–468.
- [19] M. Á. Martínez García, Una polémica importante sobre el papel de las matemáticas en la formación de los ingenieros, en *Ciencias, Educación e Historia* (X. A. Fraga, ed.), Seminario de Estudios Galegos, Sada (1997), 293–301.
- [20] M. Á. Martínez García, *Las Matemáticas en los Planes de Estudios de los ingenieros civiles en España en el siglo XIX*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 1999.
- [21] L. Octavio de Toledo, Recuerdos de unas conferencias, *RMHA (2.ª Serie)* **7** (1932), 59–63.
- [22] L. A. del Omet y A. García Carraffa, *Echegaray. El insigne polígrafo cuenta su vida luminosa llena de aventuras geniales y de hazañas fuertes, ofeciendo al público el ejemplo de su existir glorioso*, colección *Los grandes españoles*, Imprenta de Alrededor del Mundo, Madrid, 1912.
- [23] J. Ortiz, Introducción histórica a las funciones elípticas, en *Innovación tecnológica e iniciativa individual* (E. Ausejo y M. C. Beltrán, eds.), Cuadernos del SEHCTAR **14**, Zaragoza (en prensa).
- [24] B. Riemann, De las hipótesis que se hallan en la base de la geometría, *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **1** (6) (1874), 113–115; **2** (1) (1875), 138–142; **3** (2) (1875), 161–164.
- [25] F. Sáenz Ridruejo, *Los ingenieros de caminos*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1993.
- [26] J. M. Sánchez Ron (editor), José Echegaray: matemático y físico-matemático, Fundación Banco Exterior, Madrid, 1990.
- [27] J. A. Sánchez Pérez, Echegaray. Rasgos biográficos, *RMHA (2.ª Serie)* **7** (1932), 49.
- [28] J. A. Serret, *Cours d'algèbre supérieure*, 2 t., Gauthier-Villars, París, 1866.
- [29] L. Toti Rigatelli, *La mente algebrica. Storia dello sviluppo de la teoria di Galois nel XIX secolo*, Bramante Editrice, Busto Arsizio, 1989.
- [30] F. Villacorta Baños, *El Ateneo de Madrid (1885–1912)*, CSIC, Madrid, 1985.
- [31] H. Wussing y W. Arnold, *Biografías de grandes matemáticos*, Pressas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 1989.

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA DOCUMENTACIÓN E HISTORIA DE LA CIENCIA, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS, CIUDAD UNIVERSITARIA, 50009 ZARAGOZA, SPAIN
Correo electrónico: hormigon@posta.unizar.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN
Correo electrónico: mangeles.martinez@dmc.unirioja.es

THE MATRIX MOMENT PROBLEM

ANTONIO J. DURÁN AND PEDRO LÓPEZ-RODRÍGUEZ

A la memoria de nuestro amigo Chicho

ABSTRACT. We expose the recent extensions to the matrix case of classical results in the theory of the moment problem: the theorem of Riesz, the parametrization of Nevanlinna and properties of the N -extremal matrices of measures.

1. THE CLASSICAL THEORY

The purpose of this survey is to show the recent extensions to the matrix case of classical results in the theory of the moment problem. The interest that Chicho always showed for these questions makes it interesting for a publication devoted to his memory.

For a positive Borel measure ν on \mathbb{R} with finite moments of any order $s_n = \int_{\mathbb{R}} t^n d\nu(t)$ we denote by V the set of positive Borel measures μ on \mathbb{R} satisfying $\int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t) = s_n$, $n \geq 0$, that is, the set of solutions to the Hamburger moment problem defined by ν . By V_n we denote the set of positive Borel measures on \mathbb{R} such that $\int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t) = s_k$, $0 \leq k \leq n$, that is, the set of solutions to the truncated moment problem defined by ν .

Given a sequence of numbers s_0, s_1, s_2, \dots , Hamburger's theorem from 1920 states that a necessary and sufficient condition for the existence of a positive measure with infinite support having moments s_0, s_1, s_2, \dots is that the sequence s_0, s_1, s_2, \dots is positive definite, or equivalently that all the Hankel matrices

$$H_n = (s_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}$$

are positive definite, which is equivalent to $\det H_n > 0$, for $n \geq 0$. In 1894 Stieltjes had already established the corresponding result for measures supported in $[0, \infty)$.

We say that the measure ν is determinate if there is no other positive measure having the same moments as those of ν , that is, if $V = \{\nu\}$, otherwise we say that ν

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C05, 44A60.

Key words and phrases. Orthogonal matrix polynomials, matrix moment problem, Pick matrix functions, N -extremal matrices of measures.

This work has been partially supported by DGI, project BFM2000-0206-04-C02.

is indeterminate. This alternative is related to the index of deficiency of the operator defined on ℓ^2 by the infinite Jacobi matrix

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & & & \\ a_1 & b_1 & a_2 & & \\ & a_2 & b_2 & a_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

where the coefficients $a_i (\neq 0)$ and b_i are the coefficients which appear in the three term recurrence relation satisfied by the orthogonal polynomials $(p_n)_n$ associated to ν ,

$$tp_n(t) = a_{n+1}p_{n+1}(t) + b_np_n(t) + a_np_{n-1}(t), \quad n \geq 0.$$

The index of deficiency of J is 0 if the moment problem is determinate and 1 if the moment problem is indeterminate.

The polynomials of the second kind $(q_n)_n$ are given by

$$q_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(x) - p_n(t)}{x - t} d\nu(t).$$

They also satisfy the three term recurrence relation, taking initial conditions $q_0 = 0$ and $q_1 = \frac{1}{a_1}$. These polynomials play an important role in the theory.

The main results in the truncated moment problem are exposed in the following theorem. In the sequel \mathbb{P} denotes de space of polynomials and \mathbb{P}_n denotes de space of polynomials up to degree n . In the matrix case we will use the same notation.

Theorem 1.1 (The truncated case). *Given a positive measure ν in \mathbb{R} with finite moments of any order, for μ in V_{2n-2} , the following statements are equivalent:*

- (1) *The measure μ is an extremal point (in the sense of convexity) of the set V_{n-1} .*
- (2) *The polynomials up to degree $n - 1$ are dense in the space $L^2(\mu)$.*
- (3) *There exists a real number a such that the Stieltjes transform of μ is given by*

$$(1.1) \quad \omega(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{x - \lambda} = -\frac{q_n(\lambda) - aq_{n-1}(\lambda)}{p_n(\lambda) - ap_{n-1}(\lambda)}.$$

- (4) *For any given non real λ , the value of the Stieltjes transform $I(\mu)$ in the point λ is extremal in the set*

$$I(V_{2n-2})(\lambda) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t - \lambda} : \mu \in V_{2n-2} \right\}.$$

The set $I(V_{2n-2})(\lambda)$ is the circle defined by the image of the real line through the Möbius linear transformation

$$(1.2) \quad \omega_n(\lambda, a) = -\frac{q_n(\lambda) - aq_{n-1}(\lambda)}{p_n(\lambda) - ap_{n-1}(\lambda)}$$

defined by (1.1), except for the single point $-q_{n-1}(\lambda)/p_{n-1}(\lambda)$, which is just on its border.

- (5) *At some point x_0 of its support (and then at every), the measure μ supports the highest possible weight at the point x_0 for a measure in V_{2n-2} , which is given by*

$$\mu(\{x_0\}) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x_0) \right)^{-1}.$$

As we have exposed, when a moves through the real line, the Möbius linear transformation (1.2) describes a circumference except for one point. The circles defined by these circumferences are the so called Hellinger-Nevanlinna circles, we denote them by $B_n(\lambda)$. A single calculation gives that the centers $\alpha_n(\lambda)$ of these circles are given by

$$\alpha_n(\lambda) = \frac{q_{n-1}(\lambda)p_n(\bar{\lambda}) - q_n(\lambda)p_{n-1}(\bar{\lambda})}{p_{n-1}(\lambda)p_n(\bar{\lambda}) - p_n(\lambda)p_{n-1}(\bar{\lambda})}$$

and that their radius $r_n(\lambda)$ are given by

$$r_n(\lambda) = \left(|\lambda - \bar{\lambda}| \sum_{k=0}^{n-1} |p_k(\lambda)|^2 \right)^{-1}.$$

Observe that $B_{n+1}(\lambda) \subseteq B_n(\lambda)$ and that their borders have the common point

$$\omega_n(\lambda, 0) = \omega_{n+1}(\lambda, \infty) = -q_n(\lambda)/p_n(\lambda).$$

Algebraic calculations with the polynomials p_n and q_n give another expression for the set $B_n(\lambda)$. It is the set of complex ω satisfying

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\omega p_k(\lambda) + q_k(\lambda)|^2 \leq \frac{\omega - \bar{\omega}}{\lambda - \bar{\lambda}}.$$

We put $B_\infty(\lambda)$ for the intersection of all these nested circles $B_n(\lambda)$. The set $B_\infty(\lambda)$ is a closed disc that can degenerate into a single point, and its radius $r_\infty(\lambda)$ is the limit of the radius of $B_n(\lambda)$:

$$r_\infty(\lambda) = \left(|\lambda - \bar{\lambda}| \sum_{k=0}^{\infty} |p_k(\lambda)|^2 \right)^{-1}.$$

It is clear that $B_\infty(\lambda)$ is a circle when the sequence $(p_k(\lambda))_k$ belongs to ℓ^2 . This occurrence does not depend on the chosen non real λ :

Theorem 1.2 (R. Nevanlinna, 1922). *If $B_\infty(\lambda_0)$ is a non degenerate circle for some non real λ_0 , then $B_\infty(\lambda)$ is always a non degenerate circle (see [N]). Furthermore, in such case the series $\sum |p_n(\lambda)|^2$ and $\sum |q_n(\lambda)|^2$ converge uniformly on any compact subset of \mathbb{C} .*

An essential result in the theory is the following

Theorem 1.3 (R. Nevanlinna, 1922). *Given a positive definite sequence $(s_n)_n$ or equivalently a positive measure ν and a number $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, we have*

$$B_\infty(\lambda) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t - \lambda} : \mu \in V \right\}.$$

The measures μ for which $I(\mu)(\lambda)$ lies in the circumference of this circle $I(V)(\lambda)$ are called N -extremal (Nevanlinna-extremal). They play an important role in the theory and have interesting properties that we will expose later.

The Theorem of Riesz gives valuable information about these N -extremal measures:

Theorem 1.4 (M. Riesz). *Let μ be a positive measure corresponding to an indeterminate moment problem. Then the following conditions are equivalent:*

- (1) *There exists $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ such that $I(\mu)(\lambda_0)$ is an extremal point (in the sense of convexity) of the set $B_\infty(\lambda_0)$.*
- (2) *For any $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $I(\mu)(\lambda)$ is an extremal point (in the sense of convexity) of the set $B_\infty(\lambda)$.*
- (3) *\mathbb{P} is dense in $L^2(\mu)$, equivalently $(p_n(t))_{n=0}^\infty$ is an orthonormal basis for the Hilbert space $L^2(\mu)$.*

For a proof see [A] or [R].

In the indeterminate case the series $\sum |p_n(\lambda)|^2, \sum |q_n(\lambda)|^2$ converge uniformly on compact subsets of \mathbb{C} , which makes it possible to define four important entire functions on \mathbb{C} by

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lambda \sum_{k=0}^\infty q_k(0)q_k(\lambda), & b(\lambda) &= -1 + \lambda \sum_{k=0}^\infty q_k(0)p_k(\lambda), \\ c(\lambda) &= 1 + \lambda \sum_{k=0}^\infty p_k(0)q_k(\lambda), & d(\lambda) &= \lambda \sum_{k=0}^\infty p_k(0)p_k(\lambda). \end{aligned}$$

These functions depend only on the moment sequence $(s_n)_{n \geq 0}$ of ν , or equivalently on V .

The set V of all solutions μ to the indeterminate moment problem was parametrized by Nevanlinna in 1922 using these functions. The parameter space is the one-point compactification of the set \mathcal{P} of Pick functions, which are holomorphic functions in the upper half-plane \mathbb{H} with non-negative imaginary part. Pick functions are also called Herglotz or Nevanlinna functions.

Theorem 1.5 (R. Nevanlinna, 1922). *There exists a homeomorphism $\varphi \rightarrow \nu_\varphi$ of $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ onto V given by*

$$(1.3) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu_\varphi(t)}{t - \lambda} = -\frac{a(\lambda)\varphi(\lambda) - c(\lambda)}{b(\lambda)\varphi(\lambda) - d(\lambda)}, \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

This means that the Stieltjes transform of any solution $\nu \in V$ is given by (1.3) for a unique Pick function φ or by the point ∞ (see [A] or [N]).

Strictly speaking it is not the set V which is parametrized but the set of its Stieltjes transforms

$$I(\mu)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

which are holomorphic functions in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. This is just as good, since $\mu \rightarrow I(\mu)$ is a one-to-one mapping from the set $M(\mathbb{R})$ of finite complex measures on \mathbb{R} to the set $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ of holomorphic functions in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. The inverse mapping is given by the Perron-Stieltjes inversion formula

$$\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \{I(\mu)(x + i\epsilon) - I(\mu)(x - i\epsilon)\},$$

where the convergence is in the weak topology on the space $M(\mathbb{R})$ of positive measures on the real line as dual space of $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (continuous functions on \mathbb{R} vanishing at infinity).

As we have just exposed, N -extremal measures in V are those for which the set \mathbb{P} of polynomials is dense in its corresponding space $L^2(\mu)$. In the parametrization (1.3) of Nevanlinna, they are the ones whose corresponding Pick functions $\varphi(\lambda)$ are real constants or ∞ . These constant real functions are extremal in \mathcal{P} in an obvious sense.

If we define \mathcal{V} to be the set of holomorphic functions $v(\lambda)$ in the upper half-plane \mathbb{H} such that $|v(\lambda)|^2 = v(\lambda)\overline{v(\lambda)} \leq 1$, then the mapping

$$v(\lambda) = -[\varphi(\lambda) + i]^{-1}[\varphi(\lambda) - i]$$

transforms the set $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ onto \mathcal{V} bijectively, if we accept that the limit function $\varphi(\lambda) = \infty$ is transformed into $v(\lambda) = -1$. Its inverse is given by

$$(1.4) \quad \varphi(\lambda) = i[1 - v(\lambda)][1 + v(\lambda)]^{-1}.$$

If we make this change in (1.3) we obtain the expression

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu(t)}{t - \lambda} = -\frac{a(\lambda)i[1 - v(\lambda)] - c(\lambda)[1 + v(\lambda)]}{b(\lambda)i[1 - v(\lambda)] - d(\lambda)[1 + v(\lambda)]}, \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{H},$$

and the N -extremal measures are obtained when $v(\lambda)$ is a constant complex number a with $|a| = 1$. This expression is more suitable to be generalized to the matrix case. The reason is that, whereas in the scalar case there is only one limit Pick function $\varphi(\lambda) = \infty$, in the matrix case a Pick matrix function can be “big” in many different ways.

The N -extremal measures have some interesting properties that we state in the following theorem.

Theorem 1.6.

- (1) *An N -extremal measure is discrete with mass in countably many points, which are the zeros of a certain entire function of minimal exponential type (see [A, Th. 2.4.3]).*
- (2) *For every real number t there is one and only one N -extremal measure μ_t having a mass point at t (see [A, Th. 3.4.1]).*

- (3) If μ is the N -extremal measure having a mass point at t then for any positive real number a the measure $\mu + a\delta_t$ is N -extremal, and the measure $\mu - \mu(\{t\})\delta_t$ is determinate (see [A, Th. 3.4]).
- (4) The N -extremal measure μ having a mass point at t reaches the maximum mass which can be concentrated in t for any solution of the indeterminate moment problem, i.e.:

$$\mu_t(\{t\}) = \sup\{\nu(\{t\}) : \nu \in V_\mu\}.$$

Moreover, this maximum is uniquely attained by μ_t and

$$\mu_t(\{t\}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(t)|^2}$$

(see [A, Th. 3.4.1]).

2. THE MATRIX EXTENSION

A matrix of measures μ of size N in the real line is a matrix of size $N \times N$ whose entries are complex Borel measures:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{N1} & \cdots & \mu_{NN} \end{pmatrix}.$$

The matrix of measures μ is said to be positive definite if for any Borel set A in the real line the numerical matrix $\mu(A)$ is positive semidefinite. This implies that μ_{ii} are positive measures and that $\mu_{ij} = \overline{\mu_{ji}}$.

A matrix polynomial $P(t)$ of size N and degree n is a square matrix of size $N \times N$ whose entries are polynomials:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}(t) & \cdots & p_{NN}(t) \end{pmatrix},$$

or equivalently, a polynomial of the form

$$P(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_0,$$

where A_0, \dots, A_n are numerical matrices of size $N \times N$.

A number a is a zero of the polynomial $P(t)$ if it is a zero of the scalar polynomial $\det P(t)$, that is, if the matrix $P(a)$ is singular, or equivalently, if 0 is an eigenvalue of $P(a)$. The multiplicity of a as a zero of $P(t)$ is the multiplicity of a as a zero of $\det P(t)$.

By $(P_n)_{n=0}^\infty$ we denote the sequence of orthonormal matrix polynomials with respect to ν , P_n of degree n and with non-singular leading coefficient.

These polynomials $(P_n)_n$ satisfy a three term recurrence relation of the form

$$(2.1) \quad tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n \geq 0,$$

(A_n and B_n being $N \times N$ matrices such that $\det(A_n) \neq 0$ and $B_n^* = B_n$), with initial condition $P_{-1}(t) = \theta$. (Here and in the rest of this paper, we write θ for the null matrix, the dimension of which can be determined from the context. For instance, here θ is the $N \times N$ null matrix.)

We denote by $Q_n(t)$ the corresponding sequence of polynomials of the second kind, given by

$$Q_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} d\nu(x), \quad n \geq 0,$$

which also satisfy the recurrence relation (2.1), with initial conditions $Q_0(t) = \theta$ and $Q_1(t) = A_1^{-1}$.

In the matrix case the determinacy or indeterminacy of the matrix moment problem is also related to the indices of deficiency of the operator J defined by the $(2N + 1)$ -banded infinite N -Jacobi matrix

$$J = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & A_2^* & B_2 & A_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

on the space ℓ^2 , where A_n and B_n are the coefficients which appear in the three term recurrence relation (2.1). In this case the indices of deficiency can be any natural number from 0 to N , being both equal to 0 in the determinate case and both equal to N in the completely indeterminate case. When the matrix of measures is indeterminate but not completely indeterminate we call it just indeterminate.

For μ a positive definite matrix of measures, the space $L^2(\mu)$ is defined as the set of $N \times N$ matrix functions $f : \mathbb{R} \rightarrow M_{N \times N}(\mathbb{C})$ such that $\tau(f(t)M(t)f(t)^*) \in L^1(\tau\mu)$, where $M(t)$ is the Radon-Nikodym derivative of μ with respect to its trace $(\tau\mu)$ (for a matrix $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$, we denote τA for its trace, i.e. $\tau A = \sum_{i=1}^N a_{i,i}$):

$$M = (m_{i,j})_{i,j=1}^N = \left(\frac{d\mu_{i,j}}{d\tau\mu} \right)_{1 \leq i,j \leq N}.$$

The space $L^2(\mu)$ is endowed with the norm

$$\|f\|_{2,\mu} = \|\tau(f(t)M(t)f(t)^*)^{\frac{1}{2}}\|_{2,\tau\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}} \tau(f(t)M(t)f(t)^*) d\tau\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}}$$

and is a Hilbert space. The duality works as for the scalar case. (See [R] or [DL2] for more details. For the definition of the L^p spaces associated to μ , $1 \leq p < \infty$, see [DL2].)

Observe that since we only impose the matrices of measures in V_{2n} to have finite moments up to degree $2n$, for $\mu \in V_{2n}$ we can guarantee only that the polynomials up to degree n belong to the corresponding space $L^2(\mu)$. In any case, the polynomials $(P_k)_{k=0,\dots,n}$ are orthonormal with respect to any measure in V_{2n} .

The sequence of moments S_n associated to the matrix of measures μ is given by

$$S_n = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu.$$

As in the scalar case, for a given positive definite matrix of measures ν we denote by V the set of positive definite matrices of measures μ on \mathbb{R} having the same moments as μ , that is, the set of solutions to the Hamburger moment problem defined by μ . By V_n we denote the set of positive definite matrices of measures on \mathbb{R} such that $\int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t) = S_k$, $0 \leq k \leq n$, that is, the set of solutions to the truncated moment problem defined by μ .

We first give two examples showing that the determinacy or indeterminacy of matrices of measures is essentially different to the scalar case. Both examples have the form

$$(2.2) \quad W_\mu = \begin{pmatrix} \mu & \mu(\{x\})\delta_x - \mu(\{y\})\delta_y \\ \mu(\{x\})\delta_x - \mu(\{y\})\delta_y & \mu \end{pmatrix},$$

where $x, y \in \text{supp } \mu$ and μ is an indeterminate measure, but in one case the matrix of measures W_μ is determinate and in the other it is completely indeterminate.

(1) If μ is an N -extremal measure then W_μ given by (2.2) is determinate. This is indeed equivalent to show that

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} W_\mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

is determinate, but we have

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} W_\mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - \mu(\{x\})\delta_x + \mu(\{y\})\delta_y & 0 \\ 0 & \mu + \mu(\{x\})\delta_x - \mu(\{y\})\delta_y \end{pmatrix}$$

and from Theorem 1.6 (3) the measures

$$(\mu + \mu(\{y\})\delta_y) - \mu(\{x\})\delta_x \quad \text{and} \quad (\mu + \mu(\{x\})\delta_x) - \mu(\{y\})\delta_y$$

are both determinate and then it is not difficult to see that the matrix of measures

$$\begin{pmatrix} \mu - \mu(\{x\})\delta_x + \mu(\{y\})\delta_y & 0 \\ 0 & \mu + \mu(\{x\})\delta_x - \mu(\{y\})\delta_y \end{pmatrix}$$

is also determinate.

(2) If we put $\mu = \chi_{[0,1]}(t)dt + \nu$, with ν being N -extremal, then W_μ given by (2.2) is completely indeterminate. Again, this is equivalent to see that

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} W_\mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

is completely indeterminate, but

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} W_\mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \chi_{[0,1]}(t)dt + \nu - \nu(\{x\})\delta_x + \nu(\{y\})\delta_y & 0 \\ 0 & \chi_{[0,1]}(t)dt + \nu + \nu(\{x\})\delta_x - \nu(\{y\})\delta_y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

and it is not difficult to see that

$$\chi_{[0,1]}(t)dt + \nu - \nu(\{x\})\delta_x + \nu(\{y\})\delta_y \quad \text{and} \quad \chi_{[0,1]}(t)dt + \nu + \nu(\{x\})\delta_x - \nu(\{y\})\delta_y$$

are both indeterminate.

We begin with the generalization of some of the points in Theorem 1.1:

Theorem 2.1. *For a positive definite matrix of measures μ in V_{2n-2} the following statements are equivalent:*

- (1) μ is an extremal measure of the set V_{n-1} (in the sense of convexity).
- (2) P_{n-1} is dense in the space $L^2(\mu)$.
- (3) There exists an $N \times N$ numerical matrix A such that $A_n A = A^* A_n^*$ and for which $\mu = \sum_{i=1}^q G_i \delta_{x_i}$, where $x_i, i = 1, \dots, q$ are the different zeros of the polynomial $\det(P_n(\lambda) - AP_{n-1}(\lambda))$ and G_i are the matrices which appear in the simple fraction decomposition

$$(P_n(\lambda) - AP_{n-1}(\lambda))^{-1}(Q_n(\lambda) - AQ_{n-1}(\lambda)) = \sum_{i=1}^q \frac{G_i}{\lambda - x_i}.$$

The numbers x_i are real and the matrices G_i are positive semidefinite, $i = 1, \dots, q$.

See [DL3] for the proof.

Property (5) of Theorem 1.1 is not true in the matrix case. Indeed, the matrices in V_{2n-2} extremal in V_{n-1} may not support the maximum mass in V_{2n-2} . This happens exactly when the mass is a non-singular matrix, in which case the polynomial $P_n(\lambda) - AP_{n-1}(\lambda)$ has a zero of maximum multiplicity:

Theorem 2.2. *If μ is a matrix of measures extremal in V_{n-1} , put*

$$\mu = \sum_{i=1}^q G_i \delta_{x_i},$$

where x_i are the zeros of $P_n(\lambda) - AP_{n-1}(\lambda)$ for certain A such that $A_n A = A^* A_n^*$. Then the following conditions are equivalent:

- (1) μ reaches in x_{i_0} the maximum mass permitted in x_{i_0} for a matrix of measures in V_{2n-2} , more concretely,

$$G_{i_0} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(x_{i_0}) P_k(x_{i_0}) \right)^{-1}.$$

- (2) G_{i_0} is non-singular.
- (3) $P_n(\lambda) - AP_{n-1}(\lambda)$ has a zero of maximum multiplicity (N) in x_{i_0} .
- (4) $P_{n-1}(x_{i_0})$ is non-singular and $A = P_n(x_{i_0}) P_{n-1}^{-1}(x_{i_0})$.

See [DL3] for the proof.

Property (4) of Theorem 1.1 is still an open problem in the matrix case, we will give more details later.

The generalization of the Theorem of Riesz to the matrix case also presents important difficulties. We have proved this theorem in the matrix case in the completely indeterminate case, or equivalently, when the indices of deficiency of the operator J are both N . In this case the two series

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(\lambda) P_k(\eta) \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(\lambda) P_k(\eta)$$

converge uniformly in the variables λ and η on every bounded set of the complex plane (see [K]).

This convergence permits to define the following four analytic matrix functions,

$$A(\lambda) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(0)Q_k(\lambda), \quad B(\lambda) = -I + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(0)P_k(\lambda),$$

$$C(\lambda) = I + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(0)Q_k(\lambda), \quad D(\lambda) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(0)P_k(\lambda),$$

which together with their partial sums

$$A_n(\lambda) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^*(0)Q_k(\lambda), \quad B_n(\lambda) = -I + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^*(0)P_k(\lambda),$$

$$C_n(\lambda) = I + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(0)Q_k(\lambda), \quad D_n(\lambda) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(0)P_k(\lambda),$$

play an important role in the theory.

We also put

$$(2.3) \quad R_n(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^n P_k^*(\bar{\lambda})P_k(\lambda) \right)^{-1}.$$

For any non real λ , we define the set $B_n(\lambda)$ to be the set of $N \times N$ complex matrices ω such that

$$(2.4) \quad [\omega + \alpha_n(\lambda)]R_{n-1}(\bar{\lambda})^{-1}[\omega + \alpha_n(\lambda)]^* \leq |\lambda - \bar{\lambda}|^{-2}R_{n-1}(\lambda),$$

where

$$\alpha_n(\lambda) = \left(\frac{I}{2i \operatorname{Im} \lambda} + \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^*(\lambda)P_k(\bar{\lambda}) \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(\lambda)P_k(\bar{\lambda}) \right)^{-1}.$$

The sets $B_n(\lambda)$ are the matrix equivalents to the Hellinger-Nevanlinna circles. Some algebraic calculations with the polynomials P_n and Q_n show that $B_n(\lambda)$ is also the set of $N \times N$ complex matrices ω satisfying the matrix inequality

$$(2.5) \quad \sum_{k=0}^{n-1} (Q_k^*(\lambda) + \omega P_k^*(\lambda))(Q_k(\bar{\lambda}) + P_k(\bar{\lambda})\omega^*) \leq \frac{\omega - \omega^*}{\lambda - \bar{\lambda}}.$$

We put $B_\infty(\lambda)$ for the intersection of all the sets $B_n(\lambda)$.

$B_\infty(\lambda)$ is clearly the set of $N \times N$ complex matrices ω such that

$$(2.6) \quad [\omega + C(\lambda)]R(\bar{\lambda})^{-1}[\omega + C(\lambda)]^* \leq |\lambda - \bar{\lambda}|^{-2}R(\lambda),$$

where

$$C(\lambda) = \left(\frac{I}{2i \operatorname{Im} \lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(\lambda)P_k(\bar{\lambda}) \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(\lambda)P_k(\bar{\lambda}) \right)^{-1}.$$

Similarly, $B_\infty(\lambda)$ is also the set of $N \times N$ complex matrices ω such that

$$(2.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (Q_k^*(\lambda) + \omega P_k^*(\lambda))(Q_k(\bar{\lambda}) + P_k(\bar{\lambda})\omega^*) \leq \frac{\omega - \omega^*}{\lambda - \bar{\lambda}}.$$

Looking at (2.4) and (2.6) it is immediate that upon a linear matrix transformation, any of the sets $B_n(\lambda)$ or $B_\infty(\lambda)$ is in a one to one correspondence with the set of $N \times N$ complex matrices T satisfying $TT^* \leq I$, which is a convex set whose extremal points are the matrices verifying $TT^* = I$, that is, the unitary matrices (this is a well-known result in operator theory which can be proved for example with the aid of the singular value decomposition of matrices). This implies that these sets $B_n(\lambda)$ and $B_\infty(\lambda)$ are convex sets whose extremal points ($\text{Ext } B_n(\lambda)$ and $\text{Ext } B_\infty(\lambda)$) are those for which equality is attained in (2.4) and (2.5) or (2.6) and (2.7) respectively.

Other calculations with algebraic formulas involving P_n and Q_n show that an equivalent condition for ω to be an extremal point of $B_n(\lambda)$ is that the matrix

$$(2.8) \quad (\omega P_n^*(\lambda) + Q_n^*(\lambda))A_n^*(P_{n-1}(\bar{\lambda})\omega^* + Q_{n-1}(\bar{\lambda}))$$

is hermitian.

It is clear that for all $n \geq 1$ we have $B_\infty(\lambda) \subseteq B_{n+1}(\lambda) \subseteq B_n(\lambda)$. It is also clear that ω belongs to the set of interior points of $B_n(\lambda)$ or $B_\infty(\lambda)$ ($\text{Int } B_n(\lambda)$ and $\text{Int } B_\infty(\lambda)$) if a strict inequality is attained in (2.4) and (2.5) or (2.6) and (2.7) respectively.

The Theorem of Nevanlinna has the same formulation in the matrix case:

Theorem 2.3. *Let V denote the set of solutions to a completely indeterminate matrix moment problem defined by a matrix of measures ν and let $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Then we have*

$$B_\infty(\lambda) = I(V)(\lambda).$$

See [L1] for the proof.

The statement is exactly the same as in the scalar case, however the proof given in the scalar case fails completely in the matrix case, because in the scalar case a complete description of the Stieltjes transforms of the solutions of the truncated problem is known in terms of the circles of Hellinger-Nevanlinna. However in the matrix case this description is far more complicated. The key to prove this theorem in the matrix case is the inclusions

$$(2.9) \quad \text{Int } B_n(\lambda) \subseteq I(V_{2n-2})(\lambda) \subseteq B_n(\lambda).$$

The proofs of these inclusions present much more difficulties than in the scalar case. Indeed, in the scalar case the set $I(V_{2n-2})(\lambda)$ is given by

$$I(V_{2n-2})(\lambda) = B_n(\lambda) \setminus \left\{ -\frac{q_{n-1}(\lambda)}{p_{n-1}(\lambda)} \right\}.$$

The point $-q_{n-1}(\lambda)/p_{n-1}(\lambda)$ lies on the border of the circle $B_n(\lambda)$. When a moves along the real axis, the quotient

$$\frac{q_n(\lambda) - aq_{n-1}(\lambda)}{p_n(\lambda) - ap_{n-1}(\lambda)}$$

describes all the points of the circumference of the closed disk $B_n(\lambda)$ except for the limit point $-q_{n-1}(\lambda)/p_{n-1}(\lambda)$. The well known quadrature formula (see [A, p. 20]) gives that every point defined by the former quotient for $a \in \mathbb{R}$ belongs to $I(V_{2n-2})(\lambda)$. It is easy to see that $-q_{n-1}(\lambda)/p_{n-1}(\lambda) \notin I(V_{2n-2})(\lambda)$, but this is of no importance because taking into account that $I(V_{2n-2})(\lambda)$ is a convex set and the simple geometry of the circles $B_n(\lambda)$ it is immediate to deduce that $\text{Int } B_n(\lambda) \subseteq I(V_{2n-2})(\lambda)$. This inclusion is not at all so immediate in the matrix case, and it is done in several steps:

Step 1.

$$\text{co}(\Gamma_n(\lambda)) \subseteq I(V_{2n-2})(\lambda),$$

where

$$\Gamma_n(\lambda) = \{-(P_n(\lambda) - AP_{n-1}(\lambda))^{-1}(Q_n(\lambda) - AQ_{n-1}(\lambda)) : A_n A = A^* A_n^*\}$$

and $\text{co}(\Gamma_n(\lambda))$ stands for the convex hull of $\Gamma_n(\lambda)$.

Step 2.

$$\Gamma_n(\lambda) \subseteq \text{Ext } B_n(\lambda),$$

where $\text{Ext } B_n(\lambda)$ stands for the set of extremal points of $B_n(\lambda)$.

Step 3.

$$I(V_{2n-2})(\lambda) \cap \text{Ext } B_n(\lambda) = \Gamma_n(\lambda).$$

Step 4. If $\omega \in \text{Ext } B_n(\lambda)$, the following two conditions are equivalent:

- (1) $\omega \in \Gamma_n(\lambda)$
- (2) $\det(Q_{n-1}^*(\lambda) + \omega P_{n-1}^*(\lambda)) \neq 0$.

Step 5. The set $\Gamma_n(\lambda)$ is dense in $\text{Ext } B_n(\lambda)$.

Step 6. The following inclusion holds:

$$\text{Int } B_n(\lambda) \subseteq \text{co}(\Gamma_n(\lambda)).$$

We also have the generalization to the matrix case of the Theorem of Riesz:

Theorem 2.4 (Riesz’s theorem for orthogonal matrix polynomials). *Let μ be a positive definite matrix of measures corresponding to a completely indeterminate matrix moment problem. Then the following conditions are equivalent:*

- (1) *There exists $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ such that $I(\mu)(\lambda_0)$ is an extremal point (in the sense of convexity) of the set $B_\infty(\lambda_0)$.*
- (2) *For any $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $I(\mu)(\lambda)$ is an extremal point (in the sense of convexity) of the set $B_\infty(\lambda)$.*
- (3) *\mathcal{P} is dense in $L^2(\mu)$, equivalently $(P_n(t))_{n=0}^\infty$ is an orthonormal basis for the Hilbert space $L^2(\mu)$.*

See [L1] for the proof.

For the Nevanlinna parametrization, in the matrix case the parameter space is the space \mathcal{V} of holomorphic matrix functions $V(\lambda)$ in the upper half-plane \mathbb{H} such that $V(\lambda)^*V(\lambda) \leq I$. The theorem reads as follows:

Theorem 2.5. *There exists a homeomorphism between the set V and the set \mathcal{V} given by*

$$(2.10) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu(t)}{t - \lambda} = -\{C^*(\lambda)[I + V(\lambda)] - iA^*(\lambda)[I - V(\lambda)]\} \\ \times \{D^*(\lambda)[I + V(\lambda)] - iB^*(\lambda)[I - V(\lambda)]\}^{-1}.$$

The N -extremal matrices of measures in V correspond to the constant unitary matrices in \mathcal{V} .

See [L2] for the proof.

In most cases this expression can be given in terms of a Pick matrix function. A Pick matrix function is a holomorphic matrix function $\Phi(\lambda)$ in the upper half-plane \mathbb{H} such that for any z in \mathbb{H} the matrix

$$\text{Im } \Phi(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda)^*}{2i}$$

is positive semidefinite.

If we suppose the matrix function $[I + V(\lambda)]$ to be invertible for every λ in \mathbb{H} , then we can define

$$(2.11) \quad \Phi(\lambda) = i[I - V(\lambda)][I + V(\lambda)]^{-1},$$

which is a Pick matrix function:

$$(2.12) \quad \frac{\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda)^*}{2i} = \frac{1}{2i} \{i[I - V(\lambda)][I + V(\lambda)]^{-1} + i[I + V(\lambda)^*]^{-1}[I - V(\lambda)^*]\} \\ = \frac{1}{2}[I + V(\lambda)^*]^{-1} \{[I + V(\lambda)^*][I - V(\lambda)] + [I - V(\lambda)^*][I + V(\lambda)]\} [I + V(\lambda)]^{-1} \\ = [I + V(\lambda)^*]^{-1} \{I - V(\lambda)^*V(\lambda)\} [I + V(\lambda)]^{-1} \geq 0$$

because $V(\lambda)$ belongs to \mathcal{V} . In this case (2.10) becomes

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu(t)}{t - \lambda} = -\{C^*(\lambda) - A^*(\lambda)\Phi(\lambda)\} \{D^*(\lambda) - B^*(\lambda)\Phi(\lambda)\}^{-1},$$

which is the matrix version of (1.3).

If ν is N -extremal, then its Stieltjes transform is

$$(2.13) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu(t)}{t - \lambda} = -\{C^*(\lambda)[I + U] - iA^*(\lambda)[I - U]\} \{D^*(\lambda)[I + U] - iB^*(\lambda)[I - U]\}^{-1}$$

for a certain unitary matrix U . If $I + U$ is invertible, then

$$H = i[I - U][I + U]^{-1}$$

is hermitian, and (2.13) reduces to

$$(2.14) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu(t)}{t - \lambda} = - \{C^*(\lambda) - A^*(\lambda)H\} \{D^*(\lambda) - B^*(\lambda)H\}^{-1},$$

but observe that not every N -extremal matrix of measures can be represented in this way for a hermitian matrix.

The N -extremal matrices of measures also satisfy a number of interesting properties although the matrix structure creates important divergences; for instance: for every real number t , and for any natural number m , $0 \leq m < N$, there are infinitely many N -extremal measures having a mass point at t of rank m , but only one having a mass point at t of rank N .

To present the results in full, we need some definitions and previous results. For t_0 a real number, the matrix $D^*(t_0) + iB^*(t_0)$ is non-singular and the matrix

$$(2.15) \quad U_{t_0} = -(D^*(t_0) + iB^*(t_0))^{-1}(D^*(t_0) - iB^*(t_0))$$

is unitary. For any unitary matrix U we write

$$A_U = \{u \in \mathbb{C}^N : Uu^* = U_{t_0}u^*\}.$$

We have the following theorem which characterizes the N -extremal matrices of measures having a mass point at t_0 :

Theorem 2.6. *The Nevanlinna parametrization (2.13) establishes a bijective mapping between the sets*

$$\left\{ U : U \text{ is a unitary matrix, } \dim(A_U) = m \right\}$$

and

$$\left\{ \nu : \nu \text{ is an } N\text{-extremal matrix of measures with } \text{rank}(\nu(\{t_0\})) = m \right\}.$$

Moreover:

- (1) *If ν is N -extremal, the matrix $\nu(\{t_0\})$ is the inverse of the positive definite matrix $\sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(t_0)P_k(t_0)$ on the orthogonal subspace of $\text{Ker}(\nu(\{t_0\}))$, that is, if $u, v \in \text{Ker}^\perp(\nu(\{t_0\}))$ then*

$$(2.16) \quad \begin{aligned} & u(\nu(\{t_0\})) \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(t_0)P_k(t_0) \right) v^* \\ &= u \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(t_0)P_k(t_0) \right) (\nu(\{t_0\})) v^* \\ &= uv^*. \end{aligned}$$

- (2) *If ν is N -extremal, the matrix $\nu(\{t_0\})$ attains, on the orthogonal subspace of $\text{Ker}(\nu(\{t_0\}))$, the maximum mass which can be concentrated at t_0 for*

any solution of the indeterminate matrix moment problem, that is, if $u \in \text{Ker}^\perp\left(\nu(\{t_0\})\right)$ and μ has the same matrix moments as those of ν then:

$$u\nu(\{t_0\})u^* \geq u\mu(\{t_0\})u^*.$$

As a consequence, there is only one N -extremal matrix of measures with a non-singular mass at the point t_0 : the N -extremal matrix of measures associated to the unitary matrix U_{t_0} defined by (2.15). In this case the mass at t_0 is

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(t_0)P_k(t_0)\right)^{-1}.$$

See [DL4] for the proof.

We stress the important differences between our Theorem 2.6 and the property (2) of N -extremal measures pointed out above. The property (3) also has a more complicated interpretation in the matrix case which depends on the rank of the mass that the N -extremal solution supports on t :

Theorem 2.7. *If ν is an N -extremal matrix of measures then the deficiency index of the matrix of measures $\nu - \nu(\{t\})\delta_t$ is less than or equal to $N - \text{rank}\left(\nu(\{t\})\right)$.*

See [DL4] for the proof.

Finally, the property (4) in Theorem 1.6 has an analogous in the matrix case:

Corollary 2.8. *The N -extremal matrix of measures associated to the unitary matrix U_{t_0} is the only solution of the indeterminate matrix moment problem having maximum mass at the point t_0 .*

See [DL4] for the proof.

REFERENCES

- [A] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965. (Translated from the Russian by N. Kemmer.)
- [AN] A. I. Aptekarev and E. M. Nikishin, The scattering problem for a discrete Sturm-Liouville operator, *Math. USSR-Sb.* **49** (1984), 325–355.
- [B] Ju. M. Berezanskii, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs **17**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.
- [D1] A. J. Durán, A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation, *J. Approx. Theory* **74** (1993), 83–109.
- [D2] A. J. Durán, On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures, *Canad. J. Math.* **47** (1995), 88–112.
- [D3] A. J. Durán, Markov's theorem for orthogonal matrix polynomials, *Canad. J. Math.* **48** (1996), 1180–1195.
- [DL1] A. J. Durán and P. López-Rodríguez, Orthogonal matrix polynomials: zeros and Blumenthal's theorem, *J. Approx. Theory* **84** (1996), 96–118.
- [DL2] A. J. Durán and P. López-Rodríguez, The L^p space of a positive definite matrix of measures and density of matrix polynomials in L^1 , *J. Approx. Theory* **90** (1997), 299–318.
- [DL3] A. J. Durán and P. López-Rodríguez, Density questions for the truncated matrix moment problem, *Canad. J. Math.* **49** (1997), 708–721.
- [DL4] A. J. Durán and P. López-Rodríguez, N -extremal matrices of measures for an indeterminate matrix moment problem, *J. Funct. Anal.* **174** (2000), 301–321.

- [DV] A. J. Durán and W. Van Assche, Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations, *Linear Algebra Appl.* **219** (1995), 261–280.
- [K] M. Krein, Infinite J -matrices and a matrix moment problem (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **69** (1949), 125–128. (Translation by Walter Van Assche in a personal note.)
- [L1] P. López-Rodríguez, Riesz's theorem for orthogonal matrix polynomials, *Constr. Approx.* **15** (1999), 135–151.
- [L2] P. López-Rodríguez, The Nevanlinna parametrization for a matrix moment problem, *Math. Scand.*, to appear.
- [Na] H. Nagel, Über die quadrierbaren Hermiteschen Matrizen entstehenden Operatoren, *Math. Ann.* **5** (1936), 247–285.
- [N] R. Nevanlinna, Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjesche Momentenproblem, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A* **18** (1922), 88–112.
- [Ri] M. Riesz, Sur le probleme des moments et le théoreme de Parseval correspondant, *Acta Litt. Sci. Szeged* **1** (1922), 209–225.
- [R] M. Rosemberg, The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-negative hermitian measure, *Duke Math. J.* **31** (1964), 291–298.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE SEVILLA, APDO. 1160, 41080 SEVILLA, SPAIN

E-mail address: duran@cica.es, plopez@cica.es

SOBRE APROXIMACIÓN EN CIERTOS ESPACIOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS

JOSÉ MARÍA ALMIRA, NAIRA DEL TORO Y FRANCISCO PÉREZ-ACOSTA

A Chicho, que nos dio mucho más de lo que podríamos devolver

ABSTRACT. The main goal of this paper is to study some elementary properties of polynomial and rational approximation in the setting of approximation spaces of analytic functions defined on compact subsets of the complex plane. Concretely, we are interested in convergence of Faber series and existence of best rational approximation in the norm of these spaces. For the proofs, we will need to introduce an embedding result, and a certain discretization technique.

1. INTRODUCCIÓN

Sea $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto del plano complejo y supongamos que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{K}$ es conexo. Entonces, gracias al teorema de Mergelyan (ver [9]) podemos afirmar que toda función continua en \mathbf{K} y analítica en $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$ es uniformemente aproximable por polinomios sobre \mathbf{K} . Sin embargo, de la misma forma que el Teorema de Weierstrass no proporciona información sobre la velocidad de convergencia a cero de los errores de mejor aproximación polinómica en $\mathbf{C}[0, 1]$, tampoco el teorema de Mergelyan dice nada a propósito de la velocidad de convergencia (a cero) de los errores de mejor aproximación polinómica en $\mathbf{A}(\mathbf{K}) := \mathbf{H}(\overset{\circ}{\mathbf{K}}) \cap \mathbf{C}(\mathbf{K})$. En este contexto tiene, pues, sentido estudiar los espacios de aproximación

$$\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}) := \{f \in \mathbf{A}(\mathbf{K}) : \{E_n(f)_{\mathbf{K}}\}_{n=0}^{\infty} \in l_q(\{(n+2)^{s-1/q}\})\}.$$

Por ejemplo, podríamos preguntarnos qué propiedades de suavidad poseen los elementos de $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$. Es claro que $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$ es un espacio de Banach continuamente inmerso en $\mathbf{A}(\mathbf{K})$, si se le dota de la norma

$$\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})} = \left\| \{(n+2)^{s-1/q} E_n(f)_{\mathbf{K}}\}_{n=-1}^{\infty} \right\|_{l_q},$$

donde $E_{-1}(f)_{\mathbf{K}} := \|f\|_{L_{\infty}(\mathbf{K})}$. Para demostrarlo, basta tener en cuenta que se trata de un caso particular de la Proposición 1 que aparece en el artículo de Piestch [14]. Además, si \mathbf{K} contiene un número infinito de puntos, entonces $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}) \neq \mathbf{A}(\mathbf{K})$, ya que las normas $\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})}$ y $\|f\|_{\mathbf{A}(\mathbf{K})} := \|f\|_{\mathbf{K}}$ no son equivalentes. Si \mathbf{K} contiene

2000 *Mathematics Subject Classification.* 41A10, 41A20, 41A50.

Key words and phrases. Faber series, best rational approximation, approximation spaces.

Trabajo parcialmente subvencionado por «Aproximación y Métodos Numéricos», PB94 y FQM0178.

sólo un número finito de puntos, entonces claramente $\mathbf{A}(\mathbf{K}) = \mathbf{C}(\mathbf{K}) = \mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$; pues $E_n(f)_{\mathbf{K}} = 0$ para toda función f y todo $n > m = \#\mathbf{K}$.

En este artículo vamos a encontrar algunas clases de funciones analíticas que están inmersas en $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$, y vamos a demostrar algunos resultados de aproximación polinómica y racional en $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$.

A diferencia del caso real, cuando consideramos el problema de aproximación con polinomios de una variable compleja en compactos de \mathbb{C} , no es posible encontrar teoremas directos e inversos completamente satisfactorios en el sentido de que produzcan una caracterización completa de los espacios de aproximación $\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K})$. En lo que sigue, vamos a suponer que $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{D}}$ para cierto dominio de Jordan \mathbf{D} .

Dedicamos el resto de esta sección a introducir algunos conceptos y propiedades de interés en Teoría de Aproximación Compleja que serán usados posteriormente. En particular, definimos las series de Faber y probamos la inmersión $\mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ para todo q y s y para todo dominio de Jordan $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$, donde $\mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}})$ denota el espacio vectorial de las funciones holomorfas en algún entorno abierto de $\overline{\mathbf{D}}$. También introducimos el concepto de cuasidisco y demostramos que cualquier curva de Jordan diferenciable es una curva cuasiconforme.

1.0.1. Series de Faber. Sea \mathbf{D} un dominio de Jordan y sea $\mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$ su frontera. Denotamos por \mathcal{C}_R la curva de nivel correspondiente a $R > 1$,

$$\mathcal{C}_R = \{\Phi(z) : |z| = R\}$$

donde Φ es la aplicación de Riemann $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbf{Ext}(\mathcal{C})$ normalizada en el infinito por $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0$. Los polinomios de Faber (ver [9, pp. 42–57]) se definen entonces como $F_n(z) =$ la parte polinómica del desarrollo de Laurent de $[\Phi(z)]^n$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada $f \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ podemos definir entonces una serie formal (la serie de Faber de f)

$$(1) \quad f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n$$

donde

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} f(\Psi(w)) w^{-(n+1)} dw \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

y $\Psi = \Phi^{-1} : \mathbf{Ext}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{Ext}(\mathbb{D})$ es la inversa de Φ . Denotamos por $\mathcal{F}_n(f)$ la n -ésima suma parcial de la serie de Faber asociada a f .

Las series de Faber son una herramienta clásica para la aproximación de funciones analíticas. Son la generalización más natural ([4], [19]) que conocemos del desarrollo de Taylor para el estudio de funciones analíticas en dominios de Jordan acotados. Faber (ver [7], [8]) introdujo dichos desarrollos, y los usó para demostrar la fórmula

$$(3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} [E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R(f)},$$

donde f se supone analítica en algún entorno de $\overline{\mathbf{D}}$ y

$$1 < R(f) := \sup\{r : f \in \mathbf{H}(\mathbf{Int}(C_r))\}.$$

Se sigue de (3) la siguiente proposición:

Proposición 1. *Sea \mathbf{D} un dominio de Jordan. Entonces*

$$\mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo q, s .

Demostración. Sea $f \in \mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}})$. Entonces $R(f) > 1$ y (3) implica que $E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{O}(n^{-k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto concluye la demostración. \square

1.0.2. Curvas cuasiconformes. La teoría de aproximación sobre dominios de Jordan depende fuertemente de la geometría de los dominios ya que los aproximantes que se consideran buenos (como la suma parcial n -ésima de la serie de Faber de una función) están dados en términos de la restricción a $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ de la aplicación de Riemann asociada al dominio de Jordan, de modo que si la aplicación de Riemann tiene un buen comportamiento en la frontera del dominio, las propiedades de aproximación son buenas. Ahora bien, en el estudio del comportamiento frontera de homeomorfismos, las curvas cuasiconformes son de gran interés [16]. Por tanto, las curvas cuasiconformes son interesantes para la teoría de aproximación compleja.

Existen varias definiciones de aplicaciones cuasiconformes y curvas cuasiconformes. Por ejemplo, la definición analítica de aplicación cuasiconforme es la siguiente (ver [17]): por una aplicación τ -cuasiconforme de un dominio $\mathbf{D} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ sobre otro dominio $\mathbf{D}' \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ entendemos un homeomorfismo $h : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$ tal que:

- h , junto con su inversa, conserva la orientación.
- $h \in \mathbf{W}_{1, \text{loc}}^1(\mathbf{D} \setminus \{\infty, h^{-1}(\infty)\})$.
- $|h_{\bar{z}}| \leq k|h_z|$ en casi todo punto de \mathbf{D} , donde $k = \frac{\tau-1}{\tau+1}$.

Por una curva cuasiconforme o cuasicírculo, entendemos la imagen de una circunferencia bajo alguna aplicación que es τ -cuasiconforme de \mathbb{C} en \mathbb{C} para algún $\tau > 0$. Existe una caracterización geométrica de las curvas cuasiconformes, contenida en el siguiente Teorema (ver [16, p. 107]):

Teorema 2 (Teorema del Cuasicírculo). *Sea \mathcal{C} una curva de Jordan en \mathbb{C} y supongamos que f aplica \mathbb{D} conformemente sobre $\text{Int}(\mathcal{C})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\text{diam}(\mathcal{C}(z, w)) \leq M|z - w|$ para todo $z, w \in \mathcal{C}$ y una cierta constante M (donde $\mathcal{C}(z, w)$ denota el arco de menor longitud de \mathcal{C} de z a w y $\text{diam}(\mathcal{K}) = \text{máx}\{|z - w| : z, w \in \mathcal{K}\}$).

(b) Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$ y $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_2|$ entonces $|f(z_1) - f(z_2)| \leq M|f(z_2) - f(z_3)|$ (recuérdese que, por el teorema de Caratheodory, toda aplicación conforme del disco unidad a un dominio de Jordan posee una extensión continua hasta el borde del disco unidad, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$).

(c) f tiene una extensión cuasiconforme a \mathbb{C} .

(d) Existe una aplicación cuasiconforme de \mathbb{C} a \mathbb{C} que aplica \mathbb{T} sobre \mathcal{C} .

Sea \mathbf{D} un dominio de Jordan y $\mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$ su borde. Decimos que \mathcal{C} satisface una c -condición [9] si

$$(4) \quad \Delta(z, w) < c|z - w| \text{ para todo } z, w \in \mathcal{C},$$

donde $\Delta(z, w)$ denota la longitud del menor arco de \mathcal{C} de z a w . Decimos que \mathcal{C} es cuasi-suave¹ si es rectificable y satisface (4) para cierta constante $c > 0$. Es claro que cualquier curva cuasi-suave debe ser una curva cuasiconforme.

Decimos que \mathcal{C} es suave si es de clase $C^{(1)}$ y admite una parametrización arco $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathcal{C}$ (i.e., $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in [0, L]$ y $\alpha(t) = \alpha(s)$ si y solo si $t = s$ o $\{t, s\} = \{0, L\}$).

A continuación, vamos a demostrar que cualquier curva de Jordan suave es cuasi-suave² (y, por tanto, cuasiconforme).

Proposición 3. *Cualquier curva de Jordan suave es también una curva de Jordan cuasi-suave.*

Demostración. Sea $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathcal{C}$ la parametrización arco de \mathcal{C} . Afirmamos que

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{|\alpha(t) - \alpha(s)|}{\Delta(\alpha(t), \alpha(s))} & \text{si } \Delta(\alpha(t), \alpha(s)) \neq 0, \\ 1 & \text{si } \Delta(\alpha(t), \alpha(s)) = 0, \end{cases}$$

es una función continua y $|G(t, s)| \neq 0$ para todo $(t, s) \in [0, L] \times [0, L]$ (siendo esto último obvio).

Para probarlo, primero observamos que es posible extender la parametrización α a una función periódica $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ de periodo L simplemente tomando $\beta(nL + t) = \alpha(t)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq t \leq L$. Es claro que β es una función $C^{(1)}$ y $\|\beta'\| \equiv 1$. Ahora,

$$\Delta(\alpha(t), \alpha(s)) = \min\{|t - s|, L - \max\{t, s\} + \min\{t, s\}\}$$

y $\Delta(\alpha(t), \alpha(s)) = 0$ si y sólo si $t = s$ o $\{t, s\} = \{0, L\}$. Supongamos que $0 \leq t < s \leq L$ y $\Delta(\alpha(t), \alpha(s)) \neq |t - s|$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha(t) - \alpha(s)|}{\Delta(\alpha(t), \alpha(s))} &= \frac{|\beta(t) - \beta(s)|}{L - s + t} = \frac{|\beta(L + t) - \beta(s)|}{L - s + t} \\ &= \frac{|\beta(s + (L + t - s)) - \beta(s)|}{L - s + t} \rightarrow |\beta'(s)| = 1, \text{ si } t \rightarrow s - L \end{aligned}$$

de modo que G es continua (los otros casos son completamente análogos),

$$\frac{1}{c} = \min_{(t,s) \in [0,L] \times [0,L]} |G(t, s)| > 0,$$

con lo que concluimos la demostración. □

¹También se dice que \mathcal{C} es una curva arco-cuerda o que es una curva de Laurentiev (ver [16, p. 96]).

²Estamos convencidos de que este resultado debe existir en la literatura sobre la materia. Es más, deben existir resultados mucho más potentes, pero nosotros sólo vamos a necesitar en este artículo tratar con curvas de Jordan suaves. Es por ello que hemos realizado la demostración de este caso, ya que no requiere argumentos especialmente complejos.

2. APROXIMACIÓN POLINÓMICA Y RACIONAL EN $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$

Vamos ahora a estudiar algunas cuestiones sobre aproximación polinómica y racional en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. En una primera subsección, demostramos un teorema de inmersión que generaliza la inmersión $\mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ a las clases de funciones definidas por

$$\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) = \{f : f, f', f'', \dots, f^{(k)} \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})\}$$

y

$$\mathbf{Lip}(\gamma, \overline{\mathbf{D}}) = \left\{ f : f, f', f'', \dots, f^{(k)} \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}}) \text{ y } \sup_{z, w \in \partial \mathbf{D}} \frac{|f^{(k)}(z) - f^{(k)}(w)|}{|z - w|^\nu} < \infty \right\}$$

donde $\gamma = k + \nu$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \nu < 1$ y la frontera del dominio de Jordan \mathbf{D} se supone diferenciable de clase al menos $C^{(2)}$. La base teórica de nuestro resultado es un teorema directo para aproximación polinómica sobre cuasidisks, debido a Belyi (ver [2]).

En la segunda subsección se introduce una técnica de discretización que se utiliza en la siguiente subsección para probar la proximalidad de las funciones racionales en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ para todo dominio de Jordan \mathbf{D} .

En la cuarta subsección se demuestran algunos resultados sobre convergencia para aproximación polinómica con series de Faber en la norma de $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$.

2.1. El teorema de Inmersión. Supongamos que \mathcal{C} es una curva de Jordan y \mathcal{C}_R es la curva de nivel asociada a $R > 1$,

$$\mathcal{C}_R = \{\Phi(z) : |z| = R\},$$

donde Φ es la aplicación conforme $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbf{Ext}(\mathcal{C})$ normalizada en el infinito por $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0$. Entonces definimos las funciones

$$d_R(z) = d(z, \mathcal{C}_R) \quad \text{para todo } z \in \mathcal{C}.$$

La misma notación se usa si \mathcal{C} es cuasiconforme y Φ es el homeomorfismo cuasiconforme que aplica \mathcal{C} sobre $\partial \mathbb{D}$. El teorema de Belyi afirma (ver [2, p. 316, Theorem 10]):

Teorema 4 (Belyi, 1977). *Sea \mathbf{D} un dominio cuasiconforme acotado en el plano complejo. Si $f \in \mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}})$ ($k > 0$), entonces para todo entero positivo n existe un polinomio algebraico $P_n(z)$ de grado $\leq n$ y constantes $M(j, k, \overline{\mathbf{D}})$ que dependen sólo de $\overline{\mathbf{D}}$, k y $j = 0, 1, \dots, n$, tales que*

$$(5) \quad |f(z) - P_n(z)| \leq M(j, k, \overline{\mathbf{D}})(d_{1+\frac{1}{n}}(z))^{k-j} w(f^{(k)}, d_{1+\frac{1}{n}}(z))$$

para todo $z \in \mathcal{C} = \partial \mathbf{D}$, donde $w(f, \cdot)$ denota el módulo de continuidad de la función f .

Estamos interesados en tomar la norma del supremo del primer miembro de (5) de modo que es bastante natural definir $\delta_n := \sup_{z \in \mathcal{C}} d_{1+\frac{1}{n}}(z)$. Es claro que $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión decreciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

Corolario 5. *En las condiciones del Teorema anterior, se tiene que*

$$E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \leq M(k, \overline{\mathbf{D}}) \delta_n^k w(f^{(k)}, \delta_n)$$

para todo $f \in \mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}})$.

Teorema 6. *Supongamos que \mathbf{D} es un dominio de Jordan cuasiconforme y $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$ para cierto $\alpha > 0$. Entonces*

$$\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo $k > \frac{s}{\alpha}$ y

$$\mathbf{Lip}(\gamma, \overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo $\gamma > \frac{s}{\alpha}$. Además, las inclusiones son estrictas y continuas.

Demostración. Sólo probamos las inmersiones $\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$, para todo $k > \frac{s}{\alpha}$, ya que los otros casos tienen demostraciones similares.

Sean $1 \leq q \leq \infty$ y $s > 0$ fijados y supongamos que $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$ para cierto $\alpha > 0$. Entonces $\delta_n^k = \mathbf{O}(n^{-\alpha k})$ y, por tanto, se satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})}^q - \|f\|_{\mathbf{L}^\infty(\overline{\mathbf{D}})}^q &= \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q}^q \\ &\leq \left(\left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^{k-1} \right\|_{l_q} \right. \\ &\quad \left. + M(k, \overline{\mathbf{D}}) \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} \delta_n^k w(f^{(k)}, \delta_n) \right\}_{n=k}^\infty \right\|_{l_q} \right)^q \\ &\leq \left(\left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} \right\}_{n=0}^{k-1} \right\|_{l_q} \|f\|_{\mathbf{L}^\infty(\overline{\mathbf{D}})} \right. \\ &\quad \left. + CM(k, \overline{\mathbf{D}}) \|f^{(k)}\|_{\mathbf{L}^\infty(\overline{\mathbf{D}})} \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}-\alpha k} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q} \right)^q < \infty \end{aligned}$$

(donde hemos usado que $w(f^{(k)}, t) \leq 2 \|f^{(k)}\|_{\mathbf{L}^\infty(\overline{\mathbf{D}})}$ para todo $t \geq 0$ y que

$$\left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}-\alpha k} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q} < \infty$$

siempre que $k > \frac{s}{\alpha}$) para todo $f \in \mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}})$. Se sigue que $\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. Además, es claro que si $\{f_n\} \rightarrow f$ en $\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}})$ entonces

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{L}^\infty(\overline{\mathbf{D}})} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \left\| (f_n - f)^{(k)} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\overline{\mathbf{D}})} \rightarrow 0.$$

Por tanto, $\|f_n - f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} \rightarrow 0$ y la inclusión $\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ es continua.

Por otra parte, $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \neq \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ ya que, gracias a un resultado clásico debido a Bersntein (ver [21]), existen funciones $f \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ tales que

$$E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = \begin{cases} (n+2)^{-s+\frac{1}{q}} & \text{si } s - \frac{1}{q} > 0, \\ (n+2)^{-\frac{s}{2}} & \text{si } 0 < s \leq \frac{1}{q}, \end{cases}$$

y por tanto $\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbb{D}})} = \infty$. □

Nos interesa ahora conocer condiciones sobre el dominio \mathbf{D} que garanticen que $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-\alpha})$ para algún $\alpha > 0$. En este sentido, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7. *Supongamos que la aplicación conforme $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ posee una extensión holomorfa $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}(0, \varepsilon) \rightarrow \Omega$. Entonces $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-1})$.*

Demostración. Sea $z \in \partial\mathbb{D}$ y sea $2 \geq R > 1$. Entonces $Rz \in \partial\mathbb{D}(0, R)$, $\Phi(z) \in \mathcal{C}$, $\Phi(Rz) \in \mathcal{C}_R$ y

$$|\Phi(z) - \Phi(Rz)| = \left| \int_z^{Rz} \Phi'(\xi) d\xi \right| \leq (R - 1) \|\Phi'\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{A(\mathbf{0}; 1, 2)})},$$

donde $\overline{A(\mathbf{0}; r, R)}$ denota la corona abierta de centro $\mathbf{0}$ (el origen de coordenadas) y radios inferior y superior r y R , respectivamente. Por tanto,

$$\delta_n \leq \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left| \Phi(z) - \Phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)z\right) \right| \leq \frac{1}{n} \|\Phi'\|_{\mathbf{L}_\infty(\overline{A(\mathbf{0}; 1, 2)})} = \mathbf{O}(n^{-1})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Nota. Una condición suficiente para que $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ admita una extensión holomorfa al interior del disco unidad \mathbb{D} es que la frontera $\mathcal{C} = \partial\mathbf{D}$ sea analítica.

Nota. Sea $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ una aplicación conforme que no posee ninguna extensión holomorfa hasta el interior de \mathbb{D} . Entonces la aplicación conforme $\Phi_t : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbf{Ext}(\mathcal{C}_{1+t})$ definida por $\Phi_t(z) = \Phi((1+t)z)$ posee una extensión holomorfa hasta $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{1+t})$ para todo $t > 0$.

Corolario 8. $C^{(k)}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbb{D}})$ y $C^{(k)}(\overline{\mathbf{E}_R}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{E}_R}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{E}_R})$, para todo $k > s$, donde \mathbf{E}_R es el interior de la elipse de centro $\mathbf{0}$ y semiejes $\frac{1}{2}(R + R^{-1})$ y $\frac{1}{2}(R - R^{-1})$.

Demostración. Las aplicaciones conformes están respectivamente dadas por $\Phi(z) = z$ y $\Psi(z) = \frac{1}{2}(Rz + \frac{1}{Rz})$ así que en este caso $\delta_n = c\frac{1}{n}$ para cierta constante c . □

A pesar de que el Teorema 7 es muy natural, tener una extensión holomorfa hasta el interior de \mathbb{D} supone una restricción muy fuerte sobre la aplicación de Riemann Φ . Por tanto, nos gustaría disponer de hipótesis no tan restrictivas a la hora de garantizar que $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-1})$. Para probar nuestro teorema, usamos el siguiente resultado clásico de la teoría de funciones de variable compleja (ver [3, pp. 413–433]):

Teorema 9. *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) (**P. Painlevé**) Sean Ω_1, Ω_2 dos abiertos acotados con fronteras regulares de clase $\mathbf{C}^{(\infty)}$ y $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ un biholomorfismo. Entonces h y h^{-1} poseen extensiones $\mathbf{C}^{(\infty)}$ hasta la frontera.

(b) Existe un resultado análogo si sólo asumimos fronteras regulares de clase $\mathbf{C}^{(k)}$, pero los biholomorfismos sólo admiten extensiones $\mathbf{C}^{(k-1)}$.

Ahora podemos probar el siguiente

Teorema 10. *Supongamos que el dominio de Jordan \mathbf{D} posee frontera de clase al menos $\mathbf{C}^{(2)}$. Entonces $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-1})$.*

Demostración. Utilizamos el Teorema 9 con $\Omega_1 = A(0; 1, 2)$, la corona de centro el origen de coordenadas y radios inferior y superior 1 y 2 respectivamente, $\Omega_2 = \Phi(A(\mathbf{0}; 1, 2)) = \mathbf{Int}(\mathcal{C}_R) \cap \mathbf{Ext}(\mathcal{C})$, y $h = \Phi|_{\Omega_1}$. Entonces $h = u + iv$ admite una extensión $\bar{h} = \bar{u} + i\bar{v}$ que es diferenciable en $\overline{A(\mathbf{0}; 1, 2)}$ y

$$\sup_{w \in A(\mathbf{0}; 1, 2)} |\Phi'(w)| = \sup_{w \in A(\mathbf{0}; 1, 2)} (\bar{u}_x^2 + \bar{v}_x^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\text{máx}}{w \in A(\mathbf{0}; 1, 2)} (\bar{u}_x^2 + \bar{v}_x^2)^{\frac{1}{2}} = M < \infty.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |\Phi(z) - \Phi(Rz)| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} |\Phi((1+t)z) - \Phi(Rz)| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \int_{Rz}^{(1+t)z} \Phi'(w) dw \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} |1+t-R| M = R-1 \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, y la prueba se sigue como en el Teorema 7. □

Teorema 11 (Inmersión). *Supongamos que el dominio de Jordan \mathbf{D} tiene frontera de clase al menos $\mathbf{C}^{(2)}$. Entonces*

$$\mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo $k > s$ y

$$\mathbf{Lip}(\gamma, \overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \subset \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$$

para todo $\gamma > s$. Además, las inclusiones son estrictas y continuas.

Demostración. Se sigue de la Proposición 3 que nuestro dominio de Jordan es cuasi-conforme y del Teorema 10 que $\delta_n = \mathbf{O}(n^{-1})$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 6 para concluir la demostración. □

Podemos decir un poco más:

Teorema 12. *Supongamos que $\min_{z \in \partial \mathbf{D}} d_n(z) \sim \frac{1}{n}$. Entonces, $\mathbf{Lip}(s, \overline{\mathbf{D}})$ no está contenido en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. En particular, esto es cierto para $\mathbf{D} =$ el interior de una elipse.*

Demostración. Existe un teorema de Tamrazov (ver [20]) que afirma que si

$$(6) \quad |f(z) - p_n(z)| \leq M d_n(z)^s, \quad z \in \partial \mathbf{D}, \quad n \in \mathbb{N},$$

para cierta sucesión de polinomios $\{p_n(z)\}_{n=0}^\infty$, entonces $f \in \mathbf{Lip}(s, \overline{\mathbf{D}})$. Además, un conocido resultado de Bernstein garantiza que existen funciones $f \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ tales que

$$(7) \quad E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = \left[\min_{z \in \partial \mathbf{D}} d_n(z) \right]^s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tómese una función que verifique (7). Entonces es claro que también satisface (6), así que $f \in \mathbf{Lip}(s, \overline{\mathbf{D}})$. Ahora, nuestra hipótesis sobre $d_n(z)$ y (7) implican que $f \notin \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. □

Ahora estamos en posición de probar la proximalidad de las funciones racionales en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ para dominios de Jordan. Lo haremos en dos pasos: el primer paso consiste en la discretización del problema y el segundo es el estudio de las sucesiones minimizantes.

2.2. Discretización sobre dominios complejos. El objetivo fundamental de esta sección es demostrar que si \mathbf{D} es un dominio acotado entonces la norma en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ puede ser aproximada por las normas $\|\cdot\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}_n)}$ para ciertos subconjuntos compactos $\mathbf{K}_n \subset \mathbf{D}$. Usamos la siguiente notación: $P_t(f)_{\mathbf{K}}$ denota la mejor aproximación de f con polinomios de grado $\leq t$ sobre \mathbf{K} con la norma $\|\cdot\|_{L_\infty(\mathbf{K})}$ y, para el caso especial, $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{D}}$, escribimos $P_t(f) = P_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$ (ver [18] para la demostración de la unicidad de la mejor aproximación polinómica sobre subconjuntos compactos de \mathbb{C}). Para cada subconjunto compacto $\mathbf{K} \subset \mathbf{D}$, escribimos $|\mathbf{K}| = \sup_{x \in \partial \mathbf{D}} d(x, \mathbf{K})$. Finalmente, supondremos que $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}_1 \subset \dots \subset \mathbf{K}_n \subset \mathbf{D}$ es una sucesión de subconjuntos compactos de \mathbf{D} tal que $\mathbf{D} = \cup_{n=0}^\infty \mathbf{K}_n$ (i.e., una exhaustión de \mathbf{D}). Es claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{K}_n| = 0$.

Lema 1. $P_t(f)$ es un punto de acumulación de la sucesión $\{P_t(f)_{\mathbf{K}_n}\}_{n=1}^\infty$ en $L_\infty(\overline{\mathbf{D}})$.

Demostración. Sea $\mathbf{K} \subset \mathbf{D}$ un subconjunto compacto de \mathbf{D} . Entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_n$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto

$$\begin{aligned} \|P_t(f)_{\mathbf{K}_n}\|_{L_\infty(\mathbf{K})} &\leq \|P_t(f)_{\mathbf{K}_n}\|_{L_\infty(\mathbf{K}_n)} \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} + E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$, de modo que existe un $M = M(\mathbf{K}) < \infty$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_t(f)_{\mathbf{K}_n}\|_{L_\infty(\mathbf{K})} \leq M(\mathbf{K}).$$

El teorema de Montel implica que existe una subsucesión $\{P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}\}_{j=1}^\infty$ que es convergente en $H(\mathbf{D})$. Pero $P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} \in \Pi_t$ para todo j , y Π_t es de dimensión finita. Por tanto $\{P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}\}_{j=1}^\infty$ también converge cuando se trata como subconjunto de $L_\infty(\overline{\mathbf{D}})$ y su límite también pertenece a Π_t . Supongamos que

$$\left\| P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P \right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \rightarrow 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|f - P\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|f - P\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})} \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\|f - P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})} + \|P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})} \right] \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[E_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} + \|P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})} \right] \\ &\leq E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} + \lim_{j \rightarrow \infty} \|P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \end{aligned}$$

Por tanto $\|f - P\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$ y $P = P_t(f)$. □

Lema 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} E_t(f)_{\mathbf{K}_n} = E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$.

Demostración. Basta probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} E_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} = E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$ para cierta sucesión de números naturales $\{n_j\} \uparrow \infty$, ya que $\{E_t(f)_{\mathbf{K}_n}\}_{n=1}^\infty$ es acotada no decreciente.

Gracias al Lema 1, podemos escribir

$$\left\| P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P_t(f) \right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \rightarrow 0.$$

Por otra parte, el principio del módulo máximo implica que

$$E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = |f(x) - P_t(f)(x)|$$

para cierto $x \in \partial \mathbf{D}$, de modo que

$$\begin{aligned} E_t(f)_{\overline{\mathbf{D}}} - E_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} &= |f(x) - P_t(f)(x)| - \left\| f - P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} \right\|_{L_\infty(\mathbf{K}_{n_j})} \\ &\leq |f(x) - P_t(f)(x)| - \left| f(y) - P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}(y) \right| \quad \text{para todo } y \in \mathbf{K}_{n_j} \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |P_t(f)(y) - P_t(f)(x)| + \left| P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}}(y) - P_t(f)(y) \right| \\ &\leq w(f, |\mathbf{K}_{n_j}|) + w(P_t(f), |\mathbf{K}_{n_j}|) + \left\| P_t(f)_{\mathbf{K}_{n_j}} - P_t(f) \right\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \end{aligned}$$

converge a cero para $j \rightarrow \infty$. □

Proposición 13. $\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}_t)}$ para todo $f \in \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} - \|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\mathbf{K}_t)} &= \|f\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} - \|f\|_{L_\infty(\mathbf{K}_t)} \\ &\quad + \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q} - \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\mathbf{K}_t} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q} \end{aligned}$$

y es claro que $\|f\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} - \|f\|_{L_\infty(\mathbf{K}_t)} \rightarrow 0$. Por tanto, debemos probar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\mathbf{K}_t} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q} = \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q}.$$

Obsérvese que $\mathbf{K}_t \subset \mathbf{D}$ implica $E_n(f)_{\mathbf{K}_t} \leq E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$ para todo n , de modo que $0 \leq E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q - E_n(f)_{\mathbf{K}_t}^q \leq E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q$ para todo n . Por tanto

$$\begin{aligned} &\left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q}^q - \left\| \left\{ (n+2)^{s-\frac{1}{q}} E_n(f)_{\mathbf{K}_t} \right\}_{n=0}^\infty \right\|_{l_q}^q \\ &= \sum_{n=0}^\infty (n+2)^{sq-1} \left[E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q - E_n(f)_{\mathbf{K}_t}^q \right] \\ &\leq \sum_{n=0}^m (n+2)^{sq-1} \left[E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q - E_n(f)_{\mathbf{K}_t}^q \right] + \sum_{n=0}^m (n+2)^{sq-1} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}^q \end{aligned}$$

para todo m . Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=0}^m (n+2)^{sq-1} E_n(f) \frac{q}{\mathbf{D}} < \varepsilon$, ya que $\|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} < \infty$. Por otra parte, el Lema 2 implica que para cualquier entero m fijado de antemano,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^m (n+2)^{sq-1} \left[E_n(f) \frac{q}{\mathbf{D}} - E_n(f) \frac{q}{\mathbf{K}_t} \right] \right] = 0,$$

con lo que se concluye la demostración. □

2.3. Proximalidad de las funciones racionales.

Teorema 14 (Proximalidad de las funciones racionales). *Sea \mathbf{D} un dominio de Jordan. Entonces $R_m^n(\overline{\mathbf{D}}) = \{ \frac{a}{b} : a \in \Pi_n, b \in \Pi_m, \frac{a}{b} \text{ no posee polos en } \overline{\mathbf{D}} \}$ es un subconjunto proximal de $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ para todo s, q .*

Demostración. La idea básica para la demostración es el Teorema 11, la Proposición 13 y el hecho de que todos los dominios en \mathbb{C} admiten una exhaustión regular [3, p. 400], de modo que podemos suponer que $\mathbf{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{D}_n$, donde $\mathbf{K}_n = \overline{\mathbf{D}_n}$ es compacto, \mathbf{D}_n es Jordan, tiene borde regular de clase al menos $C^{(2)}$ y $\overline{\mathbf{D}_n} \subset \mathbf{D}_{n+1}$ para todo n . Por tanto $\mathbf{H}(\mathbf{D}) \subset C^{(k)}(\overline{\mathbf{D}_n}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})$ para todo $k > s$, y las inclusiones son continuas.

Sea $f \in \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$. Sea $\delta = \inf_{\frac{a}{b} \in R_m^n(\overline{\mathbf{D}})} \|f - \frac{a}{b}\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})}$ y sea $\left\{ \frac{a_k}{b_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión minimizante (i.e., $\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| f - \frac{a_k}{b_k} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})}$) y supongamos sin pérdida de generalidad que $\|b_k\|_{L_{\infty}(\overline{\mathbf{D}})} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\left\| \frac{a_k}{b_k} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} \leq \|f\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} + \left\| f - \frac{a_k}{b_k} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} \leq M$$

para cierta constante $M < \infty$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$\left\| \frac{a_k}{b_k} \right\|_{L_{\infty}(\overline{\mathbf{D}})} \leq \left\| \frac{a_k}{b_k} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} \leq M$$

y, por el teorema de Montel, existe una subsucesión $\left\{ \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \right\}_{s=1}^{\infty}$ que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D a una función holomorfa $g \in \mathbf{H}(\mathbf{D})$.

Por otra parte, tenemos que $\|b_k\|_{L_{\infty}(\overline{\mathbf{D}})} = 1$ para todo k y

$$\|a_k\|_{L_{\infty}(\overline{\mathbf{D}})} \leq \left\| \frac{a_k}{b_k} \right\|_{L_{\infty}(\overline{\mathbf{D}})} \|b_k\|_{L_{\infty}(\overline{\mathbf{D}})} \leq M$$

y $a_k, b_k \in \Pi_{\max\{n,m\}}$, que es finito dimensional. Por tanto podemos suponer que la subsucesión $\left\{ \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \right\}_{s=1}^{\infty}$ es tal que para ciertos polinomios $a \in \Pi_n$ y $b \in \Pi_m$ se tiene que $\lim_{s \rightarrow \infty} \|a_{k_s} - a\|_{L_{\infty}(\overline{\mathbf{D}})} = \lim_{s \rightarrow \infty} \|b_{k_s} - b\|_{L_{\infty}(\overline{\mathbf{D}})} = 0$. Se sigue que $g = \frac{a}{b}$.

Afirmamos que g no tiene polos en $\overline{\mathbf{D}}$. Ciertamente, si $z_0 \in \overline{\mathbf{D}}$ es un polo de g entonces existe algún $z_1 \in \mathbf{D}$ para el que $|g(z_1)| > M + 1$. Por tanto

$$\left| g(z_1) - \frac{a_{k_s}(z_1)}{b_{k_s}(z_1)} \right| \geq \left| g(z_1) \right| - \left| \frac{a_{k_s}(z_1)}{b_{k_s}(z_1)} \right| > 1$$

para todo $s \in \mathbb{N}$, lo que entra en contradicción con $\frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \rightarrow g$ en $\mathbf{H}(\mathbf{D})$.

De la inmersión $\mathbf{H}(\mathbf{D}) \subset \mathbf{A}^k(\overline{\mathbf{D}_n}) \subset \mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})$ se sigue que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} - g \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} = 0.$$

Por tanto

$$\left| \|f - g\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} - \left\| f - \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} \right| \leq \left\| \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} - g \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} \rightarrow 0$$

y la Proposición 13 implica que

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\| f - \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\| f - \frac{a_{k_s}}{b_{k_s}} \right\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}_n})} = \delta. \end{aligned}$$

□

2.4. Resultados sobre convergencia. El objetivo fundamental de esta sección es observar que, aunque la topología de los espacios de Besov es más fuerte que la topología de $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ (la convergencia en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ obviamente conlleva la convergencia en $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ ya que la inclusión $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}}) \hookrightarrow \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ es continua), el estudio de la convergencia en norma para aproximantes clásicos en las nuevas normas $\|\cdot\|_{\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})}$ se sigue en gran medida de los resultados clásicos. (La idea clave es que las aproximaciones polinómicas que son near-best en $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}})$ también lo son en $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$). Fijamos nuestra atención sobre la convergencia en norma de las series de Faber, aunque podríamos haber elegido cualquier otra sucesión de aproximantes polinómicos near-best, para obtener resultados análogos.

Con respecto a la convergencia de las series de Faber, se conocen los siguientes resultados: Lesley, Vinge y Warschawski [13] probaron que la desigualdad

$$(8) \quad \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq [A(\log n)^2 + B]E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$$

es válida sobre dominios de Jordan cuasi-suaves. Kovari y Pommerenke [12] demostraron la desigualdad

$$(9) \quad \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq A(\log n)E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$$

para dominios de Jordan frontera de rotación acotada y la desigualdad

$$(10) \quad \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} \leq An^\alpha E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$$

para cualquier domino de Jordan y ciertas constantes universales A, α . Además, demostraron que se puede tomar $\alpha \in (0.138, 0.5)$.

Dada β una sucesión de números reales positivos (arbitraria), podemos definir los espacios de aproximación generalizados

$$\mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}}) = \{f \in \mathbf{A}(\overline{\mathbf{D}}) : \|f\|_{\mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})} := \|f\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} + \|\{b_n E_n(f)\}_{n=0}^\infty\|_{l_\infty} < \infty\}.$$

Es, además, claro que dichos espacios son Banach (ver [1]). Ahora es fácil demostrar el siguiente

Teorema 15. Sean $\beta = \{b_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}^+$ y $1 < q < \infty$ arbitrariamente elegidos y sea \mathbf{D} un dominio de Jordan acotado. Entonces

(a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k < n} b_k^q)^{\frac{1}{q}} n^\alpha E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0$ y $f \in \mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})$, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})$

(b) Si $C = \partial\mathbf{D}$ es de rotación acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k < n} b_k^q)^{\frac{1}{q}} (\log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0$, $f \in \mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})$, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})$.

(c) Si $C = \partial\mathbf{D}$ satisface una c -condición y $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k < n} b_k^q)^{\frac{1}{q}} (\log n)^2 E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0$, $f \in \mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})$, entonces $\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})$.

Demostración. Sólo probamos la primera afirmación (la segunda y la tercera poseen demostraciones análogas). Tenemos que demostrar que $\|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{\mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})} = \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} + \|\{b_k E_k(f - \mathcal{F}_n(f))_{\overline{\mathbf{D}}}\}_{k=0}^\infty\|_{l_q}$ converge a cero siempre que

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k < n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} (\log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0.$$

Pero $\{c_n = (\sum_{k < n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión no decreciente de números reales, de modo que si se satisface (11) entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})} = 0$.

Definamos $\mathcal{A}_n = \{a_k^{(n)}\}$, y $\mathcal{B}_n = \{b_k^{(n)}\}$, donde

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ E_k(f)_{\overline{\mathbf{D}}} & \text{si } k \geq n, \end{cases}$$

$$b_k^{(n)} = \begin{cases} E_k(f - \mathcal{F}_n(f))_{\overline{\mathbf{D}}} & \text{si } k < n, \\ 0 & \text{si } k \geq n. \end{cases}$$

Entonces $\|\{b_k E_k(f - \mathcal{F}_n(f))_{\overline{\mathbf{D}}}\}_{k=0}^\infty\|_{l_q} = \|\mathcal{A}_n + \mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}_n\|_{l_q} + \|\mathcal{B}_n\|_{l_q}$. Es claro que si $f \in \mathbf{A}_q^\beta(\overline{\mathbf{D}})$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_n\|_{l_q} = 0$. Por otra parte,

$$\|\mathcal{B}_n\|_{l_q} = \left(\sum_{k < n} b_k^q E_n(f - \mathcal{F}_n(f))_{\overline{\mathbf{D}}}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\sum_{k < n} b_k^q \|f - \mathcal{F}_n(f)\|_{L_\infty(\overline{\mathbf{D}})}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k < n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} (3 + \log n) E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}}$$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{B}_n\|_{l_q} = 0$ siempre que se verifique (11). □

Corolario 16. $\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ para todo $f \in \mathbf{H}(\overline{\mathbf{D}})$ y para todo dominio de Jordan \mathbf{D} .

Demostración. Para el espacio de Besov $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$ tenemos $b_k = (k+2)^{s-\frac{1}{q}}$. Por tanto

$$\left(\sum_{k < n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k < n} (k+2)^{sq-1} \right)^{\frac{1}{q}} \sim ((n+1)^{sq})^{\frac{1}{q}} = (n+1)^s$$

y

$$\left(\sum_{k < n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} n^\alpha \sim (n+1)^s E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} n^\alpha.$$

Tómese $\gamma > s + \alpha$. Entonces existe una constante $A = A(\gamma) > 0$ tal que $E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \leq An^\gamma$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$(12) \quad (n+1)^s E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} n^\alpha \leq A \left(\frac{n+1}{n} \right)^s \frac{1}{n^{\gamma-s}}$$

que tiende a cero para $n \rightarrow \infty$. \square

Corolario 17. Sea \mathbf{D} un dominio de Jordan con borde regular de clase al menos $C^{(2)}$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $f \in \mathbf{Lip}(s + \varepsilon, \overline{\mathbf{D}})$, $\mathcal{F}_n(f)$ converge a f en la norma de $\mathbf{A}_q^s(\overline{\mathbf{D}})$.

Demostración. Si $f \in \mathbf{Lip}(s + \varepsilon, \overline{\mathbf{D}})$ y \mathbf{D} es un dominio de Jordan con borde regular de clase al menos $C^{(2)}$, entonces $E_n(f)_{\overline{\mathbf{D}}} \leq An^{s+\varepsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, \mathbf{D} posee un borde de rotación acotada ya que es regular. Por tanto se satisface la fórmula (9). El Corolario se sigue puesto que podemos cambiar el factor n^α por $\log n$ y la constante γ por $s + \varepsilon$ en (12). \square

AGRADECIMIENTOS

El Prof. J. J. Guadalupe facilitó gran parte de la bibliografía utilizada. En particular, los artículos [4], [7], [8], [10], [11], [12], [15] sobre series de Faber (algunos de los cuales son de difícil acceso), y el libro [16]. Este trabajo está dedicado a su memoria.

REFERENCIAS

- [1] J. M. Almira, *Teoría de aproximación en espacios de aproximación*, Tesis Doctoral, Univ. de La Laguna, 1999.
- [2] V. I. Belyi, Conformal Mappings and approximation of analytic functions in domains with quasiconformal boundary, *Mat. Sb. (N.S.)* **102(144)** (1977), 331–361. Traducción al inglés: *Math. USSR-Sb.* **31** (1977), 289–317.
- [3] C. A. Berenstein y R. Gay, *Complex variables*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **125**, 1991.
- [4] J. H. Curtiss, Faber polynomials and the Faber series, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 577–596.
- [5] R. A. DeVore y G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer-Verlag, 1993.
- [6] V. K. Dzjadyck, On the theory of approximation of functions on closed sets of the complex plane (apropos of a certain problem of S. M. Nikolskii), *Ukrainian Math. J.* **24** (1972), 1–13.
- [7] G. Faber, Über polynomialische Entwicklungen, *Math. Ann.* **57** (1903), 398–408.
- [8] G. Faber, Über Tschebysheffche Polynome, *J. Reine Angew. Math.* **150** (1920), 79–106.
- [9] D. Gaier, *Lectures on complex approximation*, Birkhäuser, 1987.
- [10] D. S. Jerison y C. E. Kening, Hardy spaces, A_∞ and singular integrals on chord-arc domains, *Math. Scand.* **50** (1982), 221–247.
- [11] T. Kovary, On the order of polynomial approximation for closed Jordan domains, *J. Approx. Theory* **5** (1972), 362–373.
- [12] T. Kovary y Ch. Pommerenke, On Faber polynomials and Faber expansions, *Math. Zeitschr.* **99** (1967), 193–206.

- [13] F. D. Lesley, V. S. Vinge y S. E. Warschawski, Approximation by Faber polynomials for a class of Jordan domains, *Math. Zeitschr.* **138** (1974), 225–237.
- [14] A. Pietsch, Approximation spaces, *J. Approx. Theory* **32** (1981), 115–134.
- [15] Ch. Pommerenke, Boundary behavior of Conformal Mappings, en *Aspects of contemporary complex analysis* (Proc. NATO Adv. Study Inst., Durham 1979, D. A Brannan y J. G. Clunie, eds.), Academic Press (1980), 313–331.
- [16] Ch. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps*, Springer-Verlag, 1991.
- [17] H. Renelt, *Elliptic systems and quasiconformal mappings*, Pure and Applied Mathematics, John-Wiley and Sons, 1988.
- [18] T. J. Rivlin, Best approximation by polynomials in the complex plane, en *Approximation Theory III* (Proc. Conf., Univ. Texas, Austin 1980, E. W. Cheney, ed.), Academic Press (1980), 75–86.
- [19] P. K. Suetin, *Series of Faber polynomials*, Analytical Methods and Special Functions **1**, Gordon and Breach, 1998.
- [20] P. M. Tamrazov, A solid inverse problem of polynomial approximation of functions on a regular compactum, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.* **37** (1973), 148–164. Traducción al inglés: *Math. USSR-Izv.* **7** (1973), 145–162.
- [21] A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Dover, 1994.
- [22] M. Zinsmeister, *Domaines de Lavrentiev*, Publications Mathématiques d’Orsay **85-3**, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, E.U.P. DE LINARES, UNIVERSIDAD DE JAÉN, C/ ALFONSO X EL SABIO 28, 23700 LINARES (JAÉN), SPAIN

Correo electrónico: jmalmira@ujaen.es, ndeltoro@ujaen.es

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, C/ ASTROFÍSICO FCO. SÁNCHEZ S/N, 38206 LA LAGUNA (TENERIFE), SPAIN

Correo electrónico: fcoperez@ull.es

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE EL SEMIGRUPO DE LAGUERRE

JOSÉ LUIS TORREA

ABSTRACT. We study boundedness properties of some classical operators in Harmonic Analysis in the context of the multidimensional Laguerre semigroup. We prove that Riesz transforms, and Littlewood-Paley g -functions are strong type p - p for $p > 1$ and weak type 1-1. We also obtain bounds independent of the dimension.

Durante el curso 1973–74, el profesor de problemas de Análisis Matemático II, de 2.º curso de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Zaragoza, fue Chicho. Yo era uno de los estudiantes de ese curso. Sin duda, una de las razones por la que mi especialización en Matemáticas acabó siendo Análisis, fue lo interesantes que eran aquellas clases.

Pero si en algún modo le debo el haberme transmitido el gusto por el Análisis, sería faltar a la verdad si no dijese que me transmitió su afán de, en sus propias palabras, «conectar el estudio de diversos aspectos de la teoría de Polinomios Ortogonales con problemas modernos desde el punto de vista del Análisis de Fourier», ver [Gd]. Según él decía, desde principios de los años ochenta, José Luis Rubio de Francia le empujaba en esta dirección y empezó a profundizar en el tema a partir del año 85. Esta idea, que Chicho siempre atribuyó a José Luis, pero que desde luego él convirtió en su línea fundamental de investigación, motivó que uno de los cursos del Seminario Avanzado en Teoría de aproximación celebrado en Laredo en Septiembre de 1992, fuera el que, impartido por el profesor W. Urbina, llevaba por título «Elementos de Análisis Armónico Gaussiano». Precisamente por lo mucho que yo le había oído hablar a Chicho de esta línea, decidí asistir a dicho curso. Fueron unos días inolvidables desde todos los puntos de vista. Los paseos por el puerto de Laredo hablando con Chicho sobre aquellos operadores que aparecían relacionados con los polinomios de Hermite son unos recuerdos muy agradables para mí. De hecho la esencia de el curso del Profesor Urbina era justamente la idea de José Luis y Chicho, desarrollar una maquinaria de Análisis Armónico sobre el operador diferencial de segundo orden respecto del cual los polinomios de Hermite son autofunciones. Chicho me contagió su entusiasmo y comencé a interesarme por aquellos problemas.

Desde entonces he dedicado una gran parte de mi actividad a seguir esa línea de investigación. Creo que un buen homenaje a Chicho es exponer como dicha línea, junto con ideas y fórmulas clásicas de polinomios ortogonales, pueden utilizarse para obtener resultados nuevos en el caso del operador diferencial de Laguerre. Los

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42B15,42B20,42B25,42C10.

Key words and phrases. Laguerre semigroup, singular integrals.

resultados que presento aquí son fruto de un trabajo conjunto con C. Gutiérrez y A. Incognito, ver [GIT].

1. DESCRIPCIÓN DE LOS OPERADORES

La referencia básica en esta sección es el tratado clásico de G. Szegő, [SZ].

Dado $\alpha > -1$, los polinomios de Laguerre de tipo α en una dimensión vienen dados por las fórmulas de Rodrigues

$$L_k^\alpha(y) = \frac{1}{k!} e^y y^{-\alpha} \frac{d^k}{dy^k} (e^{-y} y^{k+\alpha}).$$

Cada L_k^α es un polinomio de grado k y la familia de polinomios $\{L_k^\alpha\}_k$ es un sistema ortogonal completo en $L^2((0, \infty), \mu_\alpha(y) dy)$, donde $\mu_\alpha(y) = y^\alpha e^{-y}$, a lo largo de toda esta sección la referencia básica es el tratado de Szegő, [SZ]. El operador diferencial de Laguerre de tipo α es

$$(1.1) \quad \mathcal{L}_\alpha = y \frac{d^2}{dy^2} + (\alpha + 1 - y) \frac{d}{dy}.$$

Los polinomios de Laguerre verifican las siguientes propiedades

$$(1.2) \quad \sum_{k=0}^N L_k^\alpha(y) = L_N^{\alpha+1}(y), \quad \frac{d}{dy} L_k^\alpha(y) = -L_{k-1}^{\alpha+1}(y), \quad \mathcal{L}_\alpha L_k^\alpha(y) = -k L_k^\alpha(y).$$

Dados multiíndices α y k , con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i > -1$, y $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_i \in \mathbb{N}$, los polinomios multidimensionales de Laguerre de tipo α se definen como

$$L_k^\alpha(y) = L_{k_1}^{\alpha_1}(y_1) \cdots L_{k_d}^{\alpha_d}(y_d), \quad y = (y_1, \dots, y_d) \in (0, \infty)^d$$

con $L_{k_i}^{\alpha_i}(\cdot)$ polinomio de Laguerre unidimensional de tipo α_i . El operador diferencial de Laguerre de tipo α en dimensión d es

$$(1.3) \quad \mathcal{L}_\alpha = \sum_{i=1}^d y_i \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + (\alpha + 1 - y_i) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

El operador \mathcal{L}_α es autoadjunto en $L^2((0, \infty)^d, \mu_\alpha(y) dy)$ donde

$$\mu_\alpha(y) = (y_1^{\alpha_1}, \dots, y_d^{\alpha_d}) e^{-(y_1 + \dots + y_d)}.$$

Además se verifica

$$(1.4) \quad \mathcal{L}_\alpha L_k^\alpha(y) = -|k| L_k^\alpha(y),$$

con $|k| = k_1 + \dots + k_d$.

Recordemos ahora la definición de los polinomios de Hermite. En una dimensión se definen mediante las fórmulas de Rodrigues como

$$H_k(x) = e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}.$$

Dado un multiíndice $k = (k_1, \dots, k_n)$ con k_i entero no negativo, y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, el polinomio multidimensional de Hermite de grado k se define como

$$H_k(x) = H_{k_1}(x_1) \cdots H_{k_n}(x_n).$$

Estos polinomios forman un sistema ortogonal completo en $L^2(\mathbb{R}^n, \gamma_n(x) dx)$, siendo $\gamma_n(x) = \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|x|^2}$. Los polinomios de Hermite son las autofunciones del operador diferencial de segundo orden L_γ definido como

$$(1.5) \quad L_\gamma = \frac{1}{2} \Delta - x \cdot \nabla = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

se verifica

$$(1.6) \quad L_\gamma H_k(x) = -|k| H_k(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$k = (k_1, \dots, k_n)$ con k_i enteros no negativos.

Existe una relación estrecha entre las familias de polinomios de Hermite y Laguerre. De hecho en una dimensión se verifica, ver [SZ], fórmula (5.6.1),

$$(1.7) \quad L_k^{-1/2}(x^2) = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} H_{2k}(x).$$

La prueba, ver [SZ], utiliza la ortogonalidad de los polinomios de Hermite y Laguerre. Esta prueba puede adaptarse a una situación más general y útil para nuestros propósitos y así puede probarse el siguiente lema, ver [GIT].

Lema 1.8. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha > -1$ tales que $\alpha = \frac{n}{2} - 1$. Un polinomio de Laguerre L_k^α de tipo α definido en $(0, \infty)$ verifica

$$L_k^\alpha(|x|^2) = \sum_{|r|=k} a_r H_{2r}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r = (r_1, \dots, r_n).$$

Si se pretende hacer un estudio de la ecuación $L_\gamma u = f$ o de la ecuación $\mathcal{L}_\alpha u = f$ que analice acotaciones «a priori», convergencia al dato inicial de ecuaciones del tipo $u_t = Lu$ e incluso un cálculo funcional de los operadores diferenciales, es claro que se deben considerar algunos de los operadores que aparecen en el Análisis Armónico clásico como operadores maximales, transformadas de Riesz, funciones cuadrado de tipo Littlewood-Paley y multiplicadores. La primera observación es la necesidad de una noción de gradiente asociado a los operadores diferenciales \mathcal{L}_α y L_γ definidos más arriba. En este contexto el gradiente debe satisfacer dos propiedades, ver [St1],

- (i) Si $f \geq 0$ y $Lf = 0$ entonces $L(f^p) = p(p-1)f^{p-2}|\nabla f|^2$, para $1 \leq p < \infty$.
- (ii) Existe un operador, div , tal que si denotamos por μ a la medida que hace autoadjunto el operador L , entonces

$$\int_{(0, \infty)^d} \text{div } F(z) f(z) d\mu(z) = - \int_{(0, \infty)^d} F(z) \nabla f(z) d\mu(z) \quad \text{y} \quad L = \text{div} \circ \nabla,$$

para funciones f y F suficientemente buenas.

Es muy fácil comprobar que en el caso de los polinomios de Hermite el vector gradiente debe de ser

$$\nabla_\gamma f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

mientras que

$$\operatorname{div}_\gamma F(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) - \sqrt{2} x_i F_i(x) \right).$$

Análogamente en el caso de Laguerre puede verificarse que

$$\nabla_\alpha f(x) = \left(\sqrt{y_1} \frac{\partial f}{\partial y_1}(y), \dots, \sqrt{y_d} \frac{\partial f}{\partial y_d}(y) \right)$$

y

$$\operatorname{div}_\alpha F(y) = \sum_{i=1}^d \sqrt{y_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}(y) + \left(\frac{\alpha_i + 1/2}{y_i} - 1 \right) F_i(y) \right).$$

Motivados por estas relaciones introducimos la siguiente notación

$$(1.9) \quad \delta_i f(x) = \sqrt{y_i} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y), \quad i = 1, \dots, d,$$

es decir, en dimensión d tenemos $\nabla_\alpha = (\delta_1, \dots, \delta_d)$.

Estamos ya en condiciones de definir los operadores utilizando ideas de teoría espectral, ver [St1]. Si T_t es un semigrupo de difusión simétrico con generador infinitesimal el operador diferencial de segundo orden $-L$, entonces el semigrupo T_t puede expresarse como $T_t = e^{-tL}$. El primer operador que aparece de manera natural es el

Operador maximal del semigrupo, es decir, $T^* f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$. Las fórmulas

$$(1.10) \quad e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{t^2}{4u}} du, \quad y \quad s^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-ts} t^a \frac{dt}{t},$$

permiten definir el semigrupo subordinado de Poisson, las potencias del operador diferencial L y las transformadas de Riesz como sigue, ver [St1].

Operador maximal del semigrupo de Poisson subordinado.

$P^* f(x) = \sup_{t>0} |P_t f(x)|$, donde P_t está definido mediante la fórmula de subordinación que aparece en (1.10) es decir

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T_{t^2/4u} f(x) du.$$

Potenciales de Riesz. Nuevamente utilizando las fórmulas en (1.10) podemos definir para $a > 0$, $L^{-a} f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty s^{a-1} T_s f(x) ds$.

Transformadas de Riesz. Puede definirse el **vector transformada de Riesz** como

$$\mathcal{R}f(x) = \nabla(L^{-1/2})$$

donde el operador ∇ es el operador gradiente asociado al operador diferencial L y satisfaciendo las propiedades (i) y (ii) explicadas más arriba. Cada una de las componentes del vector anterior se llamará **transformada de Riesz**.

Por último pueden definirse las **funciones cuadrado de tipo Littlewood-Paley** como

$$(1.11) \quad g_0(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}, \quad g_1(f)(x) = \left(\int_0^\infty |t \nabla P_t f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

Nosotros estamos interesados en los operadores anteriormente definidos en los casos $L = -L_\gamma$ y $L = -\mathcal{L}_\alpha$.

En el caso L_γ el semigrupo T_t es el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck O_t dado por

$$O_t f(x) = (\pi(1 - e^{-2t}))^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|e^{-t}x - z|^2}{1 - e^{-2t}}} f(z) dz.$$

En este caso los operadores descritos arriba han sido estudiados en los últimos 20 años por diversos autores. La acotación en $L^p(d\gamma)$, del operador O^* se encuentra en [M], [St1] y [Sj], resultados para las transformadas de Riesz pueden consultarse en [M], [Gu], [Me], [P], [FGS], [Gt], [U]. Las funciones g de Littlewood-Paley fueron estudiadas en [PS] y [Gt]. Observemos que debido al conocimiento explícito del núcleo de O_t , los núcleos de los operadores anteriores pueden determinarse y de hecho su conocimiento es una pieza esencial en las demostraciones analíticas.

El semigrupo de Laguerre M_t^α es también conocido y puede escribirse como

$$M_t^\alpha f(y) = \int_{(0, \infty)^d} \prod_{i=1}^d \frac{(-e^{-t}x_i z_i)^{-\alpha_i/2}}{1 - e^{-t}} \times \exp\left(\frac{-e^{-t}(y_i + z_i)}{1 - e^{-t}}\right) J_{\alpha_i}\left(\frac{2\sqrt{-e^{-t}x_i z_i}}{1 - e^{-t}}\right) f(z) z^\alpha e^{-z} dz,$$

donde J_{α_i} denota la función de Bessel habitual, ver [SZ]. La complejidad de esta expresión hace que los resultados en el caso de Laguerre sean mucho menos completos que en el caso de Hermite, sin embargo la fórmula clásica (1.7) puede utilizarse de manera simple y sistemática para la obtención de resultados en este caso supuestos conocidos algunos resultados para el caso de Hermite. En el rango $1 < p < \infty$, la acotación de $L^p((0, \infty)^d, \mu_\alpha dx)$ en sí mismo del operador maximal del semigrupo M_t se deduce de un resultado general de E. Stein, ver [St1]. En una dimensión la acotación de tipo débil (1, 1) se debe a Muckenhoupt [M], y para dimensión superior (finita) el resultado se debe a U. Dinger, ver [D].

2. LEMAS DE PASO

Como hemos dicho en la sección anterior el propósito de esta pequeña nota es utilizar la fórmula clásica (1.7) para obtener teoremas de paso de resultados sobre los operadores definidos en el caso de Hermite a resultados sobre los operadores definidos en el caso de Laguerre. De hecho este método es utilizado en parte en el trabajo [D] sobre el operador maximal. Nosotros creemos que la teoría espectral permite una sistematización del método.

Los dos sencillos lemas siguientes constituyen la parte técnica que permitirá el paso. Sea (n_1, \dots, n_d) un multiíndice con n_i enteros positivos. Definimos las variables $x^i = (x_1^i, \dots, x_{n_i}^i)$, $i = 1, \dots, d$, y la transformación cuadrática

$$(2.12) \quad \phi(x^1, \dots, x^d) = (|x^1|^2, \dots, |x^d|^2).$$

Una sencilla utilización del teorema de Fubini junto con integración en coordenadas polares prueba el siguiente Lema, ver [GIT].

Lema 2.13. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$ y $n_i \in \mathbb{N}$. Sea $f(y_1, \dots, y_d)$ una función definida para $y = (y_1, \dots, y_d) \in (0, \infty)^d$. La fórmula*

$$\begin{aligned} & \left(2^{-d} \prod_{i=1}^d \text{área}(S_{n_i-1}) \right) \int_{(0, \infty)^d} f(y) \mu_\alpha(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{|n|}} f(\phi(x^1, \dots, x^d)) e^{-(|x^1|^2 + \dots + |x^d|^2)} dx^1 \dots dx^d, \quad |n| = \sum_{i=1}^d n_i, \end{aligned}$$

es válida.

Utilizando este Lema podemos enunciar y demostrar el siguiente lema que pone de manifiesto como transferir resultados conocidos con respecto a la medida gaussiana a resultados con respecto a las medidas μ_α para algunos α 's.

Lema 2.14. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$ y $n_i \in \mathbb{N}$. Supongamos que T y T' son operadores lineales definidos sobre polinomios y tales que*

$$(Tf)(\phi(x)) = T'(f \circ \phi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^{|n|}.$$

Sean B_1 y B_2 espacios de Banach.

(i) Si $1 < p < \infty$ y T' es acotado de

$$L_{B_1}^p(\mathbb{R}^{|n|}, e^{-(|x^1|^2 + \dots + |x^d|^2)}) \quad \text{en} \quad L_{B_2}^p(\mathbb{R}^{|n|}, e^{-(|x^1|^2 + \dots + |x^d|^2)})$$

entonces T es acotado de $L_{B_1}^p((0, \infty)^d, \mu_\alpha)$ en $L_{B_2}^p((0, \infty)^d, \mu_\alpha)$.

(ii) Si T' es acotado de

$$L_{B_1}^1(\mathbb{R}^{|n|}, e^{-(|x^1|^2 + \dots + |x^d|^2)}) \quad \text{en} \quad L_{B_2}^{1, \infty}(\mathbb{R}^{|n|}, e^{-(|x^1|^2 + \dots + |x^d|^2)})$$

entonces T es acotado de $L_{B_1}^1((0, \infty)^d, \mu_\alpha)$ en $L_{B_2}^{1, \infty}((0, \infty)^d, \mu_\alpha)$.

Además, en ambos casos la norma como operador de T está acotada por la norma como operador de T' .

Demostración. Sólo demostraremos aquí el punto (ii). Sea

$$E_\lambda = \{y \in (0, \infty)^d : \|Tf(y)\|_{B_2} > \lambda\}.$$

Utilizando el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(E_\lambda) &= \int_{(0, \infty)^d} \chi_{E_\lambda}(y) \mu_\alpha(y) dy \\ &= \left(2^{-d} \prod_{i=1}^d \text{área}(S_{n_i-1}) \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^{|n|}} \chi_{E_\lambda}(\phi(x^1, \dots, x^d)) e^{-(|x^1|^2 + \dots + |x^d|^2)} dx^1 \dots dx^d \end{aligned}$$

$$= \left(2^{-d} \prod_{i=1}^d \text{área}(S_{n_i-1}) \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^{|n|}} \chi_{F_\lambda}(x^1, \dots, x^d) e^{-(|x^1|^2 + \dots + |x^d|^2)} dx^1 \dots dx^d$$

donde $F_\lambda = \{(x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^{|n|} : \|T'(f \circ \phi)(x^1, \dots, x^d)\|_{B_2} > \lambda\}$. Utilizando que T' es de tipo débil $(1, 1)$ y nuevamente el lema anterior tenemos

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(E_\lambda) &= \left(2^{-d} \prod_{i=1}^d \text{área}(S_{n_i-1}) \right)^{-1} \gamma_{|n|}(F_\lambda) \\ &\leq \left(2^{-d} \prod_{i=1}^d \text{área}(S_{n_i-1}) \right)^{-1} \frac{\|T'\|}{\lambda} \|f(\phi(x^1, \dots, x^d))\|_{L^1_{B_1}(\mathbb{R}^{|n|}, \gamma_{|n|})} \\ &= \frac{\|T'\|}{\lambda} \left(2^{-d} \prod_{i=1}^d \text{área}(S_{n_i-1}) \right)^{-1} \left(2^{-d} \prod_{i=1}^d \text{área}(S_{n_i-1}) \right) \|f(\cdot)\|_{L^1_{B_1}(\mathbb{R}^{|n|}, \mu_\alpha)} \\ &= \frac{\|T'\|}{\lambda} \|f(\cdot)\|_{L^1_{B_1}(\mathbb{R}^{|n|}, \mu_\alpha)}. \end{aligned}$$

□

3. RESULTADOS FUNDAMENTALES

Proposición 3.15. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$ y $n_i \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\{O_t\}$ (respectivamente $\{M_t^\alpha\}$) el semigrupo asociado al operador $L_{\gamma_{|n|}}$ (respectivamente \mathcal{L}_α). Sea $f(y_1, \dots, y_d)$ un polinomio definido para $y = (y_1, \dots, y_d) \in (0, \infty)^d$. Entonces*

$$M_t^\alpha f \circ \phi(x) = O_{t/2}(f \circ \phi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^{|n|}, \quad n = (n_1, \dots, n_d).$$

Demostración. Sea L_k^α un polinomio de Laguerre de tipo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, con $k = (k_1, \dots, k_d)$. Dado el polinomio de Laguerre unidimensional $L_{k_i}^{\alpha_i}(z)$, consideremos $L_{k_i}^{\alpha_i}(|x_i|^2)$. Utilizando (1.4), (1.6) y (1.7), tenemos

$$\begin{aligned} (M_t^\alpha L_k^\alpha)(\phi(x^1, \dots, x^d)) &= e^{-|k|t} L_k^\alpha(\phi(x^1, \dots, x^d)) = \prod_{i=1}^d e^{-k_i t} L_{k_i}^{\alpha_i}(|x^i|^2) \\ &= \prod_{i=1}^d e^{-k_i t} \left(\sum_{|r|=k_i} a_r^i H_{2r}(x^i) \right) = \prod_{i=1}^d \left(\sum_{|r|=k_i} a_r^i e^{-k_i t} H_{2r}(x_i) \right) \\ &= \prod_{i=1}^d \left(\sum_{|r|=k_i} a_r^i (O_{t/2} H_{2r})(x^i) \right) = \prod_{i=1}^d O_{t/2} \left(\sum_{|r|=k_i} a_r^i H_{2r} \right)(x^i) \\ &= \prod_{i=1}^d O_{t/2}(L_{k_i}^{\alpha_i} \circ \phi_i)(x^i) = O_{t/2} \left(\prod_{i=1}^d L_{k_i}^{\alpha_i} \circ \phi \right)(x) \\ &= O_{t/2}(L_k^\alpha \circ \phi)(x). \end{aligned}$$

Aquí hemos denotado $\phi_i(x^i) = |x^i|^2$ y por $H_\beta(x^i)$ un polinomio de Hermite multidimensional de grado β en las variables $x_1^i, \dots, x_{n_i}^i$. □

Denotemos por P_t^α , \mathcal{R}^α , g_0^α y g_1^α a los semigrupos de Poisson, vector transformada de Riesz y funciones g asociados al operador \mathcal{L}_α , y por P_t^γ , \mathcal{R}^γ , g_0^γ y g_1^γ a los asociados a L_γ . El siguiente resultado es una fácil consecuencia de la Proposición 3.15

Proposición 3.16. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$, $n_i \in \mathbb{N}$. Sea $f(y_1, \dots, y_d)$, $(y_1, \dots, y_d) \in (0, \infty)^d$, un polinomio. Entonces, para $x \in \mathbb{R}^n$, $n = (n_1, \dots, n_d)$, se tiene*

$$(i) (P_t^\alpha f)(\phi(x)) = P_{t/\sqrt{2}}^\gamma(f \circ \phi)(x).$$

(ii) Para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\partial_u^m P_u^\alpha f(\phi(x))|_{u=t} = \frac{1}{2^{m/2}} \partial_u^m P_u^\gamma(f \circ \phi)(x)|_{u=t/\sqrt{2}}.$$

(iii) Dado $a > 0$, se verifica $(-\mathcal{L}_\alpha)^{-a} f(\phi(x)) = 2^a (-L)^{-a} (f \circ \phi)(x)$.

(iv) $\|\mathcal{R}_\alpha f(\phi(x))\|_{\ell_2^d} = 2^{-1/2} \|\mathcal{R}_\gamma(f \circ \phi)(x)\|_{\ell_2^{n_1}}$.

(v) $g_i^\alpha f(\phi(x)) = 2^{-1/2} g_i^\gamma(f \circ \phi)(x)$, $i = 0, 1$.

Finalmente enunciamos el teorema consecuencia de la proposición anterior.

Teorema 3.17. *Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ con $\alpha_i = \frac{n_i}{2} - 1$, $n_i \in \mathbb{N}$. Las transformadas de Riesz \mathcal{L}_α , y las funciones de Littlewood-Paley g_i^α , $i = 0, 1$, están acotadas de $L^p((0, \infty)^d, \mu_\alpha(x) dx)$, $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1, 1)$. Además, si $1 < p < \infty$ las constantes de acotación son independientes de la dimensión d .*

Demostración. En el caso de Hermite, las transformadas de Riesz y la función g de Littlewood-Paley son acotadas en $L^p(\gamma(x) dx)$ con constantes independientes de la dimensión, ver [Gu], [Me], [P], [Gt]. El tipo débil $(1, 1)$ de las transformadas de Riesz en el caso de Hermite puede verse en [FGS], el resultado correspondiente para las funciones g se encuentra en [Sc]. La prueba del teorema se sigue entonces de la Proposición anterior y el Lemma 2.14. \square

REFERENCIAS

- [D] U. Dinger, Weak type $(1, 1)$ estimates of the maximal functional for the Laguerre semigroup in finite dimensions, *Rev. Mat. Iberoamericana* **8** (1992), 93–120.
- [FGS] E. Fabes, C. Gutiérrez y R. Scotto, Weak-type estimates for the Riesz transforms associated with the gaussian measure, *Rev. Mat. Iberoamericana* **10** (1994), 229–281.
- [FSU] L. Forzani, R. Scotto y W. Urbina, The area function, the g^k functions and the Riesz potentials for the gaussian measure γ , prepublicación.
- [Gd] J. J. Guadalupe, *Memoria de investigación*, Universidad de La Rioja, enero 1994.
- [Gu] R. Gundy, *Some topics in probability and analysis*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [Gt] C. E. Gutiérrez, On the Riesz transforms for Gaussian measures, *J. Funct. Anal.* **120** (1994), 107–134.
- [GIT] C. E. Gutiérrez, A. Incognito y J. L. Torrea, Riesz transforms, g -functions, and multipliers for the Laguerre semigroup, *Houston J. Math.* (por aparecer).
- [GST] C. E. Gutiérrez, C. Segovia y J. L. Torrea, On higher Riesz transforms for Gaussian measures, *Journal Fourier Anal. Appl.* **6** (1996), 583–596.
- [HVT] E. Harboure, J. L. Torrea y B. Viviani, On the search for weighted inequalities for operators related to the Ornstein-Uhlenbeck semigroup, *Math. Ann.* **318** (2000), 341–353.
- [Me] P. A. Meyer, Transformations de Riesz pour le lois Gaussiennes, *Lecture Notes in Math.* **1059**, Springer, Berlín (1984), 179–193.

- [M] B. Muckenhoupt, Poisson Integrals for Hermite and Laguerre expansions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969), 231–242.
- [PS] S. Pérez y F. Soria, Operators associated with the Ornstein-Uhlenbeck semigroup, *J. London Math. Soc.* **61** (2000), 857–871.
- [P] G. Pisier, Riesz transforms: a simpler analytic proof of P.-A. Meyer's inequality, *Lecture Notes in Math.* **1321**, Springer, Berlín (1988), 485–501.
- [Sc] R. Scotto, *Weak type estimates for singular integrals operators associated with the Ornstein-Uhlenbeck process*, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1993.
- [Sj] P. Sjögren, On the maximal function for the Mehler kernel, en *Harmonic Analysis* (Cortona, 1982), *Lecture Notes in Math.* **992**, Springer, Berlín (1983), 73–82.
- [St1] E. M. Stein, Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley theory, *Annals of Math. Studies* **63**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [SZ] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., 1939.
- [U] W. Urbina, On singular integrals with respect to the Gaussian measure, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **17** (1990), 531–567.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, 28049 MADRID, SPAIN

Correo electrónico: joseluis.torrea@uam.es

CORTADURAS PARA ℓ^∞

LUIS ESPAÑOL Y M. CARMEN MÍNGUEZ

Dedicado a Chicho

ABSTRACT. When we use the method of cuts to define real numbers we identify a subset of $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ by means of some formulas of the logic. This process also works with intuitionistic logic, so that it can be used in Grothendieck toposes. In this paper we show the bornological topos, which is a subtopos of the category of sets with an action of the monoid of all sequences of natural numbers. This topos is a suitable context to work with spaces of bounded sequences. We prove that ℓ^∞ is the object of Dedekind reals in the bornological topos.

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de este trabajo, \mathbb{M} será el monoide de todas las sucesiones de números naturales, es decir, de todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, con la operación de composición. Los ideales de \mathbb{M} son los subconjuntos $I \subseteq \mathbb{M}$ tales que $g \circ f \in I$ siempre que $g \in I$ y $f \in \mathbb{M}$. Denotaremos con la letra Θ el conjunto de los ideales de \mathbb{M} . Reservamos la letra C para denotar el ideal de las constantes, con la biyección $C \cong \mathbb{N}$ que asocia a $n \in \mathbb{N}$ la función $c_n \in \mathbb{M}$ constante en dicho punto.

Todo espacio E de sucesiones acotadas admite una acción de \mathbb{M} por composición,

$$E \times \mathbb{M} \rightarrow E, \quad (x, f) \mapsto x \circ f.$$

Por ello es adecuado elegir un contexto de conjuntos con una acción de este tipo para estudiar el espacio ℓ^∞ de las sucesiones reales acotadas. Llamaremos *m-conjuntos* a los conjuntos E dotados de una acción a derecha de \mathbb{M} , que denotaremos genéricamente $x \circ f$, cumpliendo las condiciones

$$x \circ id = x, \quad x \circ (g \circ f) = (x \circ g) \circ f.$$

Cada ideal de \mathbb{M} , entre ellos el propio monoide, es un m-conjunto. A partir de un ideal I y de un elemento $f \in \mathbb{M}$ se obtiene un nuevo ideal

$$\langle f \in I \rangle = \{g \in \mathbb{M}; f \circ g \in I\}$$

y es fácil comprobar que esta operación es una acción a derecha de \mathbb{M} sobre Θ (en este caso no usaremos la notación genérica $I \circ f$ porque puede inducir a confusión). Siempre que consideraremos Θ como un m-conjunto será con la acción anterior.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 18B25, 18F20, 46A17.

Key words and phrases. Topos, m-sets, real numbers, bounded sequences.

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda a la investigación API00/A25 de la Universidad de La Rioja.

Las *m-aplicaciones* son las aplicaciones $H : E \rightarrow E'$ entre *m-conjuntos* que conservan la acción, es decir, que verifican

$$H(x \circ f) = H(x) \circ f.$$

De este modo se tiene una categoría \mathcal{M} que contiene de modo natural a la categoría \mathcal{S} de los conjuntos, pues basta verlos como *m-conjuntos* triviales con la acción dada por la proyección $X \times \mathbb{M} \rightarrow X$. La categoría \mathcal{M} es un topos de Grothendieck (en lo sucesivo omitiremos el nombre del matemático francés para abreviar), lo que significa que tiene propiedades muy próximas a las de la categoría \mathcal{S} y que en ella se interpreta la lógica intuicionista. Reduciremos la categoría \mathcal{M} eliminando algunos *m-conjuntos*, entre ellos los triviales, pero manteniendo los espacios de sucesiones acotadas. Para ello exigiremos una propiedad de finitud que tiene ℓ^∞ , en general los conjuntos de sucesiones acotadas, obteniendo así unos *m-conjuntos* particulares que llamaremos *b-conjuntos* y la correspondiente subcategoría plena \mathcal{B} , que será el topos *bornológico*. El estudio de este topos fue propuesto por Lawvere, en una conferencia no publicada impartida en Bogotá en 1983.

Los elementos *constantes* de un *m-conjunto* E son los que quedan invariantes por la acción de todos los elementos de \mathbb{M} y forman un subconjunto de E que denotaremos $\Gamma(E)$. Por ejemplo, $\Gamma(X) = X$ si X es un conjunto (*m-conjunto* trivial), $\Gamma(\mathbb{M}) = C$, $\Gamma(X^{\mathbb{N}}) \cong X$, $\Gamma(\ell^\infty) \cong \mathbb{R}$, y $\Gamma(\Theta) = \{\emptyset, \mathbb{M}\}$. Puesto que las *m-aplicaciones* conservan constantes, si consideramos el *m-conjunto* trivial $1 = \{0\}$, que evidentemente es final, dar una *m-aplicación* $1 \rightarrow E$ equivale a dar un elemento constante de E . Por otro lado, los elementos de E se corresponden biyectivamente con las *m-aplicaciones* $\mathbb{M} \rightarrow E$ tomando la imagen de la identidad. Vemos pues que elementos generales y constantes se corresponden biyectivamente en \mathcal{S} pero no en \mathcal{M} , porque el papel del conjunto final 1 en \mathcal{S} se desdobra entre 1 y \mathbb{M} en \mathcal{M} .

Para construir los conjuntos numéricos se parte del conjunto \mathbb{N} de los números naturales, que podemos definir siguiendo a Lawvere (ver cualquiera de las referencias básicas sobre topos: [1], [4] o [6]) mediante la condición de tener un elemento distinguido (*cero*), $0 \in \mathbb{N}$, y una aplicación distinguida (*sucesor*), $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, de modo que se cumple la siguiente propiedad universal: para cada conjunto X con un elemento $x_0 \in X$ y una aplicación $h : X \rightarrow X$ distinguidos, existe una única aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f \circ \sigma = h \circ f$. Para que la definición se exprese plenamente en el lenguaje de las categorías basta ver los elementos $x \in X$ como aplicaciones $1 \rightarrow X$. Por tanto, en una categoría con un objeto final 1 , la definición del objeto de los números naturales es una copia de la dada en \mathcal{S} .

Se pasa de \mathbb{N} a \mathbb{Z} haciendo un conjunto cociente en el producto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y se obtiene \mathbb{Q} mediante otro cociente en el producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, donde \mathbb{Z}^* es \mathbb{Z} sin el cero. Cada uno de estos conjuntos numéricos tiene operaciones de suma y producto con las propiedades habituales. Este proceso utiliza límites y colímites finitos, así que puede repetirse en las categorías que tengan un objeto de números naturales y admitan este tipo de construcciones universales. Más compleja es la ampliación de \mathbb{Q} a \mathbb{R} mediante las cortaduras, que expondremos en la versión de Tierney-Joyal, una de las varias disponibles [2] para ser interpretadas en los topos. En \mathcal{M} las construcciones de estos objetos numéricos dan siempre los correspondientes conjuntos clásicos con la acción

trivial, pero en \mathcal{B} tendremos que hacer construcciones específicas, que darán como resultado que ℓ^∞ es el objeto de los números reales (según Dedekind) en dicho topos.

Este trabajo es deudor de la tesis doctoral de Lambán [5], donde se prueba el mismo resultado utilizando los axiomas de cortadura que aparecen en [4]. También es distinta la presentación que hacemos del tema, que está influenciada por el artículo [3], que es una reelaboración de un fragmento de [5]. Nuestro interés no es deducir las propiedades del topos bornológico descendiendo desde la teoría general de topos, sino que iremos exhibiendo directamente aquellas propiedades de \mathcal{B} , análogas a las de los conjuntos, que vayamos necesitando. Indicaremos sólo algunas demostraciones que vayan haciendo convincente la exposición, que no será formalmente completa, lo que se refleja en el método expositivo utilizado. En última instancia, pretendemos difundir los métodos de la teoría de topos y su aplicación a cuestiones matemáticas entre lectores no familiarizados con esta teoría general abstracta.

2. SUCESIONES ACOTADAS Y B-CONJUNTOS

Es claro que ℓ^∞ es un m-conjunto porque todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado. La otra propiedad básica de los acotados es que la unión finita de acotados es de nuevo un acotado, luego todo subconjunto de una unión finita de acotados es acotado. En términos de sucesiones acotadas, dado un número finito s_1, \dots, s_r de ellas, si tomamos una sucesión s cuya imagen esté contenida en la unión de las imágenes de las s_i , resulta que la sucesión s también es acotada. Vamos a formular esta propiedad haciendo intervenir m-conjuntos y ello nos llevará a la noción de b-conjunto.

2.1. De ℓ^∞ a los b-conjuntos. Cada sucesión $s : \mathbb{N} \rightarrow X$ determina una m-aplicación $H : \mathbb{M} \rightarrow X^{\mathbb{N}}$ dada por $H(id) = s$, que verifica $H(c_n) = c_{s(n)}$, de modo que la sucesión se recupera a partir de H ya sea de un golpe, usando la identidad, o bien término a término por medio de las constantes. En general, si I es un ideal de \mathbb{M} que contiene a C , una m-aplicación $H : I \rightarrow X^{\mathbb{N}}$ determina por medio de las constantes una única sucesión s tal que $H(f) = s \circ f$ para cada $f \in I$.

Volviendo a la propiedad relativa a un número finito de sucesiones reales acotadas, si funciones $g_i \in \mathbb{M}$, $1 \leq i \leq r$, son tales que sus imágenes forman una partición de \mathbb{N} , entonces el ideal $I = (g_1, \dots, g_r)$ contiene a las constantes y la m-aplicación $H : I \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida por $H(g_i) = s_i$, con las sucesiones s_i acotadas dadas, determina una única sucesión s tal que $s \circ g_i = s_i$ para cada índice; luego la sucesión s también es acotada. Si las g_i forman un cubrimiento pero no una partición de \mathbb{N} , lo anterior sigue siendo válido pero las sucesiones s_i no pueden ser arbitrarias, sino que ha de ser $s_i \circ f = s_j \circ f$ siempre que $g_i \circ f = g_j \circ f$.

Diremos que un ideal I de \mathbb{M} es *cubridor* si \mathbb{N} queda cubierto por las imágenes de las funciones de I , y diremos que es κ -*cubridor* si contiene un número finito de funciones g_1, \dots, g_r tales que

$$\mathbb{N} = \text{Img}_1 \cup \dots \cup \text{Img}_r .$$

Las g_i se pueden tomar de modo que el cubrimiento anterior sea una partición. Todo ideal κ -cubridor es cubridor y todo ideal cubridor contiene a las constantes. De lo anterior se sigue la siguiente propiedad:

Para cada ideal κ -cubridor I y cada m-aplicación $H : I \rightarrow \ell^\infty$, existe una única sucesión $s \in \ell^\infty$ tal que $H(f) = s \circ f$ para cada $f \in I$.

Llamaremos *b-conjunto* a todo m-conjunto E que verifique la propiedad anterior puesto en el lugar que en ella ocupa ℓ^∞ . Si X es un conjunto, $X^{\mathbb{N}}$ es un b-conjunto. Por coherencia notacional, llamaremos *b-aplicaciones* a las m-aplicaciones entre b-conjuntos, que dan lugar al topos bornológico \mathcal{B} .

Los argumentos anteriores aplicados a ℓ^∞ valen para el b-conjunto X_β de las sucesiones β -acotadas de cualquier espacio bornológico (X, β) , donde con β denotamos una bornología sobre el conjunto X . La bornología finita κ existe sobre cada conjunto X y da lugar al b-conjunto X_κ de las sucesiones con imagen finita. Igualmente, la bornología discreta τ da el b-conjunto $X_\tau = X^{\mathbb{N}}$. Nótese que $\Gamma(X_\beta) \cong X$ para cada bornología β sobre X . En particular, $\ell^\infty = \mathbb{R}_\beta$ siendo β la bornología real usual, $\mathbb{M} = \mathbb{N}_\tau$ y \mathbb{N}_κ es un ideal de \mathbb{M} que contiene a las constantes, pero que no es un ideal κ -cubridor.

Si E es un m-conjunto, un *m-subconjunto* de E será un subconjunto de E cerrado para la acción de \mathbb{M} , es decir, que él mismo sea un m-conjunto con la acción inducida. Los m-subconjuntos son cerrados por uniones e intersecciones, así que tenemos el retículo $\text{Sub}_m(E)$ de los m-subconjuntos de E , con el caso particular $\Theta = \text{Sub}_m(\mathbb{M})$. Más adelante nos interesaremos por el conjunto $\text{Sub}(E)$ de los *b-subconjuntos* de un b-conjunto E , que son los m-subconjuntos de E que son también b-conjuntos. Por ejemplo, cada X_β es un b-subconjunto de $X^{\mathbb{N}}$.

En la definición anterior de b-conjunto, sólo podemos referirnos a un elemento $x \in E$ como si fuera una «sucesión» por analogía. En efecto, cada m-conjunto da lugar a una m-aplicación de E en un b-conjunto de sucesiones,

$$\mu : E \rightarrow \Gamma(E)^{\mathbb{N}}, \quad \mu(x)(n) = x \circ c_n,$$

de modo que sólo cuando μ es inyectiva tiene propiamente sentido, al menos salvo biyección, decir que E es un espacio de sucesiones. Hay una aplicación de este tipo para cada m-conjunto E , pero sólo precisaremos la notación cuando sea imprescindible.

2.2. Bornologías y clausuras. La *extensión* $\text{Ext}(U)$ de cada m-subconjunto U de $X^{\mathbb{N}}$ es la unión de las imágenes de las sucesiones $s \in U$. Es claro que U determina una bornología final β sobre su extensión, cuyos acotados son los subconjuntos $B \subseteq \text{Ext}(U)$ contenidos en la unión de las imágenes de un número finito de sucesiones de U . Si asociamos a U el conjunto \overline{U} de las sucesiones cuya imagen está contenida en $\text{Ext}(U)$ y son β -acotadas, obtenemos una aplicación $\text{Sub}_m(X^{\mathbb{N}}) \rightarrow \text{Sub}_m(X^{\mathbb{N}})$ que tiene las propiedades de un operador clausura:

(C1) Es una aplicación expansiva e idempotente:

$$U \subseteq \overline{U}, \quad \overline{\overline{U}} \subseteq \overline{U}.$$

(C2) Conserva intersecciones finitas: $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$.

Como hemos visto, cada \overline{U} es un b-subconjunto de $X^{\mathbb{N}}$, así que el operador clausura transforma un m-subconjunto de $X^{\mathbb{N}}$ en un b-subconjunto de $X^{\mathbb{N}}$. Más aún, la clausura es el mínimo b-subconjunto que contiene a un m-conjunto dado y todos los b-subconjuntos son de esta forma, propiedades que se deducen fácilmente de esta otra:

Para cada m-aplicación $u : U \rightarrow E$ en un b-conjunto E , existe una única b-aplicación $\overline{u} : \overline{U} \rightarrow E$ que extiende a u .

Dada $s \in \overline{U}$, determinaremos $\overline{u}(s) \in E$ mediante una m-aplicación $H : J \rightarrow E$ definida sobre un ideal κ -cubridor. La idea es usar el ideal $J = \{g \in \mathbb{M}; s \circ g \in U\}$ como dominio de la m-aplicación $H(g) = u(s \circ g)$ que defina $\overline{u}(s)$. Entre los detalles a probar, el más importante es que J es un ideal κ -cubridor. En efecto, por ser β -acotada la sucesión s , su imagen estará contenida en la unión de las imágenes de sucesiones $s_1, \dots, s_r \in U$, y tomando las imágenes inversas A_i por s de las imágenes de cada s_i resulta un cubrimiento finito de \mathbb{N} . Tomemos ahora $g_i \in \mathbb{M}$ cuya imagen sea A_i y obtendremos que la imagen de $s \circ g_i$ está contenida en la de $s_i \in U$, de donde se sigue que g_i pertenece a J ; luego J es un ideal κ -cubridor.

Conviene notar que el ideal J anterior está asociado al par (s, U) , significando un cierto «valor de verdad» de la relación de pertenencia cuyo máximo es \mathbb{M} . Se tiene en efecto $s \in U$ si y sólo si $J = \mathbb{M}$, pero el mínimo, $J = \emptyset$, significa que la órbita $(s) = \{s \circ f; f \in \mathbb{M}\}$ no corta a U , condición mucho más exigente en general que la conjuntista $s \notin U$. Volveremos sobre esta cuestión, pero de momento nos limitaremos a dejar constancia de la siguiente notación que ya hemos usado para ideales:

$$\langle s \in U \rangle = \{f \in \mathbb{M}; s \circ f \in U\}.$$

Si llamamos \mathbb{J} al conjunto de todos los ideales κ -cubridores, podemos expresar la clausura de los m-subconjuntos de sucesiones de la forma

$$\overline{U} = \{s \in X^{\mathbb{N}}; \langle s \in U \rangle \in \mathbb{J}\}.$$

Esta expresión define la clausura de m-subconjuntos de un b-conjunto E arbitrario, resultando las mismas propiedades que hemos visto en el caso $E = X^{\mathbb{N}}$, por ejemplo,

$$\text{Sub}(E) = \{U \in \text{Sub}_m(E); U = \overline{U}\}.$$

Es bien conocido [6] que las propiedades del operador clausura se corresponden completamente con las siguientes propiedades de \mathbb{J} :

- (J1) \mathbb{J} es un m-subconjunto de Θ que contiene a \mathbb{M} .
- (J2) Si $I \in \Theta$, con $\langle g \in I \rangle \in \mathbb{J}$ para cada $g \in J \in \mathbb{J}$, entonces $I \in \mathbb{J}$.

De estas propiedades se deduce con facilidad que \mathbb{J} es cerrada por intersecciones finitas y por contenidos crecientes. En la terminología de la teoría de topos, \mathbb{J} es una *topología (de Grothendieck)* por verificar (J1) y (J2), un b-conjunto es un *\mathbb{J} -haz* y \mathcal{B} es el correspondiente topos formado por estos haces. Pero en este trabajo no suponemos el conocimiento de la teoría general, así que seguiremos sumergidos en el caso particular que nos ocupa.

2.3. b-ideales. Vamos a particularizar lo anterior al b-conjunto \mathbb{M} . En este caso, la clausura es el valor de verdad $\bar{I} = \langle I \in \mathbb{J} \rangle$, de modo que $\mathbb{J} = \{I \in \Theta; \bar{I} = \mathbb{M}\}$. Denotaremos con la letra Ω el conjunto $\text{Sub}(\mathbb{M})$ de todos los b-ideales, siendo por tanto

$$\Omega = \{\bar{I}; I \in \Theta\} = \{I \in \Theta; I = \bar{I}\}.$$

Es claro pues que \mathbb{M} es el único b-ideal que es κ -cubridor. Se tiene además

$$\overline{\langle f \in I \rangle} = \langle f \in \bar{I} \rangle,$$

lo que significa que $\langle f \in I \rangle$ es b-ideal si I lo es, luego Ω es un m-subconjunto de Θ (con los mismos elementos constantes) y la clausura proporciona una m-aplicación $\Theta \rightarrow \Omega$. Es fácil verificar que Θ y Ω no son m-conjuntos de sucesiones (las aplicaciones ' μ ' respectivas no son inyectivas). Además, Θ no es un b-conjunto. En efecto, tomando el ideal κ -cubridor $J = (c_0, \sigma)$ y la m-aplicación $H : J \rightarrow \Theta$ definida por $H(c_0) = C$, $H(\sigma) = \mathbb{M}$, no puede existir un ideal I tal que $H(c_0) = \langle c_0 \in I \rangle$, pues el segundo miembro de esta igualdad sólo puede valer \emptyset o \mathbb{M} . Se tiene, sin embargo:

Ω es un b-conjunto.

En efecto, sea $J \in \mathbb{J}$ y $H : J \rightarrow \Omega$ una m-aplicación. Tomemos la clausura $\bar{I} \in \Omega$ del ideal $I = H^{-1}(\mathbb{M})$. Se comprueba sin dificultad que, para cada $g \in J$, es $H(g) = \langle g \in I \rangle$, por lo que $\langle g \in I \rangle$ es b-ideal y por tanto igual a su clausura, es decir, $H(g) = \langle g \in \bar{I} \rangle$. Si suponemos ahora que para cada $g \in J$ es $H(g) = \langle g \in I' \rangle$ con $I' \in \Omega$, tenemos que probar que $I' = \bar{I}$. Que $\bar{I} \subseteq I'$ es inmediato. Para el contenido inverso se prueba la relación $I' \cap J \subseteq I$ y se toman clausuras en ella.

Dado un b-conjunto E y un b-subconjunto U , tenemos una b-aplicación $E \rightarrow \Omega$ que asocia a cada $x \in E$ el valor de verdad $\langle x \in U \rangle$; esto nos da una aplicación $E \times \text{Sub}(E) \rightarrow \Omega$. Un ejemplo interesante es la igualdad en E , que corresponde al b-conjunto $E \times E$ y al b-subconjunto diagonal; en este caso se obtiene la b-aplicación $E \times E \rightarrow \Omega$, llamada *b-igualdad*, que a cada par (x, y) asocia el b-ideal

$$\langle x = y \rangle = \{f \in \mathbb{M}; x \circ f = y \circ f\}.$$

En lo sucesivo usaremos la misma notación $\langle xRy \rangle$ para cualquier otra b-relación R en E . Cada sucesión $s \in X_\kappa$ define el ideal κ -cubridor $C_s = \langle s \in X \rangle$, donde se ha identificado X con las constantes de X_κ , lo que haremos habitualmente. Entonces resulta $\langle s = x \rangle = \emptyset$ excepto cuando sea $x \in \text{Im}(s)$ y por tanto, si $\text{Im}(s) = \{x_1, \dots, x_r\}$, resulta

$$C_s = \langle s = x_1 \rangle \cup \dots \cup \langle s = x_r \rangle.$$

Es claro que la intersección de b-ideales es de nuevo un b-ideal, pero no sucede lo mismo con las uniones. Por ejemplo, C_s es un ideal κ -cubridor que es unión finita de b-ideales pero no es un b-ideal salvo en el caso $C_s = \mathbb{M}$, que corresponde a las sucesiones constantes. No obstante, Ω tendrá los supremos que corresponden a las intersecciones arbitrarias, que son las clausuras de las uniones de b-ideales; resulta así que Ω es un álgebra de Heyting completa. Dados b-ideales I, J , denotaremos su supremo mediante

$$I \vee J = \overline{I \cup J}.$$

3. EL TOPOS BORNOLÓGICO

Ya estamos en condiciones de abordar las propiedades básicas del topos bornológico, la subcategoría plena \mathcal{B} de \mathcal{M} formada por los b-conjuntos. Como la categoría \mathcal{S} no es una subcategoría de \mathcal{B} , lo primero que haremos será ocuparnos de la relación entre los conjuntos ordinarios y los b-conjuntos. Luego veremos la manera en que el topos bornológico se parece a la categoría de los conjuntos al modo intuicionista.

3.1. Funtores básicos. Las relaciones inmediatas entre los topos \mathcal{B} y \mathcal{S} son los funtores

$$(-)_\kappa : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}, \quad \Gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (-)^\mathbb{N} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B},$$

cuya definición sobre los objetos ya conocemos y que se completan sobre los morfismos del modo natural. Por ejemplo, la aplicación $\Gamma(H) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ es la restricción a los elementos constantes de la b-aplicación $H : E \rightarrow E'$. En particular, dado $x \in E$, la b-aplicación $H : \mathbb{M} \rightarrow E$ definida por $H(id) = x$, da lugar a $\Gamma(H) : C \rightarrow \Gamma(E)$, que coincide con $\mu(x) : \mathbb{N} \rightarrow \Gamma(E)$ salvo biyección.

El functor $(-)_\kappa$ es adjunto a izquierda de Γ . Un hecho esencial de esta propiedad es que para cada X hay una aplicación inyectiva obvia (constantes) $c : X \rightarrow X_\kappa$ con la siguiente propiedad universal:

Para cada b-conjunto E y cada aplicación $u : X \rightarrow \Gamma(E)$ existe una única b-aplicación $\hat{u} : X_\kappa \rightarrow E$ tal que $\hat{u} \circ c = u$.

Para definir $\hat{u}(s) \in E$ se toman el ideal C_s y la m-aplicación $H : C_s \rightarrow E$, $H(f) = u(x)$, donde x es el valor constante de $s \circ f$. Por ser E un b-conjunto, existe un único $\hat{u}(s) \in E$ tal que $\hat{u}(s) \circ f = u(x)$ para cada $f \in C_s$. Definida \hat{u} , se comprueba sin dificultad que cumple las propiedades requeridas.

Queda así establecida una biyección entre las b-aplicaciones de X_κ en E y las aplicaciones de X en $\Gamma(E)$. En particular, las sucesiones de elementos constantes en un b-conjunto E , $\mathbb{N} \rightarrow \Gamma(E)$, se corresponden con las b-aplicaciones $\mathbb{N}_\kappa \rightarrow E$ (recordar que las «sucesiones» $x \in E$ lo hacen con las b-aplicaciones $\mathbb{M} \rightarrow E$). Si nos fijamos en $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cong 2_\kappa$, las b-aplicaciones $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow E$ están en biyección con los pares de elementos constantes de E . Esto significa que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es el coproducto del b-conjunto final 1 consigo mismo en el topos bornológico, es decir, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ juega en \mathcal{B} uno de los papeles que 2 juega en \mathcal{S} , el de ser la unión disjunta de dos copias del conjunto final 1. El otro papel que 2 juega en \mathcal{S} es clasificar los subconjuntos mediante las aplicaciones características. Veremos que en \mathcal{B} este papel está reservado a Ω y no a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; así que, como ya hemos notado respecto a 1, los dos papeles conjuntistas que juega 2 corresponden a b-conjuntos diferentes.

Por otra parte, Γ es adjunto a izquierda de $(-)^{\mathbb{N}}$, siendo la unidad de la adjunción la transformación natural definida por las b-aplicaciones μ definidas en la sección anterior para cada b-conjunto E . Al lector no familiarizado con esta terminología le bastará saber que se tiene la siguiente propiedad universal:

Para cada b-aplicación $H : E \rightarrow X^{\mathbb{N}}$ existe una única $h : \Gamma(E) \rightarrow X$ tal que $h^{\mathbb{N}} \circ \mu = H$.

La prueba se basa en tomar la aplicación h restringiendo H a las constantes y luego $h^{\mathbb{N}}(s) = h \circ s$. En particular, las b-aplicaciones $Y^{\mathbb{N}} \rightarrow X^{\mathbb{N}}$ se corresponden biyectivamente con las aplicaciones $Y \rightarrow X$.

Las adjunciones anteriores implican que el funtor $(-)^{\mathbb{N}}$ conserva límites, que Γ conserva límites y colímites y que $(-)_\kappa$ conserva colímites; además se prueba sin dificultad que $(-)_\kappa$ conserva límites finitos.

3.2. Partes de un b-conjunto. Además de los b-ideales ya tratados, tiene sentido que consideremos familias de b-ideales parametrizadas por un conjunto X arbitrario, es decir, aplicaciones (conjuntistas) de la forma $a : X \rightarrow \Omega$; denotamos con la notación exponencial habitual Ω^X el conjunto de todas ellas, que convertimos en un m-conjunto con la acción $a \odot f$ dada por

$$(a \odot f)(x) = \langle f \in a(x) \rangle.$$

Por tanto, $\Gamma(\Omega^X) \cong \mathcal{P}(X)$ y la representación de Ω^X en un b-conjunto de sucesiones es la m-aplicación

$$\mu : \Omega^X \rightarrow \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}, \quad \mu(a)(n) = \{x \in X; c_n \in a(x)\}.$$

Ω^X no es un m-conjunto de sucesiones: si a es la constante en \mathbb{N}_κ y b la constante en \mathbb{M} se tiene $\mu(a) = \mu(b)$, luego μ no es inyectiva. Pero

Ω^X es un b-conjunto.

La demostración se basa en la dada para Ω (caso $X = 1$) utilizando que una m-aplicación $J \rightarrow \Omega^X$ equivale a una familia de m-aplicaciones $J \rightarrow \Omega$ parametrizada por X .

Es notorio que se puede obtener de igual modo un b-conjunto E^X para cada b-conjunto E . Entonces, dar una b-aplicación $F \rightarrow E^X$ equivale a dar una b-aplicación $X \times F \rightarrow E$. Por otra parte, siendo F un b-conjunto, la b-aplicación $c \times id : X \times F \rightarrow X_\kappa \times F$ tiene la misma propiedad universal que ya demostramos para c (la prueba sigue el esquema de la dada entonces) y por tanto dar una b-aplicación $X \times F \rightarrow E$ equivale a dar una b-aplicación $X_\kappa \times F \rightarrow E$. Se tiene en definitiva, como sucede en la exponenciación conjuntista:

Dar una b-aplicación $u : F \rightarrow E^X$ equivale a dar una b-aplicación $\hat{u} : X_\kappa \times F \rightarrow E$, siendo $\hat{u}((s, y))$ el único elemento de E tal que

$$\hat{u}((s, y)) \circ f = u(y \circ f)(x),$$

para cada $f \in C_s$, con $s \circ f = x$.

El lector que conozca la teoría de topos habrá advertido que en este artículo no desarrollamos la exponenciación general del topos, de la forma E^F con E y F b-conjuntos. Cuando $F = X_\kappa$ esta exponenciación general equivale a la variante E^X que hemos expuesto.

Vamos a buscar una caracterización de $\mathcal{P}(X)$ en el lenguaje de las categorías aplicado a \mathcal{S} , para luego reproducirla en el topos \mathcal{B} de los b-conjuntos. Dado X , resulta que $\mathcal{P}(X)$ es un conjunto con una relación $(\in) \subseteq X \times \mathcal{P}(X)$ que tiene esta propiedad universal:

Para cada conjunto Y y cada relación $R \subseteq X \times Y$ existe una única aplicación $r : Y \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que xRy si y sólo si $x \in r(y)$, es decir, $(id \times r)^{-1}(\in) = R$.

En la categoría \mathcal{B} los productos finitos, las imágenes inversas y las relaciones son como en los conjuntos y los m-conjuntos, tomando las acciones evidentes en cada caso, y podemos reproducir la propiedad anterior. Dado un b-conjunto E , buscamos un b-conjunto $\mathcal{P}_b(E)$ con una b-relación $(\in) \subseteq E \times \mathcal{P}_b(E)$, es decir, un b-subconjunto de dicho producto, tal que para cada b-conjunto E' y b-relación $R \subseteq E \times E'$ exista una única b-aplicación $r : E' \rightarrow \mathcal{P}_b(E)$ verificando $xRr(x')$ si y sólo si $(id \times r)^{-1}(\in) = R$, es decir, $x \in r(x')$. Este b-conjunto cumplirá

$$\Gamma(\mathcal{P}_b(E)) \cong \text{Sub}(E).$$

En el caso $E = 1$ esto equivale a encontrar en el topos bornológico el análogo del conjuntista $\mathcal{P}(1) \cong 2$ como clasificador de subconjuntos a través de las aplicaciones características. Con lo que ya sabemos, es natural sospechar que será $\mathcal{P}_b(1) = \Omega$. Se tiene, en efecto:

Para cada b-subconjunto $U \subseteq E$, existe una única b-aplicación $\varphi : E \rightarrow \Omega$ tal que $U = \varphi^{-1}(\mathbb{1})$; a saber, $\varphi(x) = \langle x \in U \rangle$.

Resulta pues que 2 es el conjunto de los valores de verdad en \mathcal{S} , mientras que Ω lo es en \mathcal{B} , siendo el primero biyectivo con el conjunto de los elementos constantes del segundo. Nótese que la m-aplicación característica anterior está definida con valores en Θ para cada m-subconjunto U y que factoriza por Ω si y sólo si U es un b-conjunto.

Ahora pasamos al caso general, pero lo haremos tan sólo (como en la exponenciación) para b-conjuntos de la forma X_κ , por razones de brevedad y dado que el ejemplo de aplicación que tenemos a la vista es \mathbb{Q}_κ . Ya que un subconjunto de X viene dado por su aplicación característica $X \rightarrow 2$, es plausible pensar que ahora deberíamos tomar el b-conjunto

$$\mathcal{P}_b(X_\kappa) = \Omega^X.$$

A su vez, la analogía conjuntista sugiere definir $(\in) \subseteq X_\kappa \times \Omega^X$ de modo que su b-aplicación característica $\varepsilon : X_\kappa \times \Omega^X \rightarrow \Omega$ esté asociada por exponenciación con la identidad en Ω^X . El cálculo exponencial nos conduce a tomar

$$\varepsilon((s, a)) = \bigvee_i [\langle s = x_i \rangle \cap a(x_i)],$$

de modo que la b-relación (\in) queda descrita por

$$s \in a \text{ si y sólo si } \langle s = x_i \rangle \subseteq a(x_i), \quad 1 \leq i \leq r.$$

Comprobar que esta b-relación tiene la propiedad universal requerida es una mera aplicación de la conversión exponencial.

3.3. La lógica de los b-conjuntos. El conjunto Ω de los valores de verdad del topos bornológico tiene estructura de álgebra de Heyting completa; en realidad de b-álgebra, pues todas sus operaciones son b-aplicaciones. En el retículo Ω se define la implicación $I \Rightarrow J$ como el supremo de los b-ideales K tales que $K \cap I \subseteq J$ y

resulta ser el valor en el par (I, J) de la b-aplicación característica de la relación de orden en Ω , es decir,

$$(I \Rightarrow J) = \{f \in \mathbb{M}; \langle f \in I \rangle \subseteq \langle f \in J \rangle\}.$$

Una implicación particular es la negación $\neg I = (I \Rightarrow \emptyset)$, siendo la doble negación

$$\neg\neg I = \{f \in \mathbb{M}; \forall g \in \mathbb{M}, \exists h \in \mathbb{M}, f \circ g \circ h \in I\}.$$

Notando que $\neg\neg\mathbb{N}_\kappa = \mathbb{M}$ se observa el carácter no booleano de Ω . Los ideales complementados (iguales a su doble negación) forman la parte booleana de Ω , que es isomorfa a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Las operaciones lógicas de Ω se trasladan a cada conjunto $\text{Sub}(E)$ a través de las b-aplicaciones características. De este modo quedan sentadas las bases del cálculo de proposiciones intuicionista interpretable en b-conjuntos. Cada fórmula $P(x)$ con una variable libre x de tipo E tendrá como tabla de verdad la b-aplicación característica $\varphi : E \rightarrow \Omega$ del b-subconjunto $U = \{x; P(x)\}$ extensión de la fórmula. Ahora extendemos estas consideraciones a los cuantificadores.

Supongamos un b-subconjunto $W = \{(x, y); P(x, y)\}$ de $E \times F$ y vamos a calcular el b-subconjunto de E

$$\forall_y W = \{x; (\forall y)P(x, y)\}.$$

Siguiendo la analogía conjuntista, este b-subconjunto estará caracterizado por ser, usando siempre b-conjuntos, $U \subseteq \forall_y W$ si y sólo si $U \times F \subseteq W$. Por tanto, dado $x \in E$, será $x \in \forall_y W$ si y sólo si $(x) \times F \subseteq W$, es decir:

Se verifica $x \in \forall_y W$ si y sólo si para cada $f \in \mathbb{M}$ y para cada $y \in F$ se tiene $(x \circ f, y) \in W$.

Haremos ahora lo mismo con el b-subconjunto de E

$$\exists_y W = \{x; (\exists y)P(x, y)\},$$

siendo en este caso $\exists_y W \subseteq U$ si y sólo si $W \subseteq U \times F$. Esto significa que $\exists_y W$ es la clausura en E de la proyección de W , es decir:

Se verifica $x \in \exists_y W$ si y sólo si existe un ideal $J \in \mathbb{J}$ tal que para cada $g \in J$ existe $y \in F$ tal que $(x \circ g, y) \in W$.

Veamos algunos ejemplos. Cada b-conjunto \mathbb{R}_β es un anillo (que entenderemos siempre conmutativo y unitario) y la suma y el producto son b-aplicaciones, así que es un anillo en la categoría \mathcal{B} , es decir, un *b-anillo*. La fórmula $x = 0$ será satisfecha por aquellas sucesiones s tales que para cada $f \in \mathbb{M}$ se verifique $s \circ f = 0$, lo que, usando las constantes, equivale a decir $s(n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$; de modo que la b-igualdad coincide con la igualdad conjuntista. Pero no sucede lo mismo si negamos la igualdad, pues una sucesión s satisface la fórmula $\neg(x = 0)$ si para cada $f \in \mathbb{M}$ verifica $s \circ f \neq 0$, lo que equivale a decir $s(n) \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esta condición es mucho más exigente que la desigualdad conjuntista, por eso conviene mantener notaciones diferenciadas, aunque coincidan en las constantes. Notar que $\{0\} \cup \neg\{0\} \neq \mathbb{R}_\beta$, pero $\{0\} \vee \neg\{0\} = \mathbb{R}_\beta$, es decir, \mathbb{R}_β satisface la fórmula

$$x = 0 \vee \neg(x = 0).$$

En conjuntos, el anillo \mathbb{R}_β tiene divisores de cero, es decir, no verifica la fórmula

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

En cambio, en el topos bornológico resulta que \mathbb{R}_β es un b-anillo sin divisores de cero. En efecto, dadas $s, t \in \mathbb{R}_\beta$ tales que $st = 0$, los conjuntos de naturales en los que cada sucesión se anula, respectivamente A, B , cubren \mathbb{N} y puede suponerse que son las imágenes de sendas funciones $g, h \in \mathbb{M}$; así que el ideal (g, h) está en \mathbb{J} y es $s \circ g = 0, t \circ h = 0$. El mismo razonamiento se aplica cambiando s, t por $s \circ f, t \circ f$ para cada $f \in \mathbb{M}$, de modo que la fórmula propuesta queda satisfecha. Por tanto, si calculamos el b-subconjunto E_β de los elementos idempotentes en el b-anillo \mathbb{R}_β obtendremos las sucesiones que verifican

$$x = 0 \vee x = 1,$$

es decir, las sucesiones e_A que valen 1 si $n \in A$ y 0 en caso contrario, con $A \subseteq \mathbb{N}$. Resulta pues $E_\beta \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$, lo que nos dice que \mathbb{R}_β no tiene idempotentes «no triviales».

Finalmente unos ejemplos con $\Omega^\mathbb{Q}$. Tomemos $\mu : \Omega^\mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})^\mathbb{N}$ y denotemos la sucesión $\mu(a)$ de la forma $\{A_n\}$, siendo $A_n = \{q \in \mathbb{Q}; c_n \in a(q)\}$. Una vez fijada la aplicación c_\emptyset constante en el ideal vacío, escribir la condición conjuntista $a \neq c_\emptyset$ significa que existe un racional q tal que $a(q)$ es un b-ideal no vacío; por tanto existen un natural n y un racional q tales que $q \in A_n$. Más selectiva es la condición $\neg(a = c_\emptyset)$ de la lógica interna del topos bornológico, pues significa que para cada $f \in \mathbb{M}$ existen $q \in \mathbb{Q}$ y $g \in \mathbb{M}$ tales que $f \circ g \in a(q)$. Con $f = id$ se obtiene la desigualdad conjuntista y con las constantes resulta que para cada natural n existe un racional q_n tal que $c_n \in a(q_n)$, es decir, cada A_n es no vacío. Todavía más fuerte es la condición

$$\exists x, \quad x \in a,$$

referida a $\mathbb{Q}_\kappa \times \Omega^\mathbb{Q}$. Que a satisface esta fórmula significa que existe un ideal $J \in \mathbb{J}$ tal que para cada $g \in J$ existe una sucesión $s \in \mathbb{Q}_\kappa$ tal que $s \in a \odot g$, es decir, $\langle s = q \rangle \subseteq \langle g \in a(q) \rangle$ para cada q en la imagen (finita) de s .

4. CORTADURAS DE DEDEKIND

Repasaremos la construcción de los primeros b-conjuntos numéricos y veremos que \mathbb{Q}_κ es el b-conjunto de los racionales y tiene una relación de orden total estricto a partir de la cual se establecen las fórmulas de las cortaduras, que terminaremos calculando.

4.1. Los b-rationales y el orden. Si transformamos la aplicación sucesor $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por el funtor $(-)_\kappa$ resulta la b-aplicación $\sigma_\kappa : \mathbb{N}_\kappa \rightarrow \mathbb{N}_\kappa, \sigma_\kappa(f) = \sigma \circ f$. Con ella se puede comprobar directamente la primera de las tres afirmaciones siguientes, relativas a los primeros objetos numéricos en el topos bornológico:

$\mathbb{N}_\kappa, \mathbb{Z}_\kappa, \mathbb{Q}_\kappa$ son, respectivamente, los b-conjuntos de números naturales, enteros y racionales.

Las dos últimas son consecuencia de propiedades de conservación de colímites y de límites finitos por parte del funtor $(-)_\kappa$, pero no entraremos ahora en estos detalles técnicos. El objetivo final de este artículo es probar que aplicando las cortaduras a \mathbb{Q}_κ se obtiene ℓ^∞ y no \mathbb{R}_κ , lo que sucede porque $(-)_\kappa$ no conserva toda la lógica.

Definimos del modo natural la relación de orden estricto $s < t$ en \mathbb{Q}_κ :

$$s(n) < t(n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Obtenemos así una relación $(<) \subset \mathbb{Q}_\kappa \times \mathbb{Q}_\kappa$, que es precisamente la extensión universal (recordar que $(-)_\kappa$ conserva productos finitos) de la relación de orden estricto ordinaria de \mathbb{Q} . La relación $s < t$ satisface las siguientes fórmulas de la lógica interna del topos bornológico:

- (O1) $\forall x, \neg(x < x)$
- (O2) $\forall x, \forall y, (x < y) \vee (y < x) \vee (x = y)$
- (O3) $\forall x, \forall y, \forall z, (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$

Nos fijaremos tan sólo en la segunda. Si los racionales p_i forman la imagen (finita) de s , sea $A_i = s^{-1}(p_i)$. Análogamente, usaremos letras q, B para otra sucesión t . Con esta notación $s < t$ equivale a

$$\langle s = p_i \rangle \cap \langle t = q_j \rangle \neq \emptyset \quad \text{implica} \quad p_i < q_j.$$

En general, dadas dos sucesiones s y t , tenemos el ideal κ -cubridor

$$C_s \cap C_t = \bigcup_{i,j} \langle s = p_i \rangle \cap \langle t = q_j \rangle$$

y estas intersecciones las podemos agrupar en tres bloques aplicando la tricotomía a las relaciones $p_i < q_j$, de modo que $C_s \cap C_t$ queda como unión de tres ideales, cada uno de los cuales nos da la condición correspondiente entre las requeridas en la fórmula (O2).

Ahora podemos definir $x \leq y$ como una abreviatura de $(x < y) \vee (x = y)$ y también comprobar que dicha fórmula equivale a $\neg(y < x)$ y que se interpreta como el b-subconjunto de los pares de sucesiones s, t tales que $s(n) \leq t(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como es habitual, con estas relaciones de orden podemos definir intervalos, por ejemplo $(s, t) = \{x \in \mathbb{Q}_\kappa; s < x < t\}$, y también valores de verdad, es decir, b-ideales como $\langle s < t \rangle = \{f \in \mathbb{M}; s \circ f < t \circ f\}$. Es claro que estas relaciones de orden pueden definirse de igual modo en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ y en otros b-conjuntos intermedios entre éste y \mathbb{Q}_κ . Así, con $s \in \mathbb{Q}_\kappa$ y $r \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, se tendrán, entre otros, intervalos de la forma (s, r) o valores de verdad de la forma $\langle s < r \rangle$; en particular, si q es un racional identificado con la sucesión constante en dicho valor, será $\langle q < r \rangle = \{f \in \mathbb{M}; q < r \circ f\}$. Pero debe notarse que la propiedad (O2) no se verifica en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ y tampoco en ℓ^∞ , aunque sí en \mathbb{R}_κ .

4.2. Cortaduras de b-rationales. Una *b-cortadura* de \mathbb{Q}_κ es un par

$$(a, b) \in \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa) \times \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa)$$

que verifica la fórmula (D) que resulta como conjunción de las siguientes:

(D1) $\forall x, \forall y, (x \in a \wedge y \in b \Rightarrow x < y)$

(D2) $\forall x, \forall y, (x < y \Rightarrow x \in a \vee y \in b)$

(D3) $\forall x, (x \in a \Rightarrow \exists z, z \in a \wedge x < z)$

(D4) $\forall y, (y \in b \Rightarrow \exists z, z \in b \wedge z < y)$

(D5) $(\exists x, x \in a) \wedge (\exists y, y \in b)$

La interpretación de esos axiomas es la siguiente:

(D1) Para cada $f \in \mathbb{M}$, cada $s, t \in \mathbb{Q}_\kappa$ y cada $g \in \mathbb{M}$, si $s \circ g \in a \odot (f \circ g)$ y $t \circ g \in b \odot (f \circ g)$ entonces $s \circ g < t \circ g$.

(D2) Para cada $f \in \mathbb{M}$, cada $s, t \in \mathbb{Q}_\kappa$ y cada $g \in \mathbb{M}$, si $s \circ g < t \circ g$ entonces existe un ideal $I \in \mathbb{J}$ tal que para cada $h \in I$ se tiene o bien $s \circ g \circ h \in a \odot (f \circ g \circ h)$ o bien $t \circ g \circ h \in b \odot (f \circ g \circ h)$.

(D3) Para cada $f \in \mathbb{M}$, $s \in \mathbb{Q}_\kappa$ y cada $g \in \mathbb{M}$, si $s \circ g \in a \odot (f \circ g)$ entonces existe un ideal $I \in \mathbb{J}$ tal que para cada $h \in I$ existe una sucesión s' tal que $s' \in a \odot (f \circ g \circ h)$ y $s \circ g \circ h < s'$.

La fórmula (D4) es como (D3) y (D5) se dio como ejemplo al final de la sección anterior. Hay que tener en cuenta que al verificar estas fórmulas será suficiente considerar el caso $f = g = id$.

El b-subconjunto obtenido como extensión de la fórmula (D) lo denotaremos

$$\mathbb{R}_b \subset \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa) \times \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa),$$

de modo que será $\Gamma(\mathbb{R}_b) \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Pero Γ conserva (salvo isomorfismos) todas las construcciones del topos que se requieren para la lógica, así que $\Gamma(\mathbb{R}_b) \cong \mathbb{R}$. La m-aplicación « μ » correspondiente a \mathbb{R}_b será la restricción de la correspondiente al producto de $\mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa)$ consigo mismo, que denotaremos μ_2 y asocia a cada par (a, b) un par $(\{A_n\}, \{B_n\})$ de sucesiones de subconjuntos de los racionales. Si (a, b) verifica (D), entonces cada par (A_n, B_n) será una cortadura conjuntista y definirá por tanto un número real r_n , dando lugar a una sucesión real r . El resultado que motiva este trabajo es el siguiente:

TEOREMA. $\mu : \mathbb{R}_b \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ induce un b-isomorfismo $\mathbb{R}_b \cong \ell^\infty$.

Organizaremos la demostración en varios pasos usando el b-subconjunto R_b obtenido como extensión de (D1) a (D4), de modo que \mathbb{R}_b es el b-subconjunto de R_b extensión de la fórmula (D5). Los pasos serán estos cuatro:

Paso 1. μ factoriza por ℓ^∞ .

Paso 2. μ es inyectiva.

Paso 3. Existe $\gamma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow R_b$ tal que $\mu_2(\gamma(r)) = r$.

Paso 4. $\gamma(\ell^\infty) \subseteq \mathbb{R}_b$.

Vamos con la demostración paso a paso:

Paso 1. Sea (a, b) una b-cortadura. Ya que a verifica la primera parte de (D5), existen funciones g_1, \dots, g_r tales que sus imágenes cubren \mathbb{N} y para cada índice $1 \leq i \leq r$ existe una sucesión s_i de racionales con imagen finita $\{q_{i1}, \dots, q_{ik_i}\}$, verificándose $\langle s_i = q_{ij} \rangle \subseteq \langle g_i \in a(q_{ij}) \rangle$. Cada $n \in \mathbb{N}$ será de la forma $n = g_i(m)$ con $s_i(m) = q_{ij}$, así que $c_m \in \langle s_i = q_{ij} \rangle \subseteq \langle g_i \in a(q_{ij}) \rangle$ y $c_n = g_i \circ c_m \in a(q_{ij})$, es decir, $q_{ij} \in A_n$. Si Q es el conjunto (finito) de todos los racionales q_{ij} , entonces se tiene $Q \cap A_n \neq \emptyset$ para cada n . Pero cada A_n es una sección inferior, pues (A_n, B_n) es

una cortadura, así que basta tomar el mínimo de Q para encontrar un racional que está en todos los A_n . En conclusión, $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$, lo que quiere decir que la sucesión $r = \mu((a, b))$ es acotada inferiormente. Por análogas razones será $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$, luego la sucesión r es acotada.

Paso 2. Sea una b-cortadura (a, b) y sea $r = \{(A_n, B_n)\}$ la sucesión real correspondiente. Veamos que esta sucesión permite recuperar la b-cortadura en la forma

$$a(q) = \bigcup_{q < p} \langle p < r \rangle, \quad b(q) = \bigcup_{q > p} \langle p > r \rangle,$$

siendo $\langle p < r \rangle = \{f \in \mathbb{M}; p \in \bigcap_n A_{f(n)}\}$, que es un b-ideal que contiene al ideal $a(p)$. Análogas propiedades tendrán los ideales $\langle p > r \rangle$. Desde luego, bastará verificar una de las dos igualdades anteriores, así que tomaremos la correspondiente a la primera componente del par (a, b) .

Probaremos un contenido viendo que si $q < p$ entonces $\langle p < r \rangle$ está contenido en $a(q)$. Para ello, apliquemos la propiedad (D2) de la b-cortadura (a, b) con las sucesiones $q < p$ y una función $f \in \langle p < r \rangle$, de modo que p no estará en ninguno de los subconjuntos $B_{f(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Resulta entonces que existen funciones g_1, \dots, g_k que cubren \mathbb{N} tales que para cada índice o bien se tiene $q \in a \odot (f \circ g_i)$ o bien $p \in b \odot (f \circ g_i)$, pero esta segunda posibilidad significa que p está en los $B_{f(g_i(n))}$, $n \in \mathbb{N}$, lo que no puede darse; luego tendremos la primera posibilidad para todos los índices, es decir, $f \in a(q)$.

Para el contenido inverso suponemos $f \in a(q)$, es decir $q \in a \odot f$, y aplicamos la propiedad (D3) de la b-cortadura (a, b) , lo que nos da funciones g_1, \dots, g_k que cubren \mathbb{N} tales que para cada índice existe una sucesión s_i tal que $s_i \in a \odot (f \circ g_i)$ y $q < s_i$. Será pues $q < p$ si p es el mínimo de los valores p_{ij} tomados por las funciones g_i . Sólo falta probar que $f \in \langle p < r \rangle$, es decir, que $c_{f(n)} \in a(p)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero es claro que se tendrá $c_{f(n)} \in a(p_{ij})$ para ciertos índices, así que basta notar que $a(p_{ij})$ está contenido en $a(p)$; si $p = p_{ij}$ esto es obvio y si $p < p_{ij}$ entonces $a(p_{ij})$ está contenido en $\langle p_{ij} < r \rangle$, que a su vez está contenido en $a(p)$ por el argumento usado antes con la propiedad (D2).

Paso 3. Dada una sucesión real r de término general $r_n = (A_n, B_n)$ y un racional q , podemos formar el ideal $a(q)$ como en el paso 2, que ahora será tan sólo una unión de b-ideales. Pero un razonamiento estándar prueba que también $a(q)$ es b-ideal y por tanto $\gamma_1(r) = a$ define una aplicación $\gamma_1 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa)$, que desde luego es una b-aplicación. Calculando $a \odot c_n$ resulta $\mu(a) = \{A_n\}$. Del mismo modo se obtiene γ_2 con $\gamma_2(r) = b$ que cumple $\mu(b) = \{B_n\}$. Con las dos b-aplicaciones anteriores como componentes se forma una b-aplicación $\gamma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa) \times \mathcal{P}_b(\mathbb{Q}_\kappa)$, que verifica $\gamma(\mu(r)) = r$ para cada sucesión real r . Veamos que γ factoriza por R_b , es decir, que cada $(a, b) = \gamma(r)$ satisface (D1) a (D4). Por la semejanza entre (D3) y (D4) bastará probar la primera de ellas.

(D1) Probemos que si $s \in a$ y $t \in b$ entonces $s < t$. Dado n , $s \in a$ implica que $c_n \in a(s(n))$, luego $c_n \in \langle p < r \rangle$ con $p > s(n)$; es decir, $s(n) < p < r(n)$. Análogamente, $t \in b$ implica que existe q tal que $t(n) > q > r(n)$. Luego $s(n) < t(n)$.

(D2) Probaremos que si $s < t$ entonces el ideal $\langle s \in a \rangle \cup \langle t \in b \rangle$ está en \mathbb{J} . En efecto, tomemos sucesiones s', t' en \mathbb{Q}_κ tales que $s < s' < t' < t$. Podemos cubrir

\mathbb{N} con los subconjuntos $A = \{n; r(n) > s'(n)\}$, $B = \{n; r(n) < t'(n)\}$ y tomar funciones $f, g \in \mathbb{M}$ cuyas imágenes sean respectivamente A, B ; entonces es fácil ver que $f \in \langle s \in a \rangle$ y que $g \in \langle t \in b \rangle$, de modo que la unión de ambos ideales está en \mathbb{J} .

(D3) Sea $s \in a$ y tomemos $C_s \in \mathbb{J}$. Si $g \in C_s$ entonces $s \circ g = p$ (constante) y por tanto $g \in a(p)$, así que $g \in \langle p' < r \rangle$ para algún $p' > p$. Tomando otro racional q entre éstos resulta $g \in a(q)$, luego $q \in a \odot g$, y también $s \circ g < q$.

Paso 4. En el proceso anterior, si r es acotada entonces $(a, b) = \gamma(r)$ satisface además (D5). En efecto, basta probar la parte relativa a la primera componente. Por ser r acotada, existirá un número racional p tal que $p \in a$, pero entonces también será $q \in a \odot f$ para cada $f \in \mathbb{M}$. Luego se cumple (D5) tomando como ideal κ -cubridor el propio \mathbb{M} .

De los pasos 2 y 4 se concluye pues que μ es inyectiva y $\mu \circ \gamma = id$, luego μ es un b-isomorfismo y el teorema queda probado.

4.3. Comentarios finales. La construcción de las cortaduras en el topos bornológico produce un b-conjunto con propiedades algebraicas débiles en un cierto sentido. Por ejemplo, ya dijimos antes que no se verifica la propiedad tricotómica del orden. En cuanto a la estructura algebraica, sea el b-subconjunto de las unidades

$$U_\beta = \{x \in \mathbb{R}_\beta; (\exists y)(xy = 1)\}.$$

Es claro que se verifica $U_\beta = \neg\{0\}$ en \mathbb{R}_β en los casos $\beta = \kappa$ y $\beta = \tau$, pero en ℓ^∞ sólo se cumple $U_\beta \subseteq \neg\{0\}$, como se observa con la sucesión de los inversos de los naturales (tomar 1 como inverso de 0). La fórmula

$$x = 0 \vee x \in U_\beta$$

identifica, junto con la condición $1 \neq 0$, a los llamados *b-cuerpos geométricos*. Razonando como más arriba, se prueba que \mathbb{R}_β es un b-cuerpo geométrico en los casos $\beta = \kappa$ y $\beta = \tau$ (también \mathbb{Q}_κ) mientras que ℓ^∞ sólo es lo que se llama un *b-cuerpo de fracciones*, que es un b-anillo que verifica, además de $1 \neq 0$, la fórmula

$$\neg(x \in U_\beta) \Rightarrow x = 0.$$

Es claro que esta fórmula y la anterior son equivalentes con lógica clásica, pero no lo son con lógica intuicionista de los topos en general. Un fácil razonamiento intuicionista prueba que todo b-cuerpo geométrico es un b-cuerpo de fracciones, pero el recíproco no es cierto, pues acabamos de ver que ℓ^∞ es un contraejemplo. También es fácil deducir que un b-cuerpo de fracciones verifica la fórmula

$$x \in U_\beta \vee \neg(x \in U_\beta)$$

si y sólo si es un b-cuerpo geométrico, luego ℓ^∞ no satisface dicha fórmula.

Finalmente, recordemos que en cada topos se puede construir el objeto de los reales por sucesiones, según Cauchy, resultando en general (ver [4]) un objeto más reducido que el correspondiente a las cortaduras de Dedekind. Pero en el topos bornológico se puede demostrar que ambas construcciones dan b-conjuntos isomorfos, como sucede en los conjuntos clásicos.

REFERENCIAS

- [1] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra. 3. Categories of sheaves*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **52**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [2] E. Dubuc, Logical opens and real numbers in topoi, *J. Pure Appl. Algebra* **32** (1986), 129–143.
- [3] L. Español y L. Lambán, *On bornologies, locales and toposes of M -sets*, prepublicación (1999).
- [4] P. T. Johnstone, *Topos theory*, London Mathematical Society Monographs **10**, Academic Press, Londres, 1977.
- [5] L. Lambán, *Construcciones en topos que extienden relaciones entre categorías de espacios topológicos y bornológicos*, Tesis doctoral, Publ. Sem. Mat. García de Galdeano, ser. II, sec. 2, núm. **27**, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 1990.
- [6] S. Mac Lane y I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*, Universitext, Springer-Verlag, Nueva York, 1992.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VI-VES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: luis.espanol@dmc.unirioja.es, carmen.minguez@dmc.unirioja.es

TRANSFERRING FOURIER MULTIPLIERS ON ADMISSIBLE SPACES

KRZYSZTOF STEMPAK

To José Guadalupe, in memoriam

ABSTRACT. Proved is a theorem that allows to transfer Fourier multipliers from the discrete to the continuous case in spaces more general than the Lebesgue spaces, for instance the weighted Lorentz spaces.

1. INTRODUCTION AND STATEMENT OF THE RESULT

The essential aim of this note is to furnish a generalization of the following theorem proved by Igari.

Theorem ([6]). *Let $1 < p < \infty$ and assume that m is a bounded function on \mathbb{R}^d , continuous except on a set of Lebesgue measure zero. If $\{m(\varepsilon n)\} \in M_p(\mathbb{Z}^d)$ for all sufficiently small $\varepsilon > 0$ and $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|m(\varepsilon n)\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} < \infty$, then $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$ and*

$$\|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|m(\varepsilon n)\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)}.$$

This theorem is a well-known converse to a multiplier restriction result of de Leeuw, [8]. Here, $M_p(\mathbb{Z}^d)$ and $M_p(\mathbb{R}^d)$ denote the spaces of L^p -Fourier multipliers on \mathbb{Z}^d and \mathbb{R}^d , respectively, and $\|m_n\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)}$ or $\|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$ denote the multiplier norms of m_n or m , that is the norms of relevant operators associated to m_n or m that act on $L^p((-\pi, \pi)^d)$ or $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Igari's result was generalized in several directions, cf. [7], [3], [1], [2], [5], mainly to orthogonal expansions other than the trigonometric system. The generalization we consider in this note deals back with Fourier multipliers but in the spaces more general than the Lebesgue spaces L^p . We tried to formulate this generalization in an abstract, to some extent, form, but an immediate application of our main result, Theorem 1.5, gives a transference result for Fourier multipliers in weighted Lorentz spaces, cf. Section 3 for details. Due to this "abstract form" a straightforward argument from the proof of the aforementioned Igari's paper, [6], does not apply to the present situation. More sophisticated argument from [7] does, however, the job. We use it in the proof of our result.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42A45.

Key words and phrases. Fourier multipliers, admissible spaces, transference.

Research supported in part by KBN grant # 5 P03A 034 20.

In the sequel we fix $d \in \mathbb{N}$ and use a fairly standard notation. Thus: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ is the space of all C^∞ functions with compact support; given $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, its Fourier transform is defined by

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-ixy} dy$$

and its inverse transform by

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{ixy} dy;$$

also, given $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, its Fourier coefficients are defined by

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(y)e^{-iky} dy, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

and the Fourier series associated to f is the series

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Throughout the paper we will consequently use the following convention: given an object T on \mathbb{R}^d , by \tilde{T} we will denote its ‘‘periodic’’ counterpart, i.e. a ‘‘corresponding’’ object on \mathbb{T}^d . Thus, if \mathcal{M} denotes the linear space of measurable functions on \mathbb{R}^d (two functions are identified when they differ on a set of Lebesgue measure zero) then $\tilde{\mathcal{M}}$ is the linear space of (equivalence classes of) measurable functions on \mathbb{T}^d . The family of dilations δ_λ , $\lambda > 0$, on functions on \mathbb{R}^d is given by $\delta_\lambda \varphi(x) = \varphi(\lambda x)$. For functions φ, ψ , we write $\langle \varphi, \psi \rangle$ to denote the integral $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(x) dx$ whenever it makes sense.

Definition 1.1. *We call a quasi-normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ admissible if*

- (a) X , as a subset, is contained in \mathcal{M} ;
- (b) $(X, \|\cdot\|_X)$ is δ -homogeneous in the sense that for every $\lambda > 0$, δ_λ maps X into X and

$$\|\delta_\lambda f\|_X = \lambda^A \|f\|_X, \quad \lambda > 0, f \in X,$$

for a homogeneity constant $A \in \mathbb{R}$;

- (c) $\mathcal{D} \subset X$.

We will consider a fixed family $\{h_r\}_{r>1}$ of elements of \mathcal{D} satisfying

$$(1) \quad 0 \leq h_r \leq 1, \quad h_r = 1 \quad \text{on} \quad [-\pi, \pi]^d, \quad \text{supp } h_r \subset [-\pi - 1/r, \pi + 1/r]^d$$

On the torus $\mathbb{T}^d \sim [-\pi, \pi]^d$, (with the usual identification of the boundary points) we consider the space of all C^∞ functions, $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$, which are identified with 2π -periodic, C^∞ functions on \mathbb{R}^d (2π -periodicity means $\varphi(x + 2\pi k) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$).

Definition 1.2. *Given an admissible space $(X, \|\cdot\|_X)$ we define $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ by*

$$\tilde{X} = \{g \in \tilde{\mathcal{M}} : g = f\chi_{\mathbb{T}^d} \text{ for an } f \in X\}$$

and

$$\|g\|_{\tilde{X}} = \inf\{\|f\|_X : g = f\chi_{\mathbb{T}^d}\}.$$

It may be checked that \tilde{X} equipped with $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$ becomes a quasi-normed space. Moreover, $\tilde{\mathcal{D}} \subset \tilde{X}$ and

$$\|g\|_{\tilde{X}} \leq \|g\|_X$$

for any $g \in \mathcal{D}$ with $\text{supp } g \subset (-\pi, \pi)^d$.

Definition 1.3. Let $(Y, \|\cdot\|_Y)$ be an admissible space. We say $(Y, \|\cdot\|_Y)$ satisfies the property (W_1) provided that for every $g \in \tilde{\mathcal{D}}$ and the family $\{h_r\}_{r>1} \subset \mathcal{D}$ that satisfies (1)

$$(W_1) \quad \|g\|_{\tilde{Y}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \|h_r g\|_Y,$$

where the last g is treated as a 2π -periodic function on \mathbb{R}^d . We say $(Y, \|\cdot\|_Y)$ satisfies the property (W_2) provided that from every sequence $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, which is uniformly bounded in Y , $\sup_j \|y_j\|_Y \leq R < \infty$, one can choose a subsequence $\{y_{j_i}\}$ and an element $y \in Y \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ such that $\|y\|_Y \leq R$ and, for every $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$(W_2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \langle y_{j_i}, \varphi \rangle = \langle y, \varphi \rangle.$$

Definition 1.4. Let $(X, \|\cdot\|_X)$ and $(Y, \|\cdot\|_Y)$ be admissible spaces and assume \mathcal{D} lies densely in X . We call a bounded measurable function $m(x)$ on \mathbb{R}^d an (X, Y) -Fourier multiplier provided for every $\varphi \in \mathcal{D}$, $(m\hat{\varphi})^\sim \in Y$ and

$$\|(m\hat{\varphi})^\sim\|_Y \leq C\|\varphi\|_X$$

with a constant $C \geq 0$ independent of $\varphi \in \mathcal{D}$. The least constant C for which the above holds is then defined to be the multiplier norm of $m(x)$ and is denoted $\|m(x)\|_{\text{mult}(X, Y)}$. In the same way a bounded sequence $\{m_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ is called an (\tilde{X}, \tilde{Y}) -Fourier multiplier provided for every $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} m_k \hat{\varphi}(k) e^{ikx} \right\|_{\tilde{Y}} \leq C\|\varphi\|_{\tilde{X}}.$$

As before the least C is then called the multiplier norm of m_k and is denoted $\|m_k\|_{\text{mult}(\tilde{X}, \tilde{Y})}$.

Note that the last series is absolutely convergent for every $x \in \mathbb{R}^d$, defines an element of $\tilde{\mathcal{D}}$, hence it also belongs to \tilde{Y} (let us agree to use spherical summation to sum the above series and those that follow). Due to the assumption on the density of \mathcal{D} in X the operator $\varphi \rightarrow (m\hat{\varphi})^\sim$, initially defined on \mathcal{D} , can be extended in a unique way to a bounded operator from X to Y . The same remark applies to the operator $\varphi \rightarrow \sum m(k)\hat{\varphi}(k)e^{ikx}$, initially defined on $\tilde{\mathcal{D}}$ provided $\tilde{\mathcal{D}}$ lies densely in \tilde{X} .

Theorem 1.5. Assume $(X, \|\cdot\|_X)$ and $(Y, \|\cdot\|_Y)$ are two admissible spaces with the δ -homogeneity constants A and B respectively, \mathcal{D} lies densely in X , and a bounded function $m(x)$ on \mathbb{R}^d , continuous except on a set of Lebesgue measure zero, is such that for all sufficiently small $\varepsilon > 0$ the sequence $\{m(\varepsilon k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ is an (\tilde{X}, \tilde{Y}) -Fourier multiplier and, moreover,

$$L = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{B-A} \|m(\varepsilon k)\|_{\text{mult}(\tilde{X}, \tilde{Y})} < \infty.$$

Assume, in addition, that Y satisfies the properties (W_1) and (W_2) . Then $m(x)$ is an (X, Y) -Fourier multiplier and $\|m(x)\|_{\text{mult}(X, Y)} \leq L$.

2. PROOF OF THE THEOREM

Fix $g \in \mathcal{D}$ and consider λ 's sufficiently large; in particular so large that $\delta_\lambda g \in \widetilde{\mathcal{D}}$. Take the dilation $\delta_\lambda g$ against the multiplier sequence $\{m(k/\lambda)\}$ and write

$$\begin{aligned} \left\| \sum m(k/\lambda) \widehat{\delta_\lambda g}(k) e^{ikx} \right\|_{\widetilde{Y}} &\leq \|m(k/\lambda)\|_{\text{mult}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})} \|\delta_\lambda g\|_{\widetilde{X}} \\ &\leq \lambda^A \|m(k/\lambda)\|_{\text{mult}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})} \|g\|_X. \end{aligned}$$

Since $m(x)$ is bounded, $|m(x)| \leq K$, by Parseval's identity,

$$\left\| \sum m(k/\lambda) \widehat{\delta_\lambda g}(k) e^{ikx} \right\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq K \lambda^{-d/2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Letting to denote

$$G_\lambda(x) = \sum m(k/\lambda) \widehat{\delta_\lambda g}(k) e^{ikx}$$

we rewrite the above as

$$\|G_\lambda(x)\|_{\widetilde{Y}} \leq \lambda^A \|m(k/\lambda)\|_{\text{mult}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})} \|g\|_X$$

and

$$\|G_\lambda(x)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq K \lambda^{-d/2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Since, by assumption, Y and, evidently, $L^2(\mathbb{R}^d)$ both satisfy (W_1) , for every $\eta > 0$, given λ sufficiently large we can find $r = r(\lambda) > \lambda$ such that

$$\|h_{r(\lambda)}(x) G_\lambda(x)\|_Y \leq (1 + \eta) \|G_\lambda\|_{\widetilde{Y}}$$

and

$$\|h_{r(\lambda)}(x) G_\lambda(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq (1 + \eta) \|G_\lambda\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

Consequently,

$$\|h_{r(\lambda)}(x) G_\lambda(x)\|_Y \leq (1 + \eta) \lambda^A \|m(k/\lambda)\|_{\text{mult}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})} \|g\|_X$$

and

$$\|h_{r(\lambda)}(x) G_\lambda(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq (1 + \eta) K \lambda^{-d/2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

and the dilation property next gives

$$\|h_{r(\lambda)}(x/\lambda) G_\lambda(x/\lambda)\|_Y \leq (1 + \eta) \lambda^{A-B} \|m(k/\lambda)\|_{\text{mult}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})} \|g\|_X$$

and

$$\|h_{r(\lambda)}(x/\lambda) G_\lambda(x/\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq (1 + \eta) K \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Choosing a sequence $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$, such that

$$\lambda_j^{A-B} \|m(k/\lambda_j)\|_{\text{mult}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})} \leq (1 + \eta) L$$

and letting to denote

$$F_{\lambda_j}(x) = h_{r(\lambda_j)}(x/\lambda_j) G_{\lambda_j}(x/\lambda_j)$$

allows to write

$$\|F_{\lambda_j}\|_Y \leq (1 + \eta)^2 L \|g\|_X, \quad j \in \mathbb{N},$$

and

$$\|F_{\lambda_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq (1 + \eta)K\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

In what follows, from a given sequence we will frequently choose a subsequence. To avoid multiplication of subscripts let us agree to denote the resulting subsequence in the same way as the sequence we started from. We believe this agreement will not lead to a confusion.

Since Y satisfies (W_2) one can choose a subsequence of $\{\lambda_j\}$ and an element $F \in Y$ such that

$$(2) \quad \|F\|_Y \leq (1 + \eta)^2L\|g\|_X$$

and, for every $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle F_{\lambda_j}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} F_{\lambda_j}(x)\varphi(x) dx \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$$

with $j \rightarrow \infty$. Next, by weak compactness of a ball of arbitrary radius in $L^2(\mathbb{R}^d)$, from $\{\lambda_j\}$ one can choose a subsequence and an element $F_o \in L^2(\mathbb{R}^d)$ such that $\|F_o\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq (1 + \eta)K\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ and, for every $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^d} F_{\lambda_j}(x)\psi(x) dx \rightarrow \langle F_o, \psi \rangle$$

with $j \rightarrow \infty$. From the above it follows that $F = F_o \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Relying solely on (3), the weak convergence of F_{λ_j} to F_o in $L^2(\mathbb{R}^d)$, we will now show that

$$(4) \quad F_o = (m\hat{g})^\sim.$$

This, the fact that $F = F_o$ and arbitrariness of $\eta > 0$ in (2) then show

$$\|(m\hat{g})^\sim\|_Y \leq L\|g\|_X$$

and finish the proof of the theorem.

Let's start proving (4). For any given $N = 1, 2, \dots$ we will use the decomposition

$$(5) \quad F_\lambda(x) = h_{r(\lambda)}(x/\lambda) \left(\sum_{|k| \leq N[\lambda]} + \sum_{|k| > N[\lambda]} \right) m(k/\lambda)\widehat{\delta_\lambda g}(k)e^{ikx/\lambda} = F_\lambda^N(x) + R_\lambda^N(x),$$

where $|k| = (k_1^2 + \dots + k_d^2)^{1/2}$ and $[\cdot]$ denotes the greatest integer function. We start with estimating $\|R_\lambda^N\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. Applying the identity

$$\widehat{\delta_\lambda g}(k) = -(\lambda/|k|)^2(\delta_\lambda(\Delta g))^\sim(k),$$

where Δ denotes the Laplacean on \mathbb{R}^d , and using Parseval's identity, gives

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |R_\lambda^N(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^d} h_{r(\lambda)}(x/\lambda)^2 \cdot \left| \sum_{|k|>N[\lambda]} m(k/\lambda)\widehat{\delta_\lambda g}(k)e^{ikx/\lambda} \right|^2 dx \\ &= \lambda^d \int_{\mathbb{R}^d} h_{r(\lambda)}(y)^2 \cdot \left| \sum_{|k|>N[\lambda]} m(k/\lambda)\widehat{\delta_\lambda g}(k)e^{iky} \right|^2 dy \\ &\leq (3\lambda)^d \int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{|k|>N[\lambda]} m(k/\lambda)\widehat{\delta_\lambda g}(k)e^{iky} \right|^2 dy \\ &\leq K^2(3\lambda)^d(2\pi)^d \sum_{|k|>N[\lambda]} |\widehat{\delta_\lambda g}(k)|^2 \\ &\leq \frac{K^2(3\lambda)^d}{N^4}(2\pi)^d \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(\delta_\lambda(\Delta g))(k)|^2 \\ &\leq \frac{K^2 3^d}{N^4} \|\Delta g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Hence, we conclude that

$$(6) \quad \|R_\lambda^N\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = O(N^{-2}),$$

uniformly in $\lambda \rightarrow \infty$. By invoking the diagonal argument we can find a subsequence of $\{\lambda_j\}$ such that for every $N \in \mathbb{N}$, $\{R_{\lambda_j}^N\}$ is weakly convergent to a function R^N in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Clearly, $\|R^N\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = O(N^{-2})$, hence, for an increasing sequence $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ of positive integers, $\{R^{N_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converges to zero a.e. on \mathbb{R}^d . By defining $F^{N_n} = F_o - R^{N_n}$, $n \in \mathbb{N}$, it is clear that $F_{\lambda_j}^{N_n} \rightarrow F^{N_n}$ weakly in $L^2(\mathbb{R}^d)$ for every $n \in \mathbb{N}$. Moreover, $\{F^{N_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converges to F_o a.e. on \mathbb{R}^d . In a moment we will check that

$$(7) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} F_{\lambda_j}^{N_n}(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\|y\| \leq N_n} m(y)\hat{g}(y)e^{ixy} dy$$

for every $x \in \mathbb{R}^d$. Having this, first note, that for fixed $n \in \mathbb{N}$ the sequence $\{F_{\lambda_j}^{N_n}\}_{j \in \mathbb{N}}$ is uniformly bounded on \mathbb{R}^d :

$$\begin{aligned} |F_{\lambda_j}^{N_n}(x)| &\leq \frac{K}{\lambda_j^d} \sum_{|k| \leq N_n[\lambda_j]} |\hat{g}(k/\lambda_j)| \leq \frac{CK}{\lambda_j^d} \sum_{|k| \leq N_n[\lambda_j]} (|k|/\lambda_j)^{-2} \\ &\leq \frac{CK}{\lambda_j^{d-2}} \sum_{|k| \leq N_n[\lambda_j]} |k|^{-2} \leq C'N_n^{d-2}. \end{aligned}$$

Therefore, when integrating the sequence $\{F_{\lambda_j}^{N_n}\}_{j \in \mathbb{N}}$ over any rectangle $P = [r_1, s_1] \times \dots \times [r_d, s_d]$, $-\infty < r_i < s_i < \infty$, using the Lebesgue dominated convergence theorem is possible. On the other hand, by weak convergence in $L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_P F_{\lambda_j}^{N_n}(x) dx \rightarrow \int_P F^{N_n}(x) dx,$$

when $j \rightarrow \infty$. This, combined with (7), shows that for a.e. $x \in \mathbb{R}^d$

$$F^{N_n}(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\|y\| \leq N_n} m(y)\hat{g}(y)e^{ixy} dy$$

and letting $n \rightarrow \infty$, (4) will then follow. Consequently, the proof of Theorem 1.5 will be finished.

We now return to (7). Fix $N \in \mathbb{N}$ and $x \in \mathbb{R}^d$. For large λ

$$F_\lambda^N(x) = \frac{1}{(2\pi\lambda)^d} \sum_{|k| \leq N[\lambda_j]} m(k/\lambda)\hat{g}(k/\lambda)e^{ikx/\lambda}$$

tends with $\lambda \rightarrow \infty$ to $(2\pi)^{-d} \int_{\|y\| \leq N} m(y)\hat{g}(y)e^{ixy} dy$ since, by assumption made on $m(y)$, the function under the last integral is Riemann integrable on the region $\{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq N\}$.

3. EXAMPLES AND COMMENTS

Let m_f^α denote the distribution function of an $f \in \mathcal{M}$ with respect to the measure $d\mu_\alpha(x) = \|x\|^\alpha dx$ (dx means the Lebesgue measure on \mathbb{R}^d),

$$m_f^\alpha(t) = \mu_\alpha(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > t\}), \quad t > 0.$$

It is easily seen that the weighted Lorentz spaces $L_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha > -d$, that consist of those $f \in \mathcal{M}$ for which the quantity

$$\|f\|_{p,q;\alpha} = \begin{cases} (\int_0^\infty [tm_f^\alpha(t)^{1/p}]^q \frac{dt}{t})^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{0 < t < \infty} [tm_f^\alpha(t)^{1/p}], & q = \infty, \end{cases}$$

is finite, is an admissible space with the homogeneity constant $-(d+\alpha)/p$. Moreover, $L_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ satisfies the (W_1) property, \mathcal{D} is dense in $L_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ if $q < \infty$, and, when $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $L_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ satisfies the (W_2) property. The last statement is easily explained by the fact that the quasi-norm $\|\cdot\|_{p,q;\alpha}$ is then equivalent to a norm and with this norm $L_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ becomes a reflexive Banach space (with the above assumptions on p and q , the dual space to $L_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ can be identified with $L_\alpha^{p',q'}(\mathbb{R}^d)$, $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$). Needless to say, that if $X = L_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^d)$ then $\tilde{X} = L_\alpha^{p,q}(\mathbb{T}^d)$ and $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$ coincides with the usual quasi-norm on $L_\alpha^{p,q}(\mathbb{T}^d)$ given now in terms of

$$\tilde{m}_f^\alpha(t) = \tilde{\mu}_\alpha(\{x \in \mathbb{T}^d : |f(x)| > t\}).$$

The result from the proposition that follows (under stronger assumptions and with additional restrictions) has been used in an outline of proof of a result stated in p.267 of [4]. In the case of $1 < p_2 < \infty$, $1 < q_2 < \infty$ the proposition is a direct consequence of Theorem 1.5. Since the (unweighted) weak- L^p case, that is the case of $L^{p_2,\infty}$, $1 \leq p_2 < \infty$, is important for possible applications, we decided to include it into consideration.

Proposition 3.1. *Let $m(x)$ be a bounded function on \mathbb{R}^d , continuous except on a set of Lebesgue measure zero. Let $0 < p_1 < \infty$, $0 < q_1 < \infty$, $\alpha > -d$ and either $1 < p_2 < \infty$ and $1 < q_2 < \infty$ or $\alpha = 0$, $1 \leq p_2 < \infty$ and $q_2 = \infty$.*

Assume further that for all sufficiently small $\varepsilon > 0$ the sequence $\{m(\varepsilon k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ is an $(L^{p_1, q_1}(\mathbb{T}^d), L^{p_2, q_2}(\mathbb{T}^d))$ -Fourier multiplier and, moreover,

$$L = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{(d+\alpha)(1/p_1-1/p_2)} \|m(\varepsilon k)\|_{\text{mult}} < \infty.$$

Then $m(x)$ is an $(L^{p_1, q_1}(\mathbb{R}^d), L^{p_2, q_2}(\mathbb{R}^d))$ -Fourier multiplier and $\|m(x)\|_{\text{mult}} \leq L$.

Proof. Consider the additional case $1 \leq p_2 < \infty$ and $q_2 = \infty$. The idea of proof that follows belongs to Connett and Schwartz and the proof itself can be easily read off from their paper [3], cf. also [1]. We include it here only for a sake of completeness. Let us also add that using the (W_2) property is now simply replaced by applying Fatou’s lemma. To simplify the notation, in what follows we write μ (the Lebesgue measure) in place of μ_0 and $L^{p, q}$ in place of $L_0^{p, q}$.

Fix $g \in \mathcal{D}$ and $t > 0$. By assumption, for λ ’s sufficiently large,

$$\begin{aligned} t\mu(\{x \in \mathbb{T}^d : |\sum m(k/\lambda)\widehat{\delta_\lambda g}(k)e^{ikx}| > t\})^{1/p_2} &\leq \|m(k/\lambda)\|_{\text{mult}} \|\delta_\lambda g\|_{L^{p_1, q_1}(\mathbb{T}^d)} \\ &\leq \lambda^{-d/p_1} \|m(k/\lambda)\|_{\text{mult}} \|g\|_{L^{p_1, q_1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

This gives

$$t\mu(\{x \in \mathbb{T}^d : |F_\lambda(x)| > t\})^{1/p_2} \leq \lambda^{-d/(1/p_1-1/p_2)} \|m(k/\lambda)\|_{\text{mult}} \|g\|_{L^{p_1, q_1}(\mathbb{R}^d)},$$

where

$$F_\lambda(x) = \chi_{\mathbb{T}^d}(x/\lambda) \sum m(k/\lambda)\widehat{\delta_\lambda g}(k)e^{ikx/\lambda}.$$

We now choose a sequence $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lambda_j \rightarrow \infty$, and a function $F_o \in L^2(\mathbb{R}^d)$ such that

$$(8) \quad t\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |F_{\lambda_j}(x)| > t\})^{1/p_2} \leq (L + 1/j)\|g\|_{L^{p_1, q_1}(\mathbb{R}^d)},$$

and $\{F_{\lambda_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converges weakly to $F_o \in L^2(\mathbb{R}^d)$. The argument for the proof that $F_o = (m\hat{g})$ is the same as in the proof of (4) in Section 2. Thus, it remains only to check that

$$(9) \quad t\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |F_o(x)| > t\})^{1/p_2} \leq L\|g\|_{L^{p_1, q_1}(\mathbb{R}^d)}.$$

We will use again the decomposition $F_\lambda(x) = F_\lambda^N(x) + R_\lambda^N(x)$ from the proof of Theorem 1.5, cf. Section 2. Arguing as before we have to our disposal a subsequence of $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ (let us recall that the agreement concerning avoiding multiplication of subscripts is still valid!), an increasing sequence $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ of positive integers, functions $F^{N_n} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and the decomposition

$$F_{\lambda_j}(x) = F_{\lambda_j}^{N_j}(x) + R_{\lambda_j}^{N_j}(x)$$

that satisfy:

- F^{N_n} converges to F_o a.e., $n \rightarrow \infty$;
- for every $n = 1, 2, \dots, F_{\lambda_j}^{N_n}$ converges to F^{N_n} a.e., $j \rightarrow \infty$;
- $\|R_{\lambda_j}^{N_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = O(N_n^{-2})$, uniformly in $j = 1, 2, \dots$.

We use the above properties to show (9). Fix $\eta > 0$. Fatou’s lemma then gives

$$\mu(\{|F_o(x)| > t\})^{1/p_2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|F^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2}.$$

Hence, for a subsequence of $\{N_n\}$,

$$(10) \quad \mu(\{|F_o(x)| > t\})^{1/p_2} \leq \mu(\{|F^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2} + \eta.$$

Fix $n = 1, 2, \dots$. Fatou’s lemma again gives

$$\mu(\{|F^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu(\{|F_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2}.$$

Hence, for a subsequence of $\{\lambda_j\}$,

$$(11) \quad \mu(\{|F^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2} \leq \mu(\{|F_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2} + \eta.$$

By invoking the diagonal argument, we can assume that (11) holds for every $n, j \in \mathbb{N}$. Combining (10) and (11) then gives

$$(12) \quad \mu(\{|F_o(x)| > t\})^{1/p_2} \leq \mu(\{|F_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2} + 2\eta.$$

We now have

$$(13) \quad \begin{aligned} \mu(\{|F_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2} &= \mu(\{|F_{\lambda_j}(x) - R_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\})^{1/p_2} \\ &\leq \mu(\{|F_{\lambda_j}(x)| > t(1 - \eta)\})^{1/p_2} + \mu(\{|R_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\eta\})^{1/p_2}. \end{aligned}$$

By Chebyshev’s inequality

$$\mu(\{|R_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\eta\}) \leq \|R_{\lambda_j}^{N_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 / (t\eta)^2.$$

Hence $\mu(\{|R_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\eta\})$ can be made arbitrarily small for sufficiently large n , uniformly in $j = 1, 2, \dots$. Let

$$(14) \quad \mu(\{|R_{\lambda_j}^{N_n}(x)| > t\eta\})^{1/p_2} \leq \eta$$

for $n \geq n_o$ and $j = 1, 2, \dots$. Combining (12), (13) and (14) now gives

$$\mu(\{|F_o(x)| > t\})^{1/p_2} \leq \mu(\{|F_{\lambda_j}(x)| > t(1 - \eta)\})^{1/p_2} + 3\eta.$$

By using arbitrariness of η and (8) and letting $j \rightarrow \infty$ shows (9) and finishes the proof of Proposition 3.1. □

REFERENCES

- [1] J. Betancor and K. Stempak, Relating multipliers and transplation for Fourier-Bessel expansions and Hankel transform, *Tôhoku Math. J.* **53** (2001), 109–129.
- [2] J. Betancor and K. Stempak, A vector valued transference of Fourier-Bessel multipliers onto Hankel multipliers with applications, preprint (2000).
- [3] W. C. Connett and A. L. Schwartz, Weak type multipliers for Hankel transforms, *Pacific J. Math.* **63** (1976), 125–129.
- [4] L. Colzani, Translation invariant operators on Lorentz spaces, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa* **14** (1987), 257–276.
- [5] G. Gasper and W. Trebels, Norm inequalities for fractional integrals of Laguerre and Hermite expansions, *Tôhoku Math. J.* **52** (2000), 251–260.
- [6] S. Igari, Functions of L^p -multipliers, *Tôhoku Math. J.* **21** (1969), 304–320.
- [7] S. Igari, On the multipliers of Hankel transform, *Tôhoku Math. J.* **24** (1972), 201–206.
- [8] K. de Leeuw, On L_p -multipliers, *Ann. of Math.* **81** (1965), 364–379.

- [9] H. J. Schmeisser and H. Triebel, *Topics in Fourier analysis and function spaces*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987.
- [10] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Monographs in Mathematics **84**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

INSTYTUT MATEMATYKI, POLITECHNIKA WROCŁAWSKA, WYB. WYSPIAŃSKIEGO 27, 50-370 WROCŁAW, POLAND

E-mail address: `stempak@im.pwr.wroc.pl`

UNICIDAD Y ESTABILIDAD PARA EL PROBLEMA DE CONDUCTIVIDAD INVERSO

JUAN ANTONIO BARCELÓ, TOMEU BARCELÓ Y ALBERTO RUIZ

En memoria de Chicho

ABSTRACT. The inverse conductivity problem deals with the determination of the conductivity γ in the interior of a domain Ω appearing on the equation

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0$$

from the measurements of u and $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ at the boundary $\partial\Omega$ (Dirichlet-to-Neumann map Λ_γ).

A survey of the problem is done. We show the main results and techniques since the original and pioneering work of A. P. Calderón in 1980, pointing out on the stability in dimension 2, where the problem is formally well determined.

1. INTRODUCCIÓN

En los problemas inversos de frontera, uno espera descubrir propiedades internas de un cuerpo acotado Ω al hacer mediciones en la frontera $\partial\Omega$. Estos problemas surgen en campos tales como medicina (detección de embolia pulmonar), [20], geología (determinación de depósitos minerales en la Tierra), industria, economía, etc. (puede verse [9], donde se presenta una panorámica de las aplicaciones de este tipo de problemas a distintos campos, especialmente la medicina). El modelo matemático apropiado para estos problemas está dado, normalmente, por una ecuación (o sistema) en derivadas parciales en Ω y las mediciones en la frontera quedan reflejadas por una cierta aplicación entre funciones sobre el contorno. El problema inverso trata de determinar los coeficientes de la ecuación a partir del conocimiento de dicha aplicación sobre el contorno.

Quizás el ejemplo más representativo es el problema de conductividad inverso, también llamado *tomografía de impedancia eléctrica*. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dominio acotado con frontera suave, representa un cuerpo conductor eléctrico. La conductividad del cuerpo, en un principio puede depender de la dirección (el tejido musculoso del cuerpo humano), la representamos por una matriz simétrica y definida positiva $\gamma = (\gamma^{ij})$ en Ω . Si suponemos que no existen sumideros o fuentes

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 35R30; Secondary 35R25, 35B35, 31B20, 31A25.

Key words and phrases. Inverse conductivity problem, stability, Dirichlet-to-Neumann map.

de corriente, por la ley de Ohm la ecuación para el potencial u en Ω está dada por

$$(1.1) \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Si conocemos el potencial f en $\partial\Omega$, el potencial inducido u en Ω satisface el problema de Dirichlet

$$(1.2) \quad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

La aplicación voltaje a corriente o Dirichlet a Neumann Λ_γ , mide el flujo de corriente generado en la frontera por un potencial aplicado sobre la misma. Se define dicha aplicación por

$$(1.3) \quad \Lambda_\gamma(f) = \sum_{i,j=1}^n \gamma^{ij} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_{\partial\Omega}$$

donde u es la solución de (1.2) y ν_i es la componente i -ésima del vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$. El problema de conductividad inverso trata de la determinación de γ a partir del conocimiento de Λ_γ .

El primero que planteó este problema fue Calderón [8], quien consideró la cuestión para conductividades isotrópicas, es decir aquellas que no dependen de la dirección. Si suponemos que $\gamma(x)$ es una función real y positiva y consideramos la matriz real $\gamma(x)I$, donde I es la matriz identidad, (1.1) se reduce a la ecuación en forma divergencia

$$(1.4) \quad \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega,$$

y la aplicación Dirichlet a Neumann (1.3) a

$$(1.5) \quad \Lambda_\gamma(f) = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

donde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ indica la derivada con respecto al vector normal unitario exterior ν a $\partial\Omega$. Calderón demuestra que la derivada de Frechet (primera aproximación) en conductividades constantes de la aplicación $\gamma \rightarrow Q_\gamma$, donde Q_γ es la forma cuadrática asociada a Λ_γ , es inyectiva. Utiliza las soluciones complejas de la óptica geométrica asociadas al laplaciano

$$e^{x \cdot \rho}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \rho \in \mathbb{C}^n, \quad \rho \cdot \rho = 0,$$

y da un procedimiento para aproximar conductividades «casi constantes» a partir de la aplicación Dirichlet a Neumann (también utilizando este tipo de soluciones especiales). Muchos de los avances que se han hecho en este campo, han sido consecuencia de la construcción de las soluciones complejas de la óptica geométrica para la ecuación en derivadas parciales que se estudia. En la siguiente sección, daremos un esbozo de la demostración de Calderón y de cómo se ha generalizado su procedimiento, de lo que da idea la amplia literatura aparecida desde este trabajo pionero.

En términos generales el problema de conductividad inverso está centrado en el estudio de la aplicación

$$(1.6) \quad \Lambda : \gamma \rightarrow \Lambda_\gamma.$$

La naturaleza del problema inverso de la conductividad es diferente según tratemos dominios en el plano, $n = 2$, o en dimensión superior. Veremos en las secciones siguientes que el uso de las llamadas soluciones complejas de la óptica geométrica hace que el problema esté sobredeterminado si $n \geq 3$ y formalmente bien determinado en el plano. Las soluciones complejas de la óptica geométrica vienen dadas por las funciones de la forma (próximas a las exponenciales de Calderón)

$$(1.7) \quad e^{x \cdot \rho}(1 + \psi(x, \rho)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \rho \in \mathbb{C}^n, \quad \rho \cdot \rho = 0,$$

con $\psi(x, \rho) \rightarrow 0$ cuando $|\rho| \rightarrow \infty$ en algún sentido. Intuitivamente, en el caso de dimensión mayor que dos, los resultados conocidos en el problema inverso de conductividad, dependen solamente del comportamiento de funciones del tipo (1.7) en alta frecuencia (es decir, para $|\rho|$ grande), mientras que en $n = 2$ es preciso el estudio en toda la gama de frecuencias.

En este trabajo nos vamos a ocupar solamente de las propiedades de inyectividad de Λ , llamado problema de unicidad inverso y la continuidad de la aplicación inversa de Λ , Λ^{-1} , problema de estabilidad. Hay, sin embargo, otros aspectos de igual o mayor interés que estos, cuya mención no queremos omitir:

Problema de caracterización de Λ , es decir ¿cuál es el rango de Λ ? Este es un problema abierto, su solución sería muy útil para el tratamiento de datos numéricos reales que son aproximaciones discretas de valores en el rango de Λ . Su conocimiento permitiría entender mejor cuáles son los datos experimentales más relevantes.

Problema de reconstrucción de γ a partir de Λ_γ . Es de mucho interés y casi todos los resultados positivos están basados en las soluciones complejas de la óptica geométrica [18], [21].

Por último está el problema de reconstrucción numérica. Dar un algoritmo para encontrar una aproximación de la conductividad a partir de un número finito de medidas de voltaje y corriente [9], [15], [11].

Sobre la unicidad, esto es, inyectividad de la aplicación Λ , en el caso isotrópico el primer resultado fue obtenido por Kohn y Vogelius [13], [14] para conductividades reales y analíticas a trozos. Sin embargo, relajar la regularidad es uno de los objetivos fundamentales de modelos reales, ya que, por ejemplo, en el cuerpo humano la conductividad sufre cambios muy bruscos al pasar de un tejido interno a otro. Para $n \geq 3$, Sylvester y Uhlmann generalizan la idea de Calderón [27], [28] y prueban unicidad para conductividades en $C^2(\overline{\Omega})$. Afinando las técnicas de Sylvester y Uhlmann, R. Brown [6] obtiene unicidad ($n \geq 3$) para conductividades en $C^{3/2+\epsilon}(\overline{\Omega})$ para $\epsilon > 0$. Recientemente Paivarinta, Pachenko y Uhlmann han obtenido el resultado de unicidad para conductividades en $C^{3/2}(\overline{\Omega})$, [22]. En $n = 2$ y con técnicas diferentes a las usadas en $n \geq 3$, Nachman [19] obtiene unicidad para conductividades en $W^{2,p}(\Omega)$ para algún $p > 1$. La reducción de la ecuación (1.4) a un sistema de orden 1, permite a Brown y Uhlmann [7] obtener el resultado de unicidad para

conductividades en $W^{1,p}(\Omega)$ y $p > 2$. Las principales ideas en $n \geq 3$ y $n = 2$ serán descritas en la siguiente sección.

En el caso anisotrópico, donde la conductividad depende de la dirección, el problema de unicidad en el plano está resuelto para conductividades suficientemente suaves, al poder ser reducido, usando coordenadas isotermales, al caso isotrópico [25]. Aparte de que este tipo de coordenadas no existen en $n \geq 3$, hay que observar que si $\Psi : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ es un difeomorfismo de clase C^∞ tal que $\Psi|_{\partial\Omega} = \text{Id}$ y

$$\tilde{\gamma} = \frac{((D\Psi)^t \cdot \gamma \cdot (D\Psi)) \circ \Psi^{-1}}{|\det D\Psi|}$$

donde $D\Psi$ designa la diferencial de Ψ y $(D\Psi)^t$ su traspuesta, entonces $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ y $\Lambda_{\tilde{\gamma}} = \Lambda_\gamma$, véase [12]. Esto supone una obstrucción a la unicidad, que es la existencia del difeomorfismo Ψ con la condición en $\partial\Omega$ antes indicada. Se conjetura que hay unicidad salvo este difeomorfismo. Esta conjetura es equivalente al problema de determinar una métrica riemanniana a partir de la aplicación Dirichlet a Neumann asociada a su operador de Laplace-Beltrami [16].

Los resultados de estabilidad conocidos hasta ahora son del mismo tipo: estabilidad logarítmica. Están basados en las técnicas utilizadas para demostrar los correspondientes resultados de unicidad y por lo tanto se basan en las soluciones complejas de la óptica geométrica, cuyo carácter exponencial podría ser el motivo de una estabilidad tan débil.

El primer resultado de estabilidad interior es debido a Alessandrini [2] en $n \geq 3$ y para conductividades en $W^{2,2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha > n/2$. En $n \geq 3$, los resultados de unicidad se resuelven también en el marco del problema de scattering de energía fija para la ecuación de Schrödinger. Para este tipo de ecuación

$$(\Delta - q(x))u + k^2u = 0,$$

Stefanov [23] obtiene estimaciones de estabilidad. En $n = 2$, el primer resultado lo obtiene Liu [17] para conductividades en $W^{2,p}(\overline{\Omega})$, $1 < p < 2$. En [3] se rebaja la regularidad de la conductividad a $C^{1+\epsilon}(\overline{\Omega})$ si $n = 2$. La sección 3 estará dedicada a comentar las principales ideas sobre estabilidad para $n \geq 3$ y $n = 2$.

Para una panorámica más general y profunda sobre el tema, recomendamos las excelentes exposiciones de G. Uhlmann [30] y [31].

2. UNICIDAD PARA EL PROBLEMA INVERSO DE CONDUCTIVIDAD

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ un dominio acotado con frontera suave. Los resultados que vamos a mencionar son casi todos válidos para $\partial\Omega$ Lipschitz. $\gamma(x)$ es una función real, positiva y acotada en Ω .

Empezamos esta sección dando una idea del resultado pionero de Calderón. Dado el problema de Dirichlet

$$(2.1) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = f & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

se considera la integral de Dirichlet asociada a (2.1)

$$Q_\gamma(f) = \int_\Omega \gamma |\nabla u|^2 dx.$$

$Q_\gamma(f)$ mide la potencia necesaria para mantener el potencial f en la frontera. Se polariza la forma cuadrática $Q_\gamma(f)$, para obtener la forma bilineal, que seguimos designando por Q_γ ,

$$Q_\gamma(f, g) = \int_\Omega \gamma \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} g \Lambda_\gamma(f) d\sigma$$

donde u y v son soluciones de (2.1) con dato en la frontera f y g respectivamente.

Conocer Q_γ es equivalente a conocer la aplicación Dirichlet a Neumann Λ_γ . Calderón estudia la aplicación

$$Q : \gamma \rightarrow Q_\gamma$$

y demuestra que la derivada de Frechet de esta aplicación en conductividades constantes es inyectiva. Más específicamente, considerando $\gamma = 1$,

$$dQ_{\gamma=1} : \varphi \rightarrow dQ_{\gamma=1}\varphi$$

donde

$$dQ_{\gamma=1}\varphi(f, g) = \int_\Omega \varphi \nabla u \nabla v dx$$

y, como antes, u y v son soluciones de (2.1) para $\gamma = 1$, con dato (en $\partial\Omega$) f y g respectivamente.

demostrar que esta aplicación es inyectiva es equivalente a demostrar que los productos de los gradientes de las funciones armónicas son densos en $L^2(\Omega)$, o lo que es lo mismo, si $\int_\Omega \varphi \nabla u \nabla v dx = 0$ para u y v funciones armónicas con datos f y g , entonces $\varphi = 0$.

Calderón considera las soluciones exponenciales complejas

$$u = e^{x \cdot \rho}, \quad v = e^{-x \cdot \bar{\rho}}, \quad \rho \in \mathbb{C}^n, \quad \rho \cdot \rho = 0.$$

Si $\rho = m + ik$ donde $m, k \in \mathbb{R}^n$ con $m \cdot k = 0$ y $|m| = |k|$, entonces $\rho \cdot \rho = 0$ y

$$\int_\Omega \varphi \nabla u \nabla v dx = -2|k|^2 \int_\Omega e^{2ix \cdot k} \varphi(x) dx = 0,$$

lo que nos dice que $(\varphi \chi_\Omega)^\wedge(k) = 0$ y por tanto $\varphi = 0$.

La idea de Calderón ha jugado un importante papel en los siguientes trabajos en este campo. Soluciones aproximadas a las utilizadas por Calderón fueron utilizadas por Sylvester y Uhlmann para recuperar otra vez $(\gamma \chi_\Omega)^\wedge(k)$, $k \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, [27], o para probar un resultado de unicidad local en $n = 2$, [26].

Veamos las ideas en $n \geq 3$. Para encontrar soluciones del tipo exponencial complejo, exigen a la conductividad que esté en $C^2(\bar{\Omega})$ y reducen, con el cambio $v = \gamma^{1/2}u$, el estudio de la ecuación $\text{div}(\gamma \nabla u) = 0$ al estudio de la ecuación de Schrödinger de energía cero

$$(2.2) \quad (\Delta - q)v = 0$$

para el caso particular $q(x) = \frac{\Delta \gamma^{1/2}(x)}{\gamma^{1/2}(x)}$.

Para $q \in L^\infty(\Omega)$, se definen los datos de Cauchy por

$$C_q = \left\{ \left(v|_{\partial\Omega}, \frac{\partial v}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} \right) : v \in H^1(\Omega) \text{ solución de (2.2)} \right\}.$$

Si se demuestra que 0 no es un autovalor de (2.2), el resultado de unicidad en la frontera de Kohn y Vogelius [13] haría que el resultado de unicidad para el potencial $q(x)$ a partir de C_q implicase el resultado de unicidad para conductividades $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$.

La clave está en las soluciones complejas de la óptica geométrica asociadas a (2.2). Se demuestra que para $\rho \in \mathbb{C}^n$ con $\rho \cdot \rho = 0$ y $|\rho|$ grande, (2.2) admite una única solución en $L^2(\mathbb{R}^n)$, con un cierto peso, de la forma

$$(2.3) \quad u(x) = e^{x \cdot \rho} (1 + \psi_q(x, \rho))$$

con $\psi_q(x, \rho) \rightarrow 0$ cuando $|\rho| \rightarrow 0$ en algún sentido.

Sean $q_i(x) \in L^\infty(\Omega)$ y $u_i(x) = e^{x \cdot \rho_i} (1 + \psi_{q_i}(x, \rho_i))$, $i = 1, 2$, las correspondientes soluciones. Si suponemos que $C_{q_1} = C_{q_2}$ el teorema de la divergencia nos asegura que

$$(2.4) \quad \int_{\Omega} (q_1(x) - q_2(x)) e^{x \cdot \rho_1} (1 + \psi_{q_1}(x, \rho_1)) e^{x \cdot \rho_2} (1 + \psi_{q_2}(x, \rho_2)) = 0;$$

ahora se elige de manera adecuada ρ_i de tal manera que se pueda repetir el «argumento de Calderón» y deducir que $((q_1 - q_2)\chi_{\Omega})^\wedge(k) = 0$ cualquiera que sea $k \in \mathbb{R}^n$.

Si $k \in \mathbb{R}^n$ es fijo y $n \geq 3$, podemos elegir l y $m \in \mathbb{R}^n$ tales que $k \cdot l = k \cdot m = l \cdot m = 0$ y $|m|^2 = |k|^2 + |l|^2$. Esto asegura que la elección de

$$\rho_1 = \frac{m}{2} + i \left(\frac{k+l}{2} \right) \quad \text{y} \quad \rho_2 = -\frac{m}{2} + i \left(\frac{k-l}{2} \right)$$

verifica $\rho_i \cdot \rho_i = 0$, $i = 1, 2$. Si hacemos $|l| \rightarrow \infty$ en (2.4) con esta elección, se obtiene el resultado deseado.

En $n = 2$ no podemos reproducir el argumento anterior. Para $k \in \mathbb{R}^2$ fijo no tendremos libertad en l para hacer $|l| \rightarrow \infty$. En este sentido indicábamos en la sección previa que el problema de unicidad para $n \geq 3$ está sobredeterminado.

Parecería que en el plano necesitaríamos la información de las soluciones complejas de la óptica geométrica cualquiera que fuese $\rho \in \mathbb{C}^2$ con $\rho \cdot \rho = 0$ y no solamente las de frecuencia alta. Sin embargo, existen potenciales $q(x) \in L^\infty(\Omega)$ tales que para algunos $\rho \in \mathbb{C}^2$ con $\rho \cdot \rho = 0$ no hay unicidad de soluciones complejas de la óptica geométrica asociadas a (2.2), [29]. Nachman [19] construye soluciones de la forma (2.3) para (2.2) cualquiera que sea $\rho \in \mathbb{C}^2$ con $\rho \cdot \rho = 0$, $\rho \neq 0$, cuando el potencial tiene la forma

$$q(x) = \frac{\Delta\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

con $q \in L^p(\mathbb{R}^2)$, φ positiva y $\nabla\varphi \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p < 2$. Da una extensión de estas soluciones para $\rho = 0$. Utilizando estas soluciones para todo $\rho \in \mathbb{C}^2$ y el $\partial\bar{\partial}$ -método de scattering inverso (como en [4] y [5], y del que daremos una idea de su utilización en esta clase de problemas en la siguiente sección), obtiene la unicidad para conductividades en $W^{2,p}(\overline{\Omega})$, $p > 1$.

El $\partial\bar{\partial}$ -método de scattering inverso junto con la reducción de la ecuación

$$\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$$

a un sistema de primer orden, es utilizado por Brown y Uhlmann [7] para obtener unicidad en $n = 2$ para conductividades en $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$. Para aplicar el $\partial\bar{\partial}$ -método, tenemos que trabajar con la ecuación elíptica $\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$ en todo \mathbb{R}^2 . Para ello se extiende la conductividad γ a todo \mathbb{R}^2 de tal manera que $\gamma - 1$ tenga soporte compacto (esto siempre es posible hacerlo si $\partial\Omega$ es Lipschitz).

Sea u una solución de $\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$ en \mathbb{R}^2 . Si llamamos $v = \gamma^{1/2}\partial u$ y $w = \gamma^{1/2}\bar{\partial}u$ donde $\partial = (1/2)(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$ y $\bar{\partial} = (1/2)(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$, entonces (v, w) satisface el sistema de primer orden

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} \bar{\partial} & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = Q(x) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

donde

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ \bar{q}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$q(x) = -\frac{1}{2}\partial(\log \gamma) = -\frac{\partial\gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}}.$$

El $\partial\bar{\partial}$ -método de scattering inverso trata sistemas de este tipo. Ahora vamos a construir soluciones especiales de (2.5), que se corresponden con las soluciones complejas de la óptica geométrica de Sylvester y Uhlmann.

De la igualdad

$$\{\rho \in \mathbb{C}^2 : \rho \cdot \rho = 0\} = \{(ik, -k), k \in \mathbb{C}\} \cup \{(-ik, -k), k \in \mathbb{C}\},$$

las soluciones exponenciales complejas de Calderón producen, para el sistema (2.5) con $q(x) = 0$, soluciones del tipo

$$\begin{pmatrix} e^{izk} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\bar{z}k} \end{pmatrix}, \quad z = x_1 + ix_2 \equiv (x_1, x_2) = x, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Esto sugiere buscar soluciones matriciales 2×2 de (2.5) de la forma

$$(2.6) \quad \Psi(Q, x, k) = m(Q, x, k) \begin{pmatrix} e^{izk} & 0 \\ 0 & e^{-i\bar{z}k} \end{pmatrix}.$$

La matriz $m(Q, x, k)$ es conocida como la solución matricial de Jost, y satisface el sistema

$$(2.7) \quad D_k m(Q, x, k) = Q(x)m(Q, x, k)$$

que, componente a componente, es

$$(2.8) \quad \begin{cases} \bar{\partial}m_{11}(Q, x, k) = q(x)m_{21}(Q, x, k) \\ (\partial + ik)m_{21}(Q, x, k) = \overline{q(x)}m_{11}(Q, x, k) \end{cases}$$

(la segunda columna satisface un sistema análogo).

Imponiendo que $Q \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 2$, con soporte compacto, Brown y Uhlmann demuestran existencia y unicidad de solución de (2.7) en ciertos espacios $L^r(\mathbb{R}^2)$ con

pesos, con la condición de que cuando $|k|$ es grande en cierto sentido $m(Q, x, k)$ tiende a la matriz identidad. Demuestran que $m(Q, x, k)$ satisface un sistema parecido a (2.7), pero con respecto a la variable k y donde el papel del potencial $Q(x)$ lo desempeña la matriz que designamos por $S(Q, k)$, conocida como matriz de scattering asociada al potencial $Q(x)$, es antidiagonal y está definida por

$$S_{21}(Q, k) = -i \int e_k(x) \overline{q(x)} m_{11}(Q, x, k) dx, \quad S_{12}(Q, k) = \overline{S_{21}(Q, \bar{k})},$$

donde $e_k(x) = e_k(z) = e^{i(kz + \bar{k}\bar{z})}$.

La matriz de Jost satisface, con respecto a la variable k , el sistema

$$(2.9) \quad \begin{cases} \bar{\partial} m_{11}(Q, x, k) = S_{21}(Q, k) \overline{e_z(k) m_{21}(Q, x, k)} \\ (\partial + iz) \overline{(e_z(k) m_{21}(Q, x, k))} = \overline{S_{21}(Q, k) m_{11}(Q, x, k)} \end{cases}$$

(la segunda columna satisface un sistema análogo).

Esta dualidad (2.8) versus (2.9), como podrá verse más claramente en la siguiente sección, juega un papel muy importante en el $\bar{\partial}\bar{\partial}$ -método de scattering inverso.

Brown y Uhlmann recuperan la matriz potencial $Q(x)$ a partir del comportamiento asintótico para altas frecuencias ($|k|$ grande) de las matrices de Jost. La aplicación de Dirichlet a Neumann determina la matriz de scattering $S(Q, k)$. El resultado de unicidad lo obtienen de la $\bar{\partial}$ -ecuación con respecto a k , (2.9), lo que les permite obtener las matrices de Jost a partir de la matriz de scattering ($\bar{\partial}\bar{\partial}$ -método de scattering inverso).

3. ESTABILIDAD PARA EL PROBLEMA INVERSO DE CONDUCTIVIDAD

El primer resultado significativo de estabilidad interior es debido a Alessandrini [2] para $n \geq 3$. Utilizando las técnicas desarrolladas por Sylvester y Uhlmann (reducción de la ecuación en forma divergencia a la ecuación de Schrödinger de energía cero y uso de las soluciones complejas de la óptica geométrica de «alta frecuencia»), obtiene el siguiente resultado de estabilidad logarítmica:

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\omega(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}}),$$

donde la función $\omega(t)$ satisface, si t es pequeño, $\omega(t) \leq C|\log t|^{-\alpha}$, para algún α tal que $0 < \alpha < 1$. Le exige a las conductividades que estén en $W^{2, 2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha > n/2$.

Demuestra también que si las conductividades γ_i no son continuas, no hay estabilidad ($n \geq 2$). Si designamos por $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$ la bola centrada en el origen y de radio r , tomando como $\Omega = B_1$ la bola unidad en \mathbb{R}^2 , $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = 1 + \chi_{B_r}$, entonces $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ pero $\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \rightarrow H^{1/2}} \leq 2r \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 0$. Los detalles pueden encontrarse en [2].

Para $n = 2$ será necesario obtener toda la información de la aplicación Dirichlet a Neumann. Nachman en [18] y [19] da un procedimiento de reconstrucción de la conductividad γ a partir de Λ_γ . Utilizando este procedimiento de reconstrucción, Liu [17] obtiene un resultado de estabilidad como el de Alessandrini, pero en \mathbb{R}^2 para conductividades en $W^{2,p}(\bar{\Omega})$, $1 < p < 2$.

En [3], motivados por los trabajos [7], [17] y [19], se obtiene un resultado de estabilidad en \mathbb{R}^2 del tipo que han obtenido Alessandrini y Liu, pero exigiendo menos

regularidad a las conductividades, esto es $\gamma_i \in C^{1+\epsilon}(\bar{\Omega})$, $\epsilon > 0$. Este resultado lo vamos a enunciar con precisión y daremos una idea de la demostración. Antes de esto, observamos que las estimaciones de estabilidad obtenidas en [2], [17] y [3] son del mismo tipo. El hecho de que se obtengan estimaciones logarítmicas depende, como veremos, fuertemente de utilizar las soluciones complejas de la óptica geométrica. En el tratamiento hecho por Calderón al problema, se refleja de una forma más clara este fenómeno.

Es natural preguntarse si estas estimaciones son óptimas (¿es óptima en el caso de Calderón?). La respuesta no se sabe para $n \geq 2$; tampoco se sabe si existen estimaciones de estabilidad tipo Hölder. En $n = 1$ se sabe que hay estabilidad tipo Hölder. También es importante señalar que la estabilidad de los valores frontera de γ a partir de la aplicación Dirichlet a Neumann es de tipo Hölder:

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C \|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}}^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

véase [28] y [1]. En la demostración de este resultado no se utilizan las soluciones de la óptica geométrica compleja.

Las técnicas utilizadas en el resultado de estabilidad en [3] son la reducción de la ecuación en forma divergencia a un sistema de primer orden y el $\partial\bar{\partial}$ -método de scattering inverso. Usamos la notación ya introducida en la sección anterior y cuando aparezca por ejemplo $S(Q_1, k)$, nos estamos refiriendo a la matriz de scattering asociada a la conductividad γ_1 . Se necesita más regularidad en las matrices de Jost $m(Q, x, k)$, tanto en la variable x como en la k , que la que es necesaria en el resultado de unicidad de Brown y Uhlmann. Por eso a las conductividades se les exige que tengan un ϵ de derivada más. Otra diferencia es que en el resultado de estabilidad recuperamos la conductividad de los valores de las matrices de Jost para $k = 0$ y no del desarrollo asintótico para $|k|$ grande.

En [3] se demuestra el siguiente resultado de existencia y unicidad. Si $\gamma - 1 \in W_c^{1+\epsilon, 2}(\mathbb{R}^2)$, entonces para cada $k \in \mathbb{C}$ existe una única solución de (2.7) con la condición de que

$$m(Q, \cdot, k) - \text{Id} \in W^{\epsilon, r}(\mathbb{R}^2), \quad r > 2.$$

Si $k \neq 0$, existe una única solución $u(Q, x, k)$ de $\text{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0$ tal que

$$e^{-izk}u(Q, x, k) - \frac{1}{ik} = (\partial + ik)^{-1}(\gamma^{-1/2}m_{11}(Q, \cdot, k) - 1)(x) \in W^{1+\epsilon, r}(\mathbb{R}^2), \quad r > 2,$$

y

$$(3.1) \quad \left\| e^{-izk}u(Q, x, k) - \frac{1}{ik} \right\|_{W^{1, r}(dx)} \leq C \left(1 + \frac{1}{|k|} \right).$$

Ya podemos enunciar el resultado y dar una idea de cómo se demuestra:

Teorema. *Sea Ω un dominio acotado Lipschitz en \mathbb{R}^2 y γ_i , $i = 1, 2$ funciones en Ω que satisfacen:*

- (i) *Existe una constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{C} < \gamma_i(x) < C$, $x \in \Omega$, $i = 1, 2$.*
- (ii) *$\gamma_i \in C^{1+\epsilon}(\bar{\Omega})$ para algún $\epsilon > 0$, $i = 1, 2$.*

Entonces

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\omega(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}})$$

donde $\omega(t)$ es una función tal que, si t es suficientemente pequeño, $\omega(t) \leq |\log t|^{-\alpha}$ para algún $\alpha > 0$.

Idea de la demostración. Se extiende γ_i a \mathbb{R}^2 (seguimos llamando a la extensión γ_i), de tal manera que reducimos el problema al caso

$$\gamma_i - 1 \in C_c^{1+\epsilon}(\overline{\mathbb{R}^2}), \quad \gamma_i = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \partial \Omega.$$

Después diremos cómo podemos hacer esta reducción.

La demostración se hace en dos partes. En la primera se trata la estabilidad de la aplicación $\Lambda_\gamma \rightarrow S(Q, \cdot)$, obteniéndose

$$\|S(Q_1, \cdot) - S(Q_2, \cdot)\|_{L^r(dk)} \leq \omega(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}}),$$

para un intervalo de r 's alrededor de $r = 2$.

En la segunda parte se estudia la estabilidad de la aplicación $S(Q, \cdot) \rightarrow \gamma$, obteniéndose

$$\|\gamma_1^{1/2} - \gamma_2^{1/2}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|S(Q_1, \cdot) - S(Q_2, \cdot)\|_{L^r(dk)}$$

también en un intervalo de r 's alrededor de $r = 2$.

Estas dos estimaciones junto con las condiciones impuestas a las conductividades nos producen el resultado de estabilidad. Observemos que la estabilidad de la transformada de scattering a la conductividad es Hölder, por lo tanto el carácter logarítmico de la estabilidad proviene de la aplicación $\Lambda_\gamma \rightarrow S(Q, \cdot)$.

Estabilidad de la aplicación $\Lambda_\gamma \rightarrow S(Q, \cdot)$. El punto principal es el control de las transformadas de scattering cuando $k \neq 0$. Este control se consigue después de la siguiente identidad:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{k} (S_{21}(Q_1, k) - S_{21}(Q_2, k)) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} \overline{u(Q_1, x, -k)} (\Lambda_{\gamma_2} - \Lambda_{\gamma_1}) u(Q_2, x, k) \, d\sigma(x), \end{aligned}$$

que junto con el teorema de la traza asegura que

$$\begin{aligned} & |S_{21}(Q_1, k) - S_{21}(Q_2, k)| \\ & \leq \frac{|k|}{2} \|u(Q_1, \cdot, -k)\|_{W^{1,r}(\Omega)} \|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}} \|u(Q_2, \cdot, k)\|_{W^{1,r}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Las estimaciones que se conocen sobre $u(Q_i, \cdot, k)$ son del tipo (3.1). Al introducir la exponencial compleja se obtiene

$$|S_{21}(Q_1, k) - S_{21}(Q_2, k)| \leq C e^{(2l+1)|k|} \|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}},$$

donde se supone que $\Omega \subset B(0, l)$. El factor $e^{(2l+1)|k|}$ es el que produce la estabilidad logarítmica.

También es necesario en esta parte asegurar algún decaimiento en $|k|$ para las transformadas de scattering cuando $|k|$ es grande. Si $|k|$ es grande, $m_{11}(Q_i, x, k)$ es próximo a 1 en algún sentido y $S_{21}(Q_i, k)$ es esencialmente la transformada de Fourier de $\overline{q_i(x)}$. Exigir que los potenciales $q_i(x)$ tengan regularidad C^ϵ permite controlar el decaimiento de sus transformadas.

En la fórmula (3.2) es donde únicamente se utiliza que $\gamma_i = 1$ y $\frac{\partial \gamma_i}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega$. Si no se hubiera supuesto esto, en la parte derecha de la fórmula se tendrían términos extra de la forma

$$\frac{1}{k} \int_{\partial\Omega} (\gamma_2^{1/2} - \gamma_1^{1/2}) e_k(x) \overline{\nu m_{21}(Q_1, x, -k)} d\sigma$$

ó

$$\frac{1}{|k|} \int_{\partial\Omega} \gamma_1^{1/2} e_k(x) \overline{\nu [m_{21}(Q_1, x, k) - m_{21}(Q_2, x, k)]} d\sigma.$$

En la primera integral, sería necesario un resultado de estabilidad en la frontera. Este es conocido y es debido a Sylvester y Uhlmann [28] para conductividades suaves y a Alessandrini [1] para conductividades en $C^{1+\epsilon}(\overline{\Omega})$. Para la segunda integral se necesitarían resultados de estabilidad para los valores de las matrices de Jost en la frontera. La recuperación de estos valores frontera está tratada en [18] usando el método de ecuaciones integrales.

La reducción a conductividades $\gamma \in C^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ con $\gamma = 1$ y $\frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega$, se puede hacer tomando un Ω' tal que $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ y usando el teorema de extensión de Calderón [24], se extiende γ a γ' tal que sea 1 en un entorno de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$.

Para obtener un resultado del tipo

$$\|\Lambda_{\gamma'_1} - \Lambda_{\gamma'_2}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega') \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega')} \leq C \|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)}^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

que permita reducirse al caso indicado, se sigue un argumento técnico debido a Nachman [19], el cual está basado en las estimaciones de estabilidad para las conductividades en la frontera.

Estabilidad de la aplicación $\gamma \rightarrow S(Q, \cdot)$. Como en [19], se recuperan las conductividades a partir de las componentes de las matrices de Jost en $k = 0$. Utilizando la $\overline{\partial}$ -ecuación con respecto a x , (2.8), que satisfacen las funciones de Jost

$$\mu(-Q_i^t, x, k) = m_{11}(-Q_i^t, x, k) + \overline{m_{21}(-Q_i^t, x, k)},$$

se ve que, en $k = 0$, $\mu(-Q_i^t, x, 0)$ y $\gamma_i^{1/2}(x)$ satisfacen la misma $\overline{\partial}$ -ecuación del tipo $\overline{\partial}u = a(x)\overline{u}$. Aplicando un resultado de unicidad para funciones cuasianálíticas, se obtiene

$$(3.3) \quad \gamma_i^{1/2}(x) = m_{11}(-Q_i^t, x, 0) + \overline{m_{21}(-Q_i^t, x, 0)}.$$

La siguiente idea es aprovechar la $\overline{\partial}$ -ecuación con respecto a k que satisfacen las matrices de Jost (2.8). Se demuestra que la función $\langle \mu(-Q_1^t, x, k) - \mu(-Q_2^t, x, k) \rangle$ satisface con respecto a k una $\overline{\partial}$ -ecuación no homogénea del tipo $\overline{\partial}u = a(k)\overline{u} + b(k)$, donde esencialmente $b(k) \equiv S_{21}(-Q_1^t, k) - S_{21}(-Q_2^t, k)$. Invirtiendo la $\overline{\partial}$ -ecuación en $k = 0$, utilizando (3.3), estimaciones a priori para la $\overline{\partial}$ -ecuación, y el resultado de Beals y Coifman [5] $S(-Q^t, k) = S(Q, -\overline{k})^t$, se tiene

$$|\gamma_1^{1/2}(x) - \gamma_2^{1/2}(x)| \leq C \|S(Q_1, \cdot) - S(Q_2, \cdot)\|_{L^r(dk)}$$

para r en un intervalo que contiene $r = 2$.

REFERENCIAS

- [1] G. Alessandrini, Stable determination of conductivity by boundary measurements, *Applicable Anal.* **27** (1988), 153–172.
- [2] G. Alessandrini, Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements, *J. Differential Equations* **84** (1990), 252–272.
- [3] J. A. Barceló, T. Barceló y A. Ruiz, Stability of the inverse conductivity problem in the plane for less regular conductivities, *J. Differential Equations* **133** (2001), 231–270.
- [4] R. Beals y R. Coifman, Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations, en *Pseudodifferential operators and applications* (Notre Dame, Ind., 1984, F. Trèves, ed.), *Proc. Sympos. Pure Math.* **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1985), 45–70.
- [5] R. Beals y R. Coifman, The spectral problem for the Davey-Stewartson and Ishimori hierarchies, en *Nonlinear evolution equations: Integrability and spectral methods*, Manchester University Press (1988), 15–23.
- [6] R. Brown, Global uniqueness in the impedance imaging problem for less regular conductivities, *SIAM J. Math. Anal.* **27** (1996), 1049–1056.
- [7] R. Brown y G. Uhlmann, Uniqueness in the inverse conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **22** (1997), 1009–1027.
- [8] A. Calderón, On an inverse boundary value problem, en *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics* (Río de Janeiro, 1980), Soc. Brasil. Mat., Río de Janeiro (1980), 65–73.
- [9] M. Cheney, D. Isaacson y J. C. Newell, Electrical impedance tomography, *SIAM Review* **41** (1999), 85–101.
- [10] D. Colton, J. Coyle y P. Monk, Recent developments in inverse acoustic scattering theory, *SIAM Review* **42** (2000), 369–414.
- [11] R. Kohn y A. McKenney, Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography, *Inverse Problems* **6** (1990), 389–414.
- [12] R. Kohn y M. Vogelius, Identification of an unknown conductivity by means of measurements at the boundary, en *Inverse problems* (Nueva York, 1983, D. McLaughlin, ed.), *SIAM-AMS Proc.* **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1984), 113–123.
- [13] R. Kohn y M. Vogelius, Determining conductivity by boundary measurements, *Comm. Pure App. Math.* **37** (1984), 289–298.
- [14] R. Kohn y M. Vogelius, Determining conductivity by boundary measurements II. Interior results, *Comm. Pure App. Math.* **38** (1985), 644–667.
- [15] R. Kress, Numerical methods in inverse acoustic obstacle scattering, en *Inverse problems in partial differential equations* (Arcata, CA, 1989, D. Colton, ed.), SIAM, Philadelphia, PA (1990), 61–72.
- [16] J. Lee y G. Uhlmann, Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements, *Comm. Pure App. Math.* **42** (1989), 1097–1112.
- [17] L. Liu, *Stability estimates for the two-dimensional inverse conductivity problem*, Ph. D. Thesis, Dept. of Mathematics, University of Rochester, Nueva York, 1997.
- [18] A. Nachman, Reconstructions from boundary measurements, *Annals of Math.* **128** (1988), 531–587.
- [19] A. Nachman, Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem, *Annals of Math.* **143** (1995), 71–96.
- [20] National Research Council Institute of Medicine, *Mathematics and physics of emerging biomedical imaging*, National Academy Press, 1986.
- [21] R. Novikov, Multidimensional inverse spectral problems for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ (en ruso), *Funktional. Anal. i Prilozhen.* **22** (1988), 11–22, 96. Traducción al inglés: *Funct. Anal. Appl.* **22** (1988), 263–272 (1989).
- [22] L. Paivarinta, A. Pachenko y G. Uhlmann, Complex geometrical optics solutions for Lipschitz conductivities, prepublicación (2000).

- [23] P. Stefanov, Stability of the inverse scattering in potencial scattering at a fixed energy, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **40** (1990), 867–884.
- [24] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1970.
- [25] J. Sylvester, An anisotropic inverse boundary value problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **43** (1990), 202–232.
- [26] J. Sylvester y G. Uhlmann, A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in electrical prospection, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 91–112.
- [27] J. Sylvester y G. Uhlmann, A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, *Annals of Math.* **125** (1987), 153–169.
- [28] J. Sylvester y G. Uhlmann, Inverse Boundary value Problem at the boundary—continuous dependence, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 197–221.
- [29] T. Y. Tsai, The Schrödinger equation in the plane, *Inverse Problems* **9** (1993), 763–787.
- [30] G. Uhlmann, Inverse boundary value problems and applications, *Astérisque* **207** (1992), 153–211.
- [31] G. Uhlmann, Developments in inverse problems since Calderón’s foundational paper, en *Harmonic analysis and partial differential equations* (Chicago, 1996, M. Christ, C. Kenig y C. Sadosky, eds.), Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago (1999), 295–345.

ETSI DE CAMINOS, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID, CIUDAD UNIVERSITARIA, 28040 MADRID

Correo electrónico: ma21@dumbo.caminos.upm.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, 28049 MADRID

Correo electrónico: bartolome.barcelo@uam.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, 28049 MADRID

Correo electrónico: alberto.ruiz@uam.es

ITERACIÓN DE LA COMPOSICIÓN DE SERIES FORMALES

LUIS M. NAVAS

ABSTRACT. This paper is a unified survey of the problem of finding compositional roots of formal power series, that is, finding power series whose n -fold iteration is a given series. We have set ourselves a twofold purpose: on the one hand, we collect various results dispersed throughout the literature, such as the theory of Schröder functions and continuous iteration of power series, and on the other, we generalize many of these results from the complex numbers to an arbitrary commutative ring, when possible, or to an integral domain or a field when this is more natural. In doing so we give new proofs using the method of successive z -adic approximations, which are valid in the general case. We also treat the case of power series with coefficients in a field of nonzero characteristic and torsion linear term. The paper is intended to serve as a convenient reference for all these results.

Es un honor poder participar en el homenaje que la Universidad de La Rioja ofrece con este libro al profesor Guadalupe Hernández, cuyo recuerdo sigue vivo en cuantos le conocieron. Tuve la suerte de ser invitado por él a dar dos conferencias en la Universidad de La Rioja y comprobar personalmente lo que me habían dicho: su cordialidad, su amabilidad, su exigencia académica y su eficacia organizadora. Sea este artículo mi testimonio de gratitud por un lado, y de admiración profesional por otro.

1. INTRODUCCIÓN

Nuestra intención al escribir este artículo es dar una visión unificada de varios problemas relacionados con la composición en anillos de series formales. El primer problema es el de la existencia y extracción de raíces «composicionales». Dada una serie formal f y un entero positivo n , cuándo se puede asegurar la existencia de una serie g tal que $g^{\circ n} = g \circ g \circ \dots \circ g = f$? De esta pregunta derivan lógicamente otras, como cuántas raíces hay y cómo se construyen a partir de f .

Una solución elegante de este problema es mediante la extensión de la operación de potencia composicional (iteración) desde los enteros positivos a exponentes más generales. Por ejemplo, si se puede definir la exponenciación composicional $g = f^{\circ 1/2}$, ésta debe ser una raíz cuadrada composicional de f , es decir, $g \circ g = f$. En el caso de un anillo de series formales sobre un cuerpo, para un determinado tipo de serie se puede definir una iteración «continua» con exponentes en el cuerpo.

Otra manera de resolver los problemas de raíces composicionales es mediante la determinación de clases de representantes sencillas para las clases de conjugación de

2000 *Mathematics Subject Classification.* 13F25, 13J05, 26A18.

Key words and phrases. Formal power series, composition, iteration.

las series formales bajo la acción del grupo de series invertibles. Esta conjugación es la denominada conjugación topológica en sistemas dinámicos, y que aquí especificamos como conjugación topológica formal. Por ejemplo, si denotamos la serie identidad por ι y f es una serie conjugada a $-\iota$, es decir, $f = \lambda^{-1} \circ (-\iota) \circ \lambda$, entonces $f \circ f = \lambda^{-1} \circ (-\iota) \circ (-\iota) \circ \lambda = \lambda^{-1} \circ \iota \circ \lambda = \iota$, dando así una raíz cuadrada composicional de la identidad.

El método de las clases de conjugación es el adoptado por ejemplo en [10], [9], y [7]. Nosotros utilizaremos el método de aproximaciones sucesivas, que proporciona además algoritmos computacionales directos para el cálculo de iteraciones.

Una serie f , «genérica» en un sentido que especificaremos, es conjugada a su parte lineal, y la función, debidamente normalizada, que realiza la conjugación, se denomina *función de Schröder* de f . Esta parte de la teoría es la más sencilla, por corresponder, en el caso de un cuerpo, a la ausencia de torsión en el término lineal, un hecho que se refleja en el estudio de sistemas dinámicos sobre los números complejos, en la clasificación de los puntos periódicos ([1], cap. 6).

En este trabajo, además de presentar resultados dispersos en la literatura, con el fin de proporcionar una referencia unificada, extendemos varios resultados de los complejos \mathbb{C} a un anillo conmutativo en general cuando sea posible, y en otros casos, en interés de simplificar la exposición, a un anillo íntegro o a un cuerpo. Obtenemos resultados para cuerpos de característica arbitraria en § 6.

2. PRELIMINARES

Sea R un anillo conmutativo, y consideremos el anillo de series formales $R[[z]]$ sobre R . Denotaremos por $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(R)$ al ideal (z) , por $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}^*(R)$ al grupo de series invertibles respecto a la composición, (aquellas series $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathfrak{m}$ con $a_1 \in R^*$) y por ι a la serie identidad. Damos a $R[[z]]$ la topología generada por este ideal, denominada z -ádica. Es equivalente a la topología producto en el espacio de sucesiones $R^{\mathbb{N}}$, con la topología discreta en R .

Para $a \in R$, sea $[a] = az$, y $[R] = \{[a] : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces $([R], +, 0, \circ, \iota)$ es un anillo, y la aplicación $a \rightarrow [a]$ es un isomorfismo de anillos $R \rightarrow [R]$. $[R]$ es un submonoide de $(\mathfrak{m}, \circ, \iota)$. La estructura $(\mathfrak{m}, +, 0, \circ, \iota)$ no es un anillo, pues se cumple la ley distributiva $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$, pero no $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$. Esta propiedad es la única que falta para que $(\mathfrak{m}, +, 0, \circ, \iota)$ sea un anillo.

Denotamos por D a la derivada formal. La aplicación $\delta f = Df(0) : \mathfrak{m} \rightarrow R$ es un epimorfismo de monoïdes entre $(\mathfrak{m}, \circ, \iota)$ y $(R, +, 0)$. Obviamente sobre $[R]$ es el isomorfismo inverso de $a \rightarrow [a]$. Llamamos *morfismo de linealización* a la composición

$$Lf = [Df(0)] : \mathfrak{m} \rightarrow [R]$$

ya que extrae de $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathfrak{m}$ su término lineal $a_1 z = [a_1]$. Es un endomorfismo del monoïde $(\mathfrak{m}, \circ, \iota)$ que además es morfismo de los grupos aditivos. Se deduce que $L : \mathfrak{m}^* \rightarrow [R^*]$ es un morfismo de grupos, en particular $Lf^{-1} = (Lf)^{-1}$.

Como la imagen de L es $[R]$, que es un anillo conmutativo bajo $+$, \circ , las relaciones $L(f+g) = Lf+Lg$ y $L(f \circ g) = Lf \circ Lg$, $L\iota = \iota$ implican que $L(f \circ g) = Lf \circ Lg = Lg \circ Lf = L(g \circ f)$ y $L(f \circ (g+h)) = Lf \circ L(g+h) = Lf \circ (Lg+Lh) = Lf \circ Lg + Lf \circ Lh$. Por

tanto, aunque no sea $(\mathfrak{m}, +, 0, \circ, \iota)$ ni anillo ni conmutativo, L tiene las propiedades de un morfismo de anillos conmutativos. Lo mismo se puede decir de $\delta : \mathfrak{m} \rightarrow R$, $\delta f = Df(0)$.

El conjunto $\iota + \mathfrak{m}^2 = \{f : f \equiv \iota \pmod{\mathfrak{m}^2}\} = \{f : Lf = \iota\}$ es un subgrupo de \mathfrak{m}^* , normal al ser el núcleo de $L : \mathfrak{m}^* \rightarrow [R^*]$ y de $\delta : \mathfrak{m}^* \rightarrow R^*$. Se tiene la descomposición en producto directo

$$\mathfrak{m}^* = [R^*] \circ (\iota + \mathfrak{m}^2) = (\iota + \mathfrak{m}^2) \circ [R^*]$$

que corresponde a la normalización del término lineal: si $f \in \mathfrak{m}^*$, con $\delta f = a \in R^*$, entonces $L([a]^{-1} \circ f) = L(f \circ [a]^{-1}) = \iota$.

Definición 2.1. Dado $a \in R$, es útil considerar el conjunto

$$C_a = \{\lambda \in \mathfrak{m} : \lambda \circ [a] = [a] \circ \lambda\}, \quad C_a^* = C_a \cap \mathfrak{m}^*,$$

de series que conmutan con $[a]$, es decir, tales que $\lambda(az) = a\lambda(z)$. Obviamente $[R] \subseteq C_a$ al ser R conmutativo, y $C_0 = C_1 = \mathfrak{m}$. En general, C_a caracteriza a los conjugados de $[a] : \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda = \mu^{-1} \circ [a] \circ \mu \iff \exists \gamma \in C_a : \mu = \gamma \circ \lambda$.

Lema 2.1. Sea R un anillo íntegro. Entonces

$$C_a = \begin{cases} [R] & \text{si } a \text{ no es raíz de la unidad,} \\ zR[[z^m]] & \text{si } a \text{ es una raíz primitiva } m\text{-ésima de la unidad.} \end{cases}$$

Sea K el cuerpo de fracciones de R y m el orden de a en el grupo multiplicativo K^* . El primer caso se puede considerar como un caso particular del segundo, poniendo $m = \infty$, ya que z -ádicamente se tiene $R[[z^\infty]] = R[[0]] = R$.

Demostración. Sea $\lambda = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n$. Entonces $\lambda \in C_a \iff \lambda(az) - a\lambda(z) = \sum_{n=1}^\infty (a_n a^n - a_n a) z^n = 0 \iff a_n (a^n - a) = 0 \quad \forall n \geq 2$ (para $n = 1$ es automático). Si a no es raíz de la unidad, entonces $a^n \neq a$ para todo $n \geq 2$, y las condiciones se cumplen si y solo si $a_n = 0 \quad \forall n \geq 2$, es decir, $\lambda = [a_1]$.

Si a es una raíz primitiva m -ésima de la unidad, entonces $a^n = a \iff a^{n-1} = 1 \iff n \equiv 1 \pmod{m}$, luego las condiciones son equivalentes a $a_n = 0 \quad \forall n \not\equiv 1 \pmod{m} \iff \lambda = \sum_{n \equiv 1 \pmod{m}} a_n z^n \iff \lambda \in zR[[z^m]]$. \square

Ejemplo 2.1. Si $a = -1$ y $\text{car } R \neq 2$, entonces $m = 2$ y $C_{-1} = zR[[z^2]]$, las series pares.

Nota 2.1. Las condiciones $a_n(a^n - a) = 0, n \geq 2 \iff \lambda \in C_a$ son válidas en cualquier anillo. En general, si e es idempotente, $e^2 = e$, entonces $C_e = \mathfrak{m}$. Si R^0 denota a los divisores de 0 en R , entonces $a, 1 - a^m \notin R^0 \quad \forall m \geq 1 \implies C_a = [R]$.

Lema 2.2.

$$f \equiv g \pmod{z^m} \implies f^n \equiv g^n \pmod{z^{m+n-1}}, \quad f, g \in \mathfrak{m}, \quad m \geq 1.$$

Demostración. Basta observar lo siguiente:

$$f^n - g^n = (f - g)(f^{n-1} + f^{n-2}g + \dots + fg^{n-2} + g^{n-1}) = O(z^m)O(z^{n-1}).$$

\square

Corolario 2.3. $f \equiv az \pmod{z^2} \implies f^n \equiv a^n z^n \pmod{z^{n+1}}$ para $n \geq 0$.

Lema 2.4 (Desarrollos de Taylor). *Sea $f \in R[[z]]$. Si $\mathbb{Z} \subseteq R^*$, entonces en $R[[z, w]]$ se tiene*

$$f(z+w) = f(z) + Df(z)w + \frac{D^2 f(z)}{2!}w^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(z)}{n!}w^n.$$

Demostración. Para potencias $f(z) = z^p$ es simplemente el desarrollo del binomio, ya que $D^n z^p = n! \binom{p}{n} z^{p-n}$ para $n \leq p$ y $D^n z^p = 0$ para $n > p$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n z^p}{n!} w^n = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} z^{p-n} w^n = (z+w)^p$. Por linealidad la fórmula es válida para polinomios, y por continuidad z, w -áda para cualquier serie. \square

Nota 2.2. La fórmula truncada lineal $f(z+w) = f(z) + Df(z)w + O(w^2)$ es válida en cualquier anillo. En general si $1, 2, \dots, p-1 \in R^*$, es válida hasta orden p .

Corolario 2.5.

$$f \circ (g+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n f) \circ g}{n!} h^n = (f \circ g) + (Df \circ g)h + O(h^2), \quad g, h, \in \mathfrak{m}$$

(la aproximación lineal es válida en cualquier anillo).

Lema 2.6. *Para $m \geq 2$,*

$$f = a_1 z + a_m z^m + O(z^{m+1}) \implies f^n = a_1^n z^n + n a_1^{n-1} a_m z^{n+m-1} + O(z^{n+m}).$$

Demostración. Por el Lema 2.2, $f^n = (a_1 z + a_m z^m)^n + O(z^{m+1+n-1})$. Desarrollando el binomio, queda $\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (a_1 z)^{n-l} (a_m z^m)^l + O(z^{n+m})$, y separando los términos de grado $l = 0, 1$, queda $a_1^n z^n + n a_1^{n-1} a_m z^{n+m-1} + O(z^{n+2(m-1)}) + O(z^{n+m}) = a_1^n z^n + n a_1^{n-1} a_m z^{n+m-1} + O(z^{n+m})$. \square

Lema 2.7 (Fórmula de Composición Iterada). *Si $f = \varphi + b z^{m+1} + O(z^{m+2})$, con $m \geq 1$, y $f = \varphi = a z + O(z^2)$, entonces para todo $n \geq 1$,*

$$f^{\circ n} = \varphi^{\circ n} + a^{n-1} b (1 + a^m + a^{2m} + \cdots + a^{(n-1)m}) z^{m+1} + O(z^{m+2}).$$

Demostración. Por inducción en n . El caso $n = 1$ es trivial. Suponiendo cierta la fórmula para n , y usando la aproximación lineal de Taylor, se tiene

$$\begin{aligned} f^{\circ(n+1)} &= f^{\circ n} \circ f = \varphi^{\circ n} \circ f + a^{n-1} b (1 + a^m + \cdots + a^{(n-1)m}) f^{m+1} + O(f^{m+2}) \\ &= \varphi^{\circ n} (\varphi + b z^{m+1} + O(z^{m+2})) \\ &\quad + a^{n-1} b (1 + a^m + \cdots + a^{(n-1)m}) (a^{m+1} z^{m+1} + O(z^{m+2})) \\ &\quad + O(z^{m+2}) \\ &= \varphi^{\circ n} (\varphi) + (D\varphi^{\circ n})(\varphi) \cdot (b z^{m+1} + O(z^{m+2})) + O(z^{2m+2}) \\ &\quad + a^{m+n} b (1 + a^m + \cdots + a^{(n-1)m}) z^{m+1} + O(z^{m+2}) \\ &= \varphi^{\circ(n+1)} + (D\varphi^{\circ n})(\varphi) \cdot b z^{m+1} \\ &\quad + a^n b (a^m + a^{2m} + \cdots + a^{nm}) z^{m+1} + O(z^{m+2}) \end{aligned}$$

y ahora

$$\varphi = a z + O(z^2) \implies \varphi^{\circ n} = a^n z + O(z^2)$$

$$\begin{aligned} &\implies D\varphi^{\circ n} = a^n + O(z) \\ &\implies D\varphi^{\circ n}(\varphi) = a^n + O(\varphi) = a^n + O(z) \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} f^{\circ(n+1)} &= \varphi^{\circ(n+1)} + a^n b z^{m+1} + a^n b (a^m + a^{2m} + \dots + a^{nm}) z^{m+1} + O(z^{m+2}) \\ &= \varphi^{\circ(n+1)} + a^n b (1 + a^m + a^{2m} + \dots + a^{nm}) z^{m+1} + O(z^{m+2}) \end{aligned}$$

lo cual demuestra la fórmula para $n + 1$. □

Nota 2.3. El lema es válido para cualquier anillo, ya que sólo usamos el desarrollo de Taylor lineal. Esta fórmula generaliza el Teorema 2.6.4 de [1].

Corolario 2.8. *Si $f = \varphi + bz^{m+1} + O(z^{m+2})$, $f \equiv \varphi \equiv z \pmod{z^2}$, entonces $f^{\circ n} = \varphi^{\circ n} + nbz^{m+1} + O(z^{m+2})$, $m \geq 1$.*

3. TÉRMINO LINEAL LIBRE DE TORSIÓN: TEORÍA DE SCHRÖDER

Teorema 3.1. *Sea $\alpha \in \mathfrak{m}^*$, $a \in R^*$ con $\alpha \equiv [a] \pmod{\mathfrak{m}^2}$. Si $1 - a^m \in R^*$ para todo $m \geq 1$, existe una única $\lambda \equiv \iota \pmod{\mathfrak{m}^2}$, tal que $\alpha = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda$.*

Demostración. Empezamos con la unicidad. Si $\lambda, \mu \in \mathfrak{m}$, y $a, 1 - a^m \in R^*$ para todo $m \geq 1$, entonces $\lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda = \mu^{-1} \circ [a] \circ \mu \iff \mu \circ \lambda^{-1} \in C_a = [R]$ (Lema 2.1) $\iff \exists c \in R : \mu = [c] \circ \lambda = c\lambda$, luego cuando normalizamos poniendo $\lambda \equiv \mu \equiv z \pmod{z^2}$, obtenemos $c = 1$, por tanto $\mu = \lambda$.

La normalización es siempre posible, pues dado cualquier $\lambda \in \mathfrak{m}^*$ tal que $\alpha = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda$, para todo $c \in R^*$ tenemos $([c] \circ \lambda)^{-1} \circ [a] \circ ([c] \circ \lambda) = \lambda^{-1} \circ [c]^{-1} \circ [a] \circ [c] \circ \lambda = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda = \alpha$ de modo que eligiendo $c = a^{-1}$ normaliza λ y preserva la conjugación. Esto funciona porque al ser R conmutativo, $[R] \subseteq C_a$.

Construimos λ mediante aproximaciones sucesivas $\lambda_m = \sum_{n=1}^m \ell_n z^n$ tales que $\lambda_m \circ \alpha \equiv a\lambda_m \pmod{z^{m+1}}$. Para $m = 1$ esto se reduce a la igualdad de los términos lineales: $\lambda_1 = \iota$ y $L(\lambda_1 \circ \alpha) = L\alpha = [a]$, $L(a\lambda_1) = L([a]) = [a]$. Supongamos que hemos construido ℓ_1, \dots, ℓ_m tales que $\lambda_m \circ \alpha \equiv a\lambda_m \pmod{z^{m+1}}$. Buscamos $\ell = \ell_{m+1}$ tal que $\lambda_{m+1} = \lambda_m + \ell z^{m+1}$ satisfaga $\lambda_{m+1} \circ \alpha \equiv a\lambda_{m+1} \pmod{z^{m+2}}$. Sean $\mu, \tilde{\alpha} \in R[[z]]$ definidas por $\alpha = z\tilde{\alpha}$ y $\lambda_m \circ \alpha - a\lambda_m = z^{m+1}\mu$. Observar que $\tilde{\alpha}(0) = a$. Entonces

$$\begin{aligned} &\lambda_{m+1} \circ \alpha \equiv a\lambda_{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ \iff &(\lambda_m + \ell z^{m+1}) \circ \alpha \equiv a\lambda_m + a\ell z^{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ \iff &\lambda_m \circ \alpha + \ell \alpha^{m+1} \equiv a\lambda_m + a\ell z^{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ \iff &\lambda_m \circ \alpha - a\lambda_m \equiv a\ell z^{m+1} - \ell \alpha^{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ \iff &z^{m+1}\mu \equiv a\ell z^{m+1} - \ell z^{m+1} \tilde{\alpha}^{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ \iff &\mu \equiv a\ell - \ell \tilde{\alpha}^{m+1} \pmod{z} \\ \iff &\mu(0) = a\ell - \ell \tilde{\alpha}(0)^{m+1} \\ \iff &\mu(0) = a\ell - \ell a^{m+1} \\ \iff &\ell(a - a^{m+1}) = \mu(0) \end{aligned}$$

y como $a - a^{m+1} \in R^*$ para todo m , podemos resolver esta ecuación, quedando $\ell = \ell_{m+1} = (a - a^{m+1})^{-1} \mu(0)$. \square

El teorema dice que α es conjugada a su linealización $L\alpha$. Como sistemas dinámicos en la topología formal, α y $L\alpha$ son topológicamente conjugados. Escribiremos $\alpha \sim \beta$ si α, β son conjugados por un elemento $\lambda \in \mathfrak{m}^*$.

Definición 3.1. La función normalizada λ que realiza la conjugación se llama *función de Schröder* de α .

La «ecuación de Schröder» $\lambda(\alpha(z)) = a\lambda(z)$ fue introducida por E. Schröder en *Math. Annalen* **3** (1871), en el contexto del desarrollo asintótico del término general x_n de una sucesión de iteraciones $x_{n+1} = f(x_n)$ de un punto x_0 por una función analítica f , en el caso de ser $|f'(0)| < 1$. El Teorema del Punto Fijo de Banach implica que $\lim_n x_n$ es un punto fijo atractor de f . Ver [3], cap. 8. Para los aspectos de eficiencia computacional, ver [4], p. 512–513 y [2]. El Teorema 3.1 es una generalización de la Proposición 4 de [9].

Obsérvese además que Lf es la única serie lineal que puede ser conjugada a f , ya que $f = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda \implies Lf = L\lambda^{-1} \circ L[a] \circ L\lambda = (L\lambda)^{-1} \circ [a] \circ L\lambda = [a]$.

Corolario 3.2. Si $R = K$ es un cuerpo, entonces $f \sim Lf$ si $\delta f \in K^*$ no es una raíz de la unidad, es decir, $\delta f \notin \text{Tor } K^*$ (torsión multiplicativa).

Demostración. Sea $a = \delta f$. Se tiene $a^m \neq 1$ para todo $m \geq 1$; por tanto $a, 1 - a^m \in K^*$. \square

Corolario 3.3. Si R es íntegro, con cuerpo de fracciones K , entonces $f \sim Lf$ en $K[[z]]$ si $\delta f \neq 0$ no es una raíz de la unidad.

Nota 3.1. La función de Schröder existe, pero en $K[[z]]$, no necesariamente en $R[[z]]$. Por ejemplo, considerar el anillo de enteros p -ádicos $R = \mathbb{Z}_p$ y $a = q$ donde q es un primo que satisface $q \equiv 1 \pmod{p}$. Ciertamente $q \in R^*$, q no es una raíz de la unidad, pero ningún $1 - q^m$ es una unidad en R ; por tanto estos términos introducen denominadores en la función de Schröder.

Teorema 3.4 (RAÍCES COMPOSICIONALES I). Sea $\alpha \in \mathfrak{m}^*$ con $\alpha \equiv [a] \pmod{\mathfrak{m}^2}$, de modo que $a \in R^*$. Suponer que $1 - a^m \in R^*$ para todo $m \geq 1$. Para todo $p \geq 1$, hay una correspondencia biunívoca entre los $b \in R^*$ tales que $b^p = a$, y los $\beta \in \mathfrak{m}^*$ tales que $\beta^{\circ p} = \alpha$, dada por $\delta\beta = b$.

Demostración. Sea λ la función de Schröder de α , o sea, $\alpha = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda$. Suponer que $\beta^{\circ p} = \alpha$, con $\delta\beta = b$. Como δ es un morfismo de monoides, $b^p = a$. Entonces $b \in R^*$ y como $1 - a^m = 1 - b^{pm} = (1 - b^m)(1 + b^m + \dots + b^{(p-1)m}) \in R^*$, se tiene $1 - b^m \in R^*$ para todo $m \geq 1$; por tanto β es conjugada a $L\beta = [b]$. Sea μ la función de Schröder de β , de modo que $\beta = \mu^{-1} \circ [b] \circ \mu$. Entonces $\alpha = \beta^{\circ p} = (\mu^{-1} \circ [b] \circ \mu)^{\circ p} = \mu^{-1} \circ [b]^{\circ p} \circ \mu = \mu^{-1} \circ [b^p] \circ \mu = \mu^{-1} \circ [a] \circ \mu$. Por unicidad de la función de Schröder, $\mu = \lambda$. Por tanto toda solución de $\beta^{\circ p} = \alpha$ debe ser de la forma $\beta = \lambda^{-1} \circ [b] \circ \lambda$, donde $b = \delta\beta$ satisface $b^p = a$. Recíprocamente, dada una tal b , $\beta = \lambda^{-1} \circ [b] \circ \lambda$ es una solución de $\beta^{\circ p} = \alpha$. Esto demuestra que $b \rightarrow \lambda^{-1} \circ [b] \circ \lambda$

es una correspondencia biunívoca entre las soluciones de $b^p = a$ y de $\beta^{op} = \alpha$. La correspondencia inversa es $\beta \rightarrow \delta\beta$. \square

Diremos que la serie β levanta b si $\delta\beta = b$, y que β está por encima de b . Hemos demostrado que toda solución $b \in R^*$ de $b^p = a$ levanta de manera única a una solución de $\beta^{op} = \alpha$, y todas las soluciones de $\beta^{op} = \alpha$ se obtienen así.

Corolario 3.5. *Sea K un cuerpo y $\alpha \in \mathfrak{m}^*(K)$ tal que $\delta\alpha = D\alpha(0)$ no es una raíz de la unidad. Entonces dado $p \geq 1$, para cada $b \in K^*$ tal que $b^p = a$, hay una única $\beta \in \mathfrak{m}^*$ tal que $\delta\beta = b$ y $\beta^{op} = \alpha$, y todas las soluciones de $\beta^{op} = \alpha$ se obtienen de esta manera. En particular, hay a lo sumo p soluciones.*

Corolario 3.6. *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y $\alpha \in \mathfrak{m}^*(K)$ tal que $\delta\alpha = D\alpha(0)$ no es una raíz de la unidad. Si $p \geq 1$ es primo con la característica de K , entonces $\beta^{op} = \alpha$ tiene exactamente p soluciones, por encima de las p soluciones de $b^p = a$ (la condición sobre p implica que $x^p - a$ es separable).*

Los casos particulares del Teorema 3.4 y los corolarios para $R = \mathbb{C}$ son tratados en [8], donde se trata una forma alternativa de calcular las soluciones.

4. RAÍCES COMPOSICIONALES DE LA IDENTIDAD

Si $R = K$ es un cuerpo, hemos visto que cualquier $f \in K[[z]]$ con $\delta f \notin \text{Tor } K^*$ es conjugada a Lf . Si $\delta f = a \in \text{Tor } K^*$, y $a^m = 1$, entonces $f = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda$, $\lambda \in \mathfrak{m}^* \implies f^{om} = \lambda^{-1} \circ [a]^{om} \circ \lambda = \lambda^{-1} \circ [a^m] \circ \lambda = \lambda^{-1} \circ [1] \circ \lambda = \iota$, de modo que la única manera que f puede ser conjugada a Lf es si f es una raíz composicional de ι . Esto plantea la determinación de dichas raíces, y la cuestión de si son conjugadas a su parte lineal. Volvamos al caso de un anillo general. Para $h \in \mathfrak{m}$, sea h^* el endomorfismo de R -álgebras $h^*(f) = f \circ h$.

Teorema 4.1. *Si $\varphi^{on} = \iota$ y $n \in R^*$, entonces φ es conjugada a su parte lineal.*

Demostración. Sea $\omega = \delta\varphi$, de modo que $\omega^n = 1$. Queremos encontrar $\lambda \in \mathfrak{m}^*$ tal que $\lambda \circ \varphi = \omega\lambda$, equivalentemente, $\varphi^*(\lambda) = \omega\lambda$. Consideremos por tanto el endomorfismo de R -módulos $S = \varphi^* - \omega 1$. Si $\varphi^{on} = \iota$, entonces $\varphi^{*n} = 1$; luego si

$$\Delta = \varphi^{*(n-1)} + \omega\varphi^{*(n-2)} + \dots + \omega^{n-2}\varphi^* + \omega^{n-1}1$$

entonces $\Delta S = S\Delta = \varphi^{*n} - \omega^n = \varphi^{*n} - 1 = 0$. Poniendo $\lambda = \Delta\iota$ da un elemento obvio de $\ker S$, $\lambda = \Delta\iota = \varphi^{o(n-1)} + \omega\varphi^{o(n-2)} + \dots + \omega^{n-2}\varphi + \omega^{n-1}\iota$, y además $\lambda \equiv n\omega^{n-1}\iota = n\omega^{-1}\iota \pmod{\mathfrak{m}^2}$, luego si $n \in R^*$, λ es invertible. \square

El Lema 4 de [7], que se demuestra mediante el Teorema de Riemann para regiones simplemente conexas en \mathbb{C} , es una versión analítica del Teorema 4.1.

Nota 4.1. $\text{img } \Delta \subseteq \ker S$ ya que $S\Delta = 0$. Si n es invertible, entonces se da la igualdad: $S\lambda = 0 \iff \varphi^*\lambda = \omega\lambda \implies \Delta\lambda = n\omega^{n-1}\lambda \implies \lambda = \Delta \frac{\omega}{n} \lambda \in \text{img } \Delta$. La función conjugante λ está determinada salvo composición a la izquierda con una serie de $C_\omega^* : \lambda^{-1} \circ [\omega] \circ \lambda = \mu^{-1} \circ [\omega] \circ \mu \iff \exists \gamma \in C_\omega^* : \mu = \gamma \circ \lambda$. Si $d \mid n$ es el orden de ω , recordar que $C_\omega = zR[[z^d]]$.

Corolario 4.2. *Si $n \in R^*$ y $\varphi^{on} = \iota$, con $\varphi \equiv \iota \pmod{\mathfrak{m}^2}$, entonces $\varphi = \iota$.*

Demostración. $\varphi \equiv \iota$ mód \mathfrak{m}^2 significa que $\delta\varphi = \omega = 1$, luego φ es conjugada a $[1] = \iota$, por tanto φ es igual a ι . \square

Corolario 4.3. Si $\varphi^{\circ n} = [\omega]$ con $\omega^m = 1$ y $m, n \in R^*$, entonces $\varphi \sim L\varphi$, ya que $\varphi^{\circ nm} = [\omega]^{\circ m} = [\omega^m] = \iota$.

Lema 4.4. Supongamos que α satisface $\alpha \sim L\alpha$ y que toda raíz n -ésima composicional β de α también satisface $\beta \sim L\beta$. Sea $\alpha = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda$. Entonces $\beta^{\circ n} = \alpha \iff \beta = \mu^{-1} \circ [b] \circ \mu$, donde $b^n = a$ y $\mu = \gamma \circ \lambda, \gamma \in C_a^*$.

Demostración. Primero, veamos que tales elementos son de hecho raíces composicionales n -ésimas. Si $\beta = \mu^{-1} \circ [b] \circ \mu$, con $b^n = a$ y $\mu = \gamma \circ \lambda, \gamma \in C_a^*$, entonces $\beta^{\circ n} = \mu^{-1} \circ [b]^{\circ n} \circ \mu = \mu^{-1} \circ [b^n] \circ \mu = \mu^{-1} \circ [a] \circ \mu = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda = \alpha$.

Ahora supongamos que $\beta^{\circ n} = \alpha$ es cualquier raíz. Sea $b = \delta\beta$. Entonces $b^n = a$. Como $\beta \sim L\beta = [b]$, existe un $\mu \in \mathfrak{m}^*$ tal que $\beta = \mu^{-1} \circ [b] \circ \mu$. Entonces $\alpha = \beta^{\circ n} = \mu^{-1} \circ [b^n] \circ \mu = \mu^{-1} \circ [a] \circ \mu$; por tanto $\mu^{-1} \circ [a] \circ \mu = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda$, luego $\mu = \gamma \circ \lambda$ con $\gamma \in C_a^*$. \square

Teorema 4.5. Sean $m, n \in R^*$, y $a \in R$ tales que $a^m = 1$. Las soluciones de la ecuación $\beta^{\circ n} = [a]$ son los conjugados de $[b]$ por elementos de C_a^* , donde b es una solución de la ecuación $b^n = a$ en R .

Demostración. $\alpha = [a]$ satisface $\alpha \sim L\alpha$ trivialmente, con $\lambda = \iota$ como función conjugante. Si $\beta^{\circ n} = [a]$, entonces $\beta \sim L\beta$ ya que $\beta^{\circ nm} = \iota$. Por el lema, $\beta^{\circ n} = [a] \iff \beta = \mu^{-1} \circ [b] \circ \mu$, con $\mu = \gamma \in C_a^*$ y $b^n = a$. \square

Corolario 4.6. Si $n \in R^*$, las raíces composicionales n -ésimas de ι son los conjugados por \mathfrak{m}^* de $[\omega]$, $\omega \in R$, $\omega^n = 1$.

Demostración. Este es el caso $m = 1$, y el hecho que $C_1^* = \mathfrak{m}^*$. \square

Corolario 4.7. Si $2 \in R^*$, las series $f \in \mathfrak{m}$ tales que $f \circ f = \iota$ son $f = \lambda^{-1} \circ -\iota \circ \lambda$ donde $\lambda \in \mathfrak{m}^*$.

Demostración. Este es el caso $n = 2, m = 1$. \square

Teorema 4.8. Sea K un cuerpo de característica 0, $a \in K^*$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, las soluciones de la ecuación $\beta^{\circ n} = [a]$ son los conjugados de $[b]$ por elementos de C_a^* , donde $b \in K$ es una solución de $b^n = a$.

Demostración. Como $[a] = L[a], [a] \sim L[a]$ trivialmente por ι . Sea $\beta^{\circ n} = [a]$, con $b = \delta\beta$. Si $a \in \text{Tor}(K^*)$, entonces $\beta \sim L\beta$ porque es una raíz composicional de ι . Si $a \notin \text{Tor}(K^*)$, entonces como $b^n = a$, también $b \notin \text{Tor}(K^*)$, y por tanto $\beta \sim L\beta$ por la teoría de funciones de Schröder. Así que cualquier $\alpha = [a]$ satisface las hipótesis del Lema 4.4, con $\lambda = \iota$, y el resultado se deduce de él. \square

Nota 4.2. Si $a \notin \text{Tor}(K^*)$, entonces $C_a = [K]$; por tanto cualquier $\gamma \in C_a^*$ tiene la forma $\gamma = [c]$, con $c \in K^*$, y $\gamma^{-1} \circ [b] \circ \gamma = [c^{-1}bc] = [b]$ para cualquier b . El teorema dice que en este caso las soluciones de $\beta^{\circ n} = [a]$ son precisamente los elementos $\beta = [b]$ para cada solución b de $b^n = a$. Esto también se podía deducir usando funciones de Schröder: si $a \notin \text{Tor}(K^*)$, la función de Schröder de $\alpha = [a]$

existe y está caracterizada por $\lambda \in \iota + \mathfrak{m}^2$ y $[a] = \lambda^{-1} \circ [a] \circ \lambda$. En otras palabras, $\lambda \in C_a^* = [K^*]$, y $\delta\lambda = 1$, por tanto de hecho $\lambda = \iota$. Hemos mostrado que las soluciones de $\beta^{\circ n} = [a]$ son los conjugados $\beta = \lambda^{-1} \circ [b] \circ \lambda$, donde $b^n = a$. Como $\lambda = \iota$ en este caso, $\beta = [b]$.

5. RAÍCES COMPOSICIONALES EN $\iota + \mathfrak{m}^2$. ITERACIÓN CONTINUA

Teorema 5.1. *Sea $\alpha \equiv \iota \pmod{\mathfrak{m}^2}$, $p \geq 1$. Si $p \in R^*$, hay una única serie $\beta \equiv \iota \pmod{\mathfrak{m}^2}$ tal que $\beta^{\circ p} = \alpha$.*

Demostración. Sea $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, con $a_1 = 1$. Sea $\alpha_m = \sum_{n=1}^m a_n z^n$. Construimos por aproximaciones sucesivas una sucesión b_n tal que $\beta_m = \sum_{n=1}^m b_n z^n$ satisfice $\beta_m^{\circ p} \equiv \alpha_m \pmod{z^{m+1}}$ para todo $m \geq 1$. Si $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, tomando el límite queda $\beta^{\circ p} = \alpha$.

Definimos $b_1 = 1$. Entonces $\beta_1 = \iota$ satisfice la condición con $m = 1$. Suponemos que hemos hallado b_1, b_2, \dots, b_m tales que $\beta_m^{\circ p} \equiv \alpha_m \pmod{z^{m+1}}$. Sea $\alpha_m - \beta_m^{\circ p} = z^{m+1} \rho_m$, de modo que ρ_m solo depende de $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$. Demostraremos que hay un único $b = b_{m+1}$ tal que $\beta_{m+1} = \beta_m + bz^{m+1}$ satisfice $\beta_{m+1}^{\circ p} \equiv \alpha_{m+1} \pmod{z^{m+2}}$. Recordando que $\beta_{m+1} = \beta_m + bz^{m+1} + O(z^{m+2})$, $\beta_{m+1} \equiv \beta_m \equiv z \pmod{z^2} \implies \beta_{m+1}^{\circ p} = \beta_m^{\circ p} + pbz^{m+1} + O(z^{m+2})$, tenemos

$$\begin{aligned} \beta_{m+1}^{\circ p} \equiv \alpha_{m+1} \pmod{z^{m+2}} &\iff \beta_m^{\circ p} + pbz^{m+1} \equiv \alpha_{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ &\iff \beta_m^{\circ p} + pbz^{m+1} \equiv \alpha_m + a_{m+1}z^{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ &\iff pbz^{m+1} \equiv (\alpha_m - \beta_m^{\circ p}) + a_{m+1}z^{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ &\iff pbz^{m+1} \equiv \rho_m z^{m+1} + a_{m+1}z^{m+1} \pmod{z^{m+2}} \\ &\iff pb \equiv \rho_m + a_{m+1} \pmod{z} \\ &\iff pb = \rho_m(0) + a_{m+1} \end{aligned}$$

luego si p es invertible en R , esto equivale a

$$b_{m+1} = \frac{\rho_m(0) + a_{m+1}}{p}$$

lo cual expresa b_{m+1} por recurrencia en términos de $a_1, \dots, a_{m+1}, b_1, \dots, b_m$. Por tanto una vez puesto $b_1 = 1$, los demás b_m están determinados de manera única por las condiciones $\beta_m^{\circ p} \equiv \alpha_m \pmod{z^{m+1}}$.

Como cualquier $\tilde{\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n z^n$ que satisfice $\tilde{\beta}^{\circ p} = \alpha$ automáticamente satisfice $\tilde{\beta}_m^{\circ p} \equiv \tilde{\beta}^{\circ p} = \alpha \equiv \alpha_m \pmod{z^{m+1}}$, la construcción previa muestra que si $\tilde{b}_1 = 1$, entonces $\tilde{\beta} = \beta$. □

No hemos encontrado una referencia explícita al resultado del Teorema 5.1 en la literatura consultada.

Corolario 5.2. *Si R tiene característica 0, y $\mathbb{Q} \subseteq R$, entonces $(\iota + \mathfrak{m}^2, \circ, \iota)$ es un grupo divisible, con raíces únicas.*

También podemos usar el teorema para dar otra demostración del resultado:

Corolario 5.3. *Si $p \in R^*$ y $\varphi^{\circ p} = \iota$, con $\varphi \equiv \iota \pmod{\mathfrak{m}^2}$, entonces $\varphi = \iota$.*

Demostración. ι satisface $\iota^{\circ p} = \iota$, y $\iota \equiv \iota \pmod{\mathfrak{m}^2}$. Por la unicidad expresada en el teorema, $\varphi = \iota$. □

Procederemos ahora a esbozar la teoría de Brent y Traub, [2]. El propósito de su trabajo era dar métodos efectivos de cálculo para las potencias composicionales de una serie. Reformulamos su método algebraicamente para definir una potencia composicional en $\iota + \mathfrak{m}^2$ con exponentes en R cuando R es un cuerpo de característica 0.

Definición 5.1. Dados $\alpha \in \mathfrak{m}$, $\varphi \in R[[z]]$, definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \{f \in \mathfrak{m} : \varphi \circ f = \varphi Df\}, \\ M_\varphi^* &= M_\varphi \cap \mathfrak{m}^*, \\ M'_\alpha &= \{\varphi \in R[[z]] : \alpha \in M_\varphi\}. \end{aligned}$$

Proposición 5.4. M_φ es un submonoide de $(\mathfrak{m}, \circ, \iota)$. M_φ^* es un subgrupo de \mathfrak{m}^* . M'_α es un R -submódulo de $R[[z]]$.

Demostración. M_φ es un submonoide de \mathfrak{m} puesto que $\varphi \circ \iota = \varphi = \varphi D\iota$, luego $\iota \in M_\varphi$, y si $f, g \in M_\varphi$ entonces $\varphi \circ f = \varphi Df$, $\varphi \circ g = \varphi Dg \implies \varphi \circ f \circ g = (\varphi Df) \circ g = (\varphi \circ g)(Df \circ g) = \varphi Dg(Df \circ g) = \varphi D(f \circ g) \implies f \circ g \in M_\varphi$. M_φ^* es un subgrupo de \mathfrak{m}^* puesto que $f \in M_\varphi \cap \mathfrak{m}^* \implies \varphi \circ f = \varphi Df \implies \varphi = (\varphi \circ f^{-1})(Df \circ f^{-1}) \implies \varphi Df^{-1} = (\varphi \circ f^{-1})(Df \circ f^{-1})Df^{-1} = (\varphi \circ f^{-1})D(f \circ f^{-1}) = \varphi \circ f^{-1} \implies f^{-1} \in M_\varphi$. Finalmente, $M'_\alpha = \{\varphi : \varphi \circ \alpha = \varphi D\alpha\} = \{\varphi : (\alpha^* - D\alpha)\varphi = 0\} = \ker(\alpha^* - D\alpha)$, donde para $\beta \in R[[z]]$, denotamos también por β al endomorfismo dado por la multiplicación por $\beta : f \rightarrow \beta f$. Esto demuestra que M'_α es un R -submódulo de $R[[z]]$. Por supuesto $\alpha \in M_\varphi \iff \varphi \in M'_\alpha$. □

Nota 5.1. Supongamos de ahora en adelante en esta sección que $R = K$ es un cuerpo de característica 0. El siguiente teorema reúne los resultados de [5], Lema 9.4 y su aplicación a la computación de iteraciones en [4], § 4.7.

Teorema 5.5.

- (1) Dada $\alpha \in \iota + \mathfrak{m}^2$ con $m = \text{ord}(\alpha - \iota)$, hay una única $\varphi \in \iota^m + \mathfrak{m}^{m+1}$ tal que $\alpha \in M_\varphi$.
- (2) Dada $\varphi \in \iota^m + \mathfrak{m}^{m+1}$, con $m \geq 2$, y $a \in K$, hay una única $\alpha \in \iota + \mathfrak{m}^2$ tal que $\alpha = z + az^m + O(z^{m+1})$ y $\alpha \in M_\varphi$.

Demostración.

(1) (Unicidad). La hipótesis sobre α significa que es de la forma

$$\alpha = z + a_m z^m + O(z^{m+1}), \quad D\alpha = 1 + ma_m z^{m-1} + O(z^m), \quad a_m \neq 0.$$

El resultado dice que $M'_\alpha \cap (\iota^m + \mathfrak{m}^{m+1})$ es un punto. Suponer que $\varphi, \psi \in M'_\alpha \cap (\iota^m + \mathfrak{m}^{m+1})$. Entonces $\varphi - \psi \in M'_\alpha \cap \mathfrak{m}^{m+1}$. Se podrá concluir el resultado si podemos demostrar que

$$\alpha \in \iota + \mathfrak{m}^2, \quad \text{ord}(\alpha - \iota) = m \implies M'_\alpha \cap \mathfrak{m}^{m+1} = (0),$$

lo cual equivale a

$$M'_\alpha \cap \mathfrak{m}^n = (0) \quad \alpha \in \iota + \mathfrak{m}^2, \quad n > \text{ord}(\alpha - \iota).$$

Interpretando $\mathfrak{m}^\infty = (0)$, este resultado también es válido para $m = \infty$.

Supongamos que $f \in M'_\alpha \cap \mathfrak{m}^{m+1}$. Si $f \neq 0$, podemos escribir $f = \sum_{n=\mu}^\infty c_n z^n$, con $\mu \geq m+1$ y $c_\mu \neq 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} 0 = f \circ \alpha - fD\alpha &= \sum_{n=\mu}^\infty c_n (\alpha^n - z^n D\alpha) \\ &= \sum_{n=\mu}^\infty c_n (z^n + na_m z^{m+n-1} - z^n - ma_m z^{m+n-1} + O(z^{m+n})) \\ &= \sum_{n=\mu}^\infty c_n (n-m)a_m z^{m+n-1} + \sum_{n=\mu}^\infty O(z^{m+n}) \\ &= \sum_{n=\mu}^\infty c_n (n-m)a_m z^{m+n-1} + O(z^{m+\mu}) \\ &= c_\mu (\mu-m)a_m z^{m+\mu-1} + O(z^{m+\mu}) \end{aligned}$$

y por tanto debe ser $c_\mu (\mu-m)a_m = 0$. Pero por hipótesis, ninguno de estos factores son 0, luego llegamos a una contradicción; por consiguiente $f = 0$.

(2) (Unicidad). Supongamos que $\alpha, \beta \in M_\varphi$ con $\alpha, \beta \in z + az^m + \mathfrak{m}^{m+1}$. Observar que $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}^*$. Primero, tenemos que demostrar que

$$f = z + az^m + O(z^{m+1}) \implies f^{-1} = z - az^m + O(z^{m+1}).$$

Esto se hace fácilmente. Sea $g = f^{-1} = \sum_{n=1}^\infty b_n z^n$. Entonces $g^m = b_1^m z^m + O(z^{m+1}) \implies z = f \circ g = g + ag^m + O(z^{m+1}) = b_1 z + \dots + b_m z^m + ab_1^m z^m + O(z^{m+1}) \implies b_1 = 1, \quad b_m + ab_1^m = b_m + a = 0 \implies b_m = -a$.

Ahora $\alpha, \beta \in M_\varphi^* \implies \alpha \circ \beta^{-1} \in M_\varphi^*$, y $\alpha \circ \beta^{-1} = \beta^{-1} + a(\beta^{-1})^m + O(z^{m+1}) = z - az^m + az^m + O(z^{m+1}) = z + O(z^{m+1}) \in (\mathfrak{i} + \mathfrak{m}^{m+1}) \cap M_\varphi$, luego para concluir que $\alpha = \beta$, basta con demostrar que

$$\text{ord}(\varphi) = m \implies (\mathfrak{i} + \mathfrak{m}^{m+1}) \cap M_\varphi = (\mathfrak{i})$$

lo cual equivale a

$$(\mathfrak{i} + \mathfrak{m}^n) \cap M_\varphi = (\mathfrak{i}), \quad n > \text{ord}(\varphi).$$

Esto se puede demostrar de manera similar al primer caso. Igual que antes, el caso $m = \infty$ es trivial, así que supongamos $m < \infty$. Si $f \in \mathfrak{i} + \mathfrak{m}^{m+1}$, $f \neq \mathfrak{i}$, entonces $f = z + a_\mu z^\mu + O(z^{\mu+1})$, con $\mu \geq m+1$, $a_\mu \neq 0$. Sea $\varphi = \sum_{n=m}^\infty b_n z^n$, con $b_m \neq 0$. Ahora, si $f \in M_\varphi$, entonces

$$0 = \varphi \circ f - \varphi Df = \sum_{n=m}^\infty b_n (f^n - z^n Df) = b_m (m-\mu)a_\mu z^{m+\mu-1} + O(z^{m+\mu})$$

pero $b_m (m-\mu)a_\mu \neq 0$ ya que $b_m, a_\mu \neq 0$, $m < \mu$. Por tanto si $f \in (\mathfrak{i} + \mathfrak{m}^{m+1}) \cap M_\varphi$, debe ser $f = \mathfrak{i}$.

(1) (Construcción). Dada $\alpha = z + a_m z^m + O(z^{m+1})$, $m \geq 2$, $a_m \neq 0$, construimos por aproximaciones sucesivas una sucesión $\varphi_n = z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \dots + b_{m+n-1} z^{m+n-1}$ tal que $\varphi_n \circ \alpha \equiv \varphi_n D\alpha \pmod{z^{2m+n-1}}$. Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ nos da la φ requerida.

Empezamos con $\varphi_1 = z^m$. Debemos verificar que $\varphi_1 \circ \alpha \equiv \varphi_1 D\alpha$ mód z^{2m} . En general, para cualquier $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} z^n \circ \alpha - z^n D\alpha &= \alpha^n - z^n D\alpha \\ &= z^n + na_m z^{m+n-1} + O(z^{m+n}) - z^n(1 + ma_m z^{m-1} + O(z^m)) \\ &= (n-m)a_m z^{m+n-1} + O(z^{m+n}). \end{aligned}$$

Para $n = m$ esto se reduce a $O(z^{2m})$, como queríamos.

Supongamos que $n \geq 1$ y que hemos encontrado $b_m = 1, b_{m+1}, \dots, b_{m+n-1}$ tales que $\varphi_n \circ \alpha \equiv \varphi_n D\alpha$ mód z^{2m+n-1} . Sea $\varphi_n \circ \alpha - \varphi_n D\alpha = z^{2m+n-1}\psi$. Poniendo $\varphi_{n+1} = \varphi_n + bz^{m+n}$, tenemos que encontrar $b = b_{m+n}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} \circ \alpha &\equiv \varphi_{n+1} D\alpha \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff \varphi_n \circ \alpha + b\alpha^{m+n} &\equiv \varphi_n D\alpha + bz^{m+n} D\alpha \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff \varphi_n \circ \alpha - \varphi_n D\alpha &\equiv b(z^{m+n} D\alpha - \alpha^{m+n}) \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff z^{2m+n-1}\psi &\equiv b(z^{m+n} D\alpha - \alpha^{m+n}) \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff z^{2m+n-1}\psi &\equiv -bna_m z^{2m+n-1} \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff \psi &\equiv -bna_m \text{ mód } z \\ \iff \psi(0) &= -bna_m \end{aligned}$$

de modo que, efectivamente, la solución es única:

$$b_{m+n} = -\frac{\Psi(0)}{na_m}.$$

Obsérvese la importancia de tener $\alpha \equiv \iota$ mód \mathfrak{m}^2 . Si hubiera otro coeficiente de primer grado, sus potencias no cancelarían de manera tan efectiva en $z^n \circ \alpha - z^n D\alpha$. (2) (Construcción). Dada $\varphi = z^m + O(z^{m+1})$, construimos por aproximaciones sucesivas una sucesión $\alpha_n = z + az^m + a_{m+1}z^{m+1} + \dots + a_{m+n-1}z^{m+n-1}$ tal que $\varphi \circ \alpha_n \equiv \varphi D\alpha_n$ mód z^{2m+n-1} . Tomando límites nos da la serie α requerida.

Empezamos con $\alpha_1 = z + az^m$. Debemos verificar que $\varphi \circ \alpha_1 \equiv \varphi D\alpha_1$ mód z^{2m} . En general, recordando que si $\varphi = \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n$ y $f = z + a_\mu z^\mu + O(z^{\mu+1})$, con $\mu \geq 2$, entonces $\varphi \circ f - \varphi Df = b_m(m-\mu)a_\mu z^{m+\mu-1} + O(z^{m+\mu})$, para $f = \alpha_1$ se tiene $\mu = m$, y la expresión se reduce a $O(z^{2m})$.

Supongamos que $n \geq 1$ y que hemos encontrado $a_m = a, a_{m+1}, \dots, a_{m+n-1}$ tales que $\varphi \circ \alpha_n \equiv \varphi D\alpha_n$ mód z^{2m+n-1} . Sea $\varphi \circ \alpha_n - \varphi D\alpha_n = z^{2m+n-1}\psi$. Poniendo $\alpha_{n+1} = \alpha_n + cz^{m+n}$, tenemos que encontrar $c = a_{m+n}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi \circ \alpha_{n+1} &\equiv \varphi D\alpha_{n+1} \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff \varphi \circ (\alpha_n + cz^{m+n}) &\equiv \varphi(D\alpha_n + (m+n)cz^{m+n-1}) \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff \varphi \circ \alpha_n + (D\varphi \circ \alpha_n) &cz^{m+n} + O(z^{2m+2n}) \\ &\equiv \varphi D\alpha_n + (m+n)cz^{m+n-1}\varphi \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff (\varphi \circ \alpha_n - \varphi D\alpha_n) + (D\varphi \circ \alpha_n) &cz^{m+n} \equiv (m+n)cz^{m+n-1}\varphi \text{ mód } z^{2m+n} \\ \iff z^{2m+n-1}\psi + ((mz^{m-1} + O(z^m)) \circ \alpha_n) &cz^{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (m+n)cz^{m+n-1}(z^m + O(z^{m+1})) \text{ mód } z^{2m+n} \\
\iff z^{2m+n-1}\psi + (m\alpha_n^{m-1} + O(\alpha_n^m))cz^{m+n} &\equiv (m+n)cz^{2m+n-1} \text{ mód } z^{2m+n} \\
\iff z^{2m+n-1}\psi + cm\alpha_n^{m-1}z^{m+n} + O(z^m)cz^{m+n} & \\
&\equiv (m+n)cz^{2m+n-1} \text{ mód } z^{2m+n} \\
\iff z^{2m+n-1}\psi + cm(z^{m-1} + O(z^m))z^{m+n} &\equiv (m+n)cz^{2m+n-1} \text{ mód } z^{2m+n} \\
\iff z^{2m+n-1}\psi + cmz^{2m+n-1} &\equiv (m+n)cz^{2m+n-1} \text{ mód } z^{2m+n} \\
\iff \psi(0) + cm = (m+n)c & \\
\iff \psi(0) = nc &
\end{aligned}$$

de modo que esto obliga

$$a_{m+n} = \frac{\psi(0)}{n}.$$

□

Nota 5.2. Los enunciados de unicidad en el teorema, en el sentido de haber a lo sumo una serie que cumpla las propiedades, son válidos en cualquier anillo íntegro R de característica 0, ya que en su demostración no hemos necesitado dividir en ningún momento.

Ahora sea $\alpha \in \iota + \mathfrak{m}^2$, y supongamos que $\alpha \neq \iota$, de modo que $2 \leq m = \text{ord}(\alpha - \iota) < \infty$ (ya habíamos considerado las raíces composicionales de ι). Sea $\alpha = z + a_m z^m + O(z^{m+1})$, $m \geq 2$, $a_m \neq 0$. Sea $\varphi = z^m + O(z^{m+1})$ la única serie, dada por la primera parte del teorema, tal que $\alpha \in M_\varphi$.

Definición 5.2. Dado $a \in K$, sea α_a la única serie en M_φ de la forma $z + aa_m z^m + O(z^{m+1})$, dada por la segunda parte del teorema. Veremos que $a \rightarrow \alpha_a$ define una «exponenciación composicional».

Teorema 5.6.

- (1) $\alpha_n = \alpha^{\circ n}$ para $n \in \mathbb{Z}$, donde $\alpha^{\circ 0} = \iota$ y $\alpha^{\circ(-n)} = (\alpha^{-1})^{\circ n}$ para $n \in \mathbb{N}$.
- (2) $\alpha_a \circ \alpha_b = \alpha_b \circ \alpha_a = \alpha_{a+b}$ para todo $a, b \in K$. $\alpha_a^{\circ n} = \alpha_{na}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (3) Para $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{1/n}$ es la raíz n -ésima composicional (única) de α en $\iota + \mathfrak{m}^2$.

Demostración.

(1) Por la fórmula de composición iterada (Lema 2.7), para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\alpha^{\circ n} = z + na_m z^m + O(z^{m+1})$, y como M_φ es un submonoide de \mathfrak{m} , $\alpha \in M_\varphi \implies \alpha^{\circ n} \in M_\varphi$. Como por definición α_n es la única serie en M_φ de la forma $z + na_m z^m + O(z^{m+1})$, se deduce que $\alpha_n = \alpha^{\circ n}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Hemos demostrado que $\alpha = z + a_m z^m + O(z^{m+1}) \implies \alpha^{-1} = z - a_m z^m + O(z^{m+1})$, y como $\alpha \in M_\varphi^*$, también $\alpha^{-1} \in M_\varphi^*$. Por otra parte, α_{-1} es la única serie en M_φ de la forma $z - a_m z^m + O(z^{m+1})$, luego $\alpha_{-1} = \alpha^{-1}$.

Combinando los dos razonamientos, si $n \in \mathbb{N}$, entonces por la fórmula de composición iterada, $\alpha^{-1} = z - a_m z^m + O(z^{m+1}) \implies \alpha^{\circ(-n)} = (\alpha^{-1})^{\circ n} = z - na_m z^m + O(z^{m+1})$ y $\alpha^{-1} \in M_\varphi \implies \alpha^{\circ(-n)} \in M_\varphi$. Por otra parte, α_{-n} es la única serie en

M_φ de la forma $z - na_m z^m + O(z^{m+1})$, luego $\alpha_{-n} = \alpha^{\circ(-n)}$ para $n \in \mathbb{N}$, es decir $\alpha_n = \alpha^{\circ n}$ para $n \in \mathbb{Z}, n < 0$.

Finalmente, $\iota \in M_\varphi$ es obviamente de la forma $z + 0 \cdot a_m z^m + O(z^{m+1})$, de modo que por unicidad, $\iota = \alpha_0$.

(2) Por definición, $\alpha_a = z + aa_m z^m + O(z^{m+1}), \alpha_b = z + ba_m z^m + O(z^{m+1})$, luego $\alpha_a \circ \alpha_b = \alpha_b + aa_m \alpha_b^m + O(\alpha_b^{m+1}) = z + ba_m z^m + aa_m z^m + O(z^{m+1}) = z + (a + b)a_m z^m + O(z^{m+1})$ y por simetría, $\alpha_b \circ \alpha_a$ es también de esta forma. Como $\alpha_a, \alpha_b \in M_\varphi$, también $\alpha_a \circ \alpha_b, \alpha_b \circ \alpha_a \in M_\varphi$. Por otra parte, α_{a+b} es la única serie en M_φ de la forma $z + (a+b)a_m z^m + O(z^{m+1})$, con lo cual se deduce (2). Por inducción, para $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_a^{\circ n} = \alpha_a \circ \dots \circ \alpha_a = \alpha_{a+\dots+a} = \alpha_{na}$.

(3) Por (1) y (2) se tiene $\alpha_{1/n}^{\circ n} = \alpha_1 = \alpha^{\circ 1} = \alpha$, luego $\alpha_{1/n}$ es una raíz n -ésima composicional de α , y $\alpha_{1/n} \in \iota + \mathfrak{m}^2$ por definición. □

Nota 5.3. Sabemos que la raíz n -ésima composicional $\alpha_{1/n}$ es única por el primer teorema. Parece más difícil utilizar M_φ para demostrar la unicidad, pues no es obvio que cualquier raíz composicional deba pertenecer a M_φ . Tampoco es inmediato que una raíz composicional en $\iota + \mathfrak{m}^2$ deba tener la forma $z + \frac{1}{n}a_m z^m + O(z^{m+1})$.

Es interesante contrastar estos resultados con los de Labelle [6], que utiliza métodos completamente diferentes para la iteración continua, basados en familias especiales de polinomios auxiliares.

Proposición 5.7. *Si $\text{ord}(\alpha - \iota) = 2$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la única solución de $\beta^{\circ n} = \alpha$ es la solución en $\iota + \mathfrak{m}^2$.*

Demostración. Sea $\beta = \omega z + bz^2 + O(z^3)$. Por la fórmula de composición iterada $\beta^{\circ n} = \omega^n z + \omega^{n-1}b(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1})z^2 + O(z^3)$. Si $\beta^{\circ n} = \alpha$, entonces $\omega^n = 1$, luego si $\omega \neq 1$, $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$; por tanto $\alpha = z + O(z^3)$, es decir, $\text{ord}(\alpha - \iota) \geq 3$. □

Nota 5.4. No es cierto por tanto que para series $\alpha \in \iota + \mathfrak{m}^2$ haya siempre una solución de $\beta^{\circ n} = \alpha$ encima de cada solución de $b^n = 1$, incluso si K es algebraicamente cerrado de característica cero. Por ejemplo, ninguna iteración de una serie de la forma $-z + O(z^2)$ puede ser igual a una serie de la forma $z + az^2 + O(z^3)$ con $a \neq 0$.

6. TÉRMINO LINEAL DE TORSIÓN

Nota 6.1. Supondremos que $R = K$ es un cuerpo, aunque no necesariamente de característica cero.

Teorema 6.1. *Sea $\alpha = \zeta z + O(z^2)$ con ζ una raíz primitiva q -ésima de la unidad. Entonces α tiene una raíz p -ésima composicional para todo entero positivo p primo con q y la característica de K .*

Demostración. Construiremos β tal que $\beta^{\circ p} = \alpha$ hallando por recurrencia coeficientes b_1, \dots, b_n tales que $\beta_n = b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n$ satisface $\beta_n^{\circ p} \equiv \alpha \pmod{z^{n+1}}$.

Como $\beta_1 = b_1 z = [b_1], \beta_1^{\circ p} \equiv \alpha \pmod{z} \iff b_1^p = \zeta$, tendremos que elegir $b_1 = \omega \in K^*$ tal que $\omega^p = \zeta$. De momento, dejamos abierta la elección.

Supongamos que hemos encontrado $b_1 = \omega, b_2, \dots, b_n$ tales que $\beta_n^{\circ p} \equiv \alpha \pmod{z^{n+1}}$. Tenemos que encontrar $b = b_{n+1}$ tal que $\beta_{n+1} = \beta_n + bz^{n+1}$ satisface $\beta_{n+1}^{\circ p} \equiv \alpha \pmod{z^{n+2}}$. Por la fórmula de composición iterada, $\beta_{n+1} = \beta_n + bz^{n+1} \implies \beta_{n+1}^{\circ p} = \beta_n^{\circ p} + \omega^{p-1}b(1 + \omega^n + \omega^{2n} + \dots + \omega^{(p-1)n})z^{n+1} + O(z^{n+2})$. Sea $\alpha - \beta_n^{\circ p} = z^{n+1}\rho$. Entonces

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}^{\circ p} &\equiv \alpha \pmod{z^{n+2}} \\ \iff \beta_n^{\circ p} + \omega^{p-1}b(1 + \omega^n + \omega^{2n} + \dots + \omega^{(p-1)n})z^{n+1} &\equiv \alpha \pmod{z^{n+2}} \\ \iff \omega^{p-1}b(1 + \omega^n + \omega^{2n} + \dots + \omega^{(p-1)n})z^{n+1} &\equiv z^{n+1}\rho \pmod{z^{n+2}} \\ \iff \omega^{p-1}b(1 + \omega^n + \omega^{2n} + \dots + \omega^{(p-1)n}) &= \rho(0) \end{aligned}$$

de modo que podemos resolver para $b = b_{n+1}$ si y solo si $(1 + \omega^n + \omega^{2n} + \dots + \omega^{(p-1)n}) \neq 0$. Si $\omega^n = 1$, es decir, $\text{ord}(\omega) \mid n$, la suma es p . Si $\omega^n \neq 1$, entonces $(1 + \omega^n + \omega^{2n} + \dots + \omega^{(p-1)n}) = \frac{1 - \omega^{pn}}{1 - \omega^n} = \frac{1 - \zeta^n}{1 - \omega^n}$, de modo que necesitamos que $\zeta^n \neq 1$ cuando $\omega^n \neq 1$. Esto es equivalente a $\zeta^n = 1 \implies \omega^n = 1$, que a su vez equivale a $\text{ord}(\zeta) = q \mid n \implies \text{ord}(\omega) \mid n$. Eligiendo $n = q$ muestra que esto equivale a $\text{ord}(\omega) \mid q$. Como necesitamos $\omega^p = \zeta$, se tiene $q = \text{ord}(\zeta) = \text{ord}(\omega^p) = \frac{\text{ord}(\omega)}{(\text{ord}(\omega), p)}$, por tanto $q \mid \text{ord}(\omega)$. Luego de hecho necesitamos que $\text{ord}(\omega) = q$, y como $q = \frac{\text{ord}(\omega)}{(\text{ord}(\omega), p)}$, esto implica $(q, p) = 1$.

Asimismo, si $(q, p) = 1$, elegimos $p^* \in \mathbb{N}$ tal que $pp^* \equiv 1 \pmod{q}$. Entonces $\omega = \zeta^{p^*} \in K$ satisface $\omega^p = \zeta^{pp^*} = \zeta$, y $\text{ord}(\omega) = \text{ord}(\zeta^{p^*}) = \frac{\text{ord}(\zeta)}{(\text{ord}(\zeta), p^*)} = \frac{q}{(q, p^*)} = q$, de modo que se cumplen todas las condiciones. \square

Proposición 6.2. *Sea ζ una raíz primitiva q -ésima de la unidad. Ninguna serie de la forma $\alpha = \zeta z + az^{q+1} + O(z^{q+2})$, con $a \neq 0$, tiene una raíz p -ésima composicional si $(p, q) \neq 1$.*

Demostración. Dado cualquier ω tal que $\omega^p = \zeta$, siempre podemos encontrar n tal que $q \mid n$, luego $\zeta^n = 1$, pero $\omega^n \neq 1$. Efectivamente, $q = \text{ord}(\zeta) = \text{ord}(\omega^p) = \frac{\text{ord}(\omega)}{(\text{ord}(\omega), p)}$, luego $\text{ord}(\omega) = qp'$ donde $p' = (\text{ord}(\omega), p) > 1$ como $(q, p) \mid p'$. Ahora si $n = qm$, entonces $\omega^n = 1 \iff \text{ord}(\omega) = qp' \mid qm = n \iff p' \mid m$, luego eligiendo m de modo que $p' \nmid m$ obtenemos un tal n . Por ejemplo, $m = 1$, o sea $n = q$, funciona.

Supongamos que $\beta^{\circ p} = \alpha$. Entonces $\beta = \omega z + O(z^2)$, con $\omega^p = \zeta$. De hecho debe ser $\beta = \omega z + O(z^{q+1})$. Supongamos lo contrario. Entonces $\beta = \omega z + bz^{m+1} + O(z^{m+2})$ con $1 \leq m < q$ y $b \neq 0$. Por la fórmula de composición iterada, $\beta^{\circ p} = \omega^p z + \omega^{p-1}b(1 + \omega^m + \omega^{2m} + \dots + \omega^{(p-1)m})z^{m+1} + O(z^{m+2}) = \zeta z + cz^{m+1} + O(z^{m+2})$. $\omega^m \neq 1$ ya que $\text{ord}(\omega) > q > m \geq 1$, luego $\text{ord}(\omega) \nmid m$. Entonces $(1 + \omega^m + \omega^{2m} + \dots + \omega^{(p-1)m}) = \frac{1 - \omega^{pm}}{1 - \omega^m} = \frac{1 - \zeta^m}{1 - \omega^m}$ y $\zeta^m \neq 1$ como $\text{ord}(\zeta) = q > m$, luego $c \neq 0$, de modo que $\beta^{\circ p}$ no puede ser de la forma $\zeta z + az^{q+1} + O(z^{q+2})$, para cualquier a .

Como $\beta = \omega z + bz^{q+1} + O(z^{q+2})$, aplicando la fórmula de composición iterada una vez más, $\beta^{\circ p} = \omega^p z + \omega^{p-1}b(1 + \omega^q + \omega^{2q} + \dots + \omega^{(p-1)q})z^{q+1} + O(z^{q+2}) = \zeta z + cz^{q+1} + O(z^{q+2})$ y otra vez, $\omega^q \neq 1$ ya que $\text{ord}(\omega) > q$, pero ahora $(1 + \omega^q +$

$\omega^{2q} + \dots + \omega^{(p-1)q} = \frac{1-\omega^{pq}}{1-\omega^q} = \frac{1-\zeta^q}{1-\omega^q} = 0$, luego $c = 0$, y también es imposible que $\beta^{op} = \zeta z + az^{q+1} + O(z^{q+2})$, con $a \neq 0$. □

Este razonamiento con los órdenes de las raíces de la unidad es análogo a la utilización del llamado «lema de teoría de números» citado en [10], § 1.

Ejemplo 6.1. $\alpha = -z + z^3$ no tiene raíz cuadrada composicional, ya que corresponde al caso $\zeta = -1, p = q = 2$.

7. TÉRMINO LINEAL NULO

Lema 7.1. *Sea $\text{ord}(f) = \nu > 1$ y $f = a_\nu z^\nu + g$ con $a_\nu \neq 0$ y $\text{ord}(g) = \mu > \nu$. Entonces*

$$f^{\circ n} = a_\nu^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} z^{\nu^n} + \nu^{n-1} a_\nu^{\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} z^{\nu^n-\nu} g + O(z^{\nu^n-\nu+\mu+1}).$$

Demostración. Por inducción en n . Para $n = 1$ los dos primeros términos son simplemente $a_\nu z^\nu + g = f$. La fórmula es inmediata si $g = 0$ ($\mu = \infty$), por tanto suponemos que $\mu < \infty$. Supongamos la fórmula cierta para n . Observando que $f = O(z^\nu)$ y $g \circ f = O(z^{\mu\nu})$, se tiene entonces

$$\begin{aligned} f^{\circ(n+1)} &= a_\nu^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} f^{\nu^n} + \nu^{n-1} a_\nu^{\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} f^{\nu^n-\nu} (g \circ f) \\ &\quad + O(f^{\nu^n-\nu+\mu+1}) \\ &= a_\nu^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} (a_\nu z^\nu + g)^{\nu^n} \\ &\quad + O(z^{\nu(\nu^n-\nu)}) O(z^{\mu\nu}) + O(z^{\nu(\nu^n-\nu+\mu+1)}) \\ &= a_\nu^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} (a_\nu z^\nu + g)^{\nu^n} + O(z^{\nu(\nu^n-\nu)+\mu\nu}) + O(z^{\nu(\nu^n-\nu+\mu+1)}). \end{aligned}$$

Analizamos los términos de orden primero. Observar que $\nu(\nu^n - \nu + \mu + 1) = \nu^{n+1} - \nu^2 + \mu\nu + \nu > \nu^{n+1} - \nu^2 + \mu\nu = \nu(\nu^n - \nu) + \mu\nu$ y $\nu^{n+1} - \nu^2 + \mu\nu \geq \nu^{n+1} - \nu + \mu + 1 \iff -\nu^2 + \mu\nu > -\nu + \mu \iff \mu(\nu - 1) > \nu(\nu - 1)$, lo cual es cierto ya que $\mu > \nu > 1$. Por tanto ambos términos de orden están incorporados en el término $O(z^{\nu^{n+1}-\nu+\mu+1})$ correspondiente a $n + 1$. Ahora estudiamos el término binomial

$$(a_\nu z^\nu + g)^{\nu^n} = \sum_{l=0}^{\nu^n} \binom{\nu^n}{l} (a_\nu z^\nu)^{\nu^n-l} g^l = \sum_{l=0}^{\nu^n} \binom{\nu^n}{l} a_\nu^{\nu^n-l} z^{\nu^{n+1}-l\nu} g^l.$$

Observar que $\text{ord}(z^{\nu^{n+1}-l\nu} g^l) = \nu^{n+1} - l\nu + l\mu > \nu^{n+1} - \nu + \mu \iff (l-1)\mu > (l-1)\nu$, y como esto se cumple para $l > 1$, los términos con $l > 1$ en el desarrollo del binomio también están en el término $O(z^{\nu^{n+1}-\nu+\mu+1})$, y quedan solo los términos con $l = 0, 1$ $a_\nu^{\nu^n} z^{\nu^{n+1}} + \nu^n a_\nu^{\nu^n-1} z^{\nu^{n+1}-\nu} g$, los cuales al ser multiplicados por la constante que habíamos dejado fuera, dan finalmente

$$\begin{aligned} &a_\nu^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} (a_\nu^{\nu^n} z^{\nu^{n+1}} + \nu^n a_\nu^{\nu^n-1} z^{\nu^{n+1}-\nu} g) \\ &= a_\nu^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} a_\nu^{\nu^n} z^{\nu^{n+1}} + \nu^n a_\nu^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} a_\nu^{\nu^n-1} z^{\nu^{n+1}-\nu} g \\ &= a_\nu^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}+\nu^n} z^{\nu^{n+1}} + \nu^n a_\nu^{\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}+\nu^n} z^{\nu^{n+1}-\nu} g \end{aligned}$$

lo cual demuestra la fórmula para $n + 1$. □

Corolario 7.2.

(1) Sea R cualquier anillo conmutativo. Si $m > 1$, $a \in R$, $a \neq 0$, entonces az^m tiene una raíz n -ésima composicional si y solo si m es una potencia n -ésima, $m = \nu^n$ con $\nu > 1$, y a es una potencia $\frac{\nu^n - 1}{\nu - 1} = \frac{m - 1}{\nu - 1}$ -ésima en R .

(2) Si $a \in R$ y $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu > 1$ no son divisores de cero, entonces las raíces n -ésimas composicionales de az^{ν^n} son las series $f = bz^{\nu}$ con

$$b^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} = b^{\frac{\nu^n-1}{\nu-1}} = a.$$

Demostración.

(1) Si $az^m = f^{\circ n}$ con $\text{ord}(f) = \nu$, entonces como $\text{ord}(f \circ g) = \text{ord}(f) \text{ord}(g)$, tomando el orden, queda $m = \nu^n$. Poniendo $f = bz^{\nu} + g$ con $\text{ord}(g) > \nu$, el lema implica que $b^{\frac{\nu^n-1}{\nu-1}} = a$.

Si $a = b^{\frac{\nu^n-1}{\nu-1}}$ entonces por el lema $(bz^{\nu})^{\circ n} = az^{\nu^n} = az^m$.

(2) Por el Lema 7.1 cualquier tal bz^{ν} es una raíz n -ésima composicional de az^{ν^n} .

Si $f^{\circ n} = az^{\nu^n}$, entonces tomando el orden, queda $\text{ord}(f) = \nu$. Poniendo $f = bz^{\nu} + g$ con $\text{ord}(g) = \mu > \nu$, el lema implica

$$f^{\circ n} = b^{1+\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} z^{\nu^n} + \nu^{n-1} b^{\nu+\nu^2+\dots+\nu^{n-1}} z^{\nu^n-\nu} g + O(z^{\nu^n-\nu+\mu+1}) = az^{\nu^n}$$

y el segundo término tiene orden $\nu^n - \nu + \mu > \nu^n$, luego igualando coeficientes queda $g = 0$ y por tanto $f = bz^{\nu}$ con $b^{\frac{\nu^n-1}{\nu-1}} = a$ (como a no es un divisor de cero, b tampoco lo es). □

Estos resultados están en parte tratados en el Teorema 3 (c) de [10]. No hemos encontrado mención explícita de la fórmula del Lema 7.1.

REFERENCIAS

- [1] A. F. Beardon, *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*, GTP **132**, Springer-Verlag, 1991.
- [2] R. P. Brent y J. F. Traub, On the complexity of composition and generalized composition of power series, *SIAM J. Comput.* **9** (1980), 54–66.
- [3] N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, Dover Publications, 1981.
- [4] D. Knuth, *The Art of computer programming, vol. 2: Seminumerical algorithms*, Addison-Wesley, 1981.
- [5] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, PWN-Polish Scientific Publishers, Varsovia, 1968.
- [6] G. Labelle, Sur l'inversion et l'itération continue des séries formelles, *Europ. J. Combinatorics* **1** (1980), 113–138.
- [7] B. Muckenhoupt, Some results on analytic iteration and conjugacy, *Amer. J. Math.* **84** (1962), 161–169.
- [8] L. Reich, Iterative roots of formal power series: Universal expressions for the coefficients and analytic iteration, *Grazer. Math. Ber.* **327** (1996), 21–32.
- [9] S. Scheinberg, Power series in one variable, *J. Math. Anal. Appl.* **31** (1970), 321–333.
- [10] J. Schwaiger, Roots of formal power series in one variable, *Aequationes Math.* **29** (1985), 40–43.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA Y APLICADA, UNIVERSIDAD DE SALAMANCA, PLAZA DE LA MERCED 1-4, 37008 SALAMANCA, SPAIN

Correo electrónico: navas@gugu.usal.es

POTENCIALES GENERALIZADOS DE BESSEL

DOMINGO ISRAEL CRUZ Y JOSÉ RODRÍGUEZ

En memoria del Prof. J. J. Guadalupe

ABSTRACT. In this paper new potentials that generalize Bessel potentials are studied. We obtain an embedding theorem between the generalized Bessel potentials spaces and Lizorkin-Triebel spaces. Moreover, we defined the capacities associated to these potentials establishing some relation with well-known capacities.

INTRODUCCIÓN

O. Frostman [8] introduce en 1935 los potenciales de Riesz, los cuales incluyen como casos límites a los potenciales clásicos (potenciales de Newton y logarítmicos), pero su nombre se debe a M. Riesz ya que en 1938 en su memoria [13] obtiene los resultados más importantes relacionados con dichos potenciales y funciones superarmónicas de orden s ($0 < s < 2$). El núcleo de los potenciales de Riesz de orden s viene dado por

$$I_s(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}{2^s \pi^{n/2} \Gamma(s/2)} |x|^{s-n}, \quad 0 < s < n.$$

El problema que presentaban los potenciales de Riesz para su aplicación a problemas diferenciales, por la acotación del parámetro s ($0 < s < n$), ya que se necesitaban potenciales de orden arbitrario, es resuelto por N. Aronszajn, en 1959, cuando introduce en la teoría de espacios funcionales y completación funcional [3], los potenciales de Bessel cuyo núcleo viene dado por

$$(1) \quad G_s(x) = \frac{1}{2^{\frac{n+s-2}{2}} \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} K_{\frac{n-s}{2}}(|x|) |x|^{\frac{s-n}{2}}, \quad s > 0,$$

donde $K_{\frac{n-s}{2}}$ es la función modificada de Bessel de tercera especie. Posteriormente, J. Rodríguez [14, 15] introduce los potenciales de Bessel-Clifford estudiando, entre otros temas, su relación con los módulos de continuidad y con los conocidos espacios de Lipschitz. Con el objetivo de generalizar los potenciales de Bessel se introducen unos nuevos potenciales que llamaremos potenciales generalizados de Bessel o potenciales de Krätzel, por comparecer en el núcleo la función $\eta(\rho, \beta; x)$ estudiada en [9].

POTENCIALES DE KRÄTZEL. PROPIEDADES BÁSICAS

Sea $\rho > 0$ y $s \in \mathbb{R}$, los potenciales de Krätzel asociados a la medida μ (que tiene su soporte en \mathbb{R}^n), vienen dados por

$$V_{s,\rho}^\mu(x) = \int_{\text{sop } \mu} G_{s,\rho}(x-y) d\mu(y),$$

donde

$$G_{s,\rho}(x) = \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})} \eta \left(\rho, \frac{n-s}{2} + 1; \left(\frac{|x|^2}{4} \right)^\rho \right)$$

siendo

$$(2) \quad \eta(\rho, \beta; z) = \int_0^\infty t^{-\beta} e^{-t-\frac{z}{t^\rho}} dt.$$

La función η ha sido ampliamente estudiada por Krätzel en [9], [10]. Nótese que para $\rho = 1$, $G_{s,1}(x)$ se reduce al conocido núcleo del potencial de Bessel.

Mostremos ahora algunas propiedades que serán útiles en lo que sigue. En primer lugar (véase [9], [10, pág. 142 (9)]),

$$(3) \quad \eta(\rho, \beta; z^\rho) = \frac{1}{\rho} z^{1-\beta} \eta \left(\frac{1}{\rho}, 1 + \frac{1-\beta}{\rho}; z \right).$$

El núcleo $G_{s,\rho}(x)$ tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$(4) \quad G_{s,\rho}(x) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n-s}{2\rho})}{2^s \pi^{n/2} \Gamma(\frac{s}{2})^\rho} |x|^{s-n}, & s < n, \\ -\frac{1}{2^s \pi^{n/2} \Gamma(\frac{s}{2})} |x|^{s-n} \log \frac{|x|^2}{4}, & s = n, \\ \frac{\Gamma(\frac{s-n}{2})}{2^s \pi^{n/2} \Gamma(\frac{s}{2})}, & s > n, \end{cases}$$

cuando $|x| \rightarrow 0^+$; y

$$(5) \quad G_{s,\rho}(x) \sim \gamma_1 |x|^{(n-s-\rho)/(\rho+1)} e^{-\gamma_2 |x|^{2\rho/(\rho+1)}},$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$, donde $\gamma_1 = \frac{(\frac{2\pi}{\rho+1})^{1/2} \rho^{-(n-s+1)/(2\rho+2)}}{2^{(n-s-\rho)/(\rho+1)+n} \pi^{n/2} \Gamma(\frac{s}{2})}$, $\gamma_2 = (1 + 1/\rho) \cdot (\frac{\rho}{4})^{1/(\rho+1)}$.

Además, $G_{s,\rho} \in L^{p'}$ si $\alpha p > n$, siendo $1/p + 1/p' = 1$. Por otra parte, observando la representaciones integrales del núcleo de los potenciales de Bessel y el núcleo de los potenciales generalizados se tiene que, si $\rho > 1$, entonces $G_{s,\rho}(x) < G_s(x)$; y en el caso de que $\rho < 1$, se invierte la desigualdad.

Para la obtención de los siguientes lemas se recuerda que la función de Fox de orden (m, n, p, q) siendo $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$. En [7] y [12, pp. 626–629] se denota por

$$H = H_{p,q}^{m,n} \left(z \mid \begin{matrix} (a_1, A_1) & \dots & (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) & \dots & (b_q, B_q) \end{matrix} \right),$$

y además se introducen los siguientes parámetros reales:

$$\alpha_1 = \begin{cases} \text{máx} \left\{ -\frac{b_j}{B_j}, j = 1, \dots, m \right\}, & \text{para } m > 0, \\ -\infty, & \text{para } m = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} \text{mín} \left\{ \frac{1-a_j}{A_j}, j = 1, \dots, n \right\}, & \text{para } n > 0, \\ +\infty, & \text{para } n = 0, \end{cases}$$

y

$$\xi = \sum_{j=1}^n A_j - \sum_{j=n+1}^p A_j + \sum_{j=1}^m B_j - \sum_{j=m+1}^q B_j.$$

Lema 1 (véase [4]). *Sea $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$. Si $x > 0$ entonces*

$$|H(x)| \leq M_\beta x^{-\beta}$$

para $x > 0$, donde M_β es una constante positiva.

Lema 2. *Sea $\rho \geq 1$, entonces*

$$(\mathcal{F}G_{s,\rho})(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\Gamma(s/2)\rho} H_{2,2}^{1,2} \left(|\xi|^2 \left| \begin{matrix} \left(1 - \frac{n}{2\rho}, \frac{1}{\rho}\right) & \left(1 - \frac{s}{2}, 1\right) \\ (0, 1) & \left(1 - \frac{n}{2}, 1\right) \end{matrix} \right. \right),$$

donde \mathcal{F} denota la transformada de Fourier dada por

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Demostración. Por (3),

$$G_{s,\rho}(x) = \frac{1}{2^s \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \rho} |x|^{s-n} \eta \left(\frac{1}{\rho}, 1 + \frac{s-n}{2\rho}; \frac{|x|^2}{4} \right).$$

Usando la representación integral (2), se sigue que

$$(6) \quad G_{s,\rho}(x) = \frac{1}{2^s \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \rho} |x|^{s-n} \int_0^\infty t^{-1-\frac{(s-n)}{2\rho}} e^{-t-\frac{|x|^2}{4t^{1/\rho}}} dt$$

y aplicando el teorema de Fubini,

$$(7) \quad (\mathcal{F}G_{s,\rho})(\xi) = \frac{1}{2^s \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \rho} \int_0^\infty t^{-1-\frac{(s-n)}{2\rho}} e^{-t} \cdot \mathcal{F}\{|x|^{s-n} e^{-\frac{|x|^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi) dt.$$

De [5] sabemos que

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \mathcal{H}_{\frac{n-2}{2}} \{z^{\frac{n-1}{2}} f(z)\}(\xi)$$

donde \mathcal{H}_ν es la transformada de Hankel de orden ν [6, p. 3]. Luego

$$\mathcal{F}\{|x|^{s-n} e^{-\frac{|x|^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi) = |\xi|^{\frac{1-n}{2}} \mathcal{H}_{\frac{n}{2}-1} \{z^{s-\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi).$$

Entonces, usando [6, p. 30 (14)] se obtiene

$$(8) \quad \mathcal{H}_{\frac{n}{2}-1} \{z^{s-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi) = \frac{|\xi|^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})}{2^{\frac{n}{2}-s} \Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{s}{2\rho}} \cdot {}_1F_1 \left(\frac{s}{2}, \frac{n}{2}; -t^{\frac{1}{\rho}} |\xi|^2 \right),$$

siendo ${}_1F_1$ la función hipergeométrica confluyente.

Por lo tanto, por (7) y (8),

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}G_{s,\rho})(\xi) &= \frac{1}{2^s \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \rho} \int_0^\infty t^{-1-\frac{(s-n)}{2\rho}} e^{-t} \cdot \mathcal{F}\{|x|^{s-n} e^{-\frac{|x|^2}{4t^{1/\rho}}}\}(\xi) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \rho} \int_0^\infty t^{-1+\frac{n}{2\rho}} e^{-t} \cdot {}_1F_1\left[\frac{s}{2}, \frac{n}{2}; -t^{1/\rho}|\xi|^2\right] dt. \end{aligned}$$

Entonces, por ser ${}_1F_1$ absolutamente convergente en $(0, \infty)$, y utilizando [12, fórmula 3, p. 627]

$$(\mathcal{F}G_{s,\rho})(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Gamma(s/2) \rho} H_{2,2}^{1,2} \left(|\xi|^2 \left| \begin{matrix} \left(1 - \frac{n}{2\rho}, \frac{1}{\rho}\right) & \left(1 - \frac{s}{2}, 1\right) \\ (0, 1) & \left(1 - \frac{n}{2}, 1\right) \end{matrix} \right. \right),$$

siempre que $\rho \geq 1$. □

Nota 1. En el caso de que $\rho = 1$, la transformada de Fourier del núcleo coincide con la de los potenciales de Bessel.

1. ESPACIOS DE TRIEBEL-LIZORKIN

Consideremos el espacio $S(\mathbb{R}^n)$ que es el espacio de funciones $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de decrecimiento rápido, que verifican la condición

$$p_N(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \sum_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha \varphi(x)| < \infty, \quad N = 1, 2, 3, \dots,$$

donde $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ tiene el significado usual, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi-índice, $\alpha_i \geq 0$ son enteros y $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

La colección numerable de seminormas anterior p_N , define una topología completa localmente convexa. Además entenderemos por $S'(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las distribuciones temperadas sobre \mathbb{R}^n , es decir, el espacio dual de $S(\mathbb{R}^n)$.

Dados $\rho \geq 1$ y $1 < p < \infty$, definimos el espacio de los potenciales de Krätzel como

$$\mathcal{L}_{p,\rho}^s(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in S'(\mathbb{R}^n), f = G_{s,\rho} * g, g \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

y lo dotamos con la norma $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\rho}^s} = \|g\|_p$.

A continuación necesitamos definir el siguiente sistema de funciones.

Definición 1. Si N es un número natural, entonces Φ_N denota el conjunto de todos los sistemas de funciones $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ con las siguientes propiedades:

- (i) $\varphi_k(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, $(\mathcal{F}\varphi_k)(\xi) \geq 0$ si $k = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) Se verifica

$$\text{sop } \mathcal{F}\varphi_k \subset \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^n, 2^{k-N} \leq |\xi| \leq 2^{k+N}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{y } \text{sop } \mathcal{F}\varphi_0 \subset \{\xi : \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq 2^N\}.$$

(iii) Existe un número positivo c_1 tal que

$$c_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi_k)(\xi).$$

(iv) Para cualquier multi-índice α , existe un número positivo $c_2(\alpha)$ tal que

$$|(D^\alpha \mathcal{F}\varphi_k)(\xi)| \leq \frac{c_2(\alpha)}{|\xi|^{|\alpha|}}$$

si $k = 1, 2, \dots$

Entonces, representamos por $\Phi = \cup_{N=1}^{\infty} \Phi_N$.

Lo que nos permite, a continuación, recordar la definición de los espacios de Triebel-Lizorkin dados en [16].

Definición 2. Sea $s \in \mathbb{R}$, $0 < q \leq \infty$ y $0 < p < \infty$. Consideremos $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$; entonces

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in S'(\mathbb{R}^n), \left\| 2^{sj} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi_j \cdot \mathcal{F}f) \right\|_{L^p(l_q)} < \infty \right\}$$

donde la norma $\|\cdot\|_{L^p(l_q)}$ viene dada por

$$\|f_k\|_{L^p(l_q)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^q \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}.$$

Así mismo, será de gran utilidad la siguiente versión l_2 del conocido teorema de multiplicadores de Hörmander [16, pp. 161–165].

Proposición 1. Dado $m(x) = (m_{k,j})_{-\infty < k,j < \infty}$, sean $(\mathcal{F}m_{k,j})(\xi)$ distribuciones regulares para todo k y j , que tienen derivadas clásicas en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hasta el orden $[\frac{n}{2}] + 1$. Asumamos que existe un número positivo B tal que, para todo $R > 0$ y para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq 1 + [\frac{n}{2}]$,

$$(9) \quad \int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq 2R} \sum_{j,k=0}^{\infty} |D^\alpha (\mathcal{F}m_{k,j})(\xi)|^2 dx \leq B^2 R^{n-2|\alpha|}.$$

Entonces, existe una constante positiva c tal que

$$(10) \quad \|\{m_{k,j} * g\}\|_{L^p(l_2)} \leq c \|g\|_{L^p(l_2)}$$

para todos los sistemas $g = \{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ de funciones medibles en \mathbb{R}^n y para $1 < p < \infty$.

Todo ello nos lleva a obtener a continuación el teorema de embebimiento entre los espacios de los potenciales generalizados de Bessel y los espacios de Triebel-Lizorkin.

Teorema 1. Sea $s > 0$, $\rho \geq 1$ y $1 < p < \infty$. Entonces

$$(11) \quad \mathcal{L}_{p,\rho}^s(\mathbb{R}^n) \subseteq F_{p,2}^s(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_{p,\rho}^s(\mathbb{R}^n)$; entonces $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\rho}^s} < \infty$. Además, existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = G_{s,\rho} * g$.

Consideremos $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi$, luego

$$\|f\|_{F_{p,2}^s} \leq c \left\| \left\{ \mathcal{F}^{-1} (\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\varphi_j \cdot 2^{sj}) \right\} \right\|_{L^p(l_2)};$$

dado que $f = G_{s,\rho} * g$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|f\|_{F_{p,2}^s} &= c \left\| \left\{ \mathcal{F}^{-1} (H \cdot \mathcal{F}g \cdot \mathcal{F}\varphi_j \cdot 2^{sj}) \right\} \right\|_{L^p(l_2)} \\ &= c \left\| \left\{ \mathcal{F}^{-1} (2^{sj} \mathcal{F}G_{s,\rho} \cdot \mathcal{F}\varphi_j \cdot \mathcal{F}g) \right\} \right\|_{L^p(l_2)}, \end{aligned}$$

siendo

$$H \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Gamma(s/2) \rho} H_{2,2}^{1,2} \left(|\xi|^2 \left| \begin{array}{cc} \left(1 - \frac{n}{2\rho}, \frac{1}{\rho}\right) & \left(1 - \frac{s}{2}, 1\right) \\ (0, 1) & \left(1 - \frac{n}{2}, 1\right) \end{array} \right. \right).$$

Definimos

$$\begin{aligned} m_{0,j}(x) &= \mathcal{F}^{-1} (2^{sj} \mathcal{F}G_{s,\rho} \cdot \mathcal{F}\varphi_j) \quad \text{si } j = 0, 1, 2, \dots, \\ m_{k,j}(x) &= 0 \quad \text{en otro caso,} \end{aligned}$$

y $\tilde{g} = \{g_j\}_{j=-\infty}^\infty$ con $g_0 = g$ y $g_j = 0$ en otro caso. Entonces, aplicando la Proposición 1 obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{F_{p,2}^s} &= c \left\| \left\{ \mathcal{F}^{-1} (\mathcal{F}m_{0,j} \cdot \mathcal{F}g) \right\} \right\|_{L^p(l_2)} \\ &= c' \left\| \{m_{0,j} * g\} \right\|_{L^p(l_2)} \leq c'' \|g\|_{L^p} = c'' \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\rho}^s}. \end{aligned}$$

□

Nota 2. En el caso $\rho = 1$, obtenemos el espacio de los potenciales de Bessel y se verifica la igualdad $\mathcal{L}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n) \equiv F_{p,2}^s(\mathbb{R}^n)$.

CAPACIDADES

En esta sección se estudian capacidades asociadas al núcleo de los potenciales de Krätzel, así como las relaciones que se establecen con capacidades conocidas.

Denotamos por \mathcal{M} al espacio vectorial de medidas de Radon complejas sobre \mathbb{R}^n . Pondremos un superíndice + cuando se trate de elementos positivos y por \mathcal{L}^1 el subespacio de \mathcal{M} compuesto de todas las medidas μ con $\|\mu\|_1 =$ variación total de μ finita.

Exponemos a continuación el principio de acotación, que para casos particulares se reduce al principio de máximo.

Proposición 2. Sea $s > 0$ y $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n)$; entonces existe una constante C tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$G_{s,\rho} * \mu(x) \leq C \sup_{y \in \text{sop } \mu} G_{s,\rho} * \mu(y).$$

Demostración. Se sigue de [2, p. 880, Proposition 2.2].

□

Definición 3. Sea $1 < p < \infty$, la L^p -capacidad asociada al potencial de Krätzel la denotaremos por $B_{s,p,\rho}$ y la l^p -capacidad por $b_{s,p,\rho}$. Vienen dadas, para $A \subset \mathbb{R}^n$, por

$$B_{s,p,\rho}(A) = \inf_f \|f\|_p^p,$$

donde $f \in (L^p)^+$ y $G_{s,\rho} * f(x) \geq 1$ para todo $x \in A$; y

$$b_{s,p,\rho}(A) = \sup_{\mu} \|\mu\|_1,$$

donde $\mu \in (\mathcal{L}^1)^+$ con $\|G_{s,\rho} * \mu\|_{p'} \leq 1$, $1/p + 1/p' = 1$.

En el caso que cambiemos el núcleo y pongamos el de los potenciales de Bessel G_s tendremos la capacidad del potencial de Bessel $(C_{s,p})$ (véase [11] y [2]).

Una función que satisface $G_{s,\rho} * f(x) \geq 1$ para todo $x \in A$ se llama función prueba para $B_{s,p,\rho}(A)$; y una medida que cumple $\|G_{s,\rho} * \mu\|_{p'} \leq 1$, $1/p + 1/p' = 1$, se conoce como medida prueba. Además se dice que f es una distribución capacitaria de un conjunto A si $0 \leq B_{s,p,\rho}(A) < \infty$ y $\|f\|_p^p = B_{s,p,\rho}(A)$, siendo $G_{s,\rho} * f(x) \geq 1$ sobre A , $B_{s,p,\rho}$ -c.t.p.

Por otro lado las siguientes definiciones serán útiles. Llamamos:

- Peso de $B_{s,p,\rho}$, definido mediante $\text{peso}(B_{s,p,\rho}) = s \cdot p$,
- Orden de $B_{s,p,\rho}$, simplemente $\text{orden}(B_{s,p,\rho}) = s$,
- Índice de $B_{s,p,\rho}$, que es $\text{ind}(B_{s,p,\rho}) = (s, p)$.

Para una referencia general sobre capacidades, véase [11] y [2].

Lema 3. Si $\rho > 0$, $0 < \beta < s \cdot p$ y $\mu \in \mathcal{M}^+$, entonces

$$\|G_{s,\rho} * \mu\|_{p'} \leq Q \|G_{\beta,\rho} * \mu\|_{\infty}^{1/p} \|\mu\|_1^{1/p'},$$

siendo Q constante independiente de μ .

Demostración. Tenemos que

$$(12) \quad G_{s,\rho} * \mu(x) = \left(G_{s,\rho} \cdot G_{\beta,\rho}^{-1/p} \cdot G_{\beta,\rho}^{1/p} \right) * \mu(x).$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en (12) se sigue

$$G_{s,\rho} * \mu(x) \leq \left(\left(G_{s,\rho}^{p'} \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p} \right) * \mu(x) \right)^{1/p'} \cdot \left(G_{\beta,\rho} * \mu(x) \right)^{1/p}.$$

Tomando normas, es claro que

$$\|G_{s,\rho} * \mu\|_{p'} \leq \left(\int G_{s,\rho}^{p'}(x) \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p}(x) dx \right)^{1/p'} \|G_{\beta,\rho} * \mu\|_{\infty}^{1/p} \|\mu\|_1^{1/p'},$$

por lo que acotando $\int G_{s,\rho}^{p'}(x) \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p}(x) dx$ lograremos el resultado deseado. Para ello veamos que esta integral es finita utilizando los comportamientos asintóticos del núcleo.

En el origen distinguimos dos casos, $\alpha p \leq n$ y $\alpha p > n$. En el primer caso,

$$G_{s,\rho}^{p'}(x) \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p}(x) \sim C|x|^{\frac{1}{(p-1)}(\alpha p - \beta) - n} \quad \text{cuando } x \rightarrow 0,$$

cuya integral está acotada. En el segundo caso tenemos $G_{s,\rho} \in L_{p'}$ y por lo tanto

$$G_{s,\rho}^{p'}(x) \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p}(x) \leq C G_{s,\rho}^{p'}(x) \quad \text{para } |x| < 1.$$

Por último, en el infinito tenemos el siguiente comportamiento:

$$G_{s,\rho}^{p'}(x) \cdot G_{\beta,\rho}^{-p'/p}(x) \sim C|x|^{\frac{(\beta-\alpha p)}{(\rho+1)(p-1)} - \frac{(n-\rho)}{\rho+1}} e^{-\gamma_2|x|^{\frac{2\rho}{\rho+1}}},$$

siendo $\gamma_2 = \gamma_2 = (1 + 1/\rho) \cdot (\frac{\rho}{4})^{1/(\rho+1)}$. De forma que concluimos la demostración. \square

Proposición 3. *Si $\text{peso}(B') < \text{peso}(B)$ entonces, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple*

$$B'(A) \leq QB(A),$$

siendo Q una constante independiente de K .

Demostración. Supongamos $A = K$, K compacto, y que los índices son $\text{ind}(B') = (\beta, q)$ y $\text{ind}(B) = (s, p)$. Por las hipótesis $\beta q < \alpha p$; además, como $q > 1$, tenemos $\beta < \beta q < \alpha p$.

Sea $\mu = b_{\beta,q,\rho}^{q-1}(K) \cdot \nu$, donde ν es la $b_{\beta,q,\rho}$ -distribución capacitaria de K ($\|\nu\|_1 = b_{\beta,q,\rho}(K)$). Por la Proposición 2 y [2, Proposition 1.9] tenemos

$$G_{\beta,\rho} * \mu(x) \leq Q_1, \quad \forall x.$$

Además, por el Lema 3, se sigue

$$\begin{aligned} \|G_s^\rho * \mu\|_{p'} &\leq Q_2 \|G_\beta^\rho * \mu\|_\infty^{1/p} \|\mu\|_1^{1/p'} \\ &\leq Q_2 \cdot Q_1^{1/p} \cdot b_{\beta,q,\rho}^{\frac{q-1}{p}} \|\nu\|_1^{1/p'} = Q^{1/p} \cdot b_{\beta,q,\rho}^{\frac{q-1}{p}} \cdot b_{\beta,q,\rho}^{\frac{1}{p}} = Q^{1/p} b_{\beta,q,\rho}^{\frac{q}{p}}(K), \end{aligned}$$

siendo Q independiente de K .

Si $b_{\beta,q,\rho}(K) > 0$ entonces $\mu_1 = Q^{-1/p} b_{\beta,q,\rho}^{-q/p'}(K) \cdot \mu$ es una medida prueba para $b_{s,p,\rho}(K)$. Luego

$$\|G_{s,\rho} * \mu_1\|_{p'} \leq 1.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} b_{s,p,\rho}(K) &\geq \|\mu_1\|_1 = Q^{-1/p} \cdot b_{\beta,q,\rho}^{-\frac{q}{p'}} \cdot \|\mu\|_1 \\ &= Q^{-1/p} \cdot b_{\beta,q,\rho}^{-q/p'}(K) \cdot b_{\beta,q,\rho}^{q-1}(K) \cdot b_{\beta,q,\rho}(K) = Q^{-1/p} b_{\beta,q,\rho}^{q/p}(K), \end{aligned}$$

esto es,

$$b_{s,p,\rho}(K) \geq Q^{-1/p} b_{\beta,q,\rho}^{q/p}(K).$$

Y por lo tanto

$$b_{\beta,q,\rho}^q(K) \leq Q b_{s,p,\rho}^p(K).$$

Entonces, aplicando [2, Proposition 1.7] obtenemos el resultado deseado para compactos.

Para $b_{\beta,q,\rho}(K) = 0$, el resultado es inmediato.

Finalmente, la desigualdad para conjuntos en general se obtiene usando el mismo argumento que en la demostración de [2, Theorem 2.1]. \square

Seguidamente estudiamos algunas relaciones entre las capacidades asociadas a los potenciales de Bessel y a las generalizadas de Bessel.

Lema 4. *Dado cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que:*

- (i) *Si $\rho > 1$, entonces $C_{s,p}(A) < B_{s,p,\rho}(A)$.*
- (ii) *Si $\rho < 1$, la desigualdad se invierte, es decir, $B_{s,p,\rho}(A) < C_{s,p}(A)$.*

Demostración. La demostración se sigue de la desigualdad existente entre los dos núcleos. Es decir, cuando $\rho > 1$, $G_{s,\rho}(x) < G_s(x)$, y si $\rho < 1$, $G_{s,\rho}(x) > G_s(x)$. \square

Haciendo uso de [1, Proposition 4.2] obtenemos el siguiente resultado

Proposición 4. *Sea $\rho \geq 1$, entonces existe $r_1 > 0$ y Q_1 , independiente de A , tal que*

$$Q_1^{-1}C_{s,p}(A) \leq B_{s,p,\rho}(A) \leq Q_1 C_{s,p}(A)$$

siempre que $\text{diam}(A) < r_1$.

Por último, utilizando el Lema 4 y [2, Theorem 2.2] tenemos

Proposición 5. *Si $\alpha p \geq n$ y $0 < t \leq 1$, entonces, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$(B_{t\alpha,p/t,1/\rho}(A))^t \leq QB_{s,p,\rho}(A),$$

donde Q es una constante independiente de A y $\rho \geq 1$.

REFERENCIAS

- [1] D. R. Adams y N. G. Meyers, Thinness and Wiener criteria for non-linear potentials, *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972/73), 169–197.
- [2] D. R. Adams y N. G. Meyers, Bessel potentials. Inclusion relations among classes of exceptional sets, *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972/73), 873–905.
- [3] N. Aronszajn y K. T. Smith, *Theory of Bessel potentials. Part I, Studies in eigenvalue problems*, Technical Report n.º 22, University of Kansas, 1959.
- [4] J. J. Betancor y C. Jerez Díaz, Boundedness and range of \mathcal{H} -transformation on certain weighted \mathcal{L}_p spaces, *Serdica* **20** (1994), 269–297.
- [5] S. Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932. Republicación: Chelsea, Nueva York, 1948.
- [6] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger y F. Tricomi, *Tables of integral transforms*, vol. II, McGraw-Hill, Nueva York, 1954.
- [7] C. Fox, The \mathcal{G} and \mathcal{H} functions as symmetrical Fourier kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **98** (1961), 395–429.
- [8] O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.* **3** (1935), 1–118.
- [9] E. Krätzel, Integral transformations of Bessel-type, en *Generalized functions and operational calculus* (Proc. Conf., Varna, 1975), *Bulgar. Acad. Sci.*, Sofia (1979), 148–155.
- [10] E. Krätzel y H. Menzer, Verallgemeinerte Hankel-Funktionen, *Publ. Math. Debrecen* **18** (1971), 139–147 (1972).
- [11] N. G. Meyers, A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes, *Math. Scand.* **26** (1970), 255–292 (1971).
- [12] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series. Vol. 3: More special functions* (traducido del ruso por G. G. Gould), Gordon and Breach Science Publishers, 1990.
- [13] M. Riesz, Intégrales de Riemman-Liouville et potentiels, *Acta Szeged* **9** (1938), 1–42.

- [14] J. Rodríguez, El núcleo de los potenciales de Bessel-Clifford y espacios de Lipschitz, en *Actas VII Jornadas Hispano-Lusas Matem., vol. 3* (Sant Feliu de Guíxois, 1980), *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona* **22** (1980), 63–66.
- [15] J. Rodríguez, Algunos módulos de continuidad relacionados con los potenciales de Bessel-Clifford, en *Actas IX Jornadas Hispano-Lusas Matem., vol. 1* (Salamanca, 1982), *Acta Salamanticensia. Ciencias* **46**, Univ. Salamanca, Salamanca (1982), 377–381.
- [16] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland, Amsterdam-Nueva York, 1978; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1978.

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38071 LA LAGUNA (TENERIFE), SPAIN

Correo electrónico: `dicruz@ull.es`

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38271 LA LAGUNA (TENERIFE), SPAIN

Correo electrónico: `joroguez@ull.es`

OTRO PUENTE ENTRE EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA: ÁLGEBRAS NO ASOCIATIVAS Y CONEXIONES AFINES

PILAR BENITO, CRISTINA DRAPER, ALBERTO ELDUQUE,
FABIÁN MARTÍN Y JOSÉ M. PÉREZ-IZQUIERDO

ABSTRACT. Nomizu's theorem relates invariant affine connections on reductive homogeneous spaces and nonassociative algebras. Among the algebras that appear in this relation we point out the so called Lie triple algebras which contain most of the infinitesimal information on reductive spaces. The aim of this work is to provide a brief survey on recent developments in this subject that show the interplay of nonassociative structures and connections and to pose an algebraic classification question on Lie triple algebras.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de *álgebra triple de Lie* fue introducido por K. Yamaguti en [21] con el nombre de *sistema triple de Lie general*. Dicho concepto resulta ser la generalización natural de los bien conocidos *sistemas triples de Lie*, de uso frecuente en Geometría Diferencial y álgebras de Jordan, y está íntimamente relacionado con los espacios homogéneos reductivos.

El presente trabajo pretende motivar el interés que, desde perspectivas algebraicas y geométricas, tiene el estudio de las álgebras triples de Lie, así como presentar los problemas que, a lo largo de estos últimos años, hemos venido estudiando y en los que estas álgebras aparecen involucradas. Estos problemas tienen su punto de partida en las ideas e investigaciones previas que uno de los autores (Alberto Elduque), en colaboración con el profesor H. C. Myung, había realizado sobre ciertas álgebras no asociativas relacionadas con los grupos $SU(3)$, G_2 y $Spin(7)$. El fruto de nuestro trabajo conjunto ha sido posible gracias al inestimable esfuerzo que en su día nuestro querido Chicho, por entonces director del Departamento de Matemáticas y Computación de la U.R., hizo para que Alberto se incorporara a la Universidad de La Rioja en 1996, y que permitió poco a poco nutrir de savia nueva al área de Álgebra de la U.R. Estamos seguros de que allá donde esté, al leer estas notas, Chicho entenderá cuán infinito es nuestro agradecimiento.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 17B60, Secondary 53C05, 53C30.

Key words and phrases. Nonassociative algebras, Lie algebras associated with other structures, Lie triple algebras, homogeneous spaces, affine connections.

La investigación de P. Benito, C. Draper, F. Marín y J. M. Pérez-Izquierdo está subvencionada por la DGES, proyecto PB97-1291-C03-03, y por la Universidad de La Rioja, proyecto API00/B04.

La investigación de A. Elduque está subvencionada por la DGES, proyecto PB97-1291-C03-03.

El contenido del trabajo aparece desglosado de la forma siguiente: en la sección 2 se expone la relación existente entre las álgebras triples de Lie y los espacios homogéneos reductivos. La sección 3 está dedicada a mostrar cómo el problema geométrico del cálculo de conexiones afines invariantes en espacios homogéneos se traduce al problema algebraico de determinación de álgebras no asociativas con una subálgebra prefijada de su álgebra de derivaciones; en ella se incluye también una serie de resultados vinculados con este problema. La última sección está dedicada a explicar el problema de estructura sobre álgebras triples en el que actualmente estamos trabajando.

2. ESPACIOS HOMOGÉNEOS Y ÁLGEBRAS TRIPLES DE LIE

La bien conocida correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie crea un importante vínculo entre el Álgebra y la Geometría que permite tratar algunos problemas desde distintas perspectivas. Los grupos de Lie aparecen de modo natural como grupos de simetría de ciertos objetos geométricos, y su importancia radica esencialmente en su acción en otras variedades diferenciables de entre las cuales destacaremos los espacios homogéneos. Un *espacio homogéneo* de un grupo de Lie G es una variedad diferenciable sobre la que G actúa de modo que la correspondiente acción $G \times M \rightarrow M$ es diferenciable y transitiva. La variedad M se puede identificar con el conjunto de clases a izquierda G/H , con H el subgrupo de isotropía de cualquier elemento de M (la acción natural $G \times G/H \rightarrow G/H$, $(\sigma, \tau H) \mapsto \sigma\tau H$ dota a dicho cociente de estructura de variedad diferenciable difeomorfa a M). Si \mathfrak{g} y \mathfrak{h} son las álgebras de Lie de los grupos de Lie G y H respectivamente, el espacio homogéneo se dice *reductivo* si el álgebra de Lie \mathfrak{g} se descompone como

$$(1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

con \mathfrak{m} subespacio de \mathfrak{g} invariante bajo la acción adjunta de H ; esta condición de invarianza implica $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ y, si H es conexo, ambas condiciones son equivalentes. En esta situación, para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{m}$, las proyecciones del corchete $[x, y] \in \mathfrak{g}$ sobre \mathfrak{m} y \mathfrak{h} permiten definir en \mathfrak{m} el producto binario

$$(2) \quad \circ : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}, \quad (x, y) \mapsto x \circ y := [x, y]_{\mathfrak{m}}$$

y el producto triple

$$(3) \quad [, ,] : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}, \quad (x, y, z) \mapsto [x, y, z] := [[x, y]_{\mathfrak{h}}, z]$$

que verifican, como consecuencia de que \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, los siguientes axiomas:

$$(4) \quad \begin{aligned} x \circ x &= 0, \\ [x, x, y] &= 0, \\ [x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] + (x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y &= 0, \\ [x \circ y, z, t] + [y \circ z, x, t] + [z \circ x, y, t] &= 0, \\ [x, y, z \circ t] &= [x, y, z] \circ t + z \circ [x, y, t], \\ [x, y, [z, t, s]] &= [[x, y, z], t, s] + [z, [x, y, t], s] + [z, t, [x, y, s]]. \end{aligned}$$

Un espacio vectorial \mathfrak{m} dotado de un producto binario \circ y otro triple $[\ , \]$ que verifique los axiomas dados en (4) se dice *álgebra triple de Lie* o *sistema triple de Lie general* (abreviadamente g.L.t.s.). Estos sistemas triples generales contienen información esencial sobre la geometría de los espacios homogéneos reductivos.

Un caso particular y bien conocido de g.L.t.s. es el de los *sistemas triples de Lie* (abreviadamente L.t.s.) en los que el producto binario es trivial ($x \circ y = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{m}$). En el marco algebraico, estos sistemas han permitido, entre otras cosas, la incorporación de métodos y resultados de álgebras de Lie en el estudio de álgebras de Jordan (véase el Capítulo VIII en [14]). En el contexto geométrico, los L.t.s. están relacionados con un tipo especial de espacios homogéneos reductivos, los llamados *espacios simétricos* (véase [12]), en los que G está dotado de un automorfismo diferenciable σ de orden 2, de modo que H es aproximadamente el conjunto de elementos fijados por σ . Así, en cualquier G/H espacio simétrico se tiene la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : d\sigma(x) = x\}$ y $\mathfrak{m} = \{x \in \mathfrak{g} : d\sigma(x) = -x\}$, que verifica $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ y $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h}$, por lo que el g.L.t.s. \mathfrak{m} tiene producto binario trivial.

Por tanto, la Geometría Diferencial proporciona abundantes e interesantes ejemplos de g.L.t.s., lo que justifica desde una perspectiva algebraica el estudio de este tipo de sistemas.

En la siguiente sección presentamos un problema concreto que entrelaza la geometría, los g.L.t.s. y las álgebras no asociativas. A partir de ahora, dada \mathfrak{g} álgebra de Lie arbitraria con producto $[x, y]$, llamaremos *descomposición reductiva de \mathfrak{g}* a cualquier descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, que satisfaga $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ y $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$. En esta situación, \mathfrak{h} es subálgebra de \mathfrak{g} ; el par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ se dice *par reductivo* y el subespacio \mathfrak{m} con los productos binario y triple definidos como en (2) y (3) tiene estructura de g.L.t.s.

3. CONEXIONES AFINES Y ÁLGEBRAS NO ASOCIATIVAS

Desde el punto de vista de la Geometría Diferencial, una de las motivaciones para el estudio abstracto de los g.L.t.s. procede del siguiente resultado probado por Nomizu en 1954 (véase el Teorema 8.1 en [18]):

Teorema (Nomizu). *Si $M \simeq G/H$ es un espacio homogéneo reductivo con descomposición reductiva asociada $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, el conjunto de conexiones afines G -invariantes está en correspondencia biyectiva con el conjunto de aplicaciones bilineales $\alpha : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ tales que*

$$\text{Ad } h(\alpha(x, y)) = \alpha(\text{Ad } h(x), \text{Ad } h(y)) \quad \forall h \in H, \forall x, y \in \mathfrak{m}.$$

Dicho de otro modo, cada conexión afín invariante está determinada por un producto bilineal α definido sobre \mathfrak{m} tal que $\text{Ad } H|_{\mathfrak{m}}$ es subgrupo del grupo de automorfismos del álgebra no asociativa (\mathfrak{m}, α) , $(\text{Aut}(\mathfrak{m}, \alpha))$. Esto implica que $\text{ad } \mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}}$ es subálgebra del álgebra de derivaciones de (\mathfrak{m}, α) , $(\text{Der}(\mathfrak{m}, \alpha))$, de modo que ambas condiciones son equivalentes si H es conexo. Esto permite estudiar y expresar la torsión, curvatura, holonomía, etc. de la conexión asociada a (\mathfrak{m}, α) en términos de esta álgebra no asociativa. Observamos que el conjunto de multiplicaciones $\alpha : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ tales que $\text{ad } \mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}} \subseteq \text{Der}(\mathfrak{m}, \alpha)$ es exactamente el espacio vectorial de homomorfismos de \mathfrak{h} -módulos de $\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}$ en \mathfrak{m} , que se denota por $\text{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

Así pues, para espacios homogéneos reductivos, el problema de encontrar conexiones afines invariantes se reduce al problema algebraico de encontrar estructuras de álgebras no asociativas en \mathfrak{m} con un conjunto de automorfismos prefijado ($\text{Ad } H \subseteq \text{Aut}(\mathfrak{m}, \alpha)$), ó con una subálgebra prefijada del álgebra de derivaciones ($\text{ad } \mathfrak{h} \subseteq \text{Der}(\mathfrak{m}, \alpha)$) en el caso conexo.

El uso combinado del Teorema de Nomizu y la estructura de la conocida álgebra de Cayley o de octoniones \mathbb{O} cuyo grupo de automorfismos (álgebra de derivaciones) es el grupo de Lie simple excepcional G_2 (álgebra simple central de tipo G_2), ha permitido determinar en [7], [8], [9] y [3] los g.L.t.s. y las conexiones afines invariantes asociadas a los espacios homogéneos $S^6 \simeq G_2/SU(3)$, $S^7 \simeq \text{Spin}(7)/G_2$, $S^{15} \simeq \text{Spin}(9)/\text{Spin}(7)$ y a espacios cociente de G_2 . Las conexiones afines invariantes en espacios simétricos irreducibles y compactos fueron obtenidas en [15] y [16], y más recientemente en [1] mediante el cálculo explícito del conjunto $\text{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$. Presentamos a continuación un resumen de algunos de los resultados contenidos en estos trabajos.

3.1. Conexiones en esferas. Para la esfera 6-dimensional S^6 , a partir de los resultados obtenidos en [7] se concluye que las álgebras no asociativas (\mathfrak{m}, α) correspondientes a las conexiones invariantes son todas ellas (salvo la asociada al producto trivial) isomorfas al álgebra de elementos de traza cero de la forma real compacta del álgebra de color introducida en [6], y que este espacio tiene una familia biparamétrica de conexiones afines G_2 -invariantes. En el caso S^7 , los resultados contenidos en [8] muestran que las álgebras no triviales (\mathfrak{m}, α) que aparecen son todas isomorfas al álgebra de Malcev (simple central no de Lie) de vectores en el álgebra de Cayley \mathbb{O} , y que el espacio posee una familia uniparamétrica de conexiones $\text{Spin}(7)$ -invariantes. Finalmente, para S^{15} , en [9] se obtiene que las conexiones $\text{Spin}(9)$ -invariantes vienen dadas por una familia triparamétrica de productos en $\mathbb{O}_0 \times \mathbb{O}$ donde \mathbb{O}_0 denota el conjunto de elementos de traza cero en \mathbb{O} .

Los trabajos citados estudian una situación mucho más general: las descomposiciones reductivas (de álgebras de Lie simples centrales) asociadas a los pares reductivos (G_2, A_2) , (B_3, G_2) y (B_4, B_3) sobre cuerpos arbitrarios de característica distinta de 2 y 3. Esto permite un mayor conocimiento de las álgebras involucradas en las descomposiciones, y la restricción al cuerpo real proporciona, por medio del teorema de Nomizu, los resultados sobre conexiones en esferas que acabamos de exponer. Una versión unificada y más simple (caso real) de estos resultados puede verse en [10].

3.2. Conexiones en espacios cocientes de G_2 . En el Capítulo II de [3] se estudian, sobre cuerpos de característica distinta de 2 y 3, los pares reductivos $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ donde \mathfrak{g} es un álgebra simple central de tipo G_2 modelizada como álgebra de derivaciones de un álgebra de Cayley, y \mathfrak{h} es una subálgebra reductiva no abeliana, y se determina completamente el conjunto $\Delta = \text{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ para las correspondientes descomposiciones reductivas $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ asociadas. En el caso real, se muestra que las descomposiciones asociadas a estos pares son descomposiciones reductivas de espacios homogéneos cocientes de G_2 , que incluyen, entre otros, la variedad de Stiefel $St_{7,2} \simeq G_2/SU(2)$, la variedad de Grassman $\tilde{G}_{7,2} \simeq G_2/SU(2)SO(2)$ y el espacio simétrico $G_2/SO(4)$. Así, los cálculos sobre los conjuntos Δ para estas

tres variedades permiten concluir que en $St_{7,2}$ la familia de conexiones depende de 171 parámetros; en $\tilde{G}_{7,2}$ la familia de conexiones depende de 18 parámetros y en $G_2/SO(4)$ la única conexión que aparece es la asociada al producto trivial.

Además, desde el punto de vista de las álgebras no asociativas, el interés de las descomposiciones asociadas a estos pares radica en que permiten dar construcciones nuevas de las álgebras de Cayley y sus álgebras de derivaciones; dichas construcciones aparecen recogidas en la prepublicación [2].

3.3. Conexiones en espacios simétricos. Las conexiones afines invariantes en espacios simétricos Riemannianos irreducibles y compactos se calculan en [15], [16] y también en [1] mediante el uso de técnicas completamente distintas. En [15] y [16] se determina la dimensión del conjunto $\text{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ asociado a cada espacio simétrico extendiendo escalares al cuerpo complejo y descomponiendo el producto tensor $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ en suma directa de módulos irreducibles (tarea no siempre fácil). De esta manera, se prueba (véase el Teorema 8.1 en [15] y el Teorema 2.1 en [16]) que la única conexión afín en este tipo de espacios es la canónica (asociada al producto $\alpha \equiv 0$) salvo en unas pocas excepciones que recogen los espacios $SU(n)/SO(n)$ ($n \geq 3$), $SU(2n)/Sp(n)$ ($n \geq 3$), E_6/F_4 y $SU(n) \times SU(n)/SU(n)$ ($n \geq 3$) los cuales están íntimamente relacionados con las álgebras de Jordan simples reales.

Ahora bien, estos cálculos sobre homomorfismos efectuados en [15] y [16] se pueden simplificar y generalizar notablemente al observar que en las descomposiciones (1) asociadas a los espacios simétricos, \mathfrak{m} tiene estructura de L.t.s. simple. Así, en [1] se determina el conjunto $\Delta = \text{Hom}_{\text{Der } \mathfrak{m}}(\mathfrak{m} \otimes_F \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ de forma unificada para cualquier \mathfrak{m} L.t.s. simple sobre un cuerpo F arbitrario de característica cero, mediante el uso de la información sobre álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas y simples como álgebras graduadas que proporcionan los diagramas de Dynkin afines asociados a los correspondientes sistemas triples (véase [11]) y sin necesidad de descomponer $\mathfrak{m} \otimes_F \mathfrak{m}$. El teorema principal de este trabajo (véase el Teorema 4.3 en [1]) prueba que el conjunto de homomorfismos Δ es no nulo salvo en el caso en que \mathfrak{m} sea el L.t.s. de elementos de traza genérica cero de un álgebra simple de Jordan de grado mayor o igual que 3, con producto triple dado por el asociador en la forma: $[x, y, z] = (yz)x - y(zx)$. La restricción de este teorema al caso real proporciona las conexiones afines invariantes en los espacios simétricos irreducibles, poniendo así de manifiesto el importante papel que las álgebras de Jordan desempeñan en la existencia de conexiones no canónicas en los espacios simétricos.

4. ÁLGEBRAS TRIPLES IRREDUCIBLES

Para cualquier $(\mathfrak{m}, \circ, [, ,])$ g.L.t.s., los axiomas dados en (4) permiten deducir de forma fácil que

- (a) el subespacio

$$\text{Inder}(\mathfrak{m}) = \text{span} \langle [x, y, -] : x, y \in \mathfrak{m} \rangle$$

es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ que se dice *álgebra de derivaciones internas de \mathfrak{m}*

- (b) \mathfrak{m} es, de forma natural, $\text{Inder}(\mathfrak{m})$ -módulo ($[x, y, -] \cdot z := [x, y, z]$)

(c) el espacio vectorial

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{m}) = \text{Inder}(\mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{m}$$

tiene estructura de álgebra de Lie con el producto dado por la multiplicación en $\text{Inder}(\mathfrak{m})$ como subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, la acción natural de $\text{Inder}(\mathfrak{m})$ sobre \mathfrak{m} , y para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{m}$,

$$[x, y] := x \circ y + [x, y, -].$$

El álgebra $\mathfrak{L}(\mathfrak{m})$ se dice *envuelta estándar de \mathfrak{m}* .

Con el objetivo de profundizar en la estructura y clasificación de los g.L.t.s. simples, hemos iniciado el estudio de la clasificación de tales sistemas en la situación que, de forma natural, es más sencilla: los sistemas triples de Lie \mathfrak{m} que son irreducibles para el álgebra de Lie de sus derivaciones internas. En esta situación, sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, se tiene que $\text{Inder}(\mathfrak{m})$ es subálgebra maximal y semisimple de la envuelta $\mathfrak{L}(\mathfrak{m})$, y que dicha envuelta es simple salvo en el caso de que \mathfrak{m} sea $\text{Inder}(\mathfrak{m})$ -módulo adjunto (es decir, $\text{Inder}(\mathfrak{m})$ como $\text{adInder}(\mathfrak{m})$ -módulo natural y \mathfrak{m} son módulos isomorfos).

Por otro lado, en cualquier descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ de un álgebra de Lie simple se tiene que el álgebra \mathfrak{g} es, salvo isomorfismos, la envuelta estándar del sistema triple de Lie \mathfrak{m} asociado a la descomposición y la subálgebra \mathfrak{h} es el álgebra de sus derivaciones internas: La aplicación $\Phi: \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{m})$ dada por $h \in \mathfrak{h} \mapsto \text{ad } h|_{\mathfrak{m}} \in \text{Inder}(\mathfrak{m})$ y $x \in \mathfrak{m} \mapsto x$ es epimorfismo de álgebras de Lie, y por tanto isomorfismo por simplicidad de \mathfrak{g} . Así pues, sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, la clasificación de los g.L.t.s. irreducibles con envuelta simple se reduce a la determinación de los pares reductivos $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tales que \mathfrak{g} es álgebra de Lie simple, \mathfrak{h} es subálgebra maximal y semisimple, y el complemento de \mathfrak{h} en \mathfrak{g} es irreducible. Las subálgebras maximales de álgebras simples han sido estudiadas en [4] y [5], y esperamos que los resultados contenidos en estos trabajos aporten luz al problema de clasificación en el que estamos trabajando.

Sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, las álgebras de Lie simples son, salvo isomorfismos, de uno de los siguientes tipos (véase [13]):

- I. **Clásicas:** álgebras de transformaciones lineales sobre un espacio vectorial V (es decir, subálgebras del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V)$ con producto $[f, g] = fg - gf$) de uno de los siguientes tipos:

$$A_l : \mathfrak{sl}(V) = \{f \in \text{End}(V) : \text{traza } f = 0\}, \dim V = l + 1, l \geq 1,$$

$$B_l, D_l, C_l : \mathfrak{Kern}(V, b) = \{f \in \text{End}(V) : b(fx, y) + b(x, fy) = 0\},$$

donde b es forma bilineal no degenerada, simétrica en los tipos B_l ($\dim V = 2l + 1, l \geq 2$) y D_l ($\dim V = 2l, l \geq 4$) y antisimétrica en el tipo C_l ($\dim V = 2l, l \geq 3$).

Las restricciones sobre l en los casos B, D y C proceden de los siguientes hechos: $A_1 \cong B_1 \cong C_1, B_2 \cong C_2; D_1$ es 1-dimensional y $D_2 \cong A_1 \oplus A_1$ luego no son simples, y $D_3 \cong A_3$.

II. Excepcionales: G_2, F_4, E_6, E_7 y E_8 .

Todas estas álgebras pueden obtenerse a partir del álgebra de octoniones y de álgebras simples de Jordan (véase el Teorema 4.13 en [19]).

A continuación presentamos algunas construcciones de g.L.t.s. irreducibles cuya envuelta es un álgebra simple clásica. En lo que sigue, supondremos que el cuerpo base es algebraicamente cerrado de característica cero, aunque las construcciones son válidas eliminando la condición de cerradura algebraica.

Ejemplo 1. Sea (V, b) espacio vectorial de dimensión mayor o igual que 3 dotado de una forma bilineal b no degenerada simétrica o antisimétrica. El álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ admite la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{Skel}(V, b), \\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{S}\eta\mathfrak{m}_0(V, b) = \{f \in \text{End}(V) : b(fx, y) = b(x, fy), \text{ traza } f = 0\}. \end{aligned}$$

En este caso se tiene que \mathfrak{g} es un álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada ($[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h}$) y simple como álgebra graduada, con parte par \mathfrak{h} subálgebra simple, y parte impar \mathfrak{m} ; por tanto el sistema triple \mathfrak{m} es \mathfrak{h} -irreducible (véase el Teorema 2.8 y el Lema 4.4 en [17]) con envuelta de tipo A y producto binario trivial.

Ejemplo 2. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales de dimensión mayor o igual que 2, y $V = V_1 \otimes V_2$. El álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ admite descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{sl}(V_1) \otimes F1 \oplus F1 \otimes \mathfrak{sl}(V_2), \\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{sl}(V_1) \otimes \mathfrak{sl}(V_2). \end{aligned}$$

En este caso, la subálgebra \mathfrak{h} es isomorfa a $\mathfrak{sl}(V_1) \oplus \mathfrak{sl}(V_2)$, luego, como álgebra de Lie, es semisimple y no simple. La acción de \mathfrak{h} sobre \mathfrak{m} viene dada de forma natural al considerar $\mathfrak{sl}(V_1)$ y $\mathfrak{sl}(V_2)$ como $\mathfrak{sl}(V_1)$ -módulos adjunto y trivial, y como $\mathfrak{sl}(V_2)$ -módulos trivial y adjunto respectivamente; por tanto \mathfrak{m} es \mathfrak{h} -irreducible con envuelta de tipo A . Además, el producto binario en \mathfrak{m} como sistema triple es no trivial.

Ejemplo 3. Sean (V_1, b_1) y (V_2, b_2) espacios vectoriales de dimensión mayor o igual que 2 dotados de formas bilineales no degeneradas b_1 y b_2 , ambas simétricas o anti-simétricas (en el caso simétrico, la dimensión distinta de 2). En el espacio vectorial $V = V_1 \oplus V_2$ definimos la forma bilineal $b = b_1 \perp b_2$ (suma ortogonal de b_1 y b_2), que es no degenerada, y simétrica o antisimétrica si ambas formas son del mismo tipo. Así, el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{Skel}(V, b)$ admite la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \quad \mathfrak{h}_i = \{f \in \text{End}(V) : f|_{V_i} \in \mathfrak{Skel}(V_i, b_i), f|_{V_j} \equiv 0\}, \\ \mathfrak{m} &= \{f - f^* : f(V_1) \subseteq V_2, f|_{V_2} \equiv 0\} \end{aligned}$$

con f^* el homomorfismo adjunto de f respecto de b (f^* es el único endomorfismo de V tal que $b(fx, y) = b(x, f^*y)$).

En este caso, la subálgebra \mathfrak{h} es isomorfa a $\mathfrak{Skel}(V_1, b_1) \oplus \mathfrak{Skel}(V_2, b_2)$, luego es semisimple y no simple, y \mathfrak{m} como \mathfrak{h} -módulo es isomorfo a $\text{Hom}(V_1, V_2) \cong V_1 \otimes V_2$, donde la acción de cada componente \mathfrak{h}_i sobre V_1 y V_2 es la natural. Por tanto \mathfrak{m} es \mathfrak{h} -irreducible con envuelta de tipo B, D ó C , y con producto binario trivial.

Ejemplo 4. Sean (V_1, b_1) y (V_2, b_2) espacios vectoriales de dimensión mayor o igual que 2 dotados de formas bilineales no degeneradas simétricas o antisimétricas b_1 y b_2 . En el espacio vectorial $V = V_1 \otimes V_2$ definimos la forma bilineal no degenerada $b = b_1 \otimes b_2$ dada por

$$b_1 \otimes b_2(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) := b_1(v_1, w_1)b_2(v_2, w_2)$$

y observamos que b es simétrica (antisimétrica) si y sólo si b_1 y b_2 son del mismo tipo (una es simétrica y la otra antisimétrica).

El isomorfismo natural entre los espacios vectoriales

$$\text{End}(V_1) \otimes \text{End}(V_2) \cong \text{End}(V_1 \otimes V_2)$$

proporciona la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ para el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{Skew}(V, b)$ donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{Skew}(V_1, b_1) \otimes F1 \oplus F1 \otimes \mathfrak{Skew}(V_2, b_2) \\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{Skew}(V_1, b_1) \otimes \mathfrak{Sym}_0(V_2, b_2) \oplus \mathfrak{Sym}_0(V_1, b_1) \otimes \mathfrak{Skew}(V_2, b_2) \end{aligned}$$

En este caso, \mathfrak{m} es \mathfrak{h} -irreducible si y sólo si uno de los espacios V_i es 2-dimensional con b_i antisimétrica, y la dimensión del otro es mayor o igual que 3.

Por tanto, suponiendo $\dim V_1 \geq 3$, (V_2, b_2) con $\dim V_2 = 2$ y b_2 antisimétrica, obtenemos que la subálgebra \mathfrak{h} es isomorfa a $\mathfrak{Skew}(V_1, b_1) \oplus \mathfrak{Skew}(V_2, b_2)$, luego es semisimple y no simple, y que el \mathfrak{h} -módulo $\mathfrak{m} = \mathfrak{Sym}_0(V_1, b_1) \otimes \mathfrak{Skew}(V_2, b_2)$ es irreducible (producto tensor de irreducibles para cada componente simple) con envuelta de tipo B , D ó C . En este caso, el producto binario en \mathfrak{m} como sistema triple es no trivial.

Los ejemplos que acabamos de presentar no son casos aislados, ya que a partir de las Proposiciones 10.1 y 10.2 en [20], que clasifican los tipos de subálgebras semisimples y no simples de las álgebras clásicas, se obtiene de forma fácil que los pares reductivos $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ con \mathfrak{g} álgebra simple clásica, \mathfrak{h} subálgebra semisimple y no simple y tal que el complemento de \mathfrak{h} en \mathfrak{g} es irreducible son exactamente los descritos en los ejemplos 2, 3 y 4. Por tanto, esto reduce el problema de clasificación planteado en esta sección a la determinación de los adecuados pares reductivos $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ en los casos \mathfrak{g} clásica y \mathfrak{h} simple y \mathfrak{g} excepcional de tipo distinto de G_2 , ya que el caso G_2 aparece resuelto en [3].

REFERENCIAS

- [1] P. Benito, C. Draper y A. Elduque, On some algebras related to Lie triple systems, *J. Algebra* **219** (1999), 234–254.
- [2] P. Benito, C. Draper y A. Elduque, Models of octonions and G_2 , prepublicación.
- [3] C. Draper, *Espacios homogéneos reductivos y álgebras no asociativas*, Tesis Doctoral, Universidad de La Rioja, 2001.
- [4] E. B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Amer. Math. Soc. Transl.* **6** (1957), 11–244.
- [5] E. B. Dynkin, Maximal subgroups of the classical groups, *Amer. Math. Soc. Transl.* **6** (1957), 245–378.
- [6] G. Domokos y S. Kövesi-Domokos, The algebra of color, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 1477–1481.
- [7] A. Elduque y H. C. Myung, Color algebras and affine connections on S^6 , *J. Algebra* **149** (1992), 234–261.

- [8] A. Elduque y H. C. Myung, The reductive pair (B_3, G_2) and affine connections on S^7 , *J. Pure Appl. Algebra* **86** (1993), 155–171.
- [9] A. Elduque y H. C. Myung, The reductive pair (B_4, B_3) and affine connections on S^{15} , *J. Algebra* **227** (2000), 504–531.
- [10] A. Elduque y H. C. Myung, Octonions and affine connections on spheres, *Lect. Notes in Pure and Appl. Math.* **211** (2000), 42–54.
- [11] J. R. Faulkner, Dynkin diagrams for Lie triple systems, *J. Algebra* **62** (1980), 384–392.
- [12] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [13] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-Nueva York, 1972.
- [14] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [15] H. T. Laquer, Invariant affine connections on Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), 541–551.
- [16] H. T. Laquer, Invariant affine connections on symmetric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 447–454.
- [17] W. G. Lister, A structure theory of Lie triple systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 217–242.
- [18] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 33–65.
- [19] R. D. Schaffer, *An introduction to nonassociative algebras*, Dover Publications, Nueva York, 1995.
- [20] J. Tits, Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples, *Séminaire Bourbaki* **3** (1955), Exp. n. 119, 197–214.
- [21] K. Yamaguti, On the Lie triple systems and its generalization, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A* **21** (1957/1958), 155–160.

P. BENITO, F. MARTÍN, J. M. PÉREZ-IZQUIERDO: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, 26004 LOGROÑO, SPAIN

Correo electrónico: pilar.benito@dmc.unirioja.es, fabian.martin@dmc.unirioja.es, jm.perez@dmc.unirioja.es

C. DRAPER: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, CAMPUS EL EGIDO, UNIVERSIDAD DE MÁLAGA, 29071 MÁLAGA, SPAIN

Correo electrónico: cdraper@terra.es

A. ELDUQUE: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, 50009 ZARAGOZA, SPAIN

Correo electrónico: elduque@posta.unizar.es

ALGUNAS NOTAS SOBRE UNA DERIVADA ALGEBRAICA ASOCIADA AL OPERADOR D^δ

VÍCTOR M. ALMEIDA Y JOSÉ RODRÍGUEZ

*Aquél que dedica su vida a sembrar
sobrevive, en sus frutos, a su propio tiempo*

ABSTRACT. In this paper some new properties related to an algebraic derivative, associated to the Riemann-Liouville's fractional derivative D^δ and the Mikusinski's convolution, are shown. In the last section, and making use of the Meller's theorem, it is obtained an algebraic derivative associated to the Riemann-Liouville's generalized operator D_β^δ .

1. INTRODUCCIÓN

En [2], V. M. Almeida, N. Castro y J. Rodríguez definieron la derivada algebraica

$$\mathcal{D}f(t) = \frac{-I^{\delta-1}}{\delta} tf(t)$$

en el anillo $(C_\delta, +, *)$, donde $*$ representa la convolución de Mikusinski

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \psi)g(\psi)d\psi$$

y

$$C_\delta = \left\{ f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \text{ unif. converg. en compactos de } [0, \infty) \right\}$$

el espacio introducido, en [1], para el desarrollo de un cálculo operacional, tipo Mikusinski, asociado al operador

$$D^\delta f(t) = D^n I^{n-\delta} f(t) \quad (n-1 < \delta \leq n),$$

siendo

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

el operador integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 44A40, 26A33, 33E20.

Key words and phrases. Algebraic derivative, operational calculus, operator of fractional order.

El operador integral I^δ fue identificado con la función $\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \in C_\delta$, en el sentido de que

$$I^\delta f(t) = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} * f(t) \quad (\forall f(t) \in C_\delta)$$

y usando el método de inducción

$$(I^\delta)^k f(t) = \frac{t^{k\delta-1}}{\Gamma(k\delta)} * f(t) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Representando por $I^\delta = l_\delta = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}$, se denota por $v_\delta = \frac{1}{l_\delta}$ al inverso algebraico de l_δ en M_δ , cuerpo de fracciones asociado al anillo C_δ .

Siguiendo a Mikusinski [9], se establecieron isomorfismos entre C_δ y \mathbb{C} con subconjuntos de M_δ mediante las aplicaciones

$$\begin{aligned} C_\delta &\longrightarrow M_\delta^1 \subset M_\delta \\ f &\rightsquigarrow \frac{l_\delta f}{l_\delta} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow M_\delta^2 \subset M_\delta \\ \alpha &\rightsquigarrow \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} \end{aligned}$$

denominándose a los elementos $[\alpha] = \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$, de M_δ , operadores numéricos.

Haciendo uso de este cálculo operacional, en [2] se demostraron las siguientes proposiciones, las cuales ponen de manifiesto el buen comportamiento de la derivada algebraica \mathcal{D} sobre ciertos elementos de M_δ .

Proposición 1. Sean $1 = \frac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$ el elemento unidad de M_δ , $0 = \frac{0}{t^{\delta-1}}$, $v_\delta = \frac{1}{l_\delta}$ el inverso algebraico de l_δ en M_δ , y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

1. $\mathcal{D}1 = 0$.
2. $\mathcal{D}\alpha = 0$ (siendo α cualquier operador numérico).
3. $\mathcal{D}(\alpha p) = \alpha \mathcal{D}p$ (para todo $p \in M_\delta$).
4. $\mathcal{D}l_\delta^n = -nl_\delta^{n+1}$.
5. $\mathcal{D}v_\delta^n = nv_\delta^{n-1}$.
6. $\mathcal{D}(1 - \alpha l_\delta)^n = n\alpha l_\delta^2(1 - \alpha l_\delta)^{n-1}$.
7. $\mathcal{D}(v_\delta - \alpha)^n = n(v_\delta - \alpha)^{n-1}$.

Proposición 2. Dado $p \in M_\delta$, si $\mathcal{D}p = 0$ entonces p es un operador numérico.

Usando estos resultados, se resolvió, siguiendo la misma técnica que W. Kierat y K. Skornik [6, 7], la ecuación integrodiferencial

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\mathcal{D}(D^\delta)^2 x(t) + (1 + \mathcal{D})D^\delta x(t) - ax(t) = 0, \\ [t^{1-\delta} x(t)]_{t=0} = 0 \quad (x(t) \in C_\delta), (a \in \mathbb{C}), \end{cases}$$

transformándola en la ecuación operacional (es decir, inmersa en el cuerpo de fracciones M_δ)

$$(1.2) \quad \frac{\mathcal{D}x(t)}{x(t)} = \frac{a-1}{v_\delta} - \frac{a}{v_\delta-1} = \frac{l_\delta[l_\delta(1-a)-1]}{1-l_\delta},$$

estableciéndose

Proposición 3. *La función x_a , solución de las ecuaciones (1.2) y (1.1), admite las representaciones*

$$x_a = l_\delta(1-l_\delta)^{-a} \in M_\delta$$

y

$$x_a(t) = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, 1); \\ (\delta, \delta); \end{matrix} \quad t^\delta \right] \in C_\delta,$$

donde ${}_1\Psi_1$ representa la función hipergeométrica generalizada de Wright [10]

$${}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, b); \\ (c, d); \end{matrix} \quad t \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(kb+a)}{\Gamma(kd+c)} \frac{t^k}{k!}.$$

Además, verifica la siguiente propiedad de convolución:

$$\begin{aligned} D^\delta \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\delta-1}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, 1); \\ (\delta, \delta); \end{matrix} \quad (t-\tau)^\delta \right] \frac{\tau^{\delta-1}}{\Gamma(b)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (b, 1); \\ (\delta, \delta); \end{matrix} \quad \tau^\delta \right] d\tau \\ = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(a+b)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a+b, 1); \\ (\delta, \delta); \end{matrix} \quad t^\delta \right]. \end{aligned}$$

2. OTROS RESULTADOS Y EJEMPLOS RELATIVOS A \mathcal{D}

De forma análoga a lo realizado en [5], definiremos el operador $h = \exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}]$ y se mostrará el comportamiento de la derivada algebraica \mathcal{D} en relación a el mismo.

Definición 1. Sean $\gamma, \alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ y $v_\delta = \frac{1}{l_\delta} \in M_\delta$. Entonces,

$$(2.1) \quad h = \exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}] = 1 + \frac{\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n}}{2!} + \dots$$

donde la convergencia de la serie de operadores (2.1) es en el sentido de Mikusinski [9].

El comportamiento de la derivada algebraica \mathcal{D} , en relación al operador h viene dada por

Proposición 4. Sea $\mathcal{D} = -\frac{l_\delta^{-1}}{\delta}t$ y $h = \exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}]$. Entonces,

$$\mathcal{D}h = (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1} \exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}].$$

Demostración. Por la Proposición 1, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{D}h &= \mathcal{D}\left[1 + \frac{\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n}}{2!} + \dots\right] \\ &= \frac{(-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}}{1!} + \frac{(-2n)\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n-1}}{2!} + \dots \\ &= (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}\left[1 + \frac{\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n}}{2!} + \dots\right] \\ &= (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}\exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}]. \end{aligned}$$

□

Como aplicación de esta proposición y del cálculo operacional, se pueden resolver ecuaciones del tipo

$$(2.2) \quad \mathcal{D}(D^\delta)^2x(t) + (n - 1)D^\delta x(t) + x(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

donde

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \quad \text{con } a_1 = 0.$$

La ecuación (2.2) se transforma ([1, prop. 3.4]) en

$$\mathcal{D}[v_\delta^2x(t) - a_2\Gamma(2\delta)] + (n - 1)v_\delta x(t) + x(t) = 0,$$

que por la Proposición 1, nos lleva a

$$2v_\delta + v_\delta^2\mathcal{D}x(t) + (n - 1)v_\delta x(t) + x(t) = 0$$

o bien a la expresión equivalente

$$(2.3) \quad \frac{\mathcal{D}x(t)}{x(t)} = \frac{-(n + 1)}{v_\delta} + \frac{-1}{v_\delta^2}.$$

No es complicado comprobar, en base a la Proposición 4, que elemento x_n de M_δ dado por

$$x_n = v_\delta^{-(n+1)} \exp[v_\delta^{-1}]$$

representa una solución de (2.3), la cual admite la siguiente representación como función de C_δ :

$$\begin{aligned} x_n(t) &= l_\delta^{n+1}\left[1 + v_\delta^{-1} + \frac{v_\delta^{-2}}{2!} + \dots\right] = l_\delta^{n+1} + l_\delta^{n+2} + \frac{l_\delta^{n+3}}{2!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_\delta^{n+1+k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{(n+1+k)\delta-1}}{k! \Gamma[(n + 1 + k)\delta]} \\ &= t^{(n+1)\delta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\delta)^k}{k! \Gamma[(n + 1 + k)\delta]} = t^{(n+1)\delta-1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 0); \\ ((n + 1)\delta, \delta); \end{matrix} t^\delta \right] \end{aligned}$$

y es una solución de la ecuación (2.2).

Proposición 5. *La función x_n verifica que, $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} (D^\delta)^k x_n(t) &= x_{n-k}(t) & (n - k > 0), \\ (I^\delta)^k x_n(t) &= x_{n+k}(t). \end{aligned}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del hecho de que el elemento $l_\delta \in M_\delta$ represente al operador integral I^δ , y de la expresión $x_n = v_\delta^{-(n+1)} \exp[v_\delta^{-1}] = l_\delta^{n+1} \exp[v_\delta^{-1}]$. □

Para finalizar esta sección demostraremos que \mathcal{D} es una derivada algebraica, incluso en el anillo de Mikusinski $(C, +, *)$. Para lo que necesitaremos comprobar la veracidad de la siguiente proposición.

Proposición 6. *Dados $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $f, g \in C$, se verifica que*

$$I^\alpha(f * g)(t) = [(I^\alpha f) * g](t) = [f * (I^\alpha g)](t).$$

Demostración. Es suficiente con la demostración de la primera igualdad, ya que la segunda sería consecuencia de la conmutatividad de la convolución $*$. Así,

$$\begin{aligned} I^\alpha(f * g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left[\int_0^\tau f(\tau - u)g(u) du \right] d\tau \\ &= \int_0^\tau \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(t - \tau) d\tau \right] g(u) du \\ &= \int_0^\tau \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-u} (t - u - \psi)^{\alpha-1} f(\psi) d\psi \right] g(u) du = [(I^\alpha f) * g](t). \end{aligned}$$

□

Proposición 7. *Para cualquier par de funciones $f, g \in C$, se tiene*

- (a) $\mathcal{D}(f + g)(t) = \mathcal{D}f(t) + \mathcal{D}g(t)$.
- (b) $\mathcal{D}(f * g)(t) = [(\mathcal{D}f) * g](t) + [f * (\mathcal{D}g)](t)$.

Demostración. La comprobación de (a) es trivial debido al carácter lineal de \mathcal{D} respecto a la suma.

Para demostrar (b), hemos de tener en cuenta que $-tf(t)$ representa la derivada algebraica de Mikusinski de la función f junto con la Proposición 6, de forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f * g)(t) &= -\frac{I^{\delta-1}}{\delta} t(f * g)(t) = \frac{I^{\delta-1}}{\delta} \{ [(-tf) * g](t) + [f * (-tg)](t) \} \\ &= [(\mathcal{D}f) * g](t) + [f * (\mathcal{D}g)](t). \end{aligned}$$

□

Sin embargo, este hecho es de nula aplicabilidad dado que

$$\mathcal{D}l^n \neq -nl^{n+1} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}s^n \neq ns^{n-1},$$

donde $l = \{1\}$ representa el operador integral de Mikusinski y $s = \frac{1}{l}$ el correspondiente operador diferencial [9]. En otras palabras, la derivada algebraica no está solamente relacionada con la convolución que se esté usando, sino que está también íntimamente ligada al operador para el cual se ha desarrollado el cálculo operacional.

3. UNA DERIVADA ALGEBRAICA ASOCIADA AL OPERADOR D_{β}^{δ}

En esta sección usaremos la derivada algebraica \mathcal{D} para obtener una derivada algebraica asociada al operador D_{β}^{δ} , el cual puede ser considerado como una generalización de D^{δ} . Para ello, consideramos

Teorema 1. *Si $\mathcal{T} : X \rightarrow \hat{X}$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales X y \hat{X} , y $\hat{L} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ es un operador lineal en \hat{X} con una convolución asociada $\hat{*} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \hat{X}$, entonces la operación $x * y = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}x \hat{*} \mathcal{T}y)$ es una convolución para el operador $L = \mathcal{T}^{-1}\hat{L}\mathcal{T}$ en X .*

Este teorema, conocido como el teorema de semejanza de Meller, puede ser encontrado en [4].

Almeida y Rodríguez [3] mediante el uso de este teorema demostraron que se podía obtener la derivada algebraica $\mathcal{D} = \mathcal{T}^{-1}\hat{\mathcal{D}}\mathcal{T}$ asociada a $*$, en caso de que se tuviese tal derivada $\hat{\mathcal{D}}$ asociada a $\hat{*}$. Además probaron que si $\hat{*}$ carecía de divisores de cero, lo que implicaría que también $*$ estuviese libre de ellos, entonces el isomorfismo \mathcal{T} puede ser extendido a los respectivos cuerpos de fracciones \mathcal{M} y $\hat{\mathcal{M}}$ mediante

$$\mathcal{T}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathcal{T}f}{\mathcal{T}g} \quad \text{para todo } \frac{f}{g} \in \mathcal{M}.$$

Este isomorfismo de cuerpos (de Algebras en realidad), permitió comprobar que cuando existiese un elemento $\hat{l} \in \hat{X}$ verificando $\hat{W}\hat{f} = \hat{l}\hat{*}f$, para cualquier $\hat{f} \in \hat{X}$, siendo \hat{W} el operador inverso por la derecha de \hat{L} , también existiría $l = \mathcal{T}^{-1}(\hat{l}) \in \mathcal{M}$ tal que $Wf = l * f$, siendo W el correspondiente operador inverso por la derecha de L ; remarcando que el isomorfismo $\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathcal{M}}$ aplica $s = \frac{1}{l}$ en $\hat{s} = \frac{1}{\hat{l}}$.

Finalmente se estableció

Proposición 8. *Son ciertas las siguientes propiedades:*

1. *Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{s} = 1$ entonces $\mathcal{D}s = 1$.*
2. *Si $\hat{\mathcal{D}}1 = 0$ entonces $\mathcal{D}1 = 0$.*
3. *Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{s}^n = n\hat{s}^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}s^n = ns^{n-1}$.*
4. *Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{l}^n = -n\hat{l}^{n+1}$ entonces $\mathcal{D}l^n = -nl^{n+1}$.*

Pasemos a continuación a extender algunas propiedades obtenidas en [3].

Proposición 9.

1. *Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{\alpha} = 0$ entonces $\mathcal{D}\alpha = 0$ ($\hat{\alpha} = \mathcal{T}(\alpha)$ y α son operadores numéricos).*
2. *Si $\hat{\mathcal{D}}(\hat{\alpha}\hat{p}) = \hat{\alpha}\hat{\mathcal{D}}\hat{p}$ entonces $\mathcal{D}(\alpha p) = \alpha\mathcal{D}p$ ($\hat{p} = \mathcal{T}(p)$ y p operadores cualesquiera).*
3. *Si $\hat{\mathcal{D}}(1 - \hat{\alpha}\hat{l})^n = n\hat{\alpha}\hat{l}^2(1 - \hat{\alpha}\hat{l})^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}(1 - \alpha l)^n = n\alpha l^2(1 - \alpha l)^{n-1}$.*
4. *Si $\hat{\mathcal{D}}(\hat{s} - \hat{\alpha})^n = n(\hat{s} - \hat{\alpha})^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}(s - \alpha)^n = n(s - \alpha)^{n-1}$.*

Demostración. La demostración se convierte en un ejercicio de cálculos, al hacer uso de la condición de isomorfismo de cuerpos de \mathcal{T} . \square

Pero además, \mathcal{D} verifica la Proposición 2 siempre que $\hat{\mathcal{D}}$ también lo haga.

Proposición 10. Si $(\hat{\mathcal{D}}\hat{p} = 0 \implies \hat{p}$ es un operador numérico), entonces $(\mathcal{D}p = 0 \implies p$ operador numérico).

Demostración. Si $\mathcal{D}p = 0$, entonces $\mathcal{T}^{-1}\hat{\mathcal{D}}\mathcal{T}p = 0$ y, dado que \mathcal{T} es un isomorfismo, podemos concluir que $\hat{\mathcal{D}}\mathcal{T}p = 0$, por lo que $\mathcal{T}p$ es un operador numérico. Por último, no es complicado comprobar que los operadores numéricos de \mathcal{M} están constituidos por las imágenes inversas a través de \mathcal{T} de los operadores numéricos de $\hat{\mathcal{M}}$. \square

Aplicemos ahora estos resultados al caso concreto en que los operadores \hat{L} y L sean D^δ y D_β^δ respectivamente.

Sea el operador $D_\beta^\delta = D_\beta^n I_\beta^{n-\delta}$ ($\beta > 0$), ($n - 1 < \delta \leq n$), donde

$$I_\beta^\alpha f(t) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t^\beta - \tau^\beta)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

es el operador integral fraccionaria generalizada de Riemann-Liouville estudiado en [8]. Así mismo, denotemos $T^\alpha f(t) = f(t^\alpha)$ ($\alpha > 0$), y $D_\beta f(t) = \frac{1}{\beta} t^{1-\beta} \frac{d}{dt} f(t)$.

En [1] fue demostrado que $D_\beta^\delta = T^\beta D^\delta T^{\frac{1}{\beta}}$. Si consideramos los espacios $\hat{X} = C_\delta$ y

$$X = C_{\beta(\delta)} = \left\{ f(t) = \sum_{k=1}^\infty a_k t^{\beta(k\delta-1)} \text{ unif. conv. en compactos de } [0, \infty) \right\},$$

podemos establecer el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{D_\beta^\delta} & X \\ T^{\frac{1}{\beta}} \downarrow & & \uparrow T^\beta \\ \hat{X} & \xrightarrow{D^\delta} & \hat{X} \end{array}$$

Como ya sabemos, de [2], la convolución para D^δ ,

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t - \psi)g(\psi) d\psi,$$

dota a \hat{X} de la estructura de anillo conmutativo y unitario sin divisores de cero, y que el operador $\mathcal{D}f(t) = \frac{-I^{\delta-1}}{\delta} tf(t)$ constituye una derivada algebraica. Por lo tanto, podemos definir la convolución asociada a D_β^δ como

$$(f \otimes g)(t) = T^\beta [T^{\frac{1}{\beta}} f * T^{\frac{1}{\beta}} g](t) = \int_0^{t^\beta} f[(t^\beta - \psi)^{\frac{1}{\beta}}]g(\psi^{\frac{1}{\beta}}) d\psi.$$

Tal y como ya se ha mencionado, $\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}$ se identifica con I^δ , operador inverso por la derecha de D^δ , luego podemos identificar la función $T^\beta \left(\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \right) = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(\delta)}$ con I_β^δ , operador inverso por la derecha de D_β^δ , en el sentido de que $I_\beta^\delta f(t) = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(\delta)} \otimes f(t)$.

Dado que \mathcal{D} verifica la Proposición 1, concluimos que

$$\mathcal{D}_\beta f(t) = T^\beta \mathcal{D} T^{\frac{1}{\beta}} f(t) = \frac{-I_\beta^{\delta-1}}{\delta} t^\beta f(t)$$

es una derivada algebraica sobre $(X, +, \otimes)$ satisfaciendo la Proposición 1, siendo $l_\beta = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(\delta)}$ y $s_\beta = \frac{1}{l_\beta}$.

Como quiera que $l_\beta^k = T^\beta(l^k)$, no es difícil probar la siguiente proposición.

Proposición 11. *Sea $f(t) \in C_{\beta(\delta)}$, entonces se tiene que:*

$$(I_\beta^\delta)^k f(t) = \frac{t^{\beta(k\delta-1)}}{\Gamma(k\delta)} \otimes f(t) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

En [1], se probaron las siguientes igualdades para cualquier función $f(t) \in C_{\beta(\delta)}$:

- $I_\beta^\delta D_\beta^\delta f(t) = f(t) - a_1 t^{\beta(\delta-1)}$.
- $(I_\beta^\delta)^m (D_\beta^\delta)^m f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^m a_j t^{\beta(j\delta-1)}$.

Estas igualdades pueden ser usadas para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 12. *Sea s_β el inverso algebraico de l_β , entonces para toda función $f(t) = \sum_{k=1}^\infty a_k t^{\beta(k\delta-1)}$. Entonces,*

1. $s_\beta f(t) = D_\beta^\delta f(t) + \Gamma(\delta) a_1$.
2. $s_\beta^m f(t) = (D_\beta^\delta)^m f(t) + \sum_{j=1}^m \Gamma(j\delta) a_j s_\beta^{m-j}$.

Nota. En el presente cálculo operacional, los operadores numéricos vienen dados por $[\alpha] = \frac{\alpha t^{\beta(\delta-1)}}{t^{\beta(\delta-1)}}$.

De igual forma a lo hecho en [2], transformamos la ecuación

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\mathcal{D}_\beta (D_\beta^\delta)^2 x(t) + (1 + \mathcal{D}_\beta) D_\beta^\delta x(t) - ax(t) = 0, \\ [t^{\beta(1-\delta)} x(t)]_{t=0} = 0 \quad (x(t) \in C_{\beta(\delta)}), (a \in \mathbb{C}), \end{cases}$$

en

$$(3.2) \quad \frac{\mathcal{D}_\beta x(t)}{x(t)} = \frac{a-1}{s_\beta} - \frac{a}{s_\beta-1} = \frac{l_\beta[l_\beta(1-a)-1]}{1-l_\beta},$$

para obtener finalmente la solución

$$x_{a,\beta} = s_\beta^{a-1} (s_\beta - 1)^{-a} = l_\beta (1 - l_\beta)^{-a}.$$

Es obvio que $x_{a,\beta}(t) = T^\beta x_a(t)$, por lo que

$$x_{a,\beta}(t) = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, 1); \\ (\delta, \delta); \end{matrix} \quad t^{\beta\delta} \right].$$

Más aún, podemos identificar la expresión operacional de $x_{a,\beta}$, es decir su expresión como elemento del correspondiente cuerpo de fracciones, con la suma de una serie en dicho cuerpo. En [3], se estableció la proposición

Proposición 13. *Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente, en el sentido de Mikusinski al operador p . Entonces $\{T^\beta(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $T^\beta(p)$.*

Como es bien sabido, la convergencia de una serie depende de la convergencia de su sucesión de sumas parciales asociada, por lo que la Proposición 13 es cierta también para el caso de series.

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k l_\delta^{k+1}$ converge a $l_\delta(1 - l_\delta)^{-a}$, [2], se concluye que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k l_\beta^{k+1}$$

converge a $l_\beta(1 - l_\beta)^{-a} = T^\beta[l_\delta(1 - l_\delta)^{-a}]$. Por lo tanto

$$x_{a,\beta} = l_\beta(1 - l_\beta)^{-a} = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k\delta + \delta)} \frac{t^{k\beta\delta}}{\Gamma(k+1)}.$$

Este último resultado nos permite enunciar y demostrar la siguiente proposición.

Proposición 14. *La función $x_{a,\beta}(t) = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, 1); \\ (\delta, \delta); \end{matrix} \quad t^{\beta\delta} \right]$ es una solución de la ecuación (3.1) verificando*

$$D_\beta^\delta[x_{a,\beta} \otimes x_{b,\beta}](t) = x_{a+b,\beta}(t).$$

Demostración. Nuevamente hay que considerar que $x_{a,\beta} = l_\beta(1 - l_\beta)^{-a}$ y que l_β se identifica con I_β^δ . □

REFERENCIAS

[1] J. A. Alamo y J. Rodríguez, Cálculo operacional de Mikusinski para el operador de Riemann-Liouville y su generalizado, *Rev. Acad. Canar. Cienc.* **1** (1993), 31–40.
 [2] V. M. Almeida, N. Castro y J. Rodríguez, An algebraic derivative associated to the operator D^δ , en *Algebraic analysis and related topics* (Varsovia, 1999), *Banach Center Publ.* **53**, Polish Acad. Sci., Varsovia (2000), 71–78.
 [3] V. M. Almeida y J. Rodríguez, Meller’s theorem and the algebraic derivative, *Integral Transform. Spec. Funct.* **10** (2000), 1–12.
 [4] I. H. Dimovski, *Convolutional calculus*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
 [5] W. Kierat, A note on applications of the algebraic derivative to solving of some differential equations, *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.* **32** (1993), 63–68.

- [6] W. Kierat y K. Skornik, An application of Mikusinski's operational calculus to the theory of Laguerre functions and Laguerre polynomials, *Integral Transform. Spec. Funct.* **1** (1993), 315–316.
- [7] W. Kierat y K. Skornik, A remark on solutions of the Laguerre differential equation, en *Different aspects of differentiability* (Varsovia, 1993), *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **340** (1995), 137–141.
- [8] A. C. McBride, *Fractional calculus and integral transforms of generalized functions*, Pitman (Advanced Publishing Program), Londres, 1979.
- [9] J. Mikusinski, *Operational calculus*, Pergamon, Oxford, 1959.
- [10] H. M. Srivastava y H. L. Manocha, *A treatise on generating functions*, Ellis Horwood, 1984.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38271 LA LAGUNA (TENERIFE), CANARY ISLANDS, SPAIN

Correo electrónico: valmeida@ull.es, joroguez@ull.es

UN TRABAJO DE SIXTO CÁMARA, EN 1915, SOBRE TEORÍA DE GALOIS

JOSÉ JAVIER ESCRIBANO Y LUIS ESPAÑOL

ABSTRACT. We analyze the unique algebraic paper written by Sixto Cámara (1878–1964), entitled *Substitutions in the normal algebraic Galois field (Sustituciones en el cuerpo algébrico normal de Galois)*, produced in the Mathematical Laboratory and Seminar (Laboratorio y Seminario Matemático) of the Council for Advanced Studies and Scientific Research (Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas), and communicated to the Congress of the Spanish Association for the Advancement of Science (Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias) held at Valladolid in 1915. The paper was worked out from the two first chapters on Galois theory in H. Weber's book *Lehrbuch der Algebra* (1895).

Como todo el libro del que forma parte, nuestro trabajo está dedicado a José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández. Una primera versión del mismo figura como capítulo 7 en la tesis doctoral [9], realizada por uno de nosotros y dirigida por el otro. En ella se trató someramente la teoría de Galois, por ser este trabajo de Cámara aislado y poco significativo dentro de su obra completa. Chicho no llegó a juzgar la tesis, pues su fallecimiento se produjo mientras hacíamos las últimas correcciones. Hemos pretendido que esta nueva versión ampliada se acerque más a su gusto internalista, aunque no podamos saber si lo hemos conseguido.

1. CUESTIONES PREVIAS

1.1. Recepción de la teoría de Galois en España. La recepción de la teoría de Galois en España con J. Echegaray ha sido abordada por S. Garma [15, 16], mientras que M. Hormigón [17] ha recogido algunas notas al respecto al estudiar la obra de Z. García de Galdeano. Por su parte, L. Español [10] se ha ocupado de la evolución de los estudios de álgebra en nuestros centros superiores al hilo de sus investigaciones sobre la obra de J. Rey Pastor. Estas son las referencias generales para esta primera cuestión previa.

En 1866, un anónimo articulista —seguramente Echegaray— reclamaba, desde las páginas de la *Revista de Obras Públicas*, que en los centros españoles se impartieran cursos de álgebra superior análogos a los explicados por J. A. Serret en París,

2000 *Mathematics Subject Classification*. 01A60, 1203, 12F10.

Key words and phrases. History of mathematics, reception of Galois theory, Spain, 20th century, Sixto Cámara.

Este trabajo ha contado con una ayuda a la investigación del Instituto de Estudios Riojanos del Gobierno de La Rioja.

reflejados en su famoso *Cours d'algèbre supérieure* [28]. Este libro venía publicándose desde 1849, pero las ideas de Galois —puestas en circulación por Liouville en 1846 a través de su *Journal*— no se incorporaron al texto del profesor de La Sorbona hasta la tercera edición, que acababa de ver la luz en este mismo año de 1866. La petición de nuestro articulista suponía una clara apuesta por la modernidad en la docencia universitaria, pero sus demandas no tuvieron éxito de momento. Hasta su tardía incorporación a la enseñanza, la teoría fue abanderada o difundida por diversos autores. A título de comparación, en [20] puede verse la recepción de la teoría en Italia. García de Galdeano demostró en 1888, con *Crítica y síntesis de álgebra* [11], estar informado sobre la teoría de Galois, aunque no había conseguido, como fue su intención, publicar un libro sobre ella. Así que fue necesario esperar hasta 1896–1897 para encontrar el primer texto español, *Resolución de Ecuaciones y Teoría de Galois* [8], fruto del curso, también pionero, impartido por Echegaray en el Ateneo de Madrid. El polifacético ingeniero siguió el *Cours* de Serret, ya que, dijo, «la obra clásica de Mr. Jordan exigiría un año completo de lección diaria. Otro tanto podría decirse de la gran obra de Lie; y, sin embargo sólo de veinte lecciones podemos disponer». Echegaray aludió a también a «la Teoría de las sustituciones, de Netto . . . y a los libros recientes de Tannery y Vogt». La primera mención al *Lehrbuch der Algebra* [31] de Weber (1895), la encontramos en la revista *El Progreso Matemático*, en la que su editor, García de Galdeano, publicó una reseña [12] de la traducción francesa (1898) de la segunda edición alemana. Un año después, el propio Galdeano reseñó [13] las lecciones de Echegaray, que habían sido continuadas en 1898.

En 1907, García de Galdeano publicó *Exposición sumaria de las teorías matemáticas* [14], obra breve en la que condensa esquematizado «lo que está por hacer entre nosotros, lo que falta a nuestros planes de enseñanza», donde aparece un apartado de dieciocho páginas titulado «El álgebra en su relación con los grupos», en el que muestra su conocimiento de los trabajos de Galois y Kronecker y de los libros de Jordan y Weber. Por entonces regía en la universidad española el plan de estudios de 1900, que duró más de veinte años. En dicho plan, el álgebra (entendida como la resolución de ecuaciones algebraicas reales o complejas) formaba parte de la asignatura Análisis Matemático del segundo curso. En ella se explicaban los elementos de funciones de variable compleja necesarios para demostrar el teorema fundamental del álgebra, la resolución numérica de las ecuaciones (acotación, separación y aproximación de raíces), algo de eliminación y, en cuanto a la resolución algebraica, la de las ecuaciones de grado menor o igual que cuatro y alguna aproximación al teorema de Abel sobre la irresolubilidad por radicales de la ecuación de quinto grado. Los conocimientos de los profesores de la época, que no practicaban la investigación, tenían poco más alcance que los contenidos de los cursos a impartir. L. Octavio de Toledo, catedrático de Análisis de la Central escribió en 1905 un *Tratado de álgebra* [22] formado sólo por la introducción y una sección primera, pues, escribió en el prólogo, «las Secciones segunda, conteniendo la teoría elemental de funciones; tercera, teoría general y resolución de ecuaciones, y cuarta, teoría de las sustituciones y su aplicación a la resolución algébrica de ecuaciones de grados superiores, se publicarán más adelante si el público matemático de nuestro país juzga con benevolencia nuestro

modesto trabajo»; pero esta ampliación no llegó a realizarse. En 1914, Octavio de Toledo ingresó en la Academia de Ciencias y con tan relevante motivo disertó sobre *Algunos de los descubrimientos realizados en la teoría y resolución de ecuaciones en el siglo XIX* [23]. En su discurso relató con soltura los avances hasta Abel, pero, en lo que se refiere a la teoría de Galois, se limitó a reproducir fragmentos de la obra original del genial francés y a concluir que «en la segunda mitad del pasado siglo la teoría de Galois ha experimentado adiciones de importancia extraordinaria, por haberse dedicado a laborar en ella matemáticos tan insignes como Jordan y Picard en Francia, Klein, Netto y Weber en Alemania, Betti y Bianchi en Italia, y tantos otros cuyos nombres no me sería difícil reunir acudiendo a cualquier bibliografía», cierre que no refleja demasiada afinidad con el tema.

Así las cosas, apareció en escena Rey Pastor, el cual, llegando mucho más lejos en la senda de su maestro García de Galdeano, inició de inmediato un serio esfuerzo de modernización de la enseñanza de las matemáticas y, además, de inicio efectivo y organizado de la investigación, para lo que contó con el soporte de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE) fundada en 1907. Rey ganó la cátedra de Análisis Matemático de Oviedo en 1911 y a continuación pasó un curso en Berlín pensionado por la JAE. El curso siguiente ejerció su cátedra en la universidad asturiana y, acabado el periodo lectivo, ganó el acceso a la misma cátedra que ostentaba pero en la Universidad Central, repitiendo la experiencia alemana el curso siguiente, esta vez en Gotinga. En el curso 1914–15 Rey Pastor comenzó a ejercer la cátedra madrileña, a cuyo cargo estaban las asignaturas de Análisis Matemático de los cursos primero y segundo, y por tanto la enseñanza del álgebra, que había practicado por primera vez en Oviedo el curso 1912–13 y que retomó en sus lecciones del curso 1915–16 en Madrid. Estas lecciones, que circularon como apuntes, mejoraron apreciablemente el nivel expositivo de la materia en España, quedando registradas años después (1924) en la primera edición de *Lecciones de álgebra* [26]. Pero estas mejoras se refieren a los contenidos del plan de estudios vigente, así que no incluyen la teoría de Galois. Rey Pastor mencionó esta teoría en sus notables conferencias de 1915 en el Ateneo de Madrid [24], concretamente en la sexta, titulada «Sistematización de la matemática por medio de la teoría de grupos». El avance en materias no incluidas en el plan de estudios se produjo en los años siguientes a través de cursos extracurriculares (de extensión universitaria) y en el ambiente investigador del Laboratorio y Seminario Matemático (LSM), creado por la JAE en 1915 bajo la dirección de Rey Pastor. La teoría de Galois figuró entre las líneas de estudio e investigación del Laboratorio desde el mismo año de su fundación, siendo Cámara, que había llegado a Madrid un año antes, el primero que cultivó esta materia produciendo el artículo [4] que motiva nuestro trabajo. El programa del Laboratorio contemplaba la teoría de Galois, cuando Cámara se trasladó a Valencia en 1917, como parte de los temas de análisis, junto con la teoría de conjuntos y la teoría de funciones. Ese mismo año, en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central se anunciaban cursos sobre *Grupos de sustituciones* y sobre *Teoría de Galois*, impartidos por L. Octavio de Toledo y R. Araujo respectivamente. Estos movimientos muestran que dicha teoría era una asignatura pendiente en la matemática española, situación en la que se mantuvo durante demasiado tiempo.

Esta lenta recepción en nuestro país de la teoría de Galois en su estado finisecular contrasta con la rápida evolución que experimentó en manos de los algebristas alemanes, sobre todo avanzada la década de los veinte. La segunda edición de las *Lecciones de álgebra* de Rey Pastor, publicada en 1935, amplió la previa con la teoría de Galois al estilo de Weber, cuando ya el álgebra tomaba el sendero reflejado en el famoso texto de van der Waerden (1930), cuyo estilo estructural nunca fue aceptado por nuestro principal matemático.

Podemos hacer otra aproximación al artículo de Cámara que nos ocupa, esta vez desde el campo de la geometría y de nuevo en la onda de Rey Pastor [10]. Durante su segunda estancia en Alemania, Rey había preparado la memoria *Fundamentos de la geometría proyectiva superior* [25], que fue premiada por la Academia de Ciencias en 1914 y publicada dos años después. Fue una de las obras con las que el autor consolidó su predominio en la matemática nacional. La obra comienza con una brillante exposición del Programa de Erlangen de Klein, que precede a un desarrollo de la geometría proyectiva en el que juegan un papel decisivo los grupos de transformaciones. Rey Pastor difundió el concepto de grupo como unificador de diversos campos de la matemática e impulsó el estudio de los grupos, no desde el punto de vista abstracto sino prestando atención a los ejemplos más significativos. Bajo esta influencia cabe también situar el trabajo de Cámara sobre los grupos de sustituciones de una ecuación normal, al igual que el de J. Mingot [21], también miembro del LSM, sobre sustituciones lineales del plano complejo.

1.2. El artículo de Cámara en el conjunto de su obra. En este apartado daremos unas pinceladas sobre la evolución de la obra de Cámara en un entorno de 1915, que pueden ampliarse consultando [9]. El trabajo que comentamos forma parte del conjunto de las comunicaciones que el LSM presentó al V Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, celebrado en Valladolid en octubre de 1915; por ausencia de su autor, fue leído por Rey Pastor en la sesión del día 21. El LSM aportó seis de los nueve trabajos presentados en la Sección de Exactas [3], a los que hay que añadir el famoso discurso inaugural de la sección pronunciado por Rey Pastor y alguna comunicación más en otras secciones. Esto sucedía en el año fundacional del LSM, por lo que la participación en dicho congreso de varios de sus miembros significó la presentación en público del primer grupo español de investigación matemática oficialmente constituido.

En junio de 1913, Cámara había ganado una plaza de Auxiliar de Geometría y Mecánica en la Universidad Central; con este motivo, había cambiado su residencia de Zaragoza a Madrid, pidiendo la excedencia como Capitán de Infantería; desde entonces su vida profesional fue universitaria. Esta nueva ubicación le permitió incorporarse al LSM desde su creación; en él formó, junto con A. Saldaña y R. Fages, la sección de «Trabajos gráficos y nomográficos», de la que era el director. Esta orientación se corresponde con una serie de trabajos sobre balística realizados por Cámara en consonancia con su primera profesión militar. De hecho, presentó en el congreso de Valladolid, Sección de Ciencias de la Aplicación, un segundo trabajo titulado *Círculos calculadores del Oficial de Infantería*. Desde que leyera la tesis doctoral en 1908, realizada siguiendo la pauta de E. Torroja en geometría sintética,

las publicaciones de Cámara versaron bien sobre este tipo de geometría, bien sobre balística.

Estas ocupaciones parecen indicar que dedicarse a la teoría de Galois fue para él una novedad fruto de la programación del LSM propuesta por Rey Pastor, ajena en principio a sus experiencias y prioridades, pues el tipo de álgebra requerida para la geometría universitaria estaba más bien ligada a la teoría de invariantes, destacando las clasificaciones de los entes algebraicos lineales. En 1917, Cámara ganó la cátedra de Geometría Analítica en la Universidad de Valencia, donde permaneció hasta que en 1935 volvió a la Central para sustituir a M. Vegas. Esto motivó su alejamiento del LSM y de la teoría de Galois. Por ello el trabajo de álgebra que nos ocupa aparece aislado en la obra matemática de su autor. No obstante, debemos decir que Cámara se ocupó desde su cátedra del álgebra ahora llamada lineal, como puso de manifiesto desde la primera edición (1920) de su conocido texto *Elementos de geometría analítica* [5], en el que aparece la clasificación de cónicas por vía algebraica, aunque no expuesta de un modo completo.

Interesa decir también que Cámara fue nombrado en octubre de 1914 secretario de la Sociedad Matemática Española, entonces presidida por Echegaray. Desde esta posición, estuvo inmerso en el debate que se produjo sobre el nivel que debieran tener los artículos que se publicaran en la *Revista* de la sociedad, enfrentando a los partidarios de una revista de investigación, para elevar el nivel de la matemática española, y los partidarios de un tono más elemental que reflejara lo que la comunidad matemática española era realmente. En este contexto cobra valor observar que, como veremos con más detalle, Cámara escribió sobre un tema de álgebra superior haciendo un esfuerzo por introducirlo de un modo pedagógico, actitud profesoral que se aprecia en toda su obra matemática.

1.3. El libro de Weber. No está de más incluir aquí una breve descripción del *Lehrbuch* de Weber en relación con el tema que nos ocupa. El lector que desee más detalles sobre esta obra, considerada como un texto codificador y difusor del estado de un fragmento importante del álgebra al final del siglo XIX, los encontrará en [7] o en [19], donde se analiza además el papel relevante que dicho texto tuvo en las primeras décadas del siglo XX, hasta que fue desplazado por el enfoque estructural asentado a partir de *Moderne Algebra* (1930), de B. L. van der Waerden [30]. Digamos en primer lugar que el libro de Weber consta de tres volúmenes (1895, 1896, 1908), pero a los efectos de este trabajo consideramos exclusivamente el primero. El segundo tomo contiene la teoría de los grupos finitos y los números algebraicos a la manera de Dedekind, mientras que el tercero, de aparición más tardía, está dedicado a las funciones elípticas y de nuevo a los números algebraicos. El primer volumen, que según su autor contiene la parte elemental del álgebra, fue el más difundido y el que más influyó en la enseñanza superior del álgebra, pues ya tuvo en 1898 una segunda edición (sin cambios importantes) que apareció traducida al francés ese mismo año. Esta edición francesa fue la más difundida en España y es también la manejada por los autores de este trabajo.

El Weber, un grueso volumen de ochocientas páginas, es un libro de álgebra en el sentido de la época, que ahora decimos clásico, cuyo objetivo es resolver las ecuaciones algebraicas con coeficientes reales o complejos. El problema era caracterizar las resolubles mediante radicales, una vez que Abel había probado que dicha solución es imposible para la ecuación general de grado cinco. El autor, que reconoce la influencia de Dedekind y Klein, presenta su libro como una actualización del de Serret [28], que considera excelente para la época en que fue publicado (tuvo ediciones a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, incluso después). El libro de Weber se abre con una amplia introducción en la que se construyen los sistemas de números, en particular los reales mediante las cortaduras de Dedekind. Al finalizar la introducción, el autor afirma que el procedimiento más importante del álgebra es el «cálculo literal [cuyo] empleo es tan general que se toma a menudo como sinónimo de álgebra», palabras que suenan ahora como un vago anuncio de las estructuras. Sigue el cuerpo central de la obra, dividido en tres partes de las que indicamos el contenido siguiendo más o menos los títulos de los capítulos que contienen:

1. Libro I. *Los principios*. Polinomios y funciones racionales, determinantes, teorema fundamental del álgebra, funciones simétricas, invariantes por una transformación lineal, transformación de Tschirnhausen.
2. Libro II. *Las raíces*. Raíces reales, teorema de Sturm, acotación, separación y aproximación de las raíces, fracciones continuas, raíces n -ésimas de la unidad.
3. Libro III. *Los elementos algebraicos*. Teoría de Galois, aplicación de los grupos de permutaciones a las ecuaciones, ecuaciones cíclicas, división del círculo en partes iguales, resolución algebraica de las ecuaciones, raíces de las ecuaciones metacíclicas.

Nos interesan especialmente los dos primeros capítulos, unas ochenta páginas del libro tercero que alcanza más de doscientas, porque a ellos se refiere el trabajo de Cámara. Llama la atención que Weber no coloca el rótulo emblemático «teoría de Galois» sobre todo el Libro III, sino exclusivamente sobre su primer capítulo, el XIII en el total de la obra, dedicado a poner de manifiesto que a partir de una ecuación algebraica surgen una ampliación del cuerpo de coeficientes y un grupo de sustituciones cuyas propiedades se corresponden, conexión que se perfecciona en el capítulo siguiente aplicando propiedades de grupos de permutaciones de las raíces de la ecuación (isomorfos a los anteriores grupos de sustituciones). Veamos esto con algún detalle.

La noción de cuerpo que utiliza Weber es ciertamente abstracta, pero previa al concepto axiomático sintetizado una década después por Steinitz [29]. Dice Weber que «un cuerpo es un sistema de elementos con los que se pueden realizar las cuatro operaciones dentro del sistema». Esta definición es abstracta en un sentido simplemente descriptivo, pues trata de formular de modo unificado la esencia de los dos tipos de ejemplos que da previamente, por una parte los cuerpos de números ya considerados por Dedekind, es decir, los cuerpos intermedios entre los racionales y los complejos, y por otra los cuerpos de funciones (rationales con coeficientes en un cuerpo numérico). Por eso el autor, al razonar sobre esta noción de cuerpo, concluye

que todo cuerpo contiene a los racionales, es decir, supone implícitamente que, con expresión moderna, los cuerpos son de característica cero.

El punto de partida de la teoría de Galois, según Weber, es una ecuación $F(x) = 0$ de grado m con coeficientes en un cuerpo Ω . En virtud del Libro I, para tal ecuación «está permitido hablar de m raíces», que se suponen siempre distintas, de modo que, de nuevo con lenguaje moderno, Weber sólo va a considerar el caso separable. Una extensión algebraica de Ω es entonces un cuerpo $\Omega(\alpha)$ obtenido adjuntando a Ω una raíz de F que no le pertenece. Si $f(x)$ es el factor irreducible (siempre mónico) de $F(x)$ correspondiente a la raíz α , se llama grado de la extensión al grado n de f . Weber prueba que f está determinado de modo único usando la divisibilidad de polinomios, en la que toda la teoría se apoya fuertemente. Resulta pues que Weber considera extensiones algebraicas finitas y separables de un cuerpo Ω de característica cero. Lo primero que prueba es que adjuntando sucesivamente todas las raíces de $F(x) = 0$ se obtiene una extensión, el cuerpo de Galois de la ecuación, que de hecho es una extensión simple $\Omega(\rho)$ engendrada por un elemento primitivo. Si ρ no es primitivo, $\Omega(\rho)$ es una extensión intermedia de Ω cuyo grado divide a n , siendo toda extensión intermedia de este tipo. También demuestra que no existen extensiones intermedias si y sólo si los únicos elementos no primitivos del cuerpo ampliado son los de Ω . Seguidamente afirma que «los grandes progresos que el álgebra debe a Galois provienen esencialmente de que los cuerpos se pueden reducir a cuerpos normales». Esto quiere decir que, en el cuerpo de Galois $\Omega(\rho)$, el elemento primitivo ρ es raíz de un polinomio $g(t)$ irreducible en Ω y de grado μ cuyas raíces se expresan en función de una cualquiera de ellas, razón por la que se dice que $g(t) = 0$ es una ecuación normal, una resolvente de Galois de $F(x) = 0$; entonces los cuerpos (conjugados) $\Omega(\rho_i)$ correspondientes a las demás raíces de g (los elementos conjugados de ρ) son todos iguales y la extensión $\Omega(\rho)$ se llama también normal. Así termina el estudio de las extensiones algebraicas de Ω y Weber pasa a ocuparse de los cuerpos normales.

Los conjugados ρ_i de ρ tienen la forma $\rho_i = \theta_i(\rho)$, siendo cada θ_i un polinomio con coeficientes en Ω y grado a lo sumo $\mu - 1$. Weber llama sustitución $\sigma_i = (\rho, \rho_i)$ al cambio de ρ por uno de sus conjugados, lo que produce una aplicación de $\Omega(\rho)$ en $\Omega(\rho_i)$, pero al ser los cuerpos conjugados iguales en una extensión normal, se obtiene una transformación entre los elementos de $\Omega(\rho)$, en la que ρ y sus conjugados resultan permutados y los únicos elementos invariantes son los de Ω . Estas sustituciones forman un grupo de orden μ que Weber llama «grupo de las sustituciones» de $\Omega(\rho)$. Dice que es un grupo porque cumple tres propiedades: la existencia de composición, que ésta es asociativa y que cada ecuación $\sigma\sigma' = \sigma''$ se puede resolver si dos cualesquiera de las sustituciones son dadas. Para formular la composición y operar con ella, prueba que una sustitución σ_i es de la forma más general $\sigma_i = (\rho_h, \rho_k)$ cumpliendo el par (h, k) ciertas condiciones. Weber trata pues el grupo de las sustituciones como un ejemplo de grupo abstracto, pero para trabajar con él lo transforma en un grupo (isomorfo) de permutaciones de las m raíces α_i de $F(x) = 0$, el grupo de Galois de la ecuación. Los «grupos de permutaciones» son definidos como subconjuntos de permutaciones cerrados por composición, probándose luego que tienen unidad e inversos. Según Weber, «cuando la resolvente de Galois se hace reducible por la

adjunción a Ω de un elemento algebraico, se encuentra una resolvente de grado inferior ... Se aproxima así la resolución de la ecuación», que se alcanza cuando la resolvente llega a ser de grado uno. Añade que «la manera como Galois ha enfocado el problema de la resolución de una ecuación $F(x) = 0$ consiste en disminuir progresivamente el grupo por la adjunción sucesiva de elementos algebraicos lo más simples que sea posible». Pasa enseguida a demostrar que la ecuación $F(x) = 0$ es irreducible si y sólo si su grupo de Galois es transitivo. El capítulo termina probando, en el caso transitivo, que el cuerpo es primitivo si y sólo si el grupo es primitivo (el conjunto de las raíces no admite particiones estables no triviales).

Hasta aquí el capítulo titulado «teoría de Galois», en el cual pretende haber demostrado el autor, así lo proclama al empezar el capítulo siguiente, que «una comprensión más profunda del álgebra exige un estudio detallado de los grupos de permutaciones», por lo que les dedica buena parte de dicho capítulo, el XIV del libro. Tras este estudio (ciclos, subgrupos, partición de un grupo en clases según un subgrupo, conjugación, etc.) desarrolla los teoremas de reducción de la resolvente por adjunción de un elemento algebraico, introduce los subgrupos normales y expone la reducción del grupo de Galois por adjunción de un elemento del cuerpo de Galois. Por tanto este capítulo completa el anterior y podría ser considerado también «teoría de Galois».

En el resto del libro Weber estudia ecuaciones particulares y la resolución por radicales. Este planteamiento se sitúa en la línea histórica de atención creciente a las estructuras que comienza en Dedekind y culmina con Artin [1, 2]. En efecto, en Weber todo gira en torno a las ecuaciones, la que se pretende resolver y sus resolventes, pero, antes de abordar el problema de las soluciones por radicales, presenta un estudio previo, de cierta amplitud y autonomía, sobre la relación entre los cuerpos y los grupos asociados. Esta parte aparece como una teoría de la que el objetivo final, la resolución de las ecuaciones, se deriva como una aplicación. Sabido es que el enfoque propio del álgebra moderna llegó cuando Artin dejó en segundo plano las ecuaciones al ver con claridad que las transformaciones de $\Omega(\rho)$ en sí mismo, producidas en el planteamiento de Weber por las sustituciones, eran exactamente los automorfismos de la extensión, que se podían definir autónomamente.

2. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL ARTÍCULO

2.1. Estructura, objetivos y fuentes. El artículo de Cámara, *Sustituciones en el cuerpo algébrico normal de Galois*, es relativamente extenso, ocupa treinta y tres páginas de las Actas del Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, precedidas por una portadilla en la que, además de título, autor (presentado como «Profesor Auxiliar en la Facultad de Ciencias de Madrid») y fecha de lectura («sesión de 21 de Octubre de 1915») aparece el siguiente «Sumario: 1. Exposición.- 2. Definiciones.- 3. Propiedades de los elementos primitivos.- 4. Sustituciones entre elementos primitivos.- 5. Sustituciones distintas S y S_1 compuestas de ciclos con elementos comunes.- 6. Producto de dos sustituciones S y S_1 .- 7. Elementos comunes a un ciclo de S o de S_1 y otro de SS_1 .- 8. Subgrupo $[S, S_1]$.- 9. Elementos imprimitivos del cuerpo $\Omega(\rho)$.- 10. Sistemas de elementos primitivos e imprimitivos contenidos en $\Omega(\rho)$.- 11. Sustituciones entre elementos imprimitivos

y entre sistemas de imprimitividad.- 12. Subcuerpos del $\Omega(\rho)$.- 13. Reducción de la resolvente de Galois por adjunción de un cuerpo $\Omega(\theta)$.- 14. Cuerpo y ecuación normal.- 15. Descomposición de las raíces de una ecuación $F(x) = 0$ en sistemas imprimitivos.- 16. El grupo de Galois de una ecuación $F(x) = 0$ ».

Los apartados 12–16 aparecen numerados como 14–18 en el interior, en el que faltan los que serían el 12 y el 13; esto puede ser un error tipográfico causado tal vez por la supresión de una parte del texto original. En la exposición de motivos que abre la comunicación, el autor refleja fielmente sus objetivos. Como no es muy larga se puede reproducir íntegra:

«Nos proponemos en estas páginas exponer, en forma hasta cierto punto intuitiva, las principales propiedades del cuerpo algébrico normal de Galois, deducidas de las sustituciones que automáticamente se realizan entre los elementos de este cuerpo algébrico cuando se sustituye un elemento primitivo por otro.

»Partiendo de la conocida propiedad de expresarse racionalmente los elementos primitivos en función de uno de ellos y de la propiedad fundamental relativa a la divisibilidad de las funciones en Ω por una irreducible dada en este mismo cuerpo, deducimos el grupo de sustituciones entre elementos primitivos y el carácter abeliano de este grupo; el estudio de los ciclos, con elementos comunes o no, y de las sustituciones cíclicas o no cíclicas, conduce, naturalmente, a los conjuntos de elementos imprimitivos, y podría servir de base para una clasificación de los citados grupos; las sustituciones entre elementos imprimitivos y sistemas de imprimitividad aparecen automáticamente, llegándose a la reducción de la resolvente de Galois por adjunción de un cuerpo $\Omega(\theta)$; y, finalmente, como aplicación de lo anterior, viene la descomposición de las raíces de una ecuación en sistemas imprimitivos de transitividad y el grupo de Galois de la ecuación algébrica.

»Este es, en resumen, el contenido del presente trabajo, hecho en el Laboratorio y Seminario Matemático dirigido por nuestro querido amigo D. Julio Rey Pastor, y que presentamos al Congreso de Valladolid sólo con el deseo de aportar un grano de arena al progreso científico de nuestra Patria.

»Muy conocida es entre los congresistas la teoría de Galois para encontrar propiedades desconocidas en este trabajo. No pretendemos haber descubierto nada nuevo. Nuestra labor se reduce a tomar un punto de vista de carácter hasta cierto punto intuitivo, repetimos, y de dar cierto aspecto de juego matemático con el empleo de cuadros y gráficos al estudio de estas bellas y curiosísimas propiedades de la teoría de las ecuaciones algébricas que inmortalizaron el nombre de Galois.

»Supone lo expuesto a continuación el conocimiento de la teoría de los grupos de sustituciones discretas y las primeras nociones de cuerpos algébricos. No obstante ser éstas muy conocidas para la generalidad de los lectores, damos a continuación las definiciones principales para los no iniciados, extractadas del Álgebra de Weber».

Esta mención final es la única que el autor hace del Weber, pero en las notaciones, en los supuestos previos y en el propio contenido queda claro que ese libro es la referencia utilizada por Cámara. Sólo otra obra es citada en este artículo, *Istituzioni di analisi algebrica* de Capelli [6], un grueso volumen de casi mil páginas que es una de las obras básicas de consulta de diversos autores españoles de textos para los primeros cursos universitarios; por ejemplo Octavio de Toledo, Rey Pastor, o el

propio Cámara. El objeto de la cita es justificar un argumento cuando se prueba, en el apartado 16, que el cuerpo de Galois de una ecuación es normal sobre el cuerpo de coeficientes.

Aunque el autor no da otras referencias, seguramente tuvo ante sí otras obras. Señalaremos a este respecto, al margen de las obras ya clásicas entonces, que en el primer volumen (1911–12) de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* se nombró socio correspondiente al norteamericano G. A. Miller, especialista en teoría de grupos y en historia de las matemáticas, al que la sociedad agradecía el envío de separatas de sus obras para la incipiente biblioteca social y de un artículo, *Grupos, nomenclatura y notación*, para la propia revista, que lo publicó en su número de abril de 1914. En relación con la incipiente matemática norteamericana, diremos también que entre las reseñas bibliográficas de los cinco primeros volúmenes de la revista aparecieron una obra sobre grupos finitos y sus aplicaciones de G. A. Miller, H. F. Blichfeldt y L. E. Dickson, y los textos sobre la teoría de ecuaciones de Dickson y de F. Cajori, ambos de los primeros años del siglo. También se dio cumplida noticia en la revista de la aparición de los volúmenes de la traducción francesa de la *Enciclopedia* de Teubner dirigida por Klein.

2.2. Análisis del contenido. Tras la exposición de motivos, el segundo apartado, de un par de páginas, se limita a recoger algunas de las definiciones que hemos visto al repasar el contenido del Weber. Llama la atención que para Cámara los cuerpos son «conjuntos de números», lo que limita la generalidad que Weber dio en su libro a este concepto, a pesar de haberse publicado ya la memoria de Steinitz [29]. Con el nombre de «teorema fundamental en la teoría de Galois», Cámara enuncia: «Si los coeficientes de una función irreducible $f(x)$ y de otra $F(x)$ (ambas polinomios enteros) pertenecen a un mismo cuerpo Ω , $f(x)$ y $F(x)$ no pueden tener divisor común a menos que $F(x)$ sea divisible por $f(x)$ ». Justifica este nombre porque en él «apoyamos las demostraciones contenidas en el presente trabajo». Las definiciones terminan poniendo al lector frente a una extensión normal $\Omega(\rho)$, donde ρ es una raíz de una ecuación normal $g(t)$ de grado μ , que por ser irreducible tiene todas sus raíces distintas. Este es el «cuerpo algébrico normal de Galois» del título de la comunicación, que se ajusta más bien a los apartados 3–13 (según la numeración del sumario), en los que se estudia esta extensión y su grupo de Galois Σ .

Cámara retoma en los apartados finales 14–16 (ver el sumario) el punto de vista de una ecuación general $F(x) = 0$, de la que ρ es un elemento primitivo raíz de la resolvente $g(t)$ y $\Omega(\rho)$ el cuerpo de Galois. Resulta anecdótico que se olvida de precisar desde el principio que las raíces de $F(x) = 0$ han de ser distintas, pero en algún momento se puede leer (p. 64) «... y dos de las raíces α de $F(x)$ serían iguales contra la hipótesis». En estos apartados finales Cámara ve que el cuerpo de descomposición de F es normal y por tanto tiene el grupo Σ , que interpreta como (es isomorfo a) un grupo de permutaciones de las raíces, para demostrar finalmente el resultado que cierra su trabajo: «La ecuación $F(x) = 0$ será reducible o irreducible, según que su grupo de Galois sea intransitivo o transitivo». Este teorema es precisamente, como hemos visto, uno de los últimos del capítulo titulado «teoría de Galois» en el libro de Weber.

La aportación personal de Cámara consiste en recrear la exposición de Weber intercalando un estudio detallado, referido a la ecuación normal g , de la relación entre los cuerpos intermedios de la extensión y los subgrupos del grupo de Galois. Weber dejaba este estudio, referido a una ecuación general F y a los grupos de permutaciones de sus raíces (distintas), para el capítulo siguiente; pero Cámara empieza directamente con esta relación el caso particular de la ecuación normal, en el que el número de permutaciones y de elementos permutados coincide. Pero no menciona «subgrupos» sino «sistemas de imprimitividad», que son las particiones del conjunto de las raíces que corresponden a cada subgrupo. Cámara (apartados 3 y 4) escribe las raíces de g formando una fila

$$\rho, \rho_1 = \theta_1(\rho), \dots, \rho_{\mu-1} = \theta_{\mu-1}(\rho),$$

bajo la cual coloca otra que empieza por ρ_1 y sigue con sus transformados por las funciones θ_i (sustitución de ρ por ρ_i) en la primera fila; y así sucesivamente hasta completar un cuadro $\mu \times \mu$, demostrando que se trata de μ permutaciones (Cámara dice «sustituciones») de las μ raíces de g , que forman un grupo Σ ; prueba además que el grupo es transitivo y, usando esta propiedad y las descomposiciones en ciclos, que es abeliano. Los apartados 5-8 contienen un estudio de Σ basado en los ciclos, que termina con el subgrupo engendrado por dos permutaciones. En el apartado 9 reaparece el cuerpo $\Omega(\rho)$ para demostrar que cada uno de sus elementos imprimitivos «es una función simétrica de los elementos ρ que figuran en un ciclo de una de las sustituciones del grupo Σ ». En el apartado 10 se resalta una importante consecuencia del resultado anterior: «el conocimiento de este grupo Σ equivale al del cuerpo normal $\Omega(\rho)$, pues la clasificación de todos los elementos de este cuerpo $\Omega(\rho)$ se hace por medio de las sustituciones de Σ y de los sistemas imprimitivos». Este apartado es extenso porque contiene varios ejemplos detallados de la obtención de los sistemas imprimitivos, tablas numéricas que dan al trabajo el estilo «intuitivo», o de «juego matemático», al que aludía el autor en la introducción. En el apartado 11 hay una breve alusión a que cada elemento de Σ provoca una transformación entre los elementos del cuerpo «en la que los únicos que no se cambian por otros son los del cuerpo Ω ». El apartado siguiente (12 en el sumario) contiene el resultado final de este bloque principal del trabajo de Cámara: «En el cuerpo $\Omega(\rho)$ hay tantos subcuerpos como sistemas de imprimitividad hay en el grupo Σ ». Queda un apartado, el 13 del sumario, en el que se demuestra que si θ es un elemento imprimitivo que determina una extensión intermedia $\Omega(\theta)$ de grado ν_1 , entonces $\Omega(\rho)$ es una extensión de $\Omega(\theta)$ de grado μ_1 , siendo $\mu = \nu_1 \mu_1$.

2.3. Balance. Como conclusión, podemos decir que este artículo no está exento de elaboración personal, si bien más en cuestiones expositivas (selección y ordenación de temas) y aclaratorias (ejemplos detallados) que de fondo. Es interesante constatar que Cámara se fijó en la conexión estructural y la desarrolló en primer lugar para la ecuación normal, lo que significa que captó el vector de modernidad por el que Weber había dirigido la teoría; pero lo hizo sólo parcialmente, al sustituir una de las estructuras, los subgrupos, por los sistemas imprimitivos en que se divide el conjunto de las raíces. Por otra parte, apenas hizo énfasis en que las sustituciones significaban transformaciones globales del cuerpo (sólo habló de cuerpos de números). Si la teoría

de Galois fuera tan conocida por el público como afirmaba protocolariamente el autor en su exposición de motivos, no estaría justificado un artículo como éste en un congreso del máximo nivel nacional; su aparición en tal escenario sólo se explica por el escaso conocimiento de la materia que había en el ambiente. Fue un trabajo de iniciación que podríamos considerar esperanzador, pero que, como tantas veces en la matemática española, las circunstancias del autor truncaron la continuidad y las condiciones de la comunidad nacional de los matemáticos no facilitaron que el testigo fuera inmediatamente recogido por otra persona o grupo con la intensidad necesaria.

REFERENCIAS

- [1] E. Artin, *Foundations of Galois theory*, New York University, Nueva York, 1938.
- [2] E. Artin, *Galois theory*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1942. (Traducción al español: R. Rodríguez Vidal, Vicens-Vives Barcelona, 1970.)
- [3] E. Ausejo, Rey Pastor y sus discípulos en la primera etapa de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1908–1936), en *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888–1962)* (L. Español, ed.), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño (1990), 105–114.
- [4] S. Cámara, Sustituciones en el cuerpo algébrico normal de Galois, en *Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias* (Valladolid 1915), Imprenta de Fortanet, Madrid, 1916. Tomo III, Sección 1.^a, Ciencias Matemáticas, 35–67.
- [5] S. Cámara, *Elementos de geometría analítica*, Imprenta Militar, Valencia, 1920.
- [6] A. Capelli, *Istituzioni di analisi algebrica*, 4.^a ed., Perellano, Nápoles, 1909.
- [7] L. Corry, *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [8] J. Echegaray, *Resolución de ecuaciones y teoría de Galois*, Imprenta y Fundición y Fábrica de Tintas de los Hijos de J. A. García, Madrid, 1897. (Lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid.)
- [9] J. J. Escribano, *Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878–1964) en el contexto de la matemática española*, Tesis Doctoral, Universidad de La Rioja, Logroño, 2000.
- [10] L. Español, Julio Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo, en *Matemática y región: La Rioja. Sobre matemáticos riojanos y matemáticas en La Rioja* (L. Español, ed.), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño (1998), 63–122.
- [11] Z. García de Galdeano, *Crítica y síntesis de álgebra*, Imp. y Lib. de J. Peláez, Toledo, 1888.
- [12] Z. García de Galdeano, Reseña de H. Weber: *Traité d’algèbre supérieure*, 1898, *El Progreso Matemático (2.^a serie)* **1** (1898), 26–28.
- [13] Z. García de Galdeano, Reseña de J. Echegaray: Lecciones sobre resolución de ecuaciones y teoría de Galois, 1898–99, *El Progreso Matemático (2.^a serie)* **2** (1900), 220–226.
- [14] Z. García de Galdeano, *Exposición sumaria de teorías matemáticas*, Casañal, Zaragoza, 1907.
- [15] S. Garma, La primera exposición de la teoría de Galois en España, *Llull* **2** (3) (1979), 7–14.
- [16] S. Garma, Echegaray y la teoría de Galois, en *Cinquanta anys de ciència i tècnica a Catalunya. Entorn l’activitat científica d’E. Terradas (1883–1950)*, Institut d’Estudis Catalans, Barcelona (1987), 149–161.
- [17] M. Hormigón, García de Galdeano’s works on algebra, *Historia Mathematica* **18** (1991), 1–15.
- [18] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthiers-Villars, París, 1870. (Reedición: Gabay, París, 1989.)
- [19] B. M. Kierman, The development of Galois theory from Lagrange to Artin, *AHES* **8** (1971), 40–154.
- [20] L. Martini, The first lectures in Italy on Galois theory: Bologna, 1886–1887, *Historia Mathematica* **26** (1999), 201–223.
- [21] J. Mingot, Sustituciones lineales y sus aplicaciones, *Revista de la Sociedad Matemática Española* **5** (1916), 283–292; **5** (1917), 66–74.

- [22] L. Octavio de Toledo, *Tratado de álgebra*, Madrid, 1905.
- [23] L. Octavio de Toledo, *Discurso en su recepción pública* (contesta M. Vegas), Real Academia de Ciencias, Madrid, 1914.
- [24] J. Rey Pastor, *Introducción a la matemática superior. Estado actual, métodos y problemas*, Biblioteca Corona, Madrid, 1916. (Reimpresión: Instituto de Estudios Riojanos, Logroño, 1983.)
- [25] J. Rey Pastor, *Fundamentos de la geometría proyectiva superior*, Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, Imprenta Fortanet, Madrid, 1916.
- [26] J. Rey Pastor, *Lecciones de álgebra*, A. Medina (Toledo), Madrid, 1924. (También: 2.^a ed. modificada y ampliada, 1935.)
- [27] J. M. Sánchez Ron (editor), José Echegaray: matemático y físico-matemático, Fundación Banco Exterior, Madrid, 1990.
- [28] J. A. Serret, *Cours d'algèbre supérieure*, Bachelier, París, 1849.
- [29] E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, *J. für die reine und angewandte Math.* **137** (1910), 167–309.
- [30] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, 2 vols., Springer, Berlín, 1930.
- [31] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, T. I. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1895. (También: 2.^a ed., 1898. Traducción de la 2.^a ed. alemana por J. Griess: *Traité d'algèbre supérieure*, Gauthier-Villars, París, 1898.)

INSTITUTO VALLE DEL CIDACOS, CALLE BASCONIA S/N, 26500 CALAHORRA, SPAIN
Correo electrónico: jesbriba@boj.pntic.mec.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN
Correo electrónico: luis.espanol@dmc.unirioja.es

A NOTE ON THE BOUNDEDNESS OF OPERATORS ON WEIGHTED BERGMAN SPACES

ÓSCAR BLASCO

Dedicated to the memory of José Guadalupe

ABSTRACT. Let ρ be a weight function, let X be a complex Banach space and let B_ρ denote the space of analytic functions in the disc \mathbb{D} such that $\int_0^1 \rho(1-r)M_1(f', r) dr < \infty$, we prove that, under certain assumptions on the weight, the space of bounded operators $L(B_\rho, X)$ is isometrically isomorphic to the space $\Lambda_\rho(X)$ of X -valued analytic functions such that $\|F'(z)\| = O\left(\frac{\rho(1-|z|)}{1-|z|}\right)$. Several applications are presented.

1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The study of the spaces that will be considered in this paper goes back to my stay at the University of Zaragoza, where I had the chance to know José Guadalupe, better known by “Chicho”, who always encouraged me to do research and was always willing to discuss about mathematics. He liked very much Hardy spaces and weighted inequalities. The subject I will be dealing with, actually comes from both topics.

In [3] it was shown that the boundedness of operators between weighted Bergman spaces and a general Banach space X can be characterized by the fact that certain associated operator-valued function belongs to certain Lipschitz space. Similar results were extended to more general weighted spaces $B_p(\rho)$ for $0 < p \leq 1$ in [4]. As application of these results new results on multipliers, Carleson measures and composition operators were achieved. In this note we use similar arguments to deal with generalized Lipschitz classes introduced by Janson (see [15]) and the considered by different authors (see [9], [2], [8]).

The starting point of the story is the consideration of the Banach envelope of the Hardy spaces H^p for $0 < p < 1$ denoted in [11] by B^p . In fact they give a definition for the spaces but these have implicitly appeared in an inequality due to Hardy and Littlewood (see [14], or [10] page 87) which establishes that for $0 < p < 1$ and $F \in H^p$ then

$$(1) \quad \int_0^1 (1-r)^{1/p-2} M_1(F, r) dr \leq C \|F\|_{H^p}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46B20, 46E40.

Key words and phrases. Weighted Bergman spaces, vector-valued Lipschitz functions, Bloch functions.

Research of the author partially supported by Proyecto DGICYT PB98-0146.

where $M_p(F, r) = (\int_0^{2\pi} |F(re^{it})|^p \frac{dt}{2\pi})^{1/p}$ and $\|F\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} M_p(F, r)$.

This inequality was a crucial point in proving the duality between the Hardy classes for $0 < p < 1$ and the Lipschitz classes $(H^p)^* = \Lambda_\alpha$ for $\alpha = 1/p - 1$ achieved in [11]. Inspired by (1) they gave the definition of B_p as the space of analytic functions in the disc such that

$$\|F\|_{B^p} = \int_0^1 (1 - r)^{1/p-2} M_1(F, r) dr < \infty.$$

For the limiting case in $p = 1$ one first needs to observe that $F \in B^p$ if and only if

$$\int_0^1 (1 - r)^{1/p-1} M_1(F', r) dr < \infty.$$

Now let us define B^1 as the space of analytic functions such that

$$\|F\|_{B^1} = |F(0)| + \int_0^1 M_1(F', r) dr < \infty.$$

This space was shown to be the predual of the Bloch space (see [1] or [17]).

In this paper we consider a weighted version of these spaces.

Definition 1.1. Let $\rho(t)$ denote a non-negative, non-decreasing integrable function on $(0, 1)$. An analytic function F is said to belong to B_ρ if

$$\int_0^1 \rho(1 - r) M_1(F', r) dr < \infty.$$

It is easy to see that B_ρ becomes a Banach space under the norm

$$\|F\|_{B_\rho} = |F(0)| + \int_0^1 \rho(1 - r) M_1(F', r) dr.$$

Note that the integrability condition on ρ allows to say that the polynomials belong to B_ρ . It is not difficult to see, using the density of the polynomials in the Hardy space H^1 , that actually the polynomials are dense in B_ρ .

Of course the cases $\rho(t) = t^{1/p-1}$ for $0 < p \leq 1$ give the just mentioned B^p -spaces.

Let us now introduce the generalized Lipschitz classes, already in the vector-valued setting.

Definition 1.2. Let $\rho(t)$ denote a non-negative, non-decreasing integrable function on $(0, 1)$ such that $\frac{\rho(t)}{t} \geq C > 0$ and let X be a complex Banach space. An analytic function from the disc \mathbb{D} into X , $F(z) = \sum_{n=0}^\infty x_n z^n$ where $x_n \in X$, is said to belong to $\Lambda_\rho(X)$ if there exists a constant $C > 0$ such that for all $z \in \mathbb{D}$

$$\|F'(z)\| \leq C \frac{\rho(1 - |z|)}{1 - |z|}.$$

It is easy to see that this becomes a Banach space under the norm

$$\|F\|_{\Lambda_\rho(X)} = \|F(0)\| + \sup_{|z| < 1} \left\{ \frac{1 - |z|}{\rho(1 - |z|)} \|F'(z)\| \right\}.$$

Observe that the assumption $\frac{\rho(t)}{t} \geq C > 0$ is now needed to have the vector-valued polynomials in the space.

Of course the case $\rho(t) = 1$ corresponds to the Bloch space:

$$\text{Bloch}(X) = \left\{ F : \mathbb{D} \rightarrow X \text{ analytic} : \sup_{|z| < 1} (1 - |z|^2) \|F'(z)\| < \infty \right\}.$$

The reader is referred to Theorem 5.1 in [10], to see that the scalar-valued proof which shows that the space Λ_α , corresponding to $\rho(t) = t^\alpha$, coincides with the Lipschitz class defined in terms of the modulus of continuity goes over the vector-valued case, and then we have

$$(2) \quad \Lambda_\alpha(X) = \left\{ f \in C_X(\mathbb{T}) : w(f, t) = \sup_{s \in \mathbb{T}} \|f(e^{i(t+s)}) - f(e^{is})\| = O(t^\alpha) \right\}.$$

The reader is referred to [16, 15, 9, 8] for results concerning these and related spaces in the scalar-valued case and to [3, 4, 7] for results in the vector-valued situation.

Let us now indicate how to construct examples of functions in the generalized Lipschitz classes in the vector-valued case (see [3, 7] for more examples).

Example 1.1. *Let us assume that ρ satisfies*

$$\sum_{n=0}^\infty \rho\left(\frac{1}{n+1}\right) r^n = O\left(\frac{\rho(1-r)}{1-r}\right).$$

Then

$$(3) \quad F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} \rho\left(\frac{1}{n+1}\right) e_{n+1} z^n \in \Lambda_\rho(l^1),$$

$$(4) \quad F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} \rho\left(\frac{1}{n+1}\right) a_{n+1} z^n \in \Lambda_\rho(c_0),$$

where $\{e_n\}$ stands for the canonical basis of l^1 and $a_n = \sum_{k=1}^n e_k$.

Example 1.2. *Let $\phi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$ be the Moebius transformation in the disc for $z \in \mathbb{D}$. If $\rho(t) = t^{2/p}$ for $2 < p$ then*

$$(5) \quad F(z) = \phi_z \in \Lambda_\rho(L^p(\mathbb{D}, dA))$$

where dA stands for the normalized Lebesgue measure in the disc \mathbb{D} .

Proof. It suffices to use the following well-known estimates for $q > 1$ and $\gamma > \alpha + 1$

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1 - ze^{it}|^q} \leq C \frac{1}{(1 - |z|)^{q-1}} \quad (\text{see [10], page 65}),$$

$$(7) \quad \int_0^1 \frac{(1-r)^\alpha}{(1-rs)^\gamma} dr \leq C \frac{1}{(1-s)^{\gamma-\alpha-1}} \quad (\text{see [16], page 291}).$$

□

Example 1.3. Given $z \in \mathbb{D}$ let us denote the Cauchy kernel by $C_z(w) = \frac{1}{1-wz}$. Then a measure μ on \mathbb{D} is a Carleson measure if and only if $F(z) = C_z$ is a $L^1(\mu)$ -valued Bloch function.

Proof. It suffices to recall the following characterization of Carleson measures

$$(8) \quad \sup \left\{ \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\bar{w}|^2} d\mu(w) : z \in \mathbb{D} \right\} < \infty \quad (\text{see [13], page 239}).$$

□

There are some natural conditions on the weight ρ which allow to extend several results from the case $p < 1$ to a more general context. We recall the following notions which turned out to be relevant for different purposes (see [15, 2, 8, 9]).

Definition 1.3. Let $\rho(t)$ denote a non-negative, integrable function on $(0, 1)$. It is said to be a (b_1) -weight if there exists a constant $C > 0$ such that

$$(9) \quad \int_s^1 \frac{\rho(t)}{t^2} dt \leq C \frac{\rho(s)}{s}.$$

It is said to be a (d_1) -weight (or to satisfy Dini condition) if there exists a constant $C > 0$ such that

$$(10) \quad \int_0^s \frac{\rho(t)}{t} dt \leq C\rho(s).$$

Observe that ρ being non-decreasing gives always

$$\frac{\rho(s)}{s} \leq C \int_s^1 \frac{\rho(t)}{t^2} dt$$

and that the assumption $\frac{\rho(t)}{t} \geq C > 0$ together with (b_1) give

$$(11) \quad \log \left(\frac{1}{1-s} \right) \leq C \frac{\rho(1-s)}{1-s}.$$

We refer the reader to the mentioned papers for examples and properties of these weights.

2. THE THEOREM AND ITS PROOF

Before stating the theorem we shall need a lemma which has its own interest. Let us give some notation to be used in the sequel. We write $u_n(z) = z^n$, $C_z(w) = \frac{1}{1-wz}$ and $K_z(w) = \frac{w}{(1-wz)^2}$.

Notice that $C_z = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ and $K_z = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n z^{n-1}$ and $\|u_n\|_{\rho} \leq Cn$. Therefore both series are absolutely convergent in B_{ρ} .

Lemma 2.1. *If ρ is a non-decreasing (b_1) -weight then*

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_{B_{\rho}} |z|^n = O\left(\frac{\rho(1-|z|)}{1-|z|}\right),$$

$$(13) \quad \|K_z\|_{B_{\rho}} = O\left(\frac{\rho(1-|z|)}{1-|z|}\right).$$

Proof.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_{B_\rho} |z|^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \rho(1-r) n r^{n-1} |z|^n dr \\ &= \int_0^1 \rho(1-r) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} |z|^n \right) dr \\ &= \int_0^1 \frac{\rho(1-r)}{(1-r|z|)^2} dr. \end{aligned}$$

On the other hand, using (6)

$$\begin{aligned} \|K_z\|_{B_\rho} &\leq C \int_0^1 \rho(1-r) \left(\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-zre^{it}|^3} \right) dr \\ &= \int_0^1 \frac{\rho(1-r)}{(1-r|z|)^2} dr. \end{aligned}$$

Therefore both results follow from the following property of (b_1) -weights:

$$(14) \quad \int_0^1 \frac{\rho(1-r)}{(1-rs)^2} dr = O\left(\frac{\rho(1-s)}{1-s}\right).$$

Indeed

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\rho(1-r)}{(1-rs)^2} dr &= \int_0^s \frac{\rho(1-r)}{(1-rs)^2} dr + \int_s^1 \frac{\rho(1-r)}{(1-rs)^2} dr \\ &\leq \int_0^s \frac{\rho(1-r)}{(1-r)^2} dr + \int_s^1 \frac{\rho(1-r)}{(1-s)^2} dr \\ &\leq \int_{1-s}^1 \frac{\rho(t)}{t^2} dt + \frac{1}{(1-s)^2} \int_s^1 \rho(1-r) dr \\ &\leq C \frac{\rho(1-s)}{1-s}. \end{aligned}$$

□

Although the following elementary lemma is not needed in its full generality, we include here a proof to exhibit how Dini condition is used to make classical facts to remain valid in the weighted situation.

Lemma 2.2. *If ρ is a (d_1) -weight and ϕ is a bounded analytic function with $\|\phi\|_\infty = 1$, then the multiplication operator $M_\phi(f)(z) = \phi(z)(f(z) - f(0))$ defines a bounded operator from B_ρ into itself.*

Proof. Let us denote $g(z) = M_\phi(f)(z)$. Since $|\phi'(z)| \leq \frac{C}{1-|z|}$ then

$$\begin{aligned} |g'(z)| &\leq C \left(|f'(z)| + \frac{|f(z) - f(0)|}{1-|z|} \right) \\ &\leq C \left(|f'(z)| + \frac{1}{1-|z|} \int_0^{|z|} |f'\left(\frac{sz}{|z|}\right)| ds \right). \end{aligned}$$

Hence

$$M_1(g', r) \leq C \left(M_1(f', r) + \frac{1}{1-r} \int_0^r M_1(f', s) ds \right).$$

Using now (d_1) -condition one gets

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho(1-r)M_1(g', r) dr &\leq C \left(\|f\|_{B_\rho} + \int_0^1 \frac{\rho(1-r)}{1-r} \left(\int_0^r M_1(f', s) ds \right) dr \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_{B_\rho} + \int_0^1 \left(\int_s^1 \frac{\rho(1-r)}{1-r} dr \right) M_1(f', s) ds \right) \\ &\leq C' \left(\|f\|_{B_\rho} + \int_0^1 \left(\int_0^{1-s} \frac{\rho(t)}{t} dt \right) M_1(f', s) ds \right) \\ &\leq C' \left(\|f\|_{B_\rho} + \int_0^1 \rho(1-s)M_1(f', s) ds \right) = 2C'\|f\|_{B_\rho}. \end{aligned}$$

□

Arguments as above but simpler give the following

Remark 2.1. *If ϕ is an analytic function with bounded derivative, then the multiplication operator $M_\phi(f)(z) = \phi(z)(f(z) - f(0))$ defines a bounded operator from B_ρ into itself.*

Let us now give a natural correspondence between operators and vector-valued analytic functions, that will allow us to identify the bounded operators from B_ρ into X with $\Lambda_\rho(X)$ with equivalent norms. This idea has been used by the author several times with slight modifications (see [4] , [3] or [6]).

Given an analytic function $F(z) = \sum_{n=0}^\infty x_n z^n$ where $x_n \in X$ we can define a linear operator T_F which acts on polynomials as follows:

$$(15) \quad T_F \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k z^k \right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k.$$

Conversely, given a linear operator T defined on the subspace of polynomials and with range in X one can define the vector-valued analytic function F_T given by

$$(16) \quad F_T(z) = \sum_{n=0}^\infty T(u_n)z^n.$$

Theorem 2.3. *Let ρ be a non-decreasing (b_1) -weight such that $\rho(t) \geq Ct$, X any complex Banach space and T a linear operator on the polynomials with range in X . Then T extends to a bounded operator from B_ρ into X if and only if F_T belongs to $\Lambda_\rho(X)$. Moreover $\|T\| \approx \|F_T\|_{\Lambda_\rho(X)}$.*

Proof. Assume T is bounded from B_ρ . Since $\sum_{n=0}^\infty u_n z^n$ is convergent in B_ρ then

$$F_T(z) = \sum_{n=0}^\infty T(u_n)z^n = T \left(\sum_{n=0}^\infty u_n z^n \right) = T(C_z).$$

Same argument gives

$$F_T'(z) = T(K_z).$$

Now use (13) to get

$$\|F'_T(z)\| \leq \|T\| \cdot \|K_z\|_{B_\rho} \leq C \frac{\rho(1-|z|)}{1-|z|}.$$

For the converse we shall use the following equality for all $n \geq 1$

$$(17) \quad 2n(n+1) \int_0^1 (1-s^2)s^{2n-1} ds = 1.$$

Then, given a polynomial $p(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ we have

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k z^k\right) &= \alpha_0 x_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \\ &= \alpha_0 x_0 + 2 \int_0^1 \sum_{k=1}^n k(k+1) \alpha_k x_k s^{k-1} s^k (1-s^2) ds \\ &= p(0)F_T(0) + 2 \int_0^1 (1-s^2) \left(\int_0^{2\pi} p'_1(se^{-it})F'_T(se^{it})e^{-it} \frac{dt}{2\pi} \right) ds \end{aligned}$$

where $p_1(z) = z(p(z) - p(0))$.

Using that $F_T \in \Lambda_\rho(X)$ and remark 2.1 we have

$$\begin{aligned} \|T(p)\| &\leq |p(0)|\|F_T(0)\| + 2 \int_0^1 (1-s^2) \left(\int_0^{2\pi} |p'_1(se^{-it})| \cdot \|F'_T(se^{it})\| \frac{dt}{2\pi} \right) ds \\ &\leq C\|F_T\|_{\Lambda_\rho(X)} \left(|p(0)| + \int_0^1 \rho(1-s) \left(\int_0^{2\pi} |p'_1(se^{-it})| \frac{dt}{2\pi} \right) ds \right) \\ &\leq C\|F_T\|_{\Lambda_\rho(X)} \|p_1\|_{B_\rho} \leq C\|F_T\|_{\Lambda_\rho(X)} \|p\|_{B_\rho}. \end{aligned}$$

Now extend to B_ρ by density of the polynomials. □

Remark 2.2. Taking $X = \mathbb{C}$ we obtain the duality $(B_\rho)^* = \Lambda_\rho$. This gives a unified proof of the duality results for B^p and B^1 due to Duren, Romberg and Shields (see [11]) and to Anderson, Clunie and Pommerenke (see [1]). Nevertheless our proof follows the ideas in those papers, but our arguments seem to be a bit simpler. The duality can also be obtained from results in [9] but requiring stronger assumptions in the weight.

It is rather usual in operator theory that if the “sup” condition expresses the boundedness then the “lim = 0” should express the compactness. Let us clarify this in our setting.

Definition 2.4. Let $\rho(t)$ denote a non-negative, non-decreasing integrable function on $(0, 1)$ such that $\frac{\rho(t)}{t} \geq C > 0$ and let X be a complex Banach space. An analytic function F from the disc \mathbb{D} into X is said to belong to $\lambda_\rho(X)$ if

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{1-|z|}{\rho(1-|z|)} \|F'(z)\| = 0.$$

It is easy to see that $\lambda_\rho(X)$ is a closed subspace of $\Lambda_\rho(X)$.

Note that (11) shows that for (b_1) -weights one has that the X -valued polynomials are actually contained in $\lambda_\rho(X)$. In fact the closure of X -valued polynomials gives $\lambda_\rho(X)$ under the condition (b_1) in the weight as the following proposition shows.

Proposition 2.5. *Let ρ be a non-decreasing (b_1) -weight with $\rho(t) \geq Ct$ and $F \in \Lambda_\rho(X)$. The following are equivalent:*

- (i) $F \in \lambda_\rho(X)$.
- (ii) $\lim_{r \rightarrow 1} F_r = F$ in $\Lambda_\rho(X)$, where $F_r(z) = F(rz)$.
- (iii) F can be approached by polynomials in $\Lambda_\rho(X)$.

Proof. Assume (i), that is $\lim_{\delta \rightarrow 1} \sup_{|z|=\delta} \left\{ \frac{1-|z|}{\rho(1-|z|)} \|F'(z)\| \right\} = 0$. Since $F'_r(z)$ converges to $F'(z)$ uniformly on compact sets and the fact

$$\sup_{|z|=\delta} \{ \|F'_r(z) - F'(z)\| \} \leq 2 \sup_{|z|=\delta} \{ \|F'(z)\| \}$$

we easily deduce (ii).

Let us assume (ii) and write $F(z) = \sum_{n=0}^\infty x_n z^n$. Given $\varepsilon > 0$ we find $r < 1$ such that $\|F - F_r\|_{\Lambda_\rho(X)} < \varepsilon/2$. Now, since the series $\sum_{n=0}^\infty x_n r^n u_n$ is absolutely convergent in $\Lambda_\rho(X)$, then we can consider $P_k(z) = \sum_{n=0}^k x_n r^n z^n$ for k large enough so that $\|F_r - P_k\|_{\Lambda_\rho(X)} < \varepsilon/2$. This shows (iii).

Let us now assume (iii). Given $\varepsilon > 0$ we choose a polynomial P so that $\|F - P\|_{\Lambda_\rho(X)} < \varepsilon/2$. Now

$$\frac{1-|z|}{\rho(1-|z|)} \|F'(z)\| \leq \frac{1-|z|}{\rho(1-|z|)} \|P'(z)\| + \|F - P\|_{\Lambda_\rho(X)}.$$

Using that P' is bounded and (11) one gets (i). □

Proposition 2.6. *Let ρ be a (b_1) -weight and X a Banach space. If $F \in \lambda_\rho(X)$ then T_F is a compact operator from B_ρ to X .*

Proof. Using Proposition 2.5 we have a sequence of polynomials P_n with values in X which approaches F in $\Lambda_\rho(X)$. Note that the associated operators T_{P_n} are finite rank operators and that T_{P_n} converges to T in norm. Therefore T is compact. □

Remark 2.3. *The converse of Proposition 2.6 is not true. Take $F \in \Lambda_\rho \setminus \lambda_\rho$ and $T = T_F$ the corresponding operator for $X = \mathbb{C}$. This would be compact but $F_T = F \notin \lambda_\rho$.*

3. APPLICATIONS

Corollary 3.1. *Let $1/2 < p < 1, \alpha = 1/p - 1$ and X a Banach space. Then the following are equivalent:*

- (i) $T : B_p \rightarrow X$ is bounded.
- (ii) $T : H^p \rightarrow X$ is bounded.
- (iii) $F_T \in \Lambda_\alpha(X)$.

Proof. The only implication is needed to be shown is that (ii) gives (iii). As in the proof of Theorem 2.3 one has to estimate $\|K_z\|_{H^p}$. In order to do that, note that (6) gives

$$\|K_z\|_{H^p} \leq \left(\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1 - ze^{it}|^{2p}} \right)^{1/p} \leq C \frac{1}{(1 - |z|)^{2-1/p}} = C \frac{1}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}.$$

□

The reader is referred to [4] for applications to multipliers, Carleson measures and composition operators.

Given an analytic function g on the unit disc we denote by $M_g(f)(z) = f(z)g(z)$ the multiplication operator with symbol g . Since $F'_{M_g}(z) = g \cdot K_z$ then condition (iii) in Corollary 3.1 gives the following application.

Corollary 3.2. *Let $1/2 < p < 1$ and an analytic function g . The following are equivalent:*

- (i) $M_g : B^p \rightarrow B^p$ is bounded.
- (ii) $M_g : H^p \rightarrow B^p$ is bounded.
- (iii) $\int_{\mathbb{D}} |g(w)| \frac{(1-|w|)^{1/p-2}}{|1-zw|^2} dA(w) \leq \frac{C}{(1-|z|)^{2-1/p}}$.

Given $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analytic we denote by $C_\phi(f)(z) = f(\phi(z))$ the composition operator. Since $F'_{C_\phi}(z) = C\phi(K_z)$ then Theorem 2.3 gives the following corollary.

Corollary 3.3. *Let ρ be a (b_1) -weight and ϕ an analytic function from the disc into itself. Then $C_\phi : B_\rho \rightarrow B_\rho$ is bounded if and only if*

$$\int_{\mathbb{D}} \rho(1 - |w|) \frac{|\phi(w)|}{|1 - z\phi(w)|^2} dA(w) \leq C \frac{\rho(1 - |z|)}{1 - |z|}.$$

REFERENCES

- [1] J. M. Anderson, J. Clunie and C. Pommerenke, On Bloch functions and normal functions, *J. Reine Angew. Math.* **270** (1974), 12–37.
- [2] J. L. Ansorena and O. Blasco, Characterization of weighted Besov spaces, *Math. Nach.* **171** (1995), 5–17.
- [3] O. Blasco, Spaces of vector valued analytic functions and applications, in *Geometry of Banach spaces* (Strobl, 1989) *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **158**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990), 33–48.
- [4] O. Blasco, Operators on weighted Bergman spaces and applications, *Duke Math. J.* **66** (1992), 443–467.
- [5] O. Blasco, Multipliers on weighted Besov spaces of analytic functions, *Contemporary Math.* **144** (1993), 23–33.
- [6] O. Blasco, Multipliers on spaces of analytic functions, *Canadian J. Math.* **20** (1994), 1–21.
- [7] O. Blasco, Remarks on vector valued BMO and vector-valued multipliers, *Positivity* **4** (2000), 339–356.
- [8] O. Blasco and G. S. de Souza, Spaces of analytic functions on the disc where the growth of $M_p(F, r)$ depends on a weight, *J. Math. Anal. Appl.* **147** (1990), 580–598.
- [9] S. Bloom and G. S. de Souza, Atomic decomposition of generalized Lipschitz spaces, *Illinois J. Math.* **33** (1989), 189–209.
- [10] P. Duren, *Theory of H^p -spaces*, Academic Press, New York, 1970.

- [11] P. L. Duren, B. W. Romberg and A. L. Shields, Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$, *J. Reine Angew. Math.* **238** (1969), 32–60.
- [12] T. M. Flett, On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions, *Proc. London Math. Soc.* **20** (1976), 749–768.
- [13] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.
- [14] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals, II, *Math. Z.* **34** (1932), 403–439.
- [15] S. Janson, Generalization of Lipschitz and application to Hardy spaces and bounded mean oscillation, *Duke Math. J.* **47** (1980), 959–982.
- [16] A. L. Shields and D. L. Williams, Bounded projections, duality and multipliers in spaces of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **162** (1971), 287–302.
- [17] K. Zhu, *Operator Theory in function spaces*, Marcel Dekker, New York, 1990.
- [18] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE VALENCIA, 46100 BURJASSOT, VALENCIA, SPAIN

E-mail address: oblasco@uv.es

APPROXIMATION THEORY FOR WEIGHTED SOBOLEV SPACES ON CURVES

VENANCIO ÁLVAREZ, DOMINGO PESTANA, JOSÉ M. RODRÍGUEZ
AND ELENA ROMERA

ABSTRACT. In this paper we present a definition of weighted Sobolev spaces on curves and find general conditions under which the spaces are complete. We also prove the density of the polynomials in these spaces for non-closed compact curves and, finally, we find conditions under which the multiplication operator is bounded on the completion of polynomials. These results have applications to the study of zeroes and asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials.

1. INTRODUCTION

The topic of weighted Sobolev spaces appears in very different areas of Mathematics going from the partial differential equations to approximation theory (see e.g. [HKM], [K], [Ku], [KO], [KS] and [T]). Some particular cases were studied in [ELW1], [ELW2] and [EL]. Later, we presented a very deep study of general Sobolev spaces in the real line (see [RARP1], [RARP2], [R1], [R2] and [R3]).

Here we are interested in the case of Sobolev spaces with general measures supported on curves in the complex plane.

In the last months of his life, J. J. Guadalupe (Chicho for his friends) showed increasing interest in these problems, planning to collaborate with us.

Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle and, more generally, on curves is a topic of recent and increasing interest in approximation theory; see, for example, [CM] and [FMP] (for the unit circle) and [BFM] and [M-F] (for the case of Jordan curves). If γ is a simple and locally absolutely continuous curve, it is clear that the set of holomorphic functions whose norm in the Sobolev space $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ is finite is not a Banach space except when the support of μ is finite. In order to obtain a complete space we have to deal with functions which are not holomorphic. Consequently, we need to define $f^{(j)}$ when f is not holomorphic; the precise definition is presented in Section 2.

The zeroes of the Sobolev orthogonal polynomials have been studied in [LP] in the case of a segment on the real line. There it is proved that they are contained in the disk $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|M\|\}$, where $(Mf)(x) = xf(x)$ is the multiplication operator.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 41A10, 46E35, 46G10.

Key words and phrases. Weighted Sobolev spaces, polynomial approximation, multiplication operator, Szegő theorem, zeroes of orthogonal polynomials.

Research of V. Álvarez, D. Pestana and J. M. Rodríguez partially supported by a grant from DGI, BFM2000-0206-C04-01, Spain.

Consequently, the set of the zeroes of the Sobolev orthogonal polynomials is bounded if the multiplication operator is bounded. The location of these zeroes allows one to obtain results on the asymptotic behaviour of Sobolev orthogonal polynomials (see [LP]). In [LP] they prove also that if μ is a finite sequentially dominated measure in $[a, b]$, then M is a bounded operator on the completion of polynomials (a measure is sequentially dominated if $\#\text{supp } \mu_0 = \infty$ and $d\mu_j = f_j d\mu_{j-1}$ with f_j bounded for $1 \leq j \leq k$). Recently, these results have been improved for measures on compact sets in \mathbb{C} (see [LPP]).

It is not difficult to see that the multiplication operator can also be bounded when the vectorial measure is not sequentially dominated. In Section 8 below other conditions are given in order to have the boundedness of M even on compact sets in \mathbb{C} . In [R2] one of the authors obtains a characterization of the boundedness of the operator M for measures in \mathbb{R} . Also, in Section 8 (see Theorem 8.1 below) this result is generalized for measures on compact sets in \mathbb{C} ; therefore this theorem is useful in the study of orthogonal polynomials.

Though we do not have yet the definitions, let us state the main theorems here. The results are numbered according to the section where they appear. The first one gives a sufficient condition under which one obtains a complete Sobolev space. The condition is a bit technical although it is very general, so we prefer to state the theorem in a short version where this condition is denoted by: $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}$. The definition of the class \mathcal{C} is in Section 4, Definition 4.2. The theorem is as follows:

Theorem 5.1. *Let us consider $1 \leq p \leq \infty$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a locally finite p -admissible vectorial measure on γ with $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}$. Then the Sobolev space $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ is complete.*

Our main result on the density of polynomials in these spaces is Theorem 6.2. Now, the conditions we need are more restrictive than in Theorem 5.1, but we have found five general types of measures for which it is true. We simply name them by types 1, 2, 3, 4 and 5 and the definitions are in Section 6. These measures include the most usual examples like Jacobi-type weights (that are measures of type 2).

Theorem 6.2. *Let us consider $1 \leq p < \infty$, $c > 0$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a p -admissible vectorial measure on a non-closed compact curve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$. Let us assume that $\gamma \in W^{k,\infty}(I)$ and $|\gamma'| \geq c$. If μ is a measure of type 1, 2, 3, 4 or 5, then P is dense in the Sobolev space $W^{k,p}(\gamma, \mu)$.*

The last result we present here is Theorem 8.1. It gives a necessary and sufficient condition so that the multiplication operator is bounded on the completion of polynomials, $P^{k,p}(E, \mu)$. Here we consider general compact sets $E \subset \mathbb{C}$ instead of curves. The kind of measures that appear here, ESD , is a generalization of sequentially dominated measures. The definition is in Section 6, Definition 6.6.

Theorem 8.1. *Let us consider $1 \leq p < \infty$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a finite vectorial measure on a compact set E . Then, the multiplication operator is bounded on $P^{k,p}(E, \mu)$ if and only if there exists a vectorial measure $\mu' \in ESD$ such that the*

Sobolev norms in $W^{k,p}(E, \mu)$ and $W^{k,p}(E, \mu')$ are comparable on the space of polynomials P . Furthermore, we can choose $\mu' = (\mu'_0, \dots, \mu'_k)$ with $\mu'_j := \mu_j + \mu_{j+1} + \dots + \mu_k$.

We also obtain results which partially generalize the classical result on density of polynomials in L^p of the unit circle to the context of Sobolev spaces (see Section 7).

Notation. We only consider simple curves in the complex plane which have a locally absolutely continuous parametrization. In the paper, $k \geq 1$ denotes a fixed natural number; z_i are points along a curve $\gamma \subset \mathbb{C}$. All the measures we consider are Borel, positive and locally finite and all the weights are non-negative Borel measurable functions. We can split μ_j as $d\mu_j = d(\mu_j)_s + w_j ds$, where $(\mu_j)_s$ is singular with respect to the arc-length measure, w_j is a weight on γ and ds is the differential of arc-length. We always use this terminology for the Radon-Nikodym decomposition of μ_j . We identify a weight w on γ with the measure $w ds$. P denotes the set of all polynomials. When every polynomial has finite $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ -norm, we denote by $P^{k,p}(\gamma, \mu)$ the completion of polynomials with that norm.

If $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ is a non-closed curve and $t_0 \in I$, by a right (respectively, left) neighbourhood of $z_0 = \gamma(t_0)$ in γ we mean the image by γ of $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ (respectively, $[t_0 - \varepsilon, t_0]$) for some $\varepsilon > 0$. If t_0 is the maximum (respectively, minimum) of I we also have left (respectively, right) neighbourhoods of $\gamma(t_0)$.

If $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ is a closed curve and $t_0 \in I$, we can consider its periodic extension $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, and define left and right neighborhoods of $\gamma(t_0)$ in a similar way.

Finally, the constants (denoted by c or c_i) in the formulae can change from line to line and even in the same line.

The present article is extracted from [APRR], from the same authors. In that paper we can find the proofs that do not appear here; there we can also find another related theorems and all the technical results that we need in our proofs.

We thank the editors of this volume for suggesting us to collaborate with an article related to one of the last topics of interest for J. J. Guadalupe. With this paper we want to honour the memory of our friend Chicho who, tragically, has left us so early.

2. DERIVATIVES ALONG CURVES

In this section we introduce a definition of *derivative along a curve* extending the usual complex derivative, which will be crucial in the future. As far as we know this concept is new. Recall that every curve in this paper is simple and has a locally absolutely continuous parametrization.

Definition 2.1.

(a) Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be any interval and $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ be a curve. If z_1, z_2 are two distinct points of $\gamma(I)$, we denote by $\int_{z_1}^{z_2} g(\zeta) d\zeta$ the complex integral of the function g along the arc of γ joining z_1 and z_2 , (which we denote by $[z_1, z_2]$). We also can consider arcs where one or the two extremal points are not included, as $(z_1, z_2), [z_1, z_2)$ or $(z_1, z_2]$. If γ is a closed curve we take the arc of γ joining z_1 and z_2 in the positive sense (according to the parametrization).

(b) Let z_0 be a fixed point in γ . If γ is compact we say that $f \in AC^k(\gamma)$ if f can be written as

$$(1) \quad f(z) = q(z) + \int_{z_0}^z h(\zeta) \frac{(z - \zeta)^{k-1}}{(k-1)!} d\zeta,$$

for some $h \in L^1(\gamma, ds)$ and some polynomial $q \in P_{k-1}$. If γ is a closed curve we require also the function $h \in L^1(\gamma, ds)$ to verify $\int_{\gamma} h(\zeta) \zeta^i d\zeta = 0$, for $0 \leq i < k$. When γ is not compact, we say that $f \in AC^k_{loc}(\gamma)$ if it can be split as in (1) with $h \in L^1_{loc}(\gamma, ds)$.

(c) If $f \in AC^k_{loc}(\gamma)$ and $z_0 \in \gamma$, we define its derivative f' along γ as

$$f'(z) = q'(z) + \int_{z_0}^z h(\zeta) \frac{(z - \zeta)^{k-2}}{(k-2)!} d\zeta,$$

where $q'(z)$ means the classical derivative of $q(z)$ and $\int_{z_0}^z h(\zeta)(z - \zeta)^{-1}/(-1)! d\zeta$ means $h(z)$.

Obviously, if γ is a compact real interval, the space $AC^1(\gamma)$ is the set of absolutely continuous functions in γ . If γ is a closed curve and $f \in AC^k(\gamma)$, we have $\int_{\gamma} h(\zeta) (z - \zeta)^{k-1} d\zeta = 0$ for every $z \in \gamma$. This property is equivalent to $f^{(j)}$ being continuous in γ for $0 \leq j < k$, where $f^{(j)}$ denotes the j -th derivative (according to the previous definition) of f . It is clear that every holomorphic function in a neighbourhood of γ belongs to $AC^k(\gamma)$ for every k .

We also notice that it is natural to define the derivative along γ in this way, since this is the “inverse” of integration:

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{\xi} h(\zeta) \frac{(\xi - \zeta)^{k-2}}{(k-2)!} d\zeta d\xi &= \int_{z_0}^z \int_{\zeta}^z h(\zeta) \frac{(\xi - \zeta)^{k-2}}{(k-2)!} d\xi d\zeta \\ &= \int_{z_0}^z h(\zeta) \left[\frac{(\xi - \zeta)^{k-1}}{(k-1)!} \right]_{\xi=\zeta}^{\xi=z} d\zeta = \int_{z_0}^z h(\zeta) \frac{(z - \zeta)^{k-1}}{(k-1)!} d\zeta. \end{aligned}$$

This definition of derivative is independent of the representation of f we are using; moreover, it does not depend on the choice of the point z_0 nor on k . We have the following non-surprising result.

Lemma 2.1. *If $f \in AC^k_{loc}(\gamma)$ and $z_0 \in \gamma$, then*

$$f(z) = q(z) + \int_{z_0}^z h(\zeta) \frac{(z - \zeta)^{k-1}}{(k-1)!} d\zeta,$$

where $q(z)$ is the $(k-1)$ -th Taylor polynomial of f centered at z_0 , i.e.,

$$q(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j, \quad \text{and} \quad h(z) = f^{(k)}(z).$$

Definition 2.2. *We say that $f \in C^k(\gamma)$ if $f \in AC^k_{loc}(\gamma)$ and $f^{(k)}$ is continuous in γ .*

This definition of the class $C^k(\gamma)$ coincides with the classical one when $\gamma \in C^k(I)$ and $\gamma' \neq 0$ on I (see Corollary 2.1 in [APRR]).

With our definition of derivatives, we can prove that Leibniz' rule is true. Also, we can prove the chain rule for derivatives. The proofs of these results may be found in [APRR], Lemmas 2.4, 2.5 and 2.6.

3. SOBOLEV SPACES

Obviously one of our main problems is to define the space $W^{k,p}(\gamma, \mu)$. There are two natural definitions:

- (1) $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ is the biggest space of (classes of) functions f regular enough with $\|f\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} < \infty$.
- (2) $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ is the closure of a good set of functions (e.g. $C^\infty(\gamma)$ or P) with the norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}$.

However both approaches have serious difficulties:

We consider first the approach (1). It is clear that the derivatives $f^{(j)}$ must be derivatives along γ in order to obtain a complete Sobolev space. Therefore we need to restrict the measures μ to a class of p -admissible measures (see Definition 3.6). Roughly speaking, μ is p -admissible if $(\mu_j)_s$, for $1 \leq j \leq k$, is concentrated in the set of points where $f^{(j)}$ is continuous, for every function f of the space; otherwise $f^{(j)}$ is determined, up to zero-Lebesgue measure sets. Then $(\mu_k)_s$ is identically zero. However, there is no restriction on the support of $(\mu_0)_s$.

This reasonable approach excludes norms appearing in the theory of Sobolev orthogonal polynomials. Even if we work with the simpler case of the weighted Sobolev spaces $W^{k,p}(\gamma, w)$ (measures without singular part) we must impose the condition that w_j belongs to the class B_p (see Definition 3.2 below) in order to have a complete weighted Sobolev space (see [KO], [RARP1]).

The approach (2) is simpler: we know that the completion of every normed space exists (e.g. $(C^\infty(\gamma), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)})$ or $(P, \|\cdot\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)})$), but we have two difficulties. The first one is evident: we do not get an explicit description of the Sobolev functions as in (1) (in Section 6 there are several theorems which prove that both definitions of Sobolev space are the same for p -admissible measures). The second problem is worse: The completion of a normed space is by definition a set of equivalence classes of Cauchy sequences. In many cases this completion is not a function space (see Theorem 3.1 in [R2] and its Remark).

However, since we need to work with the multiplication operator in $P^{k,p}(\gamma, \mu)$, we have to choose this second approach if μ is not p -admissible. First of all, we explain the definition of generalized Sobolev space on a curve. Let us start with some preliminary technical definitions.

Definition 3.1. *We say that two functions u, v are comparable on the set $A \subseteq \gamma$ if there are positive constants c_1, c_2 such that $c_1v(x) \leq u(x) \leq c_2v(x)$ for almost every $x \in A$. Since measures and norms are functions on measurable sets and vectors, respectively, we can talk about comparable measures and comparable norms. We say*

that two vectorial weights or vectorial measures are comparable if each component is comparable.

In what follows, the symbol $a \asymp b$ means that a and b are comparable for a and b functions, measures or norms.

Obviously, the spaces $L^p(A, \mu)$ and $L^p(A, \nu)$ are the same and have comparable norms if μ and ν are comparable on A . Therefore, in order to obtain our results we can replace a measure μ by any comparable measure ν .

To define a Sobolev space along a curve γ we consider first a class of weights which plays an important role in our results.

Definition 3.2. *If $1 \leq p \leq \infty$, we say that a weight w belongs to $B_p([z_1, z_2])$ if and only if*

$$\begin{aligned} w^{-1} &\in L^{1/(p-1)}([z_1, z_2]), & \text{if } p < \infty, \\ w^{-1} &\in L^1([z_1, z_2]), & \text{if } p = \infty. \end{aligned}$$

Also, if J is any arc of γ we say that $w \in B_p(J)$ if $w \in B_p(J_0)$ for every compact arc $J_0 \subseteq J$. We say that a weight belongs to $B_p(J)$, where J is a union of disjoint arcs $\cup_{i \in A} J_i$, if it belongs to $B_p(J_i)$, for $i \in A$.

If the curve γ is \mathbb{R} , then $B_p(\mathbb{R})$ contains the classical $A_p(\mathbb{R})$ weights appearing in Harmonic Analysis (see [Mu1] or [GR]). The classes $B_p(\Omega)$, with $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, and $A_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) have been used in other definitions of weighted Sobolev spaces on \mathbb{R}^n in [KO] and [K] respectively.

Definition 3.3. *Let us consider $1 \leq p \leq \infty$ and a vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ defined on the curve γ . For $0 \leq j \leq k$ we define the open set*

$$\Omega_j := \{ z \in \gamma : \exists \text{ an open neighbourhood } V \text{ of } z \text{ on the curve } \gamma \text{ with } w_j \in B_p(V) \}.$$

Remark. Observe that we always have $w_j \in B_p(\Omega_j)$ for any $1 \leq p \leq \infty$ and $0 \leq j \leq k$. In fact, Ω_j is the greatest open set U with $w_j \in B_p(U)$. Obviously, Ω_j depends on μ and p , although p and μ do not appear explicitly in the symbol Ω_j . Applying Hölder inequality it is easy to check that if $f^{(j)} \in L^p(\Omega_j, w_j)$ with $1 \leq j \leq k$, then $f^{(j)} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_j)$ and $f^{(j-1)} \in AC^1_{\text{loc}}(\Omega_j)$.

The definitions below also depend on μ and p , although μ and p may not appear explicitly.

Let us consider $1 \leq p \leq \infty$, a vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ and $z_0 \in \gamma$. We can modify the measure μ in a neighbourhood of z_0 , using the following version of Muckenhoupt inequality on curves. This modified measure is equivalent in some sense to the original one (see Theorem 4.1).

Theorem 3.1 (Muckenhoupt inequality on curves). *Let us consider $1 \leq p \leq \infty$, $[z_0, z_1] \subseteq \gamma$ and μ_0, μ_1 measures in $(z_0, z_1]$. Assume also $(\mu_0)_s \equiv 0$ if $p = \infty$. Then there exists a positive constant c such that*

$$(2) \quad \left\| \int_z^{z_1} g(\zeta) d\zeta \right\|_{L^p((z_0, z_1], \mu_0)} \leq c \|g\|_{L^p((z_0, z_1], \mu_1)},$$

for any measurable function g in $(z_0, z_1]$, if and only if

$$(3) \quad \begin{aligned} \sup_{\zeta \in (z_0, z_1)} \mu_0((z_0, \zeta]) \|w_1^{-1}\|_{L^{1/(p-1)}([\zeta, z_1])} < \infty, & \quad \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{\zeta \in (z_0, z_1)} w_0(\zeta) \int_{\zeta}^{z_1} w_1(\xi)^{-1} |d\xi| < \infty, & \quad \text{if } p = \infty, \end{aligned}$$

where ess sup refers to the arc-length.

Remark. This inequality is already known for γ contained in the real line (see [Mu2], [M, p. 44] for $1 \leq p < \infty$, and [RARP1, Lemma 3.2] for the case $p = \infty$).

Definition 3.4. A vectorial measure $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_0, \dots, \bar{\mu}_k)$ is a right completion of a vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ with respect to $z_0 \in \gamma$ in a right neighbourhood $[z_0, z_1]$, if $\bar{\mu}_k = \mu_k$ in γ , $\bar{\mu}_j = \mu_j$ in the complement of $(z_0, z_1]$ and

$$\bar{\mu}_j = \mu_j + \tilde{\mu}_j, \quad \text{in } (z_0, z_1] \text{ for } 0 \leq j < k,$$

where $\tilde{\mu}_j$ is any measure satisfying:

- (i) $\tilde{\mu}_j((z_0, z_1]) < \infty$ if $1 \leq p < \infty$,
- (ii) $(\tilde{\mu}_j)_s \equiv 0$ and $\tilde{w}_j \in L^\infty([z_0, z_1])$ if $p = \infty$,
- (iii) $\Lambda_p(\tilde{\mu}_j, \bar{\mu}_{j+1}) < \infty$, where

$$\begin{aligned} \Lambda_p(\nu, \sigma) &:= \sup_{\zeta \in (z_0, z_1)} \nu((z_0, \zeta]) \left\| \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^{-1} \right\|_{L^{1/(p-1)}([\zeta, z_1])}, & \quad \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \Lambda_\infty(\nu, \sigma) &:= \text{ess sup}_{\zeta \in (z_0, z_1)} \frac{d\nu}{ds}(\zeta) \int_{\zeta}^{z_1} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^{-1}(\xi) |d\xi|. \end{aligned}$$

The Muckenhoupt inequality guarantees that if $f^{(j)} \in L^p(\mu_j)$ and $f^{(j+1)} \in L^p(\bar{\mu}_{j+1})$, then $f^{(j)} \in L^p(\bar{\mu}_j)$. Therefore, $f \in W^{k,p}(\gamma, \bar{\mu})$ if and only if $f \in W^{k,p}(\gamma, \mu)$ (see Theorem 4.1 for further results). If we work with absolutely continuous measures, we also say that a vectorial weight \bar{w} is a completion of μ (or of w). Some examples of completions may be found in [RARP1].

We can define a left completion of μ with respect to z_0 in a similar way.

Definition 3.5. For $1 \leq p \leq \infty$ and a vectorial measure μ , we say that a point $z_0 \in \gamma$ is right j -regular (respectively, left j -regular), if there exist a right completion $\bar{\mu}$ (respectively, left completion) of μ in $[z_0, z_1]$ and $j < i \leq k$ such that $\bar{w}_i \in B_p([z_0, z_1])$ (respectively, $B_p([z_1, z_0])$). Also, we say that a point $z_0 \in \gamma$ is j -regular, if it is right and left j -regular.

Remarks.

1. A point $z_0 \in \gamma$ is right j -regular (respectively, left j -regular), if at least one of the following properties is verified:

(a) There exist a right (respectively, left) neighbourhood $[z_0, z_1]$ (respectively, $[z_1, z_0]$) and $j < i \leq k$ such that $w_i \in B_p([z_0, z_1])$ (respectively, $B_p([z_1, z_0])$). Here we have chosen $\tilde{w}_j = 0$.

(b) There exist a right (respectively, left) neighbourhood $[z_0, z_1]$ (respectively, $[z_1, z_0]$) and $j < i \leq k$, $\alpha > 0$, $\delta < \delta_p$ with $\delta_p := (i - j)p - 1$ if $1 \leq p < \infty$ and

$\delta_\infty := i - j - 1$, such that $w_i(z) \geq \alpha |z - z_0|^\delta$, for almost every $z \in [z_0, z_1]$ (respectively, $[z_1, z_0]$) and we have $|z - z_0| \asymp |\gamma^{-1}(z) - \gamma^{-1}(z_0)|$ in $[z_0, z_1]$ (respectively, $[z_1, z_0]$), when γ is the arc-length parametrization. See Lemma 3.4 in [RARP1].

2. If z_0 is right j -regular (respectively, left), then it is also right i -regular (respectively, left) for each $0 \leq i \leq j$.

3. It is easy to prove that we can take $i = j + 1$ in this definition.

Let us introduce some more notation. We denote by $\Omega^{(j)}$ the set of j -regular points or half-points, i.e., $z \in \Omega^{(j)}$ if and only if z is j -regular, we say that $z^+ \in \Omega^{(j)}$ if and only if z is right j -regular, and we say that $z^- \in \Omega^{(j)}$ if and only if z is left j -regular. Obviously, $\Omega^{(k)} = \emptyset$ and $\Omega_{j+1} \cup \dots \cup \Omega_k \subseteq \Omega^{(j)}$. Observe that $\Omega^{(j)}$ depends on p (see Definition 3.5).

Remark. If $0 \leq j < k$ and J is an arc in γ , $J \subseteq \Omega^{(j)}$, then the set $J \setminus (\Omega_{j+1} \cup \dots \cup \Omega_k)$ is discrete (see the Remark before Definition 7 in [RARP1]).

Definition 3.6. We say that the vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ is p -admissible if

$$(\mu_j - (w_j)|_{\Omega_j})(\gamma \setminus \Omega^{(j)}) = 0, \quad \text{for } 1 \leq j \leq k.$$

We say that μ is strongly p -admissible if $\text{supp}(\mu_j - (w_j)|_{\Omega_j}) \subseteq \Omega^{(j)}$, for $1 \leq j \leq k$.

We use the letter p in p -admissible in order to emphasize the dependence on p (recall that $\Omega^{(j)}$ depends on p).

Remarks.

1. There is no condition on μ_0 .
2. We have $w_k = 0$ in almost every $z \in \gamma \setminus \Omega_k$ and $(\mu_k)_s \equiv 0$, since $\Omega^{(k)} = \emptyset$.
3. Every absolutely continuous measure w with $w_j(z) = 0$ in almost every $z \in \gamma \setminus \Omega_j$ for $1 \leq j \leq k$ is p -admissible.
4. Recall that we are identifying w_j with the measure $w_j ds$.
5. This definition is more general than Definition 8 in [RARP1]; there we always assume $w_j(z) = 0$ in $\gamma \setminus \Omega_j$. There exist weights which do not satisfy this reasonable condition: Consider a Cantor set C in $[0, 1]$ with positive length and define $w_1 := 1$ in C and $w_1(x) := \text{dist}(x, C)$ if $x \in \mathbb{R} \setminus C$; it is clear that $\Omega_1 = \mathbb{R} \setminus C$ and $w_1 = 1$ in C .

Definition 3.7 (Sobolev space). Let us consider $1 \leq p \leq \infty$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a p -admissible vectorial measure. We define the Sobolev space $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ as the space of equivalence classes of

$$W^{k,p}(\gamma, \mu) := \left\{ f : \gamma \rightarrow \mathbb{C} / f^{(j)} \in AC_{\text{loc}}^1(\Omega^{(j)}) \text{ for } 0 \leq j < k \text{ and } \|f^{(j)}\|_{L^p(\gamma, \mu_j)} < \infty \text{ for } 0 \leq j \leq k \right\},$$

with respect to the seminorm

$$\|f\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} := \left(\sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_{L^p(\gamma, \mu_j)}^p \right)^{1/p}, \quad \text{for } 1 \leq p < \infty,$$

and

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\gamma,\mu)} := \max_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_{L^\infty(\gamma,\mu_j)},$$

where

$$\|g\|_{L^\infty(\gamma,\mu_j)} := \max \left\{ \operatorname{ess\,sup}_{z \in \gamma} |g(z)| w_j(z), \sup_{z \in \operatorname{supp}(\mu_j)_s} |g(z)| \right\}$$

and we assume the usual convention $\sup \emptyset = -\infty$.

Remark. It is natural to ask for $f^{(j)} \in AC_{\text{loc}}^1(\Omega^{(j)})$, since when the $(\mu_j)_s$ -measure of the set where $|f^{(j)}|$ is not continuous is positive, the integral $\int |f^{(j)}|^p d(\mu_j)_s$ does not make sense.

4. SOME TECHNICAL RESULTS

In these results rely the hardest part of the proofs of our theorems. There are some concepts of particular importance that appear in these results. They are in the following definitions.

Definition 4.1. Let us consider $1 \leq p \leq \infty$ and μ a p -admissible vectorial measure on γ . Let us define the space $\mathcal{K}(\gamma, \mu)$ as

$$\mathcal{K}(\gamma, \mu) := \left\{ g : \Omega^{(0)} \rightarrow \mathbb{C} / g \in V^{k,p}(\gamma, \mu|_{\Omega^{(0)}}), \|g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu|_{\Omega^{(0)}})} = 0 \right\}.$$

$\mathcal{K}(\gamma, \mu)$ is the equivalence class of 0 in $W^{k,p}(\gamma, \mu|_{\Omega^{(0)}})$. It plays an important role in the study of the multiplication operator in Sobolev spaces (see [RARP2] and Theorem 8.3 below) and in the following definition, which will be crucial in the study of Sobolev spaces (see [RARP1], [RARP2] and theorems 4.1, 4.2 and 5.1 below).

Definition 4.2. Let us consider $1 \leq p \leq \infty$ and μ a p -admissible vectorial measure on γ . We say that (γ, μ) belongs to the class \mathcal{C}_0 if there exist compact sets M_n , which are a finite union of compact arcs in γ , such that

- (i) M_n intersects at most a finite number of connected components of $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$,
- (ii) $\mathcal{K}(M_n, \mu) = \{0\}$,
- (iii) $M_n \subseteq M_{n+1}$,
- (iv) $\cup_n M_n = \Omega^{(0)}$.

We say that (γ, μ) belongs to the class \mathcal{C} if there exists a measure $\mu'_0 = \mu_0 + \sum_{m \in D} c_m \delta_{z_m}$ with $c_m > 0$, $\{z_m\} \subset \Omega^{(0)}$, $D \subseteq \mathbb{N}$ and $(\gamma, \mu') \in \mathcal{C}_0$, where $\mu' = (\mu'_0, \mu_1, \dots, \mu_k)$ is minimal in the following sense: there exists $\{M_n\}$ corresponding to $(\gamma, \mu') \in \mathcal{C}_0$ such that if $\mu''_0 = \mu'_0 - c_{m_0} \delta_{z_{m_0}}$ with $m_0 \in D$ and $\mu'' = (\mu''_0, \mu_1, \dots, \mu_k)$, then $\mathcal{K}(M_n, \mu'') \neq \{0\}$ if $z_{m_0} \in M_n$.

Remarks.

1. The condition $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}$ is not very restrictive. In fact, the proof of Theorem 4.1 (see [APRR]) shows that if $\Omega^{(0)} \setminus (\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k)$ has only a finite number of points in each connected component of $\Omega^{(0)}$, then $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}$. Furthermore, if $\mathcal{K}(\gamma, \mu) = \{0\}$, we have $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$.

2. If $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$, then $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}$, with $\mu' = \mu$.

3. The proof of Theorem 4.1 shows that if for every connected component Λ of $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$ we have $\mathcal{K}(\overline{\Lambda}, \mu) = \{0\}$, then $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$. Condition $\# \text{supp } \mu_0|_{\overline{\Lambda} \cap \Omega^{(0)}} \geq k$ implies $\mathcal{K}(\overline{\Lambda}, \mu) = \{0\}$.

The next results play a central role in the theory of Sobolev spaces on curves.

Theorem 4.1. *Let us consider $1 \leq p \leq \infty$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a locally finite p -admissible vectorial measure on γ . Let K_j be a finite union of compact arcs contained in $\Omega^{(j)}$, for $0 \leq j < k$ and $\overline{\mu}$ a right (or left) completion of μ . Then:*

(a) *If $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$ there exist positive constants $c_1 = c_1(K_0, \dots, K_{k-1})$ and $c_2 = c_2(\overline{\mu}, K_0, \dots, K_{k-1})$ such that, $\forall g \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$,*

$$c_1 \sum_{j=0}^{k-1} \|g^{(j)}\|_{L^\infty(K_j)} \leq \|g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}, \quad c_2 \|g\|_{W^{k,p}(\gamma, \overline{\mu})} \leq \|g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}.$$

(b) *If $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}$ there exist positive constants $c_3 = c_3(K_0, \dots, K_{k-1})$ and $c_4 = c_4(\overline{\mu}, K_0, \dots, K_{k-1})$ such that for every $g \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$, there exists $g_0 \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$, independent of K_0, \dots, K_{k-1} , c_3 , c_4 and $\overline{\mu}$, with*

$$\begin{aligned} \|g_0 - g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} &= 0, \\ c_3 \sum_{j=0}^{k-1} \|g_0^{(j)}\|_{L^\infty(K_j)} &\leq \|g_0\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} = \|g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}, \\ c_4 \|g_0\|_{W^{k,p}(\gamma, \overline{\mu})} &\leq \|g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}. \end{aligned}$$

Furthermore, if g_0, f_0 are, respectively, these representatives of g, f , we have, with the same constants c_3, c_4 ,

$$\begin{aligned} c_3 \sum_{j=0}^{k-1} \|g_0^{(j)} - f_0^{(j)}\|_{L^\infty(K_j)} &\leq \|g - f\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}, \\ c_4 \|g_0 - f_0\|_{W^{k,p}(\gamma, \overline{\mu})} &\leq \|g - f\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}. \end{aligned}$$

The proof follows the argument in the proof of Theorem 4.3 in [RARP1] and needs some additional technical results on curves.

Theorem 4.2. *Let us consider $1 \leq p \leq \infty$ and μ a locally finite p -admissible vectorial measure on γ . Let K_j be a finite union of compact arcs contained in $\Omega^{(j)}$, for $0 \leq j < k$. Then:*

(a) *If $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$ there exists a positive constant $c_1 = c_1(K_0, \dots, K_{k-1})$ such that*

$$c_1 \sum_{j=0}^{k-1} \|g^{(j+1)}\|_{L^1(K_j)} \leq \|g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}, \quad \forall g \in V^{k,p}(\gamma, \mu).$$

(b) *If $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}$ there exists a positive constant $c_2 = c_2(K_0, \dots, K_{k-1})$ such that for every $g \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$, there exists $g_0 \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$ (the same function as in*

Theorem 4.1), with

$$\begin{aligned} \|g_0 - g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} &= 0, \\ c_2 \sum_{j=0}^{k-1} \|g_0^{(j+1)}\|_{L^1(K_j)} &\leq \|g_0\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} = \|g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}. \end{aligned}$$

Furthermore, if g_0, f_0 are, respectively, these representatives of g, f , we have with the same constant c_2

$$c_2 \sum_{j=0}^{k-1} \|g_0^{(j+1)} - f_0^{(j+1)}\|_{L^1(K_j)} \leq \|g - f\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}.$$

Proof. We only prove part (b) since (a) is simpler. Given a function $g \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$, let us choose g_0 as in Theorem 4.1(b). Fix $0 \leq j < k$. Since $K_j \subseteq \Omega^{(j)}$, given any point $z \in K_j$, there exist an arc J_z and a completion \bar{w}^z of w with $z \in J_z$ and $\bar{w}_{j+1}^z \in B_p(J_z)$. The compactness of K_j gives that there exists a finite set of points z_1, \dots, z_l with $K_j \subseteq J_{z_1} \cup \dots \cup J_{z_l}$.

If we define $w_{j+1}^* := \sum_{i=1}^l \bar{w}_{j+1}^{z_i} \chi_{J_{z_i}}$, the second inequality in Theorem 4.1(b) gives, since $w_{j+1}^* \in B_p(K_j)$,

$$c \|g_0^{(j+1)}\|_{L^1(K_j)} \leq c \|g_0^{(j+1)}\|_{L^p(K_j, w_{j+1}^*)} \leq \|g_0\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)},$$

and this finishes the proof of the first inequality. The proof of the second one is similar. □

5. COMPLETENESS

Theorem 5.1. *Let us consider $1 \leq p \leq \infty$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a locally finite p -admissible vectorial measure on γ with $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}$. Then the Sobolev space $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ is complete.*

Proof. Let $\{f_n\}$ be a Cauchy sequence in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$. For each n , let us choose a representative of the class of $f_n \in W^{k,p}(\gamma, \mu)$ (which we also denote by f_n) as in theorems 4.1 and 4.2. Therefore, for each $0 \leq j \leq k$, $\{f_n^{(j)}\}$ is a Cauchy sequence in $L^p(\gamma, \mu_j)$ and it converges to a function $g_j \in L^p(\gamma, \mu_j)$. We only need to prove that, for each $0 \leq j \leq k - 1$, g_j is (perhaps modified in a set of zero μ_j -measure) a function belonging to $AC_{\text{loc}}^1(\Omega^{(j)})$ such that $g_j' = g_{j+1}$ in $\Omega^{(j)}$.

Let us consider any compact arc $K \subseteq \Omega^{(j)}$ (K can be the whole curve γ if $\Omega^{(j)} = \gamma$ and it is a compact curve). By theorems 4.1(b) and 4.2(b) we know that there exists a positive constant c such that for every $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|f_n^{(j)} - f_m^{(j)}\|_{L^\infty(K)} + \|f_n^{(j+1)} - f_m^{(j+1)}\|_{L^1(K)} \leq c \sum_{i=0}^k \|f_n^{(i)} - f_m^{(i)}\|_{L^p(\gamma, \mu_i)}.$$

As $\{f_n^{(j)}\} \subset C(K)$, there exists a function $h_j \in C(K)$ such that

$$c \|f_n^{(j)} - h_j\|_{L^\infty(K)} \leq \sum_{i=0}^k \|f_n^{(i)} - g_i\|_{L^p(\gamma, \mu_i)}.$$

Since we can take as K any compact arc contained in $\Omega^{(j)}$, we obtain that the function h_j can be extended to $\Omega^{(j)}$ and we have in fact $h_j \in C(\Omega^{(j)})$. It is obvious that $g_j = h_j$ in $\Omega^{(j)}$ (except for at most a set of zero μ_j -measure), since $f_n^{(j)}$ converges to g_j in the norm of $L^p(\gamma, \mu_j)$ and to h_j uniformly on each compact arc $K \subseteq \Omega^{(j)}$. Therefore we can assume that $g_j \in C(\Omega^{(j)})$.

Let us see now that $g'_j = g_{j+1}$ in K . We have for $z, z_0 \in K$ that

$$f_n^{(j)}(z) = f_n^{(j)}(z_0) + \int_{z_0}^z f_n^{(j+1)}(\zeta) d\zeta.$$

The uniform convergence of $f_n^{(j)}$ in K and the L^1 -convergence of $f_n^{(j+1)}$ in K give that

$$g_j(z) = g_j(z_0) + \int_{z_0}^z g_{j+1}(\zeta) d\zeta.$$

□

6. DENSITY

We do not have a density theorem as general as Theorem 5.1, but Theorem 6.1 covers many important cases. We need some previous definitions.

Definition 6.1. Consider $1 \leq p < \infty$, a compact curve γ and a vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ on γ . We say that μ is of type 1 if it is finite and p -admissible on γ and $w_k \in B_p(\gamma)$.

Definition 6.2. Consider $1 \leq p < \infty$, a non-closed compact curve $\gamma = [z_1, z_2]$ and a vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ on γ . We say that μ is of type 2 if it is finite and strongly p -admissible on γ and there exist points along the curve $z_1 \leq \zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < \zeta_4 \leq z_2$ and integers $k_1, k_2 \geq 0$ such that

- (1) $w_k \in B_p([\zeta_1, \zeta_4])$,
- (2) if $z_1 < \zeta_1$, then w_j is comparable to a non-decreasing weight in $[z_1, \zeta_2]$, for $k_1 \leq j \leq k$,
- (3) if $\zeta_4 < z_2$, then w_j is comparable to a non-increasing weight in $[\zeta_3, z_2]$, for $k_2 \leq j \leq k$,
- (4) z_1 is right $(k_1 - 1)$ -regular if $k_1 > 0$ and z_2 is left $(k_2 - 1)$ -regular if $k_2 > 0$.

Definition 6.3. Consider $1 \leq p < \infty$, a compact curve γ and a vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ on γ . We say that μ is of type 3 if it is finite and p -admissible on γ and there exist $z_0 \in \gamma$, an open neighbourhood V of z_0 in γ , an integer $0 \leq r < k$ and a positive constant c such that

- (1) $d\mu_{j+1}(z) \leq c|z - z_0|^p d\mu_j(z)$ on V , for $r \leq j < k$,
- (2) $w_k \in B_p(\gamma \setminus \{z_0\})$,
- (3) if $r > 0$, z_0 is $(r - 1)$ -regular.

Remark. Condition (1) means that μ_{j+1} is absolutely continuous with respect to μ_j on V and its Radon-Nikodym derivative is less than or equal to $c|z - z_0|^p$.

Definition 6.4. Consider $1 \leq p < \infty$, a compact curve γ and a vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ on γ . We say that μ is of type 4 if it is finite and p -admissible on γ and there exist $z_0 \in \gamma$, an open neighbourhood V of z_0 on γ and a positive constant c such that

- (1) if $p > 1$, $w_k(z) \leq c|z - z_0|^{p-1}$ for almost every $z \in V$; if $p = 1$, w_k can be modified in a set of zero length in such a way that $\lim_{z \rightarrow z_0} w_k(z) = 0$,
- (2) $w_k \in B_p(\gamma \setminus \{z_0\})$,
- (3) if $k > 1$, z_0 is $(k - 2)$ -regular.

Definition 6.5. Consider $1 \leq p < \infty$, a non-closed compact curve $\gamma = [z_1, z_2]$ and a vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ on γ . We say that μ is of type 5 if it is finite and p -admissible on γ and verifies

- (1) $w_k \in B_p((z_1, z_2))$,
- (2) if $k > 1$, z_1 is right $(k - 2)$ -regular and z_2 is left $(k - 2)$ -regular.

We want to remark that the types of measures in [RARP2] and here do not coincide.

Our theorems on density use in their proofs a new concept of measures, which we define now.

Definition 6.6. A vectorial measure $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ on the complex plane belongs to *ESD* (extended sequentially dominated) if there exists a positive constant c such that $\mu_{j+1} \leq c\mu_j$ for $0 \leq j < k$.

Remark. If $\mu \in ESD$ is a p -admissible vectorial measure on a curve γ , then $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$ (see Remark 3 to Definition 4.2). A vectorial measure μ is sequentially dominated if and only if $\mu \in ESD$ and $\# \text{supp } \mu_0 = \infty$. If $\mu \in ESD$, 0 is the unique polynomial q with $\|q\|_{W^{k,p}(\mathbb{C}, \mu)} = 0$ if and only if $\# \text{supp } \mu_0 = \infty$.

Now, let us state our results.

Theorem 6.1. Let us consider $1 \leq p < \infty$, $c > 0$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a p -admissible vectorial measure on a compact curve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$. Let us assume that $\gamma \in W^{k,\infty}(I)$ and $|\gamma'| \geq c$. If μ is a measure of type 1, 2, 3, 4 or 5, then $AC^k(I)$ is dense in the Sobolev space $W^{k,p}(\gamma, \mu)$. Furthermore, if $\gamma \in C^\infty(I)$, then $C^\infty(\gamma)$ is dense in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$.

To prove this theorem we assume that the measure $\mu \in ESD$ (this can be done by lemmas 6.1 and 6.2 in [APRR]). Then, we can find another measure, μ^* , such that the spaces $W^{k,p}(I, \mu^*)$ and $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ are isomorphic as normed spaces (μ^* is the pullback of μ by γ). Therefore, we can apply the results on density in intervals (see Theorem 4.1 in [RARP2] and theorems 3.3 and 3.4 in [R3]). This is the basis of the proof.

Theorem 6.2. Let us consider $1 \leq p < \infty$, $c > 0$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a p -admissible vectorial measure on a non-closed compact curve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$. Let us assume that $\gamma \in W^{k,\infty}(I)$ and $|\gamma'| \geq c$. If μ is a measure of type 1, 2, 3, 4 or 5, then P is dense in the Sobolev space $W^{k,p}(\gamma, \mu)$.

Proof. Let $f_0 \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$. By Theorem 6.1 we can approximate f_0 by a function $f \in AC^k(\gamma)$. Let g be a continuous function approximating $f^{(k)}$ in the $L^p(\gamma, \mu_k)$ and the $L^1(\gamma)$ norms (see [R3, Lemma 3.1]). Since γ is non-closed, we can choose a polynomial q approximating g in $L^\infty(\gamma)$ (and therefore in the $L^p(\gamma, \mu_k)$ and the $L^1(\gamma)$ norms). If $z_0 \in \gamma$, the following function approximates f :

$$Q(z) := \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(z_0) \frac{(z - z_0)^j}{j!} + \int_{z_0}^z q(\zeta) \frac{(z - \zeta)^{k-1}}{(k-1)!} d\zeta.$$

□

7. DENSITY IN ANALYTIC CLOSED CURVES

First of all, let us translate Szegő condition to our context of curves.

Definition 7.1. *A scalar measure μ on an analytic closed curve γ with absolutely continuous part w verifies the Szegő condition if*

$$\int_{\gamma} \log w(z) |dz| > -\infty.$$

The following theorem of Kolmogorov-Krein-Szegő is well known (see e.g. [G, pp. 135–137]).

Theorem A. *Let us consider $1 \leq p < \infty$ and a finite scalar measure μ on $\partial\mathbb{D}$. Then the polynomials are dense in $L^p(\partial\mathbb{D}, \mu)$ if and only if μ does not verify the Szegő condition.*

We can prove the following consequence of Theorem A.

Corollary 7.1. *Let us consider $1 \leq p < \infty$ and a finite scalar measure μ on an analytic closed curve γ . Then the polynomials are dense in $L^p(\gamma, \mu)$ if and only if μ does not verify the Szegő condition.*

In the case of Sobolev spaces, the natural translation of this result would be that when one of the components, μ_j , of the vectorial measure μ verifies the Szegő condition, then the polynomials are not dense in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$. In change, we obtain something better.

Theorem 7.1. *Let us consider $1 \leq p < \infty$, $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a finite p -admissible vectorial measure on an analytic closed curve γ , with $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$ and $\bar{\mu}$ a finite sum of completions of μ . Let us assume that $\mu \in ESD$ if $k \geq 2$. If for some $0 \leq j \leq k$ the measure $\bar{\mu}_j$ verifies the Szegő condition, then the polynomials are not dense in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$.*

This is also true, in particular, for $\bar{\mu} = \mu$. In the same line we have the following result.

Theorem 7.2. *Let us consider $1 \leq p < \infty$, a fixed integer $0 \leq j \leq k$, $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a finite p -admissible vectorial measure on an analytic closed curve γ ,*

with $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$ and K a finite union of compact arcs with $K \subseteq \Omega^{(j)}$. Let us assume that $\mu \in ESD$ if $k \geq 2$. If the measure μ_j verifies

$$\int_{\gamma \setminus K} \log w_j(z) |dz| > -\infty,$$

then the polynomials are not dense in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$.

When $\gamma = \partial\mathbb{D}$, these two last theorems are true even without the hypothesis $\mu \in ESD$ for $k \geq 2$ (see Theorem 7.1 and Corollary 7.2 in [APRR]).

8. MULTIPLICATION OPERATOR

First of all, let us see some remarks about the definition of the multiplication operator. In this section we only consider measures such that every polynomial has finite Sobolev norm. Recall that when every polynomial has finite $W^{k,p}(E, \mu)$ -norm, we denote by $P^{k,p}(E, \mu)$ the completion of P with that norm. We start with a definition which has sense for measures defined on arbitrary measurable sets E (not necessarily curves).

Definition 8.1. *If μ is a vectorial measure on the Borel set $E \subseteq \mathbb{C}$, we say that the multiplication operator is well defined in $P^{k,p}(E, \mu)$ if given any sequence $\{s_n\}$ of polynomials converging to 0 in $W^{k,p}(E, \mu)$, then $\{zs_n\}$ also converges to 0 in $W^{k,p}(E, \mu)$. In this case, if $\{q_n\} \in P^{k,p}(E, \mu)$, we define $M(\{q_n\}) := \{zq_n\}$. If we choose another Cauchy sequence $\{r_n\}$ representing the same element in $P^{k,p}(E, \mu)$ (i.e. $\{q_n - r_n\}$ converges to 0 in $W^{k,p}(E, \mu)$), then $\{zq_n\}$ and $\{zr_n\}$ represent the same element in $P^{k,p}(E, \mu)$ (since $\{z(q_n - r_n)\}$ converges to 0 in $W^{k,p}(E, \mu)$).*

We can also think of another definition which is as natural in the case of curves:

Definition 8.2. *If μ is a p -admissible vectorial measure on γ (and hence $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ is a space of classes of functions), we say that the multiplication operator is well defined in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ if given any function $h \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$ with $\|h\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} = 0$, we have $\|zh\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} = 0$. In this case, if $[f]$ is an equivalence class in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$, we define $M([f]) := [zf]$. If we choose another representative g of $[f]$ (i.e. $\|f - g\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} = 0$) we have $[zf] = [zg]$, since $\|z(f - g)\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)} = 0$.*

Although both definitions are natural, it is possible for a p -admissible measure μ with $W^{k,p}(\gamma, \mu) = P^{k,p}(\gamma, \mu)$ that M is well defined in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ and not well defined in $P^{k,p}(\gamma, \mu)$ (see Lemma 8.1 and Theorem 8.3). The following lemma characterizes the spaces $P^{k,p}(E, \mu)$ with M well defined.

Lemma 8.1. *Let us consider $1 \leq p < \infty$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a vectorial measure on a measurable set $E \subseteq \mathbb{C}$. The following facts are equivalent:*

- (1) *The multiplication operator is well defined in $P^{k,p}(E, \mu)$.*
- (2) *The multiplication operator is bounded in $P^{k,p}(E, \mu)$.*
- (3) *There exists a positive constant c such that*

$$\|zq\|_{W^{k,p}(E, \mu)} \leq c \|q\|_{W^{k,p}(E, \mu)}, \quad \text{for every } q \in P.$$

The following result characterizes the boundedness of the multiplication operator.

Theorem 8.1. *Let us consider $1 \leq p < \infty$ and $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ a finite vectorial measure on a compact set E . Then, the multiplication operator is bounded in $P^{k,p}(E, \mu)$ if and only if there exists a vectorial measure $\mu' \in ESD$ such that the Sobolev norms in $W^{k,p}(E, \mu)$ and $W^{k,p}(E, \mu')$ are comparable on P . Furthermore, we can choose $\mu' = (\mu'_0, \dots, \mu'_k)$ with $\mu'_j := \mu_j + \mu_{j+1} + \dots + \mu_k$.*

Remark. In order to apply Theorem 8.1, if $E = \gamma$ is a curve, the best way to deduce that $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu)}$ and $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\gamma, \mu')}$ are comparable is to prove that μ' can be obtained by a finite number of completions of μ (in that case we can use Theorem 4.1).

If we consider the case of a curve $E = \gamma$, we have the following results.

Theorem 8.2. *Let us consider $1 \leq p < \infty$ and a p -admissible vectorial measure μ on a compact curve γ . If μ is of type 1, 2 or 3, and the multiplication operator is well defined in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$, then it is bounded on $P^{k,p}(\gamma, \mu)$.*

In this situation Theorem 6.2 gives $P^{k,p}(\gamma, \mu) = W^{k,p}(\gamma, \mu)$ if $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ is a non-closed curve with $|\gamma'| \geq c$ and $\gamma \in W^{k,\infty}(I)$. In this case the multiplication operator is bounded in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$.

Theorem 8.3. *Let us consider $1 \leq p < \infty$ and a p -admissible vectorial measure μ on γ . Assume that $zf(z) \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$ for every $f \in V^{k,p}(\gamma, \mu)$. Then the multiplication operator is well defined in $W^{k,p}(\gamma, \mu)$ if and only if $\mathcal{K}(\gamma, \mu) = \{0\}$.*

Theorem 8.4. *Let us consider $1 \leq p < \infty$ and a finite p -admissible vectorial measure μ on a compact curve γ . Assume that $(\gamma, \mu) \in \mathcal{C}_0$ and that for each $1 \leq j \leq k$ we have $\mu_j(\gamma \setminus (J_{j-1} \cup K_{j-1})) = 0$, where K_{j-1} is a finite union of compact arcs contained in $\Omega^{(j-1)}$, and J_{j-1} is a measurable set with $\mu_j \leq c\mu_{j-1}$ in J_{j-1} . Then the multiplication operator is bounded in $P^{k,p}(\gamma, \mu)$.*

REFERENCES

- [APRR] V. Álvarez, D. Pestana, J. M. Rodríguez and E. Romera, Weighted Sobolev spaces on curves, preprint.
- [BFM] A. Branquinho, A. Foulquié and F. Marcellán, Asymptotic behavior of Sobolev type orthogonal polynomials on a rectifiable Jordan curve or arc, *Constr. Approx.*, to appear.
- [CM] A. Cachafeiro and F. Marcellán, Orthogonal polynomials of Sobolev type on the unit circle, *J. Approx. Theory* **78** (1994), 127–146.
- [EL] W. N. Everitt and L. L. Littlejohn, The density of polynomials in a weighted Sobolev space, *Rend. Mat. Appl. (7)* **10** (1990), 835–852.
- [ELW1] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn and S. C. Williams, Orthogonal polynomials in weighted Sobolev spaces, in *Orthogonal polynomials and their applications* (Laredo, 1987), *Lecture Notes Pure Appl. Math.* **117**, Marcel Dekker (1989), 53–72.
- [ELW2] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn and S. C. Williams, Orthogonal polynomials and approximation in Sobolev spaces, *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993), 69–90.
- [FMP] A. Foulquié, F. Marcellán and K. Pan, Asymptotic behavior of Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory* **100** (1999), 345–363.
- [G] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, 1969.
- [GR] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, 1985.

- [HKM] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Science Publ., Clarendon Press, 1993.
- [K] T. Kilpeläinen, Weighted Sobolev spaces and capacity, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **19** (1994), 95–113.
- [Ku] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces*, Teubner Verlagsgesellschaft, Teubner-Texte zur Mathematik (Band 31), 1980. Also published by John Wiley & Sons, 1985.
- [KO] A. Kufner and B. Opic, How to define reasonably weighted Sobolev spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **25** (1984), 537–554.
- [KS] A. Kufner and A. M. Sändig, *Some applications of weighted Sobolev spaces*, Teubner Verlagsgesellschaft, Teubner-Texte zur Mathematik (Band 100), 1987.
- [LP] G. López Lagomasino and H. Pijeira, Zero location and n -th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **99** (1999), 30–43.
- [LPP] G. López Lagomasino, H. Pijeira and I. Pérez, Sobolev orthogonal polynomials in the complex plane, *J. Comp. Appl. Math.*, to appear.
- [M-F] A. Martínez-Finkelshtein, Bernstein-Szegő's theorem for Sobolev orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **16** (2000), 73–84.
- [M] V. G. Maz'ja, *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, 1985.
- [Mu1] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207–226.
- [Mu2] B. Muckenhoupt, Hardy's inequality with weights, *Studia Math.* **44** (1972), 31–38.
- [RARP1] J. M. Rodríguez, V. Álvarez, E. Romera and D. Pestana, Generalized weighted Sobolev spaces and applications to Sobolev orthogonal polynomials I, preprint.
- [RARP2] J. M. Rodríguez, V. Álvarez, E. Romera and D. Pestana, Generalized weighted Sobolev spaces and applications to Sobolev orthogonal polynomials II, preprint.
- [R1] J. M. Rodríguez, Weierstrass' Theorem in weighted Sobolev spaces, *J. Approx. Theory* **108** (2001), 119–160.
- [R2] J. M. Rodríguez, The multiplication operator in Sobolev spaces with respect to measures, *J. Approx. Theory* **109** (2001), 157–197.
- [R3] J. M. Rodríguez, Approximation by polynomials and smooth functions in Sobolev spaces with respect to measures, preprint.
- [T] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Mathematical Library, 1978.

VENANCIO ÁLVAREZ: DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE MÁLAGA, CAMPUS DE TEATINOS, 29071 MÁLAGA, SPAIN

E-mail address: nancho@anamat.cie.uma.es

DOMINGO PESTANA, JOSÉ M. RODRÍGUEZ, ELENA ROMERA: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, AVENIDA DE LA UNIVERSIDAD 30, 28911 LEGANÉS (MADRID), SPAIN

E-mail address: dompes@math.uc3m.es, jomaro@math.uc3m.es, eromera@math.uc3m.es

ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA UNIFORME DE ESQUEMAS DE PASOS FRACCIONARIOS PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS FORMULADOS EN FORMA VARIACIONAL

BLANCA BUJANDA Y JUAN CARLOS JORGE

Dedicado a la memoria de Chicho

ABSTRACT. In this paper we introduce some basic topics and a small historical introduction about the Runge-Kutta methods of type Fractionary Steps. In it we also realize the study of the uniform convergence of Fractionary Step schemes that we obtain by combining a temporal discretization scheme of type RKPF with a spatial discretization of type Finite Elements or Finite Differences. We realize this study for non-stationary problems in a variational context.

1. BREVE RESEÑA HISTÓRICA SOBRE LOS MÉTODOS DE PASOS FRACCIONARIOS

La aparición de los primeros ordenadores con capacidad de cálculo importante en los años 40, impulsó el desarrollo de la matemática algorítmica e hizo que el Análisis Numérico surgiera como una disciplina moderna con grandes perspectivas de desarrollo fuertemente ligadas, obviamente, al tipo y potencia de los medios de cálculo de los que se ha dispuesto.

En los años 50 y 60 se empezaron a desarrollar con gran dinamismo métodos para resolver ecuaciones algebraicas lineales con matrices tridiagonales y tridiagonales por bloques. El éxito en el desarrollo de dichos métodos llevó al diseño de algoritmos numéricos eficientes en la resolución de problemas estacionarios multidimensionales, basados en la descomposición del operador en diferencias en operadores tridiagonales. Estos métodos recibieron diversos nombres como métodos de factorización, de barrido, de descomposición («*Splitting methods*») y de Direcciones Alternadas.

Los primeros métodos de tipo Direcciones Alternadas aparecen a mediados de los 50 en los trabajos de Douglas, Peaceman y Ratchford (ver [Dou55], [PR55], [DR56]). Ante un problema de difusión, en un dominio bidimensional, modelado por la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

estos autores apuntan que el esquema explícito

$$(1) \quad \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}} U^m + \Delta_{y\bar{y}} U^m,$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65J10; Secondary 65M12.

Key words and phrases. Method of fractional steps, uniform convergence.

donde $\Delta_{x\bar{x}}$ y $\Delta_{y\bar{y}}$ son discretizaciones de los operadores $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, mediante diferencias centrales, es rechazable debido a que la obtención de la estabilidad numérica requiere una integración en tiempo muy lenta cuando el grosor de la malla empleada en la discretización es muy fina. Por ejemplo, en el caso de considerar el cuadrado unidad y un mallado uniforme del mismo grosor (h) en las variables x e y , es decir,

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta_{x\bar{x}}U^m(x, y) &= \frac{U^m(x-h, y) - 2U^m(x, y) + U^m(x+h, y)}{h^2}, \\ \Delta_{y\bar{y}}U^m(x, y) &= \frac{U^m(x, y-h) - 2U^m(x, y) + U^m(x, y+h)}{h^2}, \end{aligned}$$

el esquema (1) resulta condicionalmente estable bajo la restricción $\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{4}$.

Douglas, Peaceman y Ratchford apuntan también que el esquema implícito clásico

$$\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}}U^{m+1} + \Delta_{y\bar{y}}U^{m+1},$$

aún siendo incondicionalmente estable, es igualmente rechazable, debido a que en cada nivel de tiempo se debe resolver un sistema lineal complejo en términos de costo computacional.

Por contra, el uso de los esquemas implícitos

$$\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}}U^{m+1} + \Delta_{y\bar{y}}U^m,$$

y

$$\frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}}U^m + \Delta_{y\bar{y}}U^{m+1},$$

da lugar a métodos económicos, ya que requieren la resolución de un conjunto de sistemas tridiagonales desacoplados y, aunque cada uno de los métodos es incondicionalmente estable, el empleo de ambos en forma alternada, es decir,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{U^{m+\frac{1}{2}} - U^m}{\frac{1}{2}\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}}U^{m+\frac{1}{2}} + \Delta_{y\bar{y}}U^m, \\ \frac{U^{m+1} - U^{m+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\Delta t} = \Delta_{x\bar{x}}U^{m+\frac{1}{2}} + \Delta_{y\bar{y}}U^{m+1}, \end{cases}$$

da lugar a un esquema incondicionalmente convergente y, a su vez, con bajo costo computacional por paso.

El esquema (3) fue el precursor de otros métodos, que bajo distintos nombres, pero con la misma idea de reducción de costos, fueron desarrollados por autores como D'yaconov, Samarskii, Kellog, Gunn y otros. Una extensa recopilación de estos métodos fue acometida por Yanenko (ver [Yan71]) a los que él denomina genéricamente como métodos de Pasos Fraccionarios (ver también [CL90]).

Aunque estos métodos surgieron en el contexto de los esquemas de diferencias finitas, también han sido posteriormente aplicados, en conexión con discretizaciones espaciales de tipo elementos finitos (ver [Dou55], [DD71]). En esta dirección son de particular interés los estudios llevados a cabo por Temam (ver [Tem68]) y Lions y Mercier (ver [LM78]), para métodos de Pasos Fraccionarios muy simples, aplicados a problemas parabólicos generales planteados en forma operacional.

Desde los primeros esquemas hasta los trabajos más recientes (ver [Hun92], [Van96], [Hun98a], [Hun98b]), los métodos de tipo Pasos Fraccionarios han sido desarrollados de forma aislada (para problemas particulares y usando técnicas básicas, muy simples, de discretización temporal), sin un marco general que los relacione y permita su análisis de forma conjunta. En [Jor92] se desarrolla por primera vez una técnica que, además de permitir un estudio riguroso de la convergencia de los métodos clásicos de Pasos Fraccionarios, abre nuevas vías para el diseño de métodos de este tipo que alcancen órdenes altos en tiempo para problemas parabólicos lineales generales. Esta línea de trabajo se ha mostrado exitosa para llevar a cabo el análisis y diseño de métodos de Pasos Fraccionarios en un contexto muy amplio de problemas parabólicos.

2. EL PROBLEMA A RESOLVER Y SU FORMULACIÓN

En el resto de este artículo nos centraremos en el estudio de la convergencia de las soluciones que se obtienen al utilizar un método de tipo Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios aplicado a una formulación variacional, más débil, de un Problema Parabólico en Ecuaciones en Derivadas Parciales cuya formulación operacional es

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(t, y) \equiv -A(t)u(t) + g(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

donde $A(t) : \mathcal{D}(A(t)) \subseteq H \rightarrow H$ es, en general, un operador diferencial de tipo elíptico, no acotado, que actúa sobre un espacio infinito dimensional de funciones definidas en un cierto dominio Ω (rango de variación de las variables espaciales). Por simplicidad, asumiremos que $\forall t \in [0, T]$ los operadores $A(t)$ quedan definidos sobre el mismo dominio $\mathcal{D}(A(t)) \equiv \mathcal{D} \subseteq H$, con lo que, en la práctica, estamos pensando en condiciones de contorno que no varíen con el tiempo.

Mediante el análisis de la convergencia uniforme en una formulación variacional nos podemos permitir analizar en detalle una casuística mayor en lo relativo a la variación temporal de los coeficientes del problema, que la que se realiza en el caso de formulación operacional. Por ejemplo, en el caso de considerar problemas de convección-difusión-reacción del tipo

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u + ku = g,$$

donde d es el término de difusión, \vec{v} el de convección y k el de reacción, pueden obtenerse distintos resultados según que la variación temporal de los coeficientes afecte solamente a los términos de reacción y de convección o a todos los términos incluyendo el de difusión.

Planteamos la discretización espacial del problema mediante una aproximación variacional que engloba a las técnicas típicas en Elementos Finitos y Diferencias Finitas y la integración temporal utilizando un método Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios.

Sean V y H espacios de Hilbert reales con V denso en H ; identificaremos H con su dual topológico H' , de forma que se tendrá $V \subseteq H \subseteq V'$, siendo las inyecciones

continuas. Denotaremos por $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ y por (\cdot, \cdot) y $((\cdot, \cdot))$ las normas y los productos escalares en V y en H , respectivamente.

Sea $a(t; \cdot, \cdot)$ una forma bilineal, uniformemente bicontinua y coerciva en V , es decir, existen M y $\alpha > 0$, constantes independientes de t , tales que $|a(t; u, v)| \leq M|u||v|$, $a(t; u, u) \geq \alpha|u|^2$, $\forall u, v \in V$, y $\forall t \in [0, T]$. Notar que de la continuidad de la inyección de V en H , se deduce inmediatamente que existe una constante, γ , independiente de t , tal que $a(t; u, u) \geq \gamma\|u\|^2$, $\forall u \in V$.

Denotaremos $A(t) \in \mathcal{L}(V, V')$ al operador tal que $a(t; u, v) = \langle A(t)u, v \rangle \forall u, v \in V$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la dualidad entre V y V' . Si definimos

$$\mathcal{D} = \{u \in V \mid A(t)u \in H\},$$

resulta que $A(t) : \mathcal{D} \subseteq H \rightarrow H$, es un operador maximal y coercivo en H .

Así, el problema que nos vamos a plantear resolver es: dados $g : [0, T] \rightarrow V'$ y u_0 encontrar $u : [0, T] \rightarrow V$ solución del problema (4). Dicho problema admite una formulación variacional en la forma

$$(6) \quad \begin{cases} ((u'(t), v)) + a(t; u(t), v) = \langle g(t), v \rangle, & \forall u \in V, \\ u(0) = u_0 \in V. \end{cases}$$

Notar que si $g : [0, T] \rightarrow H$, se tiene que $\langle g(t), v \rangle = ((g(t), v))$; si además $u_0 \in \mathcal{D}$ este problema es equivalente a (4).

Para aplicar un método Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios como aproximante del problema (6), supondremos que la forma bilineal $a(t; \cdot, \cdot)$ admite una descomposición de la forma

$$(7) \quad a(t; \cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^n a_i(t; \cdot, \cdot),$$

donde, para cada $i = 1, \dots, n$, la forma $a_i(t; \cdot, \cdot)$ es bilineal, uniformemente bicontinua y coerciva, en ciertos espacios de Hilbert V_i que contienen a V y que a su vez están contenidos en H , es decir, existen M_i y $\alpha_i > 0$, constantes independientes de t , tales que

$$\begin{cases} |a_i(t; u, v)| \leq M_i|u|_i|v|_i, \\ a_i(t; u, u) \geq \alpha_i|u|_i^2, \end{cases} \quad \forall u, v \in V_i,$$

donde $(\cdot, \cdot)_i$ y $|\cdot|_i$ son los productos escalares y las normas asociadas a ellos en V_i .

Asumiremos que los espacios $V_i, i = 1, \dots, n$, verifican que: $\bigcap_{i=1}^n V_i = V$ y $\bigcup_{i=1}^n V_i' = V'$,

y de forma que $V \subseteq V_i \subseteq H \subseteq V_i' \subseteq V'$ con inyección continua y cada uno denso en

el siguiente, siendo las normas $|\cdot|$ y $\sum_{i=1}^n |\cdot|_i$ equivalentes (ver [Jor92], [Tem68]). Así,

existen n constantes γ_i , independientes de t , tales que $a_i(t; u, u) \geq \gamma_i\|u\|^2$, $\forall u \in V_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Notar que, usando la descomposición (7) el problema variacional (6) se puede reescribir como

$$(8) \quad \begin{cases} ((u'(t), v)) + \sum_{i=1}^n a_i(t; u(t), v) = \langle g(t), v \rangle, & \forall u \in V, \\ u(0) = u_0 \in V. \end{cases}$$

Denotaremos $A_i(t) \in \mathcal{L}(V_i, V'_i)$ al operador que verifica $a_i(t; u, v) = \langle A_i(t)u, v \rangle_i$, $\forall u, v \in V_i$. De este modo,

$$(9) \quad A(t)u = \sum_{i=1}^n A_i(t)u, \quad \forall u \in V.$$

3. LA DISCRETIZACIÓN

Sea h un parámetro destinado a tender a cero, típicamente h será el diámetro de los elementos que empleemos para discretizar la parte espacial. Supondremos que para cada valor de h se verifican las siguientes hipótesis:

- (H1) V_h es un espacio de Hilbert finito-dimensional con norma $\|\cdot\|_h$ con $V_h \subset V$. Supondremos que las normas en V_h y H son uniformemente equivalentes, es decir, existe una constante c independiente de h , tal que $c\|u_h\| \leq \|u_h\|_h \leq \frac{1}{c}\|u_h\|$.
- (H2) $r_h(t) : V \rightarrow V_h$ son aplicaciones de conexión, lineales acotadas, habitualmente proyecciones de V en V_h .
- (H3) $\pi_h : V' \rightarrow V_h$ son aplicaciones de conexión entre V' y V_h verificando

$$(10) \quad \begin{aligned} (\pi_h g_i(t), u_h)_h &= \langle g_i(t), u_h \rangle_i, & \forall i = 1, \dots, n, \forall g_i(t) \in V'_i, \\ & \forall u_h \in V_h, \forall t \in [0, T], \\ (\pi_h g(t), u_h)_h &= \langle g(t), u_h \rangle, & \forall g(t) \in V', \forall u_h \in V_h, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

- (H4) $g_h(t)$, $g_{ih}(t)$ y u_{0h} son aproximaciones semidiscretas de $g(t)$, $g_i(t)$ y u_0 , respectivamente, sobre V_h ; típicamente $u_{0h} = r_h(0)u_0$.
- (H5) $a_h(t; \cdot, \cdot)$ y $a_{ih}(t; \cdot, \cdot)$ son formas bilineales sobre $V_h \times V_h$ y sus operadores lineales asociados $A_h(t) \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ y $A_{ih}(t) \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ (aproximaciones discretas de $a(t; \cdot, \cdot)$, $a_i(t; \cdot, \cdot)$, $A(t)$ y $A_i(t)$ respectivamente) que cumplen:

$$(11) \quad \begin{aligned} a_h(t; r_h(t)u, v_h) &= a(t; u, v_h), & \forall u \in V, \forall v_h \in V_h, \forall t \in [0, T], \\ a_{ih}(t; r_h(t)u, v_h) &= a_i(t; u, v_h), & \forall i = 1, \dots, n, \forall u \in V_i, \\ & \forall v_h \in V_h, \forall t \in [0, T], \\ a_h(t; u_h, v_h) &= (A_h(t)u_h, v_h)_h, & \forall u_h, v_h \in V_h, \forall t \in [0, T], \\ a_{ih}(t; u_h, v_h) &= (A_{ih}(t)u_h, v_h)_h, & \forall i = 1, \dots, n, \\ & \forall u_h, v_h \in V_h, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Notar que, a partir de (10) y (11), es inmediato comprobar que son ciertas las siguientes relaciones:

$$(12) \quad \begin{aligned} A_h(t)r_h(t)u &= \pi_h A(t)u, & \forall u \in V, \forall t \in [0, T], \\ A_{ih}(t)r_h(t)u &= \pi_h A_i(t)u, & \forall i = 1, \dots, n, \forall u \in V_i, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Con ellas, es inmediato comprobar que los diagramas que aparecen en la Figura 1 son conmutativos.

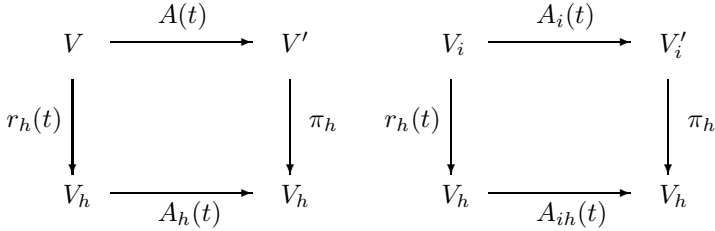


FIGURA 1

Supondremos además que las formas bilineales $a_h(t; \cdot, \cdot)$ y $a_{ih}(t; \cdot, \cdot)$ heredan las propiedades de bicontinuidad y coercividad de $a(t; \cdot, \cdot)$ y $a_i(t; \cdot, \cdot)$, es decir, existen constantes positivas \widetilde{M} , $\widetilde{\alpha}$, \widetilde{M}_i y $\widetilde{\alpha}_i$, para $i = 1, \dots, n$, independientes de h y de t , tales que

$$(13) \quad \begin{cases} |a_h(t; u_h, v_h)| \leq \widetilde{M}|u_h||v_h|, & a_h(t; u_h, u_h) \geq \widetilde{\alpha}|u_h|^2, \\ |a_{ih}(t; u_h, v_h)| \leq \widetilde{M}_i|u_h|_i|v_h|_i, & a_{ih}(t; u_h, u_h) \geq \widetilde{\alpha}_i|u_h|_i^2, \\ \forall i = 1, \dots, n, \forall u_h, v_h \in V_h, \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Si $r_h(t)$ son proyecciones de V en V_h resulta que $r_h(t)u_h = u_h$ y a partir de (11) se verifica (13) con $\widetilde{M} = M$, $\widetilde{\alpha} = \alpha$, $\widetilde{M}_i = M_i$ y $\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Definición 3.1. *Un Runge-Kutta Aditivo de s etapas y n niveles es un integrador numérico de un paso, que al ser aplicado al PVI (4) con el fraccionamiento (9) y la descomposición $g(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t)$, nos lleva al esquema*

$$(14) \quad \begin{cases} y_0, \\ y_{m+1} = y_m + \Delta t \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n b_i^j f_j(t_m + c_i \Delta t, Y_i); & \text{donde} \\ Y_i = y_m + \Delta t \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^n a_{ik}^j f_j(t_m + c_k \Delta t, Y_k), & i = 1, \dots, s, \end{cases}$$

mediante el que se calcula una aproximación y_{m+1} a la solución $y(t_{m+1})$ a partir de una aproximación y_m a $y(t_m)$, con $t_{m+1} = t_m + \Delta t$. Típicamente, al parámetro Δt se le denomina paso de integración y a los vectores Y_i etapas del método.

El método RK Aditivo queda determinado por la elección de los coeficientes b_i^j , c_i y a_{ik}^j . Siguiendo una notación similar a la utilizada por Butcher para los métodos Runge-Kutta estándar (ver [But87], [HNW87]), podemos escribir los métodos RK Aditivos de forma abreviada como

$$(15) \quad \frac{C e \mid \mathcal{A}^1 \mid \mathcal{A}^2 \mid \dots \mid \mathcal{A}^n}{\mid (b^1)^T \mid (b^2)^T \mid \dots \mid (b^n)^T},$$

siendo $\mathcal{A}^j = (a_{ik}^j)$, $b^j = (b_i^j)$, $\mathcal{C} = \text{diag}(c_1, \dots, c_s)$, $e = (1, \dots, 1)^T$ con $i, k = 1, \dots, s$ y $j = 1, \dots, n$. Así, podemos interpretar que un método RK Aditivo consta de n métodos RK estándar solapados, en el que, en cierto modo, cada uno se ocupa de una parte f_i de la función derivada f .

Un RK Aditivo es explícito sii $a_{ik}^j = 0$ si $k \geq i$, $j = 1, \dots, n$. Diremos que un RK Aditivo es semiimplícito sii $a_{ik}^j = 0$ si $k > i$, $j = 1, \dots, n$.

Dentro de los métodos RK Aditivos de tipo semiimplícito, se encuentran los desarrollados por Cooper y Sayfy (ver [CS83]) y Jorge (ver [Jor90]), para problemas Stiff no lineales, los RK particionados desarrollados por Sanz-Serna (ver [San89]), para la integración numérica de ciertos Hamiltonianos, y los métodos de tipo Pasos Fraccionarios (ver [Per93], [CL90], [Yan71]) que definimos a continuación.

Definición 3.2. *Un método Runge Kutta de Pasos Fraccionarios, que denotaremos abreviadamente RKPF, es un RK Aditivo semiimplícito verificando*

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ii}^j \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, s\}, j \in \{1, \dots, n\}, \\ |b_j^k| + \sum_{i=1}^s |a_{ij}^k| \neq 0 \Rightarrow |b_j^l| + \sum_{i=1}^s |a_{ij}^l| = 0, \forall l \neq k; \\ \qquad \qquad \qquad l, k \in \{1, \dots, n\}, i, j \in \{1, \dots, s\}, \\ a_{ii}^j a_{ii}^k = 0 \text{ si } k \neq j; i \in \{1, \dots, s\}, j, k \in \{1, \dots, n\}. \end{array} \right.$$

Realizando la discretización temporal mediante un integrador de tipo RKPF obtenemos una aproximación a la solución del problema (4) mediante un esquema que admite la siguiente expresión en forma variacional:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_h^0 = r_h(0)(u_0), \\ ((U_h^{m,i}, v))_h = ((U_h^m, v_h))_h - \Delta t \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s a_{ij}^k a_{kh}(t_{m,j}; U_h^{m,j}, v) \\ \qquad \qquad \qquad + \Delta t \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s a_{ij}^k ((g_{kh}(t_{m,j}), v))_h, \\ \qquad \qquad \qquad \forall v \in V_h, \text{ para } i = 1, \dots, s, \\ ((U_h^{m+1}, v))_h = ((U_h^m, v))_h - \Delta t \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^s b_i^k a_{kh}(t_{m,i}; U_h^{m,i}, v) \\ \qquad \qquad \qquad + \Delta t \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^s b_i^k ((g_{kh}(t_{m,i}), v))_h, \forall v \in V_h, \end{array} \right.$$

donde U_h^{m+1} pueden ser consideradas aproximaciones a la solución exacta $u(t)$ en los instantes $t_m + \Delta t$, y donde las etapas $U_h^{m,i}$ pueden considerarse también como aproximaciones de $u(t)$ en los puntos $t_{m,i} = t_m + c_i \Delta t$.

4. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

Probaremos en primer lugar que este proceso de discretización está bien definido, es decir, admite solución única, que además está acotada independientemente de la

elección del paso, Δt , que empleemos. Para hacerlo de forma legible utilizaremos la siguiente notación tensorial:

$$\begin{aligned} G_{ih}^m &= (g_{ih}(t_{m,1}), g_{ih}(t_{m,2}), \dots, g_{ih}(t_{m,s}))^T \in V_h^s, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \tilde{U}_h^m &= (U_h^{m,1}, U_h^{m,2}, \dots, U_h^{m,s})^T \in V_h^s; \end{aligned}$$

dados $M \equiv (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}$ y $v \equiv (v_i) \in \mathbb{R}^s$ denotamos

$$\begin{aligned} \bar{M} &\equiv \begin{pmatrix} m_{11}I_H & \dots & m_{1s}I_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1}I_H & \dots & m_{ss}I_H \end{pmatrix} \in H^{s \times s}, \quad \bar{v} \equiv \begin{pmatrix} v_1I_H \\ \vdots \\ v_sI_H \end{pmatrix} \in H^s; \\ \hat{A}_{ih}^m &= \begin{pmatrix} A_{ih}(t_{m,1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{ih}(t_{m,2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ih}(t_{m,s}) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_i, V_h)^{s \times s}, \\ \forall i &= 1, \dots, n, \\ \bar{A}_{ih}^m &= \begin{pmatrix} A_{ih}(t_m) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{ih}(t_m) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ih}(t_m) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_i, V_h)^{s \times s}, \\ \forall i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{18}$$

A continuación damos, sin demostración (ver [Buj99]), la siguiente proposición que nos permite ver que el operador $(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \hat{A}_{ih}^m)$ es invertible.

Proposición 4.1. *Sean un RKPF con todas sus etapas implícitas y n formas bilineales y coercivas $a_{ih}(t; \cdot, \cdot)$ para $i = 1, \dots, n$, cuyo sistema de operadores asociado es $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$. Entonces el operador $(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \hat{A}_{ih}^m) : V_h^s \rightarrow V_h^s$, definido a partir de dicho RKPF, es invertible, y el operador inverso está acotado independientemente de h y de Δt . Además, se tiene*

$$\|\tilde{U}_h\|_{V_{k_1} \times \dots \times V_{k_s}} \leq \frac{C}{\sqrt{\Delta t}} \|(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \hat{A}_{ih}^m) \tilde{U}_h\|_h. \tag{19}$$

Proposición 4.2. *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 4.1, el operador $T_h^m \equiv \Delta t \sum_{i=1}^n (\bar{b}^i)^T \hat{A}_{ih}^m (\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^n \bar{\mathcal{A}}^j \hat{A}_{jh}^m)^{-1} : V_h^s \rightarrow V_h^s$ está acotado independientemente de Δt y h , es decir, $\|T_h^m \tilde{U}_h\|_h \leq C \|\tilde{U}_h\|_h, \quad \forall \tilde{U}_h \in V_h^s$.*

Notar que esta proposición (ver demostración en [Buj99]) garantiza que el esquema (17) tiene solución única acotada independientemente de Δt y de h , siempre que $\|g_{ih}(t)\|_h \leq C$ y $\|r_h(0)u_0\|_h \leq C$.

Para realizar el estudio de la estabilidad debemos acotar también la norma del operador $(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i \bar{A}_{ih}^m})^{-1}$, siendo \bar{A}_{ih}^m el dado en (18). Siguiendo un proceso análogo al de la Proposición 4.1 (ver demostración en [Buj99]), se prueba la siguiente

Proposición 4.3. *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 4.1, el operador $(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i \bar{A}_{ih}^m}) : V_h^s \rightarrow V_h^s$ es inversible, y además el operador inverso está acotado independientemente de Δt y de h .*

5. ESTABILIDAD

A continuación vamos a realizar el estudio de la estabilidad del esquema totalmente discreto (17); para ello y con el fin de abreviar las expresiones obtenidas introducimos el operador de transición

$$(20) \quad \tilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m) = \bar{I} - \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T \hat{A}_{ih}^m} (\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j \hat{A}_{jh}^m})^{-1} \bar{e}$$

y la siguiente expresión donde almacenamos la aportación del término fuente

$$(21) \quad \tilde{G}_h^m = - \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T \hat{A}_{ih}^m} (\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j \hat{A}_{jh}^m})^{-1} (\Delta t \sum_{k=1}^n \overline{\mathcal{A}^k G_{kh}^m}) + \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T G_{ih}^m}.$$

Utilizando estas dos notaciones la solución U_h^{m+1} de (17), puede escribirse como $U_h^{m+1} = \tilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m) U_h^m + \Delta t \tilde{G}_h^m$.

Es inmediato comprobar que en este contexto variacional el sistema de operadores $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ asociado a las formas bilineales y coercivas $a_{ih}(t; \cdot, \cdot)$ para $i = 1, \dots, n$, verifica el siguiente

Lema 5.1. *Para todo sistema $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ de operadores lineales, monótonos y maximales y para todo RKPF con todas sus etapas implícitas se tiene:*

- (a) $\tilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m) = \bar{I} - \overline{\tau^T} \bar{e} + \overline{\tau^T} (\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i \hat{A}_{ih}^m})^{-1} \bar{e}.$
- (b) $R(-\Delta t A_{1h}(t_m), \dots, -\Delta t A_{nh}(t_m)) = \bar{I} - \overline{\tau^T} \bar{e} + \overline{\tau^T} (\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i \bar{A}_{ih}^m})^{-1} \bar{e}.$
- (c) $\tilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m) = R(-\Delta t A_{1h}(t_m), \dots, -\Delta t A_{nh}(t_m)) + \Delta t \overline{\tau^T} \cdot (\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i \bar{A}_{ih}^m})^{-1} (\sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j \bar{A}_{jh}^m} - \sum_{k=1}^n \overline{\mathcal{A}^k \hat{A}_{kh}^m}) (\bar{I} + \Delta t \sum_{l=1}^n \overline{\mathcal{A}^l \hat{A}_{lh}^m})^{-1} \bar{e},$
 con $\tau^T = \sum_{i=1}^n (b^i)^T (\sum_{j=1}^n \mathcal{A}^j)^{-1}$ y donde $R(z_1, \dots, z_n)$ es la función de amplificación asociada al RKPF.

En las proposiciones que aparecen a continuación, desarrollaremos de forma más detallada distintas condiciones que podemos imponer para obtener estabilidad en problemas de convección-difusión-reacción del tipo (5). Así, la Proposición

5.4 podrá ser aplicada, entre otros, en los casos en los haya únicamente variación temporal en el término de reacción, siempre que ésta sea regular. Las Proposiciones 5.2 y 5.3 podrán utilizarse en aquellos casos en los que no haya variación temporal en el término de difusión, admitiendo ciertas variaciones temporales regulares en los términos de convección y de reacción. Comenzaremos con la Proposición 5.1, cuya demostración puede verse en [Buj99], con la situación más general donde admitiremos que haya variación temporal regular en todos los términos.

Proposición 5.1. *Dados un RKPF A-estable con todas sus etapas implícitas y n formas bilineales y coercivas $a_{ih}(t; \cdot, \cdot)$, con $i = 1, \dots, n$, para las que el sistema de operadores asociado $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ es conmutativo y admite dilatación unitaria para cada $t \in [0, T]$. Si existen n constantes M_i , independientes de h , tal que*

$$(22) \quad \begin{aligned} |a_{ih}(t; u_h, v_h) - a_{ih}(t'; u_h, v_h)| &\leq M_i |t - t'| |a_{ih}(t; u_h, v_h)|, \\ \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall u_h, v_h \in V_h, \quad \forall t, t' \in [0, T], \end{aligned}$$

se tiene la siguiente acotación:

$$(23) \quad \|\tilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m)\|_h \leq e^{\beta \Delta t},$$

siendo β una constante independiente de Δt y de h .

Proposición 5.2. *Bajo las mismas condiciones de la Proposición 5.1, si sustituimos la hipótesis (22) por*

$$(24) \quad \begin{aligned} |a_{ih}(t; u_h, v_h) - a_{ih}(t'; u_h, v_h)| &\leq |t - t'| M_i \|u_h\|_h |v_h|_i, \\ \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall u_h, v_h \in V_h, \quad \forall t, t' \in [0, T], \end{aligned}$$

se tiene la acotación (23).

Demostración. Teniendo en cuenta la descomposición realizada en el Lema 5.1 para el operador de transición, reescribimos este operador en la forma

$$\tilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m) = R(-\Delta t A_{1h}(t_m), \dots, -\Delta t A_{nh}(t_m)) + \Delta t T_h^3 T_h^2 T_h^1,$$

donde

$$\begin{aligned} T_h^3 &\equiv \overline{\tau^T} (\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \bar{A}_{ih}^m)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j} \bar{A}_{jh}^m \right) : V_h^s \longrightarrow V_h, \\ T_h^2 &\equiv \left(\sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \bar{A}_{ih}^m \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j} \bar{A}_{jh}^m - \sum_{k=1}^n \overline{\mathcal{A}^k} \hat{A}_{kh}^m \right) : V_h^s \longrightarrow V_h^s, \\ T_h^1 &\equiv (\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \hat{A}_{ih}^m)^{-1} \bar{e} : V_h \longrightarrow V_h^s. \end{aligned}$$

Como el sistema de operadores $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ es coercivo, conmutativo y admite dilatación unitaria y el RKPF es A-estable, sabemos que

$$(25) \quad \|R(-\Delta t A_{1h}(t_m), \dots, -\Delta t A_{nh}(t_m))\|_h \leq 1.$$

Veamos ahora que $\|T_h^3 T_h^2 T_h^1\|_h \leq C$. A partir de la Proposición 4.1 deducimos inmediatamente que

$$(26) \quad \|T_h^1\|_h \leq C_1,$$

con C_1 una constante independiente de Δt y de h .

Ahora acotaremos el operador $T_h^3 T_h^2$; llamando $\widetilde{W} = (W^1, \dots, W^s)^T \in V_h^s$, a la imagen por T_h^2 de $\widetilde{U} = (U^1, \dots, U^s)^T \in V_h^s$, como el RKPF posee todas sus etapas implícitas podemos asegurar que $W^i = (A_{k_i h}(t_m))^{-1} (A_{k_i h}(t_m) - A_{k_i h}(t_{m,i})) U^i$, $\forall i = 1, \dots, s$. De la coercividad de la forma bilineal $a_{k_i h}(t; \cdot, \cdot)$ deducimos que

$$\begin{aligned} |W^i|_{k_i}^2 &\leq \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}} ((A_{k_i h}(t_m) W^i, W^i))_h \\ &= \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}} (((A_{k_i h}(t_m) - A_{k_i h}(t_{m,i})) U^i, W^i))_h \\ &= \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}} [a_{k_i h}(t_m; U^i, W^i) - a_{k_i h}(t_{m,i}; U^i, W^i)], \quad \forall i = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

y aplicando ahora la hipótesis (24), llegamos a

$$|W^i|_{k_i}^2 \leq \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}} |t_{m,i} - t_m| M_{k_i} \|U^i\|_h |W^i|_{k_i}, \quad \forall i = 1, \dots, s,$$

luego $|W^i|_{k_i} \leq \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{k_i}} c_i \Delta t M_{k_i} \|U^i\|_h$, $\forall i = 1, \dots, s$.

Sea ahora $\widetilde{X} \in V_h^s$, la imagen por T_h^3 de \widetilde{W} , teniendo en cuenta que el operador $(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \bar{A}^i \bar{A}_{ih}^m)$ es inversible, con inverso uniformemente acotado, se deduce que

$\|\widetilde{X}\|_h \leq \frac{C_3}{\Delta t} \|\widetilde{W}\|_h$, siendo C_3 una constante independiente de Δt y de h ; y teniendo en cuenta la equivalencia entre las normas de V_h y H , y la continuidad uniforme en h en la inclusión de V_i en H , es decir, $\|\cdot\|_h \leq C_i \|\cdot\|_i$, con C_i constante independiente de Δt y de h , se llega a la acotación

$$(27) \quad \|T_h^3 T_h^2 \widetilde{U}\|_h \leq \widetilde{C} M \|\widetilde{U}\|_h,$$

donde $M = \max_{i=1, \dots, s} \left\{ \frac{1}{\alpha_{k_i}} c_i M_{k_i} \right\}$, y \widetilde{C} es $\max_{i=1, \dots, n} \{C_i\} C_3 \|\tau^T\|_1$.

Reuniendo (25), (26) y (27) se llega a $\|\widetilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m)\|_h \leq 1 + \beta \Delta t \leq e^{\beta \Delta t}$, siendo $\beta = \widetilde{C} C_1 M$. □

Proposición 5.3. *Bajo las mismas condiciones de la Proposición 5.1, si sustituimos la hipótesis (22) por*

$$(28) \quad \begin{aligned} |a_{ih}(t; u_h, v_h) - a_{ih}(t'; u_h, v_h)| &\leq |t - t'| M_i |u_h|_i \|v_h\|_h, \\ \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall u_h, v_h \in V_h, \quad \forall t, t' \in [0, T], \end{aligned}$$

se tiene la siguiente acotación:

$$(29) \quad \|\widetilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m)\|_h \leq e^{\beta \Delta t \sqrt{\Delta t}}.$$

Demostración. Es similar a la de la proposición anterior, salvo que para acotar el operador $T_h^3 T_h^2 T_h^1$ lo descompondremos en la forma $\hat{T}_h^3 \hat{T}_h^2 T_h^1$, donde

$$\begin{aligned} \hat{T}_h^3 &\equiv \tau^T \left(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \bar{A}_{ih}^m \right)^{-1} : V_h^s \longrightarrow V_h, \\ \hat{T}_h^2 &\equiv \left(\sum_{j=1}^n \bar{\mathcal{A}}^j \bar{A}_{jh}^m - \sum_{k=1}^n \bar{\mathcal{A}}^k \hat{A}_{kh}^m \right) : V_h^s \longrightarrow V_h^s. \end{aligned}$$

□

Proposición 5.4. *Bajo las mismas condiciones de la Proposición 5.1, si sustituimos la hipótesis (22) por*

$$(30) \quad \begin{aligned} |a_{ih}(t; u_h, v_h) - a_{ih}(t'; u_h, v_h)| &\leq |t - t'| M_i \|u_h\|_h \|v_h\|_h, \\ \forall i &= 1, \dots, n, \quad \forall u_h, v_h \in V_h, \quad \forall t, t' \in [0, T], \end{aligned}$$

se tiene la acotación (29).

Demostración. Se deduce inmediatamente a partir de la Proposición 5.3 teniendo en cuenta que $\|u_h\|_h \leq C_i |u_h|_i, \forall i = 1, \dots, n$, con C_i constante independiente de Δt y de h . □

Debemos hacer notar que en los casos en los que el RKPF sea además fuertemente A-estable, se podrá llegar a obtener, para valores de M suficientemente pequeños, valores de β negativos en (23) y (29) y, en consecuencia, la contractividad del esquema totalmente discreto (17).

6. CONSISTENCIA Y CONVERGENCIA

Para realizar el estudio de la consistencia del esquema totalmente discreto (17), definimos el error local en el instante t_{m+1} como

$$e_h^{m+1} = r_h(t_{m+1})u(t_{m+1}) - \check{U}_h^{m+1},$$

siendo \check{U}_h^{m+1} la solución obtenida al dar un paso con (17) tomando como punto de partida $r_h(t_m)u(t_m)$, es decir,

$$e_h^{m+1} = r_h(t_{m+1})u(t_{m+1}) - \tilde{R}(-\Delta t \hat{A}_{1h}^m, \dots, -\Delta t \hat{A}_{nh}^m) r_h(t_m)u(t_m) - \Delta t \tilde{G}_h^m.$$

Aplicando π_h a las contribuciones al error de las fórmulas de cuadratura de cada etapa (a_{ij}^k, c_j) descritas en

$$(31) \quad \xi^{m,j} = u(t_{m,j}) - u(t_m) + \Delta t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s a_{jk}^i (A_i(t_{m,k})u(t_{m,k}) - g_i(t_{m,k})),$$

y a las contribuciones de las fórmulas de cuadratura (b_j^i, c_j) descritas en

$$(32) \quad \zeta^{m+1} = u(t_{m+1}) - u(t_m) + \Delta t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s b_j^i (A_i(t_{m,j})u(t_{m,j}) - g_i(t_{m,j})),$$

y teniendo en cuenta que los operadores discretos $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ verifican la relación de aproximación (12), podemos reescribir (31) como

$$(33) \quad \begin{aligned} r_h(t_{m,j})u(t_{m,j}) &= (r_h(t_{m,j}) - \pi_h)u(t_{m,j}) - (r_h(t_m) - \pi_h)u(t_m) \\ &\quad - \Delta t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s a_{jk}^i (A_{ih}(t_{m,k})r_h(t_{m,k})u(t_{m,k}) - \pi_h g_i(t_{m,k})) \\ &\quad + \pi_h \xi^{m,j} + r_h(t_m)u(t_m), \quad \forall j = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

y, de forma similar, podemos reescribir (32) como

$$(34) \quad \begin{aligned} r_h(t_{m+1})u(t_{m+1}) &= (r_h(t_{m+1}) - \pi_h)u(t_{m+1}) - (r_h(t_m) - \pi_h)u(t_m) \\ &\quad - \Delta t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s b_j^i (A_{ih}(t_{m,j})r_h(t_{m,j})u(t_{m,j}) - \pi_h g_i(t_{m,j})) \\ &\quad + \pi_h \zeta^{m+1} + r_h(t_m)u(t_m). \end{aligned}$$

Denotando

$$(35) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}_h^m &= (r_h(t_{m,1})u(t_{m,1}), \dots, r_h(t_{m,s})u(t_{m,s}))^T, \\ \pi_h \Xi^m &= (\pi_h \xi^{m,1}, \dots, \pi_h \xi^{m,s})^T, \\ \pi_h \mathcal{G}_i^m &= (\pi_h g_i(t_{m,1}), \dots, \pi_h g_i(t_{m,s})) \end{aligned}$$

$$y \quad \tau_h \mathcal{U}_h^m = \begin{pmatrix} (r_h(t_{m,1}) - \pi_h)u(t_{m,1}) - (r_h(t_m) - \pi_h)u(t_m) \\ \vdots \\ (r_h(t_{m,s}) - \pi_h)u(t_{m,s}) - (r_h(t_m) - \pi_h)u(t_m) \end{pmatrix},$$

podemos compactar (33) en

$$(36) \quad \begin{aligned} (\bar{I} - \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \hat{A}_{ih}^m) \mathcal{U}_h^m &= \bar{e} r_h(t_m)u(t_m) + \tau_h \mathcal{U}_h^m \\ &\quad + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \pi_h \mathcal{G}_i^m + \pi_h \Xi^m. \end{aligned}$$

Asimismo, podemos reescribir (34) como

$$(37) \quad \begin{aligned} r_h(t_{m+1})u(t_{m+1}) &= (r_h(t_{m+1}) - \pi_h)u(t_{m+1}) - (r_h(t_m) - \pi_h)u(t_m) \\ &\quad - \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T} \hat{A}_{ih}^m \mathcal{U}_h^m + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T} \pi_h \mathcal{G}_i^m + \pi_h \zeta^{m+1} \\ &\quad + r_h(t_m)u(t_m). \end{aligned}$$

Si el operador $(\bar{I} + \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{A}^i} \hat{A}_{ih}^m)$ es inversible, podemos despejar \mathcal{U}_h^m de (36), y sustituir la expresión (37), obteniéndose la siguiente expresión para el error local:

$$(38) \quad e_h^{m+1} = e_{1h}^{m+1} + e_{2h}^{m+1},$$

$$\begin{aligned}
\text{con } e_{1h}^{m+1} &= S_{1h} + S_{2h} + S_{3h} + S_{4h}, \\
\text{siendo } S_{1h} &= (r_h(t_{m+1}) - \pi_h)u(t_{m+1}) - (r_h(t_m) - \pi_h)u(t_m), \\
S_{2h} &= -\Delta t \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T} \hat{A}_{ih}^m (\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}_{jh}^m)^{-1} \tau_h \mathcal{U}_h^m, \\
S_{3h} &= -\Delta t \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T} \hat{A}_{ih}^m (\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}_{jh}^m)^{-1} \\
&\quad \cdot \Delta t \sum_{k=1}^n \overline{\mathcal{A}^k} (\pi_h G_k^m - G_{kh}^m), \\
S_{4h} &= \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T} (\pi_h G_i^m - G_{ih}^m), \\
\text{y con } e_{2h}^{m+1} &= \pi_h \zeta^{m+1} - \Delta t \sum_{i=1}^n \overline{(b^i)^T} \hat{A}_{ih}^m (\bar{I} + \Delta t \sum_{j=1}^n \overline{\mathcal{A}^j} \hat{A}_{jh}^m)^{-1} \pi_h \Xi^m, \\
\text{donde } G_i^m &= (g_i(t_{m,1}), g_i(t_{m,2}), \dots, g_i(t_{m,s}))^T \quad \forall i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{39}$$

Notar que, en la expresión dada en (38) para el error local, hemos separado, en cierto modo, la contribución de la parte espacial e_{1h}^{m+1} , de la contribución de la parte temporal e_{2h}^{m+1} . A continuación damos, sin demostración (ver [Buj99]), el siguiente Teorema, en el que obtenemos la cota

$$\|e_{1h}^{m+1}\|_h \leq C \Delta t h^q. \tag{40}$$

Teorema 6.1. Sean un RKPF con todas sus etapas implícitas, y n formas bilineales y coercivas $a_{ih}(t; \cdot, \cdot)$ con $i = 1, \dots, n$, cuyo sistema de operadores asociado es $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ y $\{g_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ n aproximaciones consistentes de orden q , de los términos $\{g_i(t)\}_{i=1}^n$ en los que se ha fraccionado el término fuente, es decir,

$$\|g_{ih}(t) - \pi_h g_i(t)\|_h \leq C h^q. \tag{41}$$

Si las aplicaciones de conexión π_h y $r_h(t)$ verifican las propiedades

$$\begin{aligned}
\|(r_h(t) - r_h(t'))u(t)\|_h &\leq C|t - t'| h^q, \quad \forall t, t' \in [0, T], \\
\|(r_h(t) - \pi_h)u'(t')\|_h &\leq C h^q, \quad \forall t, t' \in [0, T],
\end{aligned} \tag{42}$$

entonces se verifica (40).

A continuación damos, sin demostración (ver [Buj99]), dos teoremas que nos permiten acotar e_{2h}^{m+1} . Estas cotas sobre e_{2h}^{m+1} , que concentra la aportación al error de la discretización temporal, son del tipo $C \Delta t^{p+1}$, con C independiente de h . Esta independencia de h surgirá del hecho de que los operadores $\{A_{ih}(t)\}_{i=1}^n$ preserven las propiedades de maximalidad y monotonía de los operadores $\{A_i(t)\}_{i=1}^n$ y de que las D.E.F., que intervienen en los desarrollos de Taylor (en t), que empleemos, una vez proyectadas en V_h , estén acotadas independientemente de h .

Teorema 6.2. Si empleamos un RKPF con todas sus etapas implícitas, las condiciones de orden $(b^i)^T(\mathcal{C})^{k-1} e = \frac{1}{k}$, $\forall i = 1, \dots, n$, $\forall k = 1, \dots, p$, y las reducciones

$(\mathcal{C})^k e - k\mathcal{A}^i(\mathcal{C})^{k-1}e = 0, \forall i = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, p$, para discretizar un problema variacional del tipo (8), junto con una discretización espacial que cumpla (H1), (H2), (H3), (H4) y (H5), de forma que la solución de (8) verifica

$$(43) \quad \|\pi_h u_i^{(p+1)}(t)\|_h \leq C, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall t \in [0, T],$$

donde $u_i^{(p+1)}(t)$ se deduce a partir de $u_i'(t) = -(A_i(t)u(t) - g_i(t))$, entonces

$$(44) \quad \|e_{2h}^{m+1}\|_h \leq C(\Delta t)^{p+1}.$$

Teorema 6.3. Si empleamos un RKPF con todas sus etapas implícitas, las condiciones de orden

$$\left\{ \begin{array}{l} (b^{i_1})^T \mathcal{C}^{\rho_1} \mathcal{A}^{i_2} \mathcal{C}^{\rho_2} \dots \mathcal{A}^{i_r} \mathcal{C}^{\rho_r} e = \prod_{j=1}^r \frac{1}{(r-j+1) + \sum_{k=j}^r \rho_k} \\ \forall \rho_1, \dots, \rho_r \in \{0, \dots, p-1\} \text{ verificando } \sum_{k=1}^r \rho_k = i - r \text{ con } i = 1, \dots, p, \\ y \forall i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{array} \right.$$

y las reducciones $(\mathcal{C})^k e - k\mathcal{A}^i(\mathcal{C})^{k-1}e = 0, \forall i = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, p$, para discretizar un problema variacional del tipo (8), junto con una discretización espacial que cumpla (H1), (H2), (H3), (H4) y (H5), de forma que la solución de (8) verifica (43) y la hipótesis

$$\left\{ \begin{array}{l} \|A_{i_1 h}^{(\rho_1)}(t) \dots A_{i_{l+1} h}^{(\rho_{l+1})}(t) \pi_h u_{i_{l+2}}^{(k)}(t)\|_h \leq C, \quad \forall i_\bullet \in \{1, \dots, n\}, \\ l \in \{0, \dots, p-k+1\}, \quad \forall k \in \{\max\{1, k_0\}, \dots, p\}, \quad \forall t \in [0, T], \\ y \rho_1 + \dots + \rho_l \leq p - k - l + 1; \\ \|\pi_h u_i^{(p+1)}(t)\|_h \leq C, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall t \in [0, T], \end{array} \right.$$

entonces, se obtiene la cota (44).

Para finalizar realizaremos el estudio de la convergencia del esquema totalmente discreto (17). Concretamente veremos que este esquema es convergente de orden q en espacio y orden p en tiempo. Este resultado de convergencia se demuestra combinando los resultados de estabilidad y consistencia que hemos obtenido en esta sección (ver [Buj99]).

Teorema 6.4 (Convergencia del esquema totalmente discreto). Si el problema (4) posee solución única suficientemente regular y es discretizado mediante un esquema del tipo (17), de forma que se verifican las acotaciones uniformes (23), (40) y (44), entonces el error global verifica

$$E_h^m \leq C(\Delta t^p + h^q).$$

REFERENCIAS

[Buj99] B. Bujanda, *Métodos Runge-Kutta de pasos fraccionarios de orden alto para la resolución de problemas evolutivos de convección-difusión-reacción*, Tesis doctoral, Universidad Pública de Navarra, Secc. 2, n. 15 (1999), 1-174.

- [But87] J. C. Butcher, *The numerical analysis of ordinary differential equations*, Wiley & Sons, 1987.
- [CL90] P. G. Ciarlet y J. L. Lions, *Handbook of numerical analysis*, Vol. I, North Holland, 1990.
- [CS83] G. J. Cooper y A. Sayfy, Additive Runge-Kutta methods for stiff ordinary differential equations, *Math. Comp.* **40** (1983), 207–218.
- [Dou55] J. Douglas, On the numerical integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ by implicit methods, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **3** (1955), 42–65.
- [DD71] J. Douglas y T. Dupont, Alternating directions Galerkin methods on rectangles, en *Numerical Solution of Partial Differential Equations, II (SYNSPADE 1970)* (Proc. Sympos., Univ. of Maryland, 1970), Academic Press, Nueva York (1971), 133–214.
- [DR56] J. Douglas y H. H. Rachford, On the numerical solution of heat conduction problems in two- and three-space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956), 421–439.
- [HNW87] E. Hairer, S. P. Nørsett y G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I*, Springer-Verlag, 1987.
- [Hun92] W. Hundsdorfer, Unconditional convergence of some Crank-Nicolson lod methods for initial-boundary value problems, *Math. Comp.* **58** (1992), 33–53.
- [Hun98a] W. Hundsdorfer, A note on stability of the Douglas splitting method, *Math. Comp.* **67** (1998), 183–190.
- [Hun98b] W. Hundsdorfer, Trapezoidal and midpoint splittings for initial-boundary value problems, *Math. Comp.* **67** (1998), 1047–1062.
- [Jor90] J. C. Jorge, *Métodos de Runge-Kutta aditivos para la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias stiff*, Publicaciones del seminario matemático García de Galdeano, Universidad de Zaragoza, 1990.
- [Jor92] J. C. Jorge, *Los métodos de pasos fraccionarios para la integración de problemas parabólicos lineales: formulación general, análisis de la convergencia y diseño de nuevos métodos*, Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, 1992.
- [LM78] J. L. Lions y B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*, Rapport interne num. 29 du Centre de Math. Appl., Ecole Polytechnique, París, 1978.
- [PR55] D. W. Peaceman y H. H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **3** (1955), 28–41.
- [Per93] J. B. Perot, An analysis of the fractional step method, *J. Comput. Phys.* **108** (1993), 51–58.
- [San89] J. M. Sanz-Serna, The numerical integration of Hamiltonian system, en *Computational ordinary differential equations* (Proceedings, Londres, 1989), *Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser.* **39**, Oxford Univ. Press, Nueva York (1992), 437–449.
- [Tem68] R. Temam, Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, *Annali Mat. Pura Appl. (4)* **79** (1968), 191–379.
- [Van96] P. J. van der Houwen, The development of Runge-Kutta methods for partial differential equations, *Appl. Numer. Math.* **20** (1996), 261–272.
- [Yan71] N. N. Yanenko, *The method of fractional steps. The solution of problems of mathematical physics in several variables*, Springer-Verlag, Nueva York, 1971.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO (LA RIOJA), SPAIN
 Correo electrónico: bbujanda@dmc.unirioja.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA, UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA, EDIFICIO LOS ACEBOS, CAMPUS ARROSADÍA S/N, 31006 PAMPLONA (NAVARRA), SPAIN
 Correo electrónico: jcjorge@unavarra.es

ESTUDIO DE UNA SUCESIÓN DE POLINOMIOS: RECURRENCIA Y CEROS

MARÍA PILAR ALFARO, MANUEL BELLO Y JESÚS M. MONTANER

En recuerdo de J. J. Guadalupe

ABSTRACT. We consider the sequence of varying measures $d\mu_n = \frac{d\mu}{|W_n(z)|^2}$, where $d\mu$ is a positive Borel measure on the unit circle and $\{W_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of polynomials whose zeros lie in $\{|z| \leq 1\}$. The aim of this paper is to study some properties of the zeros of the sequence of polynomials $\{\Phi_n(z)\}$ where $\Phi_n(z)$ is the n -th orthogonal polynomial with respect the measure $d\mu_n$.

1. INTRODUCCIÓN

Sea $\{d\mu_n\}$ una sucesión de medidas positivas, finitas y de Borel en $[0, 2\pi)$ con infinitos puntos en su soporte. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos con $\varphi_m(d\mu_n; z)$ el m -ésimo polinomio ortonormal respecto de la medida $d\mu_n$ con coeficiente principal $\kappa_m(d\mu_n) > 0$.

La clase de medidas variantes más estudiadas es la definida por

$$(1) \quad d\mu_n = \frac{d\mu}{|W_n(z)|^2},$$

donde $d\mu$ es una medida positiva y de Borel sobre el intervalo $[0, 2\pi)$ cuyo soporte tiene infinitos puntos y para cada n , $W_n(z)$ es un polinomio a lo sumo de grado n con todos sus ceros en $\{|z| \leq 1\}$.

Los polinomios $\{\varphi_m(d\mu_n; z)\}$ aparecen en el estudio de los aproximantes multi-puntuales de Padé de las transformadas de Markov de las medidas $d\mu$ ([7]) y en dicho trabajo juega un papel importante el comportamiento asintótico de los $\varphi_n(d\mu_n; z)$. Los resultados sobre asintóticas de los polinomios $\varphi_m(d\mu_n; z)$ exigen que los ceros de $W_n(z)$ se comporten de una manera determinada, lo que puede plasmarse en la llamada condición de admisibilidad (ver, por ejemplo, [9]).

Además, los $\{\varphi_m(d\mu_n; z)\}$ juegan un papel importante en la extensión de la teoría de Szegő para funciones racionales. Como puede verse en [8] y [11], una familia de funciones ortogonales $\{\tilde{\varphi}_{n,m}\}_{m=0}^n$ puede expresarse en la forma

$$\tilde{\varphi}_{n,m} = \frac{\varphi_m(d\mu_n; z)}{W_n(z)},$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C05; 33C47.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, varying measures, zeroes.

La investigación del segundo autor está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI.

donde, como indica la notación empleada, $\varphi_m(d\mu_n; z)$ es el m -ésimo polinomio ortormal respecto de la medida variante $\frac{d\mu}{|W_n(z)|^2}$.

En lo que sigue consideraremos la familia de polinomios $\{\varphi_m(d\mu_n; z)\}_{m=0}^\infty$, $n \in \mathbb{N}$, asociada a la sucesión de medidas (1) donde los $W_n(z)$ vienen definidos mediante

$$W_0(z) = 1, \\ W_n(z) = (z - \omega_n)W_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

siendo $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números complejos sobre el disco unidad, es decir $|\omega_n| \leq 1$ para todo n . Supondremos, además, que $\int d\mu_n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene pues

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_k(d\mu_n; z) \overline{\varphi_m(d\mu_n; z)} d\mu_n(\theta) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases}; \quad z = e^{i\theta},$$

donde $\varphi_m(d\mu_n; z) = \kappa_m(d\mu_n)z^m + \dots$; $\kappa_m(d\mu_n) > 0$. Como es habitual escribiremos

$$\Phi_m(d\mu_n; z) = \frac{1}{\kappa_m(d\mu_n)} \varphi_m(d\mu_n; z), \quad m = 0, 1, \dots$$

y $p_n^*(z)$ para el polinomio recíproco de $p(z)$, o sea $p_n^*(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$.

Los $\{\Phi_m(d\mu_n; z)\}$ y sus recíprocos satisfacen las fórmulas de recurrencia

$$\Phi_0(d\mu_n; z) = 1, \\ \Phi_{m+1}(d\mu_n; z) = z\Phi_m(d\mu_n; z) + \overline{\Phi_{m+1}(d\mu_n; 0)}\Phi_m^*(d\mu_n; z), \quad m \geq 0, \\ \Phi_0^*(d\mu_n; z) = 1, \\ \Phi_{m+1}^*(d\mu_n; z) = \Phi_m^*(d\mu_n; z) + \overline{\Phi_{m+1}(d\mu_n; 0)}z\Phi_m(d\mu_n; z), \quad m \geq 0.$$

El núcleo reproductor $K_m(d\mu_n; z, y)$ se define, como es usual

$$K_m(d\mu_n; z, y) = \sum_{j=0}^m \overline{\varphi_j(d\mu_n; y)}\varphi_j(d\mu_n; z), \quad y \in \mathbb{C},$$

siendo

$$(2) \quad K_m(d\mu_n; z, 0) = \kappa_m(d\mu_n)\varphi_m^*(d\mu_n; z).$$

Para $z\bar{y} \neq 1$, son válidas la siguientes relaciones de Christoffel-Darboux

$$(3) \quad K_{m-1}(d\mu_n; z, y) = \frac{\varphi_m^*(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m^*(d\mu_n; y)} - \varphi_m(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m(d\mu_n; y)}}{1 - z\bar{y}},$$

$$(4) \quad K_m(d\mu_n; z, y) = \frac{\varphi_m^*(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m^*(d\mu_n; y)} - z\bar{y}\varphi_m(d\mu_n; z)\overline{\varphi_m(d\mu_n; y)}}{1 - z\bar{y}},$$

las cuales, para $y = z$, $|z| \neq 1$, se pueden reescribir en la forma

$$(5) \quad K_{m-1}(d\mu_n; z, z) = \frac{|\varphi_m^*(d\mu_n; z)|^2 - |\varphi_m(d\mu_n; z)|^2}{1 - |z|^2},$$

$$(6) \quad K_m(d\mu_n; z, z) = \frac{|\varphi_m^*(d\mu_n; z)|^2 - |z|^2|\varphi_m(d\mu_n; z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Por otra parte, dos medidas consecutivas de la sucesión $\{d\mu_n\}$ están relacionadas mediante

$$d\mu_n = \frac{d\mu_{n-1}}{|z - \omega_n|^2}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (d\mu_0 \equiv d\mu).$$

Por ello, los polinomios ortogonales respecto de estas medidas satisfacen la relación (ver [6]):

$$(7) \quad \varphi_m(d\mu_n; z) = \frac{\kappa_m(d\mu_n)}{\kappa_m(d\mu_{n-1})}(z - \omega_n)\varphi_{m-1}(d\mu_{n-1}; z) + \frac{\varphi_m(d\mu_n; \omega_n)}{K_{m-1}(d\mu_n; \omega_n, \omega_n)}K_{m-1}(d\mu_n; z, \omega_n), \quad n > 0,$$

ó

$$(8) \quad \Phi_m(d\mu_n; z) = (z - \omega_n)\Phi_{m-1}(d\mu_{n-1}; z) + \frac{\Phi_m(d\mu_n; \omega_n)}{K_{m-1}(d\mu_n; \omega_n, \omega_n)}K_{m-1}(d\mu_n; z, \omega_n), \quad n > 0,$$

ambas con la condición

$$\frac{K_{-1}(d\mu_n; z, \omega_n)}{K_{-1}(d\mu_n; \omega_n, \omega_n)} = 1.$$

En lo que sigue nos centraremos en el estudio de la sucesión $\{\varphi_n(d\mu_n; z)\}_{n=0}^\infty$ (ó $\{\Phi_n(d\mu_n; z)\}_{n=0}^\infty$) que denotaremos simplemente $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ (ó $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$); asimismo escribiremos $\kappa_n = \kappa_n(d\mu_n)$ para todo n .

2. FÓRMULAS DE RECURRENCIA

Es sabido que los coeficientes conductores de los polinomios $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ ortonormales con respecto a una medida fija $d\mu$, verifican la relación

$$\kappa_{n+1}^2 - \kappa_n^2 = |\psi_{n+1}(0)|^2$$

(ver [5], Ch. 1, p. 7).

La proposición siguiente, establece la relación «análoga» a la anterior para los coeficientes de los $\varphi_n(z)$:

Proposición 2.1. *Los coeficientes conductores de los polinomios $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ satisfacen la relación*

$$(9) \quad \kappa_{n+1}^2 - \kappa_n^2 = \kappa_n^2 \frac{|\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})|^2}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})}.$$

Demostración. Escribamos la fórmula (7) para $m = n$ e índice $n + 1$:

$$(10) \quad \varphi_{n+1}(z) = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}(z - \omega_{n+1})\varphi_n(z) + \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})}K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1}), \quad n > 0.$$

Multiplicamos ambos miembros de (10) por $\overline{W_{n+1}(z)}$, escribimos $z = e^{i\theta}$ e integramos con respecto a $d\mu_{n+1}$. Las integrales que resultan se calculan usando la

ortogonalidad de $\varphi_{n+1}(z)$ con respecto a la familia $\{\frac{z^k}{W_n(z)} : k = 0, 1, \dots, n\}$ en $L^2(\mu)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{n+1}(z) \overline{W_{n+1}(z)} d\mu_{n+1} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\kappa_{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_{n+1}(z) \kappa_{n+1} \overline{W_{n+1}(z)}}{|W_{n+1}(z)|^2} d\mu = \frac{1}{\kappa_{n+1}}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z - \omega_{n+1}) \varphi_n(z) \overline{W_{n+1}(z)} d\mu_{n+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_n(z)}{W_n(z)} d\mu = \frac{1}{\kappa_n}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1}) \overline{W_{n+1}(z)} d\mu_{n+1} &= \frac{-1}{\kappa_{n+1}} \overline{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}. \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene

$$(11) \quad \frac{\kappa_{n+1}^2}{\kappa_n^2} = 1 + \frac{|\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})|^2}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})},$$

o su equivalente (9). □

Corolario 2.2. $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión no decreciente de números positivos.

Corolario 2.3. Supongamos que $\lim_{n \in \Lambda} |\omega_{n+1}| \neq 1$, donde Λ es una sucesión de índices en \mathbb{N} . Entonces,

- (i) $\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \xrightarrow{n \in \Lambda} 1 \iff \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \xrightarrow{n \in \Lambda} 0.$
- (ii) $\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \xrightarrow{n \in \Lambda} 0 \iff \left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right| \xrightarrow{n \in \Lambda} 1.$

Demostración. Si escribimos (11) en la forma

$$\frac{\kappa_{n+1}^2}{\kappa_n^2} = \frac{K_{n+1}(\omega_{n+1}, \omega_{n+1})}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})},$$

para n suficientemente grande podemos utilizar (5) y (6) para obtener

$$\frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} = \frac{1 - \left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right|^2}{1 - |\omega_{n+1}|^2 \left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right|^2},$$

de donde se deduce inmediatamente (ii).

Además, si $\left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right|^2 \xrightarrow{n \in \Lambda} 0$, entonces $\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \xrightarrow{n \in \Lambda} 1$.

Recíprocamente, si $\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \xrightarrow{n \in \Lambda} 1$, a partir de (11) y (5),

$$\frac{|\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})|^2 (1 - |\omega_{n+1}|^2)}{|\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})|^2 - |\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})|^2} = \left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right|^2 \frac{1 - |\omega_{n+1}|^2}{1 - \left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right|^2} \rightarrow 0.$$

Esto implica que $\left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right| \xrightarrow{n \in \Lambda} 0$ ya que, según (ii), si $\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \xrightarrow{n \in \Lambda} 1$, entonces

$\left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right| \xrightarrow{n \in \Lambda'} 1$ para toda subsucesión Λ' de Λ . □

Nota 2.3.1. Si $\omega_n = 0$ para todo n ,

$$\left| \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} \right| = \left| \frac{\psi_{n+1}(0)}{1} \right|.$$

Por ello, el resultado anterior se corresponde con el clásico para P.O. respecto de medida fija:

$$\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \rightarrow 1 \iff |\psi_{n+1}(0)| \rightarrow 0.$$

En [11] se obtienen relaciones de recurrencia para los polinomios $\Phi_n(z)$ a partir de las correspondientes para los núcleos de funciones racionales ortogonales.

Sin embargo, las fórmulas de recurrencia para estos polinomios pueden obtenerse sin salir del espacio de los polinomios.

Proposición 2.4. Para la sucesión $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ son válidas las siguientes relaciones:

(12)

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \left(z - \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} \omega_{n+1} \right) \varphi_n(z) + \left(\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\kappa_n} + \omega_{n+1} \frac{\varphi_n(0)}{\kappa_{n+1}} \right) \varphi_n^*(z),$$

(13)

$$\varphi_{n+1}^*(z) = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \left(1 - \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} \overline{\omega_{n+1}} z \right) \varphi_n^*(z) + \left(\frac{\overline{\varphi_{n+1}(0)}}{\kappa_n} + \overline{\omega_{n+1}} \frac{\overline{\varphi_n(0)}}{\kappa_{n+1}} \right) z \varphi_n(z).$$

Demostración. Como el polinomio

$$\varphi_{n+1}(z) - \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} z - \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \omega_{n+1} \right) \varphi_n(z)$$

tiene a lo más grado n , podemos escribir

$$\varphi_{n+1}(z) - \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} z - \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \omega_{n+1} \right) \varphi_n(z) = \sum_{j=0}^n \lambda_{n,j} \varphi_j(d\mu_n; z),$$

donde los coeficientes se obtendrán de la manera habitual:

(14)

$$\lambda_{n,j} = \langle \varphi_{n+1}(z) - \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} z - \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \omega_{n+1} \right) \varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_n}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Basta, pues, calcular:

- (i) $\langle \varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_n}$.
- (ii) $\langle z\varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_n}$.
- (iii) $\langle \varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_n}$.

(i) Se tiene

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_n} &= \langle (z - \omega_{n+1})\varphi_{n+1}(z), (z - \omega_{n+1})\varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_{n+1}} \\ &= -\overline{\omega_{n+1}} \langle z\varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_{n+1}} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } j < n, \\ \omega_{n+1} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}, & \text{si } j = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Si escribimos

$$\varphi_j(d\mu_n; z) = \sum_{h=0}^j \alpha_{n,h} z^h \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha_{n,j} = \kappa_j(d\mu_n), \\ \alpha_{n,0} = \varphi_j(d\mu_n; 0) \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle z\varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_{n+1}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z\varphi_{n+1}(z) \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} d\mu_{n+1} \\ &= \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z\varphi_{n+1}(z) d\mu_{n+1} \\ &= \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} I_{n+1}, \end{aligned}$$

donde $I_{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z\varphi_{n+1}(z) d\mu_{n+1}$. De aquí,

$$\langle \varphi_{n+1}(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_n} = -\overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} \overline{\omega_{n+1}} I_{n+1} - \begin{cases} 0, & \text{si } j < n, \\ \omega_{n+1} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}, & \text{si } j = n. \end{cases}$$

(ii) Utilizando técnicas semejantes:

$$\langle z\varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_n} = \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} I_n.$$

(iii)

$$\langle \varphi_n(z), \varphi_j(d\mu_n; z) \rangle_{d\mu_n} = \begin{cases} 0, & \text{si } j < n, \\ 1, & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Con estos resultados, (14) se reduce a

$$(15) \quad \lambda_{n,j} = -\overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} \left(\overline{\omega_{n+1}} I_{n+1} + \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} I_n \right), \quad 0 \leq j \leq n$$

y sólo falta calcular I_n . Pero

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} I_n &= \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z\varphi_n(z) d\mu_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} (z - \omega_{n+1}) \varphi_n(z) \right) (1 - z\overline{\omega_{n+1}}) d\mu_{n+1} \end{aligned}$$

y podemos utilizar (10), donde pondremos

$$G_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1}(\omega_{n+1})}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} I_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{n+1}(z) (1 - z\overline{\omega_{n+1}}) d\mu_{n+1} \\ &\quad - G_{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - z\overline{\omega_{n+1}}) K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1}) d\mu_{n+1} \\ &= -\overline{\omega_{n+1}} I_{n+1} - G_{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - z\overline{\omega_{n+1}}) K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1}) d\mu_{n+1}, \end{aligned}$$

donde la integral se calcula haciendo uso de (3), obteniéndose

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - z\overline{\omega_{n+1}})K_n(d\mu_{n+1}; z, \omega_{n+1}) d\mu_{n+1} = \frac{1}{\kappa_{n+1}} \overline{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})}.$$

Sustituyendo $\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} I_n$ en (15) se sigue

$$\lambda_{n,j} = -\overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} \frac{1}{\kappa_{n+1}} \overline{\varphi_{n+1}^*(\omega_{n+1})} G_{n+1} = \frac{1}{\kappa_{n+1}^2} \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} G_{n+1} K_{n+1}(0, \omega_{n+1})$$

y de nuevo teniendo en cuenta (2), (10) evaluada en $z = 0$, y (11), obtenemos

$$\lambda_{n,j} = \overline{\varphi_j(d\mu_n; 0)} \frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\kappa_n} + \omega_{n+1} \frac{\varphi_n(0)}{\kappa_{n+1}} \right),$$

lo que prueba (12).

Finalmente, utilizando el operador $*_n$ en (12), se deduce (13). □

Corolario 2.5. *Las fórmulas de recurrencia para los polinomios mónicos pueden escribirse en la forma*

$$(16) \quad \Phi_{n+1}(z) = (z - h_{n+1})\Phi_n(z) + A_{n+1}\Phi_n^*(z),$$

$$(17) \quad \Phi_{n+1}^*(z) = (1 - \overline{h_{n+1}}z)\Phi_n^*(z) + \overline{A_{n+1}}z\Phi_n(z),$$

donde

$$(18) \quad h_{n+1} = \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} \omega_{n+1},$$

$$(19) \quad A_{n+1} = \Phi_{n+1}(0) + h_{n+1}\Phi_n(0).$$

La fórmula de recurrencia a tres términos, se obtiene ahora en la forma usual:

Proposición 2.6. *Los polinomios $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia a tres términos:*

$$(20) \quad A_n \Phi_{n+1}(z) = [(z - h_{n+1})A_n + (1 - \overline{h_n}z)A_{n+1}] \Phi_n(z) + [z|A_n|^2 - (1 - \overline{h_n}z)(z - h_n)] A_{n+1} \Phi_{n-1}(z),$$

donde los coeficientes A_n y h_n son los definidos en (18) y (19).

Demostración. Eliminando $\Phi_n^*(z)$ a partir de (16) y (17) se tiene

$$(21) \quad (1 - \overline{h_{n+1}}z)\Phi_{n+1}(z) = A_{n+1}\Phi_{n+1}^*(z) + ((1 - \overline{h_{n+1}}z)(z - h_{n+1}) - |A_{n+1}|^2z)\Phi_n(z).$$

La fórmula (20) se obtiene eliminando $\Phi_n^*(z)$ entre (16) y (21) reescritas para grado n . □

Un primer resultado de las relaciones de recurrencia es el que establece la

Proposición 2.7. *Si $\omega_n \neq 0$ para algún n . Entonces los polinomios $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ no son ortogonales con respecto a ninguna medida fija sobre la circunferencia unidad.*

Demostración. Si la sucesión $\{\Phi_n(z)\}$ fuera de polinomios ortogonales respecto a alguna medida fija, tendría que satisfacer

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, además de (16). En consecuencia

$$h_{n+1}\Phi_n(z) = (A_{n+1} - \Phi_{n+1}(0))\Phi_n^*(z)$$

es decir,

$$h_{n+1}\Phi_n(z) = h_{n+1}\Phi_n(0)\Phi_n^*(z).$$

Pero esta igualdad implica que $h_{n+1} = 0$ (ver [10]) y por tanto $\omega_{n+1} = 0$. □

3. CEROS DE LOS POLINOMIOS

Es bien conocido que los ceros de los polinomios $\Phi_n(z)$ están en $\{z : |z| < 1\}$. En cuanto a la existencia de ceros comunes, los $\Phi_n(z)$ se comportan de forma parecida a los polinomios ortogonales respecto de una medida fija.

Proposición 3.1. *Sean $\Phi_n(z)$ y $\Phi_{n+1}(z)$ dos polinomios consecutivos.*

- (i) *Si $\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) = 0$, sus n ceros restantes son los de $\Phi_n(z)$.*
- (ii) *Si $\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) \neq 0$, $\Phi_n(z)$ y $\Phi_{n+1}(z)$ carecen de ceros comunes.*

Demostración. (i) Supongamos $\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) = 0$. Entonces de (11) se sigue que $\frac{\kappa_{n+1}^2}{\kappa_n^2} = 1$ y la fórmula (16) evaluada en $z = \omega_{n+1}$ da $A_{n+1}\Phi_n^*(\omega_{n+1}) = 0$ y por tanto $A_{n+1} = 0$. Dicha fórmula se reduce a

$$\Phi_{n+1}(z) = (z - \omega_{n+1})\Phi_n(z),$$

lo que prueba (i).

(ii) Supongamos que $\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) \neq 0$ y que existe ρ , cero común a los polinomios $\Phi_n(z)$ y $\Phi_{n+1}(z)$. De (8) escrita para $n = m$ e índice $n + 1$ y evaluada en $z = \rho$ deducimos

$$\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}) \frac{K_n(d\mu_{n+1}; \rho, \omega_{n+1})}{K_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}, \omega_{n+1})} = 0$$

y además $K_n(d\mu_{n+1}; \rho, \omega_{n+1}) = 0$. Utilizando la fórmula de Christoffel-Darboux (4), obtenemos

$$\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \rho) \overline{\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})} = \overline{\rho\omega_{n+1}} \varphi_n(d\mu_{n+1}; \rho) \overline{\varphi_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})}.$$

Y de esta y su relación conjugada,

$$|\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \rho)|^2 |\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})|^2 = |\rho|^2 |\omega_{n+1}|^2 |\varphi_n(d\mu_{n+1}; \rho)|^2 |\varphi_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})|^2,$$

es decir,

$$1 = |\rho|^2 |\omega_{n+1}|^2 \left| \frac{\varphi_n(d\mu_{n+1}; \rho)}{\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \rho)} \right|^2 \left| \frac{\varphi_n(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})}{\varphi_n^*(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1})} \right|^2.$$

Pero esta igualdad es imposible, ya que el segundo miembro es un producto con dos factores iguales o menores que uno y otros dos son estrictamente menores que 1. □

Corolario 3.2. *Supongamos $|\omega_n| < 1$ y $\Phi_n(\omega_n) = 0$ para cada n . Entonces $\Phi_n(z) = W_n(z)$ y $d\mu = d\theta$ donde, como es habitual, $d\theta$ representa la medida normalizada de Lebesgue sobre $[0, 2\pi)$.*

Demostración. Se cumple, para cada $n \geq 1$,

$$\Phi_n(z) = (z - \omega_n)\Phi_{n-1}(z);$$

así que

$$\Phi_n(z) = \prod_{j=0}^n (z - \omega_j) = W_n(z).$$

Entonces, para cada polinomio $\Pi_n(z)$ de grado no mayor que n se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi_n(z) d\mu_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi_n(z) \frac{d\mu}{|W_n(z)|^2},$$

mientras que el Teorema 2.2, p.198, de [4], nos lleva a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi_n(z) d\mu_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Pi_n(z)}{|\Phi_n(z)|^2} d\theta.$$

La conclusión resulta inmediatamente. □

Es sabido que para polinomios ortogonales con respecto a una medida fija sobre la circunferencia unidad, es válido el siguiente resultado ([1]):

Proposición 3.3. *Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en $\{z : |z| < 1\}$. Entonces, existe una única sucesión de polinomios mónicos $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ ortogonales sobre la circunferencia unidad tal que $\psi_n(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por tanto, la sucesión $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ está completamente determinada si se conoce un cero de cada polinomio.

En nuestro caso, disponer de la sucesión de raíces $\{z_n\}$ no es suficiente para construir $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$. La correspondiente versión de la proposición 3.3 se recoge en la proposición 3.5, mientras que 3.4 establece un resultado alternativo.

Proposición 3.4. *Sean las sucesiones $\{\kappa_n\}_{n=0}^\infty$, con $\kappa_n > 0$ para todo $n \geq 0$, y $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, con $|\rho_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe una única sucesión de polinomios mónicos $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ y una medida positiva μ con infinitos puntos en su soporte, tal que $\int d\mu_n < \infty$ y*

- (i) $\Phi_0(z) = 1$; $\Phi_n(z) = z^n + \dots$, $n \geq 1$.
- (ii) $\Phi_n(\rho_n) = 0$, $n \geq 1$.
- (iii) $\Phi_n(z)$ es el $(n+1)$ -ésimo término de la sucesión $\{\Phi_m(d\mu_n; z)\}$ de polinomios ortogonales con respecto a la medida $d\mu_n$.

Demostración. Construiremos la sucesión $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ utilizando un proceso inductivo a partir de la relación de recurrencia (16). Si $n = 0$, obtenemos

$$(22) \quad \Phi_1(z) = (z - h_1)\Phi_0(z) + A_1\Phi_0^*(z),$$

donde $h_1 = \frac{\kappa_0^2}{\kappa_1}\omega_1$ es conocido. Por otra parte,

$$\Phi_1(\rho_1) = 0 \implies A_1 = h_1 - \rho_1,$$

lo que permite calcular $\Phi_1(z)$ en (22).

Construido $\Phi_n(z)$, volviendo a (16), donde conocemos $h_{n+1} = \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} \omega_{n+1}$, la condición $\Phi_{n+1}(\rho_{n+1}) = 0$, da

$$(23) \quad A_{n+1} = (h_{n+1} - \rho_{n+1}) \frac{\Phi_n(\rho_{n+1})}{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}.$$

Por tanto, la misma fórmula (16) determina $\Phi_{n+1}(z)$. La conclusión iii) sigue del correspondiente teorema de Favard para fracciones ortogonales demostrado en [3]. □

Nota 3.4.1. Si $\omega_n = 0$ para todo n , (23) se reduce a

$$(24) \quad \Phi_{n+1}(0) = -\rho_{n+1} \frac{\Phi_n(\rho_{n+1})}{\Phi_n^*(\rho_{n+1})},$$

que es la relación que permite construir la sucesión de polinomios ortogonales respecto de una medida fija, cuando se conoce una raíz de cada polinomio.

Para que la sucesión $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ quede determinada en términos de sus ceros, necesitamos conocer dos ceros de cada polinomio.

Proposición 3.5. Consideremos dos sucesiones $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty, \{\tau_n\}_{n=2}^\infty$ de puntos en $\{z : |z| < 1\}$. Entonces, existe una única sucesión $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ de polinomios mónicos y una medida positiva μ con infinitos puntos en su soporte, tal que $\int d\mu_n < \infty$ y

- (i) $\Phi_0(z) = 1; \Phi_n(z) = z^n + \dots, n \geq 1$.
- (ii) $\Phi_n(\rho_n) = \Phi_n(\tau_n) = 0, n \geq 2; \Phi_1(\rho_1) = 0$.
- (iii) $\Phi_n(z)$ es el $(n+1)$ -ésimo término de la sucesión $\{\Phi_m(d\mu_n; z)\}$ de polinomios ortogonales con respecto a la medida $d\mu_n$.

Demostración. Se tiene, $\Phi_1(z) = z - \rho_1$. Supongamos que $\Phi_n(z)$ ha sido construido a partir de (16). La misma relación de recurrencia, evaluada en $z = \rho_{n+1}$ y $z = \tau_{n+1}$ sucesivamente, nos permite obtener h_{n+1} y A_{n+1} como soluciones de el sistema lineal

$$\begin{aligned} \Phi_n(\rho_{n+1})h_{n+1} - \Phi_n^*(\rho_{n+1})A_{n+1} &= \rho_{n+1}\Phi_n(\rho_{n+1}), \\ \Phi_n(\tau_{n+1})h_{n+1} - \Phi_n^*(\tau_{n+1})A_{n+1} &= \tau_{n+1}\Phi_n(\tau_{n+1}), \end{aligned}$$

con determinante

$$\Delta_{n+1} = \Phi_n(\tau_{n+1})\Phi_n^*(\rho_{n+1}) - \Phi_n(\rho_{n+1})\Phi_n^*(\tau_{n+1}).$$

Si fuera $\Delta_{n+1} = 0$,

$$\frac{\Phi_n(\tau_{n+1})}{\Phi_n^*(\tau_{n+1})} = \frac{\Phi_n(\rho_{n+1})}{\Phi_n^*(\rho_{n+1})} = \lambda, \quad |\lambda| < 1,$$

el polinomio

$$\Phi_n(z) - \lambda\Phi_n^*(z)$$

se anularía en ρ_{n+1}, τ_{n+1} y en cualquier otro cero de $\Phi_{n+1}(z)$. Por consiguiente, tendría $n + 1$ ceros y en consecuencia

$$\Phi_n(z) - \lambda\Phi_n^*(z) \equiv 0.$$

En particular, debería ser $1 - \lambda \overline{\Phi_n(0)} = 0$ y como $|\lambda| < 1$, resulta

$$|\Phi_n(0)| > 1,$$

lo cual no es posible.

Como $\Delta_{n+1} \neq 0$, el sistema anterior tiene solución única (h_{n+1}, A_{n+1}) ,

$$(25) \quad \begin{aligned} h_{n+1} &= \frac{\tau_{n+1} \Phi_n(\tau_{n+1}) \Phi_n^*(\rho_{n+1}) - \rho_{n+1} \Phi_n(\rho_{n+1}) \Phi_n^*(\tau_{n+1})}{\Delta_{n+1}}, \\ A_{n+1} &= \frac{\Phi_n(\rho_{n+1}) \Phi_n(\tau_{n+1})}{\Delta_{n+1}} (\tau_{n+1} - \rho_{n+1}). \end{aligned}$$

Llevando estos valores a (16), $\Phi_{n+1}(z)$ queda construida a partir de $\Phi_n(z)$. □

Corolario 3.6. *Los coeficientes h_{n+1} y A_{n+1} están relacionados por*

$$(26) \quad A_{n+1} = \frac{\Phi_n(\tau_{n+1})}{\Phi_n^*(\tau_{n+1})} (h_{n+1} - \tau_{n+1}),$$

o la correspondiente igualdad con ρ_{n+1} en lugar de τ_{n+1} .

Demostración. Basta notar que las fórmulas (25) pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= (\tau_{n+1} - \rho_{n+1}) \frac{\frac{\Phi_n^*(\tau_{n+1})}{\Phi_n(\tau_{n+1})}}{\frac{\Phi_n^*(\tau_{n+1})}{\Phi_n(\tau_{n+1})} - \frac{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}{\Phi_n(\rho_{n+1})}} + \tau_{n+1}, \\ A_{n+1} &= \frac{\tau_{n+1} - \rho_{n+1}}{\frac{\Phi_n^*(\tau_{n+1})}{\Phi_n(\tau_{n+1})} - \frac{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}{\Phi_n(\rho_{n+1})}}. \end{aligned}$$

□

La relación (26) vuelve a ser la generalización de (24) para la sucesión $\{\Phi_n(z)\}$.

Las Proposiciones 3.4 y 3.5 anteriores establecen, pues, cómo se traslada al caso que nos ocupa el hecho de que una sucesión de P.O. respecto de una medida fija quede determinada al fijar un cero de cada polinomio.

Nuestro propósito era obtener, además, información sobre la distribución de ceros de los $\Phi_n(z)$ mediante algún resultado que pudiera considerarse un análogo del obtenido para el caso de medida fija por J. J. Guadalupe y otros ([2], Th. 1.5). La técnica allí empleada no resulta manejable en este caso. Como herramienta alternativa hemos utilizado la fórmula obtenida por Rakhmanov en ([12], p. 157), con $z_0 = \omega_{n+1}$, $\omega_{n+1}^* = \frac{1}{\omega_{n+1}}$, que evaluada en $z = 0$ da

$$\omega_{n+1} \omega_{n+1}^* \Phi_n(0) = \Phi_{n+2}(d\mu_{n+1}; 0) + c_n \Phi_{n+1}(0) + d_n,$$

donde los coeficientes d_n y c_n son, ahora,

$$\begin{aligned} d_n &= \omega_{n+1}^* \Phi_{n+1}(d\mu_n; 0) \frac{\kappa_n^2(d\mu_{n+1})}{\kappa_n^2}, \\ c_n &= -\frac{\Phi_{n+2}(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}^*)}{\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}^*)} - d_n \frac{\Phi_n^*(d\mu_{n+1}; \omega_{n+1}^*)}{\Phi_{n+1}(\omega_{n+1}^*)}. \end{aligned}$$

Construyendo la sucesión $\{\Phi_n(z)\}$ a partir de $(\{\kappa_n\}, \{\rho_n\})$, de acuerdo con la Proposición 3.4, se tiene además

$$h_{n+1}\Phi_n(0) + \Phi_{n+1}(0) = \frac{\Phi_n(\rho_{n+1})}{\Phi_n^*(\rho_{n+1})}(h_{n+1} - \rho_{n+1}).$$

Eliminando $\Phi_n(0)$ entre estas dos últimas relaciones e imponiendo condiciones de tamaño a κ_n y ρ_n se llega a resultados parciales en el sentido del Teorema 1.5 de [2], **siempre que** $|\Phi_{n+1}(d\mu_n; 0)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Con este planteamiento, aceptar la validez de los resultados obtenidos exige resolver previamente el siguiente problema:

Determinar condiciones para la sucesión $\{d\mu_n\}$ (lo que se traducirá en condiciones para los ω_n) para que pueda garantizarse que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{n+1}(d\mu_n; 0) = 0$.

REFERENCIAS

- [1] M. P. Alfaro y L. Vigil, Solution of a problem of P. Turán on zeros of orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory* **53** (1988), 195–197.
- [2] M. Bello, J. J. Guadalupe y J. L. Varona, The zero distribution of orthogonal polynomials with respect to varying measures on the unit circle (pendiente de publicación).
- [3] A. Butheel, P. González-Vera, E. Hendriksen y O. Njastad, A Favard theorem for orthogonal rational functions on the unit circle, *Numer. Algorithms* **3** (1992), 81–90.
- [4] G. Freud, *Orthogonal polynomials*, Akadémiai Kiadó, Pergamon, Budapest, 1971.
- [5] Ja. L. Geronimus, *Orthogonal polynomials*, Consultants Bureau, Nueva York, 1961.
- [6] E. Godoy y F. Marcellán, Orthogonal polynomials and rational modifications of measures, *Cand. J. Math.* **45** (1993), 930–943.
- [7] A. A. Gonchar y G. Lopes [G. López], On Markov's theorem for multipoint Padé approximations, *Mat. Sb. (N.S.)* **105(147)** (1978), 512–524. Traducción al inglés: *Math. USSR Sb.* **34** (1978), 449–459.
- [8] X. Li y K. Pan, Strong and weak convergence of rational functions orthogonal on the unit circle, *J. London Math. Soc. (2)* **53** (1996), 289–301.
- [9] G. López, Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures, *Constr. Approx.* **5** (1989), 199–219.
- [10] F. Marcellán, Orthogonal polynomials and Toeplitz Matrices: some applications, en *Rational approximation and orthogonal polynomials* (Zaragoza, 1988), Publ. Sem. García de Galdeano, Zaragoza (1989), 31–57.
- [11] K. Pan, On orthogonal system of rational functions on the unit circle and polynomials orthogonal with respect to varying measures, *J. Comp. Applied Math.* **47** (1993), 313–322.
- [12] E. A. Rakhmanov, On the asymptotic properties of polynomials orthogonal on the circle with weights not satisfying Szegő's condition, *Mat. Sb. (N.S.)* **130(172)** (1986), 151–169. Traducción al inglés: *Math. USSR Sb.* **58** (1987), 149–167.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS, CIUDAD UNIVERSITARIA S/N, 50009 ZARAGOZA, SPAIN
 Correo electrónico: palfaro@posta.unizar.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, EDIFICIO VIVES, CALLE LUIS DE ULLOA S/N, 26004 LOGROÑO, SPAIN
 Correo electrónico: mbello@dmc.unirioja.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA (EUITIZ), UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, CORONA DE ARAGÓN 35, 50009 ZARAGOZA, SPAIN
 Correo electrónico: montaner@posta.unizar.es

TEORÍA DE POLINOMIOS ORTOGONALES Y FUNCIONES SEMI-ORTOGONALES

M. JOSÉ CANTERO, M. PILAR FERRER, LEANDRO MORAL Y LUIS VELÁZQUEZ

A la memoria de Chicho

ABSTRACT. In this work it is shown that semi-orthogonal functions are suitable tool to obtain new results about some classic topics of Orthogonal Polynomials on the unit circle. More precisely, it is raised the study of the orthogonality measure through the zeros of semi-orthogonal functions.

Besides, it can be chosen a suitable basis relates with semi-orthogonal functions, so that the representation of the multiplication operator which can be obtained is a five-diagonal matrix.

1. INTRODUCCIÓN. FUNCIONES SEMI-ORTOGONALES

Sea \mathbb{Z} el conjunto de todos los números enteros y $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$. Se denotará por \mathcal{P} el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos, y con \mathcal{P}_n el subespacio vectorial de los polinomios de \mathcal{P} cuyos grados son menores o iguales que n . Sea μ una medida de probabilidad soportada en $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con infinitos puntos de crecimiento efectivo. Definimos en \mathcal{P} el producto interno

$$(1) \quad \langle f, g \rangle_\mu := \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} d\mu(z), \quad f, g \in \mathcal{P}.$$

El procedimiento de Gram-Schmidt determina la sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM), $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que verifican las conocidas relaciones de recurrencia

$$(2) \quad \begin{aligned} \Phi_0(z) &= 1, \\ \Phi_{n+1}(z) &= z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(z^{-1})}$ es el polinomio recíproco de Φ_n . Además, para $n \geq 1$, los ceros de los polinomios Φ_n están en $|z| < 1$ y, entonces, $|\Phi_n(0)| < 1$.

La sucesión $(\Phi_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ es la denominada sucesión de parámetros de Schur, y la condición $|\Phi_n(0)| < 1$, $n \geq 1$, es de hecho equivalente a la existencia de una única medida de probabilidad con infinitos puntos de crecimiento efectivo, para la que $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una SPOM.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C05.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, semi-orthogonal functions, support of a measure, spectral theory.

A partir de (2) se puede mostrar que las constantes positivas $\varepsilon_n = \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_\mu$ están relacionadas con los parámetros de Schur mediante la expresión

$$(3) \quad \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} = 1 - |a_n|^2, \quad n \geq 1.$$

Esta relación implica que $|a_n| < 1$ para $n \geq 1$ y que la sucesión $(\varepsilon_n)_{n=0}^\infty$ debe ser estrictamente decreciente. Además, (3) da la siguiente expresión de ε_n :

$$(4) \quad \varepsilon_n = \prod_{k=1}^n (1 - |a_k|^2) \varepsilon_0, \quad n \geq 1.$$

Los polinomios ortogonales de la sucesión $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ están definidos salvo un factor de módulo uno, que puede fijarse si se exige que el coeficiente director sea real y positivo. Por otro lado, se dice que φ_n es el n -ésimo polinomio ortonormal asociado a μ si verifica $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_\mu = 1$, y se denotará con κ_n su correspondiente coeficiente director. Es claro que $\kappa_n = \varepsilon_n^{-1/2}$ y, por lo tanto, $(\kappa_n)_{n=0}^\infty$ es estrictamente creciente.

Los polinomios $K_n(z, y)$, denominados n -núcleos, están definidos por

$$(5) \quad K_n(z, y) := \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(y)} = \sum_{k=0}^n \frac{\Phi_k(x) \overline{\Phi_k(y)}}{\varepsilon_k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y satisfacen la propiedad reproductora

$$(6) \quad \langle K_n(z, y), f(z) \rangle_\mu = \overline{f(y)}, \quad f \in \mathcal{P}_n,$$

así como la fórmula de Christoffel-Darboux

$$(7) \quad \varepsilon_{n+1}(1 - \overline{y}z)K_n(z, y) = \Phi_{n+1}^*(z) \overline{\Phi_{n+1}^*(y)} - \Phi_{n+1}(z) \overline{\Phi_{n+1}(y)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, se denota por $\Lambda = \text{span}\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ al espacio vectorial de los polinomios de Laurent con coeficientes complejos, y, para $p, q \in \mathbb{Z}$ con $p \leq q$, se denota por $\Lambda_{p,q}$ al subespacio de Λ

$$(8) \quad \Lambda_{p,q} := \left\{ \sum_{k=p}^q \alpha_k z^k : \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

La medida μ induce un funcional lineal hermitiano definido positivo sobre Λ , $\mathcal{L} : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$, que viene dado por

$$(9) \quad \mathcal{L}[f] := \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu(z), \quad f \in \Lambda.$$

Un procedimiento de ortogonalización sobre $(\Lambda_{-n,n}, \mathcal{L})$, $n \in \mathbb{N}$, conduce a la obtención de una familia de funciones que determinan una base de Λ y se introducen a continuación.

Sea la familia de funciones \mathcal{B} dada por

$$(10) \quad \mathcal{B} = \{1\} \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} \{f_n^{(1)}, f_n^{(2)}\} \right),$$

con

$$(11) \quad \begin{aligned} f_n^{(1)}(z) &= \frac{\bar{\alpha}_n \Phi_{2n}(z) + \alpha_n \Phi_{2n}^*(z)}{z^n} = \frac{\bar{A}_n z \Phi_{2n-1}(z) + A_n \Phi_{2n-1}^*(z)}{z^n}, \\ f_n^{(2)}(z) &= \frac{\bar{\beta}_n \Phi_{2n}(z) - \beta_n \Phi_{2n}^*(z)}{iz^n} = \frac{\bar{B}_n z \Phi_{2n-1}(z) - B_n \Phi_{2n-1}^*(z)}{iz^n}, \end{aligned}$$

donde, para $n \geq 1$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ son tal que $\text{Re}(\alpha_n \bar{\beta}_n) \neq 0$, y donde Φ_n es el n -ésimo polinomio ortogonal mónico asociado a μ .

Proposición 1.1. *La familia de polinomios de Laurent, \mathcal{B} , constituye una base de Λ tal que*

$$(12) \quad \mathcal{L}[f_n^{(j)}(z) z^k] = 0, \quad -n + 1 \leq k \leq n - 1, \quad j = 1, 2.$$

Además, la matriz

$$(13) \quad (\mathcal{L}[f_n^{(j)}(z) f_n^{(l)}(z)])_{j,l=1,2}$$

es definida positiva para cada $n \geq 1$.

Esta propiedad es la que da el nombre a las funciones de la familia \mathcal{B} .

Definición 1.2. *Las funciones $f_n^{(j)} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $j = 1, 2$, dadas en (11) se denominan Funciones Semi-Ortogonales (FSO) con respecto a \mathcal{L} o a μ .*

Se muestra a continuación cómo estas funciones permiten obtener nuevos puntos de vista en la teoría de PO.

2. MEDIDA EN \mathbb{T}

Dada una medida de probabilidad ν sobre la recta real, es bien conocido que una sucesión de polinomios ortogonales (SPO), $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con respecto a ν , verifica las siguientes propiedades:

- (a) Los ceros de P_n son reales y simples para $n \geq 1$.
- (b) Si I es un intervalo tal que $\text{supp } \nu \subseteq I$, los ceros de p_n están localizados en el interior de I para $n \geq 1$.
- (c) Los polinomios P_n y P_{n+1} tienen los ceros entrelazados para $n \geq 1$.
- (d) Las fórmulas de cuadratura interpolatorias

$$\int_{\mathbb{R}} F(x) d\nu(x) \approx \sum_{k=1}^n F(x_k^{(n)}) H_k^{(n)}, \quad n \geq 1,$$

son exactas para todo F con grado no mayor que $2n - 1$ si los nodos $(x_k^{(n)})_{k=1}^n$ son los ceros de P_n y $H_k^{(n)} = 1/K_{n-1}(x_k^{(n)}, x_k^{(n)})$, donde $K_n(x, y)$ es el n -núcleo asociado a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dado por

$$K_n(x, y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{(x - y) \int_{\mathbb{R}} P_n^2(t) d\nu(t)},$$

siendo k_n el coeficiente director de P_n .

Estas fórmulas de cuadratura implican la existencia de una sucesión $(\nu_n)_{n \geq 1}$ de medidas discretas sobre la recta real dadas por

$$d\nu_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x - x_k^{(n)})}{K_{n-1}(x_k^{(n)}, x_k^{(n)})} dx$$

(δ es la distribución de Dirac) tal que $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ cuando el soporte de ν está acotado.

Además, existe una estrecha relación entre la medida ν y la localización de ceros de una SPO. De hecho, las propiedades (a), (b), (c), (d) pueden utilizarse en el estudio del soporte de ν a partir del comportamiento asintótico de tales ceros.

En cuanto a medidas sobre la circunferencia unidad \mathbb{T} , la situación es bastante distinta. Los polinomios ortogonales tienen sus ceros dentro del disco unidad, y no sobre \mathbb{T} , donde la medida está soportada. Además, estos ceros no son necesariamente simples. Por lo tanto, esto indica que no se verificarán en esta situación resultados completamente análogos a los anteriores.

Volviendo a la recta real, se pueden encontrar funciones que satisfacen la propiedad (a), y otras versiones más débiles de (b), (c), (d): los polinomios cuasi-ortogonales $q_n(x)$, $n \geq 1$, con $\text{grado}(q_n) = n$, y ortogonales a x^k para todo $k < n - 1$, pero no con x^{n-1} . Estos satisfacen (a) y:

- (b') Si I es un intervalo tal que $\text{supp } \nu \subseteq I$, se puede asegurar que todos los ceros de q_n , salvo a lo más uno, están localizados en el interior de I .
- (c') No siempre se verifica que q_n y q_{n+1} tienen los ceros entrelazados, pero, si la envolvente convexa de $\text{supp } \nu$ no es \mathbb{R} , la sucesión $(q_n)_{n \geq 1}$ se puede elegir tal que todos los polinomios q_n tienen un cero común fuera de esta envolvente convexa y el resto de ceros de q_n y q_{n+1} , localizados en el interior, se entrelazan.
- (d') Las fórmulas de cuadratura interpolatorias construidas utilizando como nodos los ceros de q_n son exactas para todo polinomio con grado menor o igual que $2n - 2$, en vez de $2n - 1$. Es decir, son exactas en un subespacio vectorial $(2n - 1)$ -dimensional del espacio de polinomios reales. De otra manera, estas fórmulas de cuadratura generan una sucesión de medidas discretas sobre la recta real que convergen débilmente a ν .

(Ver [9] y [10].)

Al igual que con los polinomios ortogonales, las propiedades (a), (b'), (c'), (d') permiten el estudio del soporte de ν a través del análisis de la distribución asintótica de ceros de los polinomios cuasi-ortogonales.

El papel de los polinomios cuasi-ortogonales en la recta real lo desempeñan las FSO en el caso de \mathbb{T} , proporcionando resultados similares.

2.1. Estudio asintótico de la medida. Dada una medida de probabilidad μ en \mathbb{T} , se buscarán sucesiones de funciones, $(F_n)_{n \geq 1}$, analíticas sobre un abierto $\Omega \supset \mathbb{T}$ de \mathbb{C} , tales que en \mathbb{T} tomen valores reales y satisfagan propiedades análogas a (a), (b'), (c'), (d'). En concreto,

1. $F_n(z)$ es real para $z \in \mathbb{T}$.
2. Los ceros de F_n son simples y están localizados en \mathbb{T} .

3. Si I es un subconjunto conexo de \mathbb{T} tal que $\text{supp } \mu \subseteq I$, a lo más un cero de F_n está en la clausura de $\mathbb{T} \setminus I$.
4. Los ceros de las funciones F_n y F_{n+1} satisfacen una «propiedad de entrelazamiento de ceros».
5. Existen fórmulas de cuadratura interpolatorias

$$(14) \quad \int_{\mathbb{T}} F(z) d\mu(z) \approx \sum_{k=1}^n F(z_k^{(n)}) H_k^{(n)},$$

donde $H_k^{(n)} > 0$ y $(z_k^{(n)})_{k=1}^n$ son los ceros de F_n , que son exactas sobre cierto subespacio $(2n - 1)$ -dimensional del espacio de polinomios de Laurent, y que generan una sucesión $(\mu_n)_{n \geq 1}$ de medidas discretas soportadas en \mathbb{T} y que convergen débilmente a μ .

Es claro que los PO con respecto μ no satisfacen ninguna de las propiedades anteriores; sin embargo, las funciones semi-ortogonales sí que verifican 1, 2, 3, 4, 5. En el proceso de búsqueda realizado aparecen los llamados polinomios para-ortogonales k -invariantes, PPO k -invariantes, ([3], [7]). La expresión de estos polinomios cuando $k = 1$ es, básicamente, la del numerador de la función semi-ortogonal correspondiente.

Dada una medida μ con soporte en \mathbb{T} , se denomina problema de cuadratura de Szegő en n puntos, al problema siguiente:

Encontrar n puntos $(z_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{T}$, $z_k \neq z_j$ si $k \neq j$ y n números positivos $(H_k)_{k=1}^n$ tal que la fórmula de cuadratura

$$(15) \quad \int_{\mathbb{T}} F(z) d\mu(z) \approx \sum_{k=1}^n F(z_k) H_k, \quad F \in C(\mathbb{T}),$$

- (i) sea exacta para cada $F \in \Lambda_{r,s}$, para algún entero r, s ,
- (ii) no es exacta para algún $F \in \Lambda_{r',s'}$ si $\Lambda_{r',s'} \not\supseteq \Lambda_{r,s}$.

La condición (ii) es una condición de maximalidad, que impide garantizar en general la existencia de solución al problema de cuadratura. Sin embargo, cuando $-r = s = n - 1$ tal solución maximal existe.

Teorema 2.1. *El problema de cuadratura de Szegő en n puntos tiene solución sobre $\Lambda_{-n+1,n-1}$ si y sólo si los nodos $(z_k)_{k=1}^n$ son los ceros de un POP 1-invariante de grado n . En este caso, los pesos H_k en la fórmula de cuadratura están dados por*

$$H_k = \frac{1}{K_{n-1}(z_k, z_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Si P es el n -POP invariante cuyos ceros son $(z_k)_{k=1}^n$, se llama $f(z)$ a la expresión dada por $\frac{P(z)}{z^{\frac{n}{2}}}$. Nótese que f es nula en los mismos puntos que P .

Si grado(P) es par, $n = 2p$, y utilizando las propiedades de los PPO (ver [7]), se puede poner

$$f(z) = \frac{\bar{\alpha} \Phi_{2p}(z) + \alpha \Phi_{2p}^*(z)}{z^p}.$$

Así, f es una FSO con respecto a μ y por lo tanto es real para $z \in \mathbb{T}$.

Por el contrario, si $\text{grado}(P) = 2p + 1$, no se puede definir $f(z)$ de igual forma, ya que la expresión $\frac{\bar{\alpha} \Phi_{2p+1}(z) + \alpha \Phi_{2p+1}^*(z)}{z^p z^{(1/2)}}$ no es un polinomio de Laurent. Un proceso de transformaciones de f , en el que se hace uso tanto de las propiedades de los polinomios para-ortogonales (ver [3]) como de las ecuaciones (7), (2), permite expresar f en términos de una función g que es una FSO respecto de una nueva medida $\tilde{\mu}$ dada por $d\tilde{\mu}(z) = |z - \omega|^2 d\mu(z)$:

$$(16) \quad f(z) = \frac{z - \omega}{iz^{1/2}\omega^{1/2}} g(z).$$

Nótese que g tiene los mismos ceros que f menos uno, ω , el cual es fijado en el proceso anterior.

De este modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede elegir $w_n \in \mathbb{T}$ cualquiera y definir una sucesión $(F_n(z; w_n))_{n \geq 1}$ en Λ tal que $(F_{2n})_{n \geq 1}$ es una sucesión de FSO con respecto a μ , y $(F_{2n+1})_{n \geq 0}$ es otra con respecto a la familia de medidas variantes $\mu^{(2n+1)}$, dadas por

$$d\mu^{(2n+1)}(z) = |z - w_{2n+1}|^2 d\mu(z), \quad z \in \mathbb{T}.$$

Así, las fórmulas de cuadratura (14), generadas por los ceros de $F_{2n}(z; w_{2n})$ y $(z - w_{2n+1})F_{2n+1}(z; w_{2n+1})$ son exactas para toda $F \in \Lambda_{-n+1, n-1}$.

Se definen las medidas discretas en \mathbb{T} de la forma

$$d\mu_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(\theta - \theta_k^{(n)})}{K_{n-1}(z_k^{(n)}, z_k^{(n)})} d\theta, \quad n \geq 1,$$

donde $\theta_k^{(n)} = \text{Arg}(z_k^{(n)})$, y $(z_k^{(n)})_{k=1}^n$ son los ceros anteriores y $(w_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{T}$ cualquiera. Entonces, la exactitud para $F \in \Lambda_{-n+1, n-1}$ implicará que

$$\int_{\mathbb{T}} F(z) d\mu_n(z) = \int_{\mathbb{T}} F(z) d\mu(z) \quad \forall F \in \Lambda_{-n+1, n-1}.$$

Concretando, cuando $F = 1$ se tiene $\int_{\mathbb{T}} d\mu_n(z) = \int_{\mathbb{T}} d\mu(z) = c_0 = 1$, es decir, $(\mu_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de medidas uniformemente acotadas.

Por otro lado, para cada $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, si $n > m$ y $G \in \Lambda_{-m, m}$, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} F(z) d\mu(z) - \int_{\mathbb{T}} F(z) d\mu_n(z) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{T}} (F(z) - G(z)) d\mu(z) \right| \\ &+ \left| \int_{\mathbb{T}} (F(z) - G(z)) d\mu_n(z) \right| \leq 2\|F - G\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Finalmente, como toda función continua en \mathbb{T} se puede aproximar uniformemente por polinomios de Laurent, se concluye que

$$\lim_n \int_{\mathbb{T}} F(z) d\mu_n(z) = \int_{\mathbb{T}} F(z) d\mu(z), \quad \forall F \in C(\mathbb{T}).$$

Es decir, $\mu_n \rightarrow \mu$ en la topología *-débil.

Teorema 2.2. *Dada una sucesión de puntos $(w_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{T}$, existen una sucesión de FSO, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y una sucesión de medidas discretas uniformemente acotadas en \mathbb{T} , $(\mu_n)_{n \geq 1}$, tales que*

- (i) μ_n tiene su soporte en w_n y sobre los ceros de f_n ,
- (ii) $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$.

2.2. Descripción del soporte de la medida. Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{T} y sea $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la SPOM asociada. Para cada sucesión de números complejos $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, con $\alpha_n \neq 0$, podemos definir las funciones

$$(17) \quad f_n(z) = \frac{\overline{\alpha_n} \Phi_n(z) - \alpha_n \Phi_n^*(z)}{iz^{\frac{n}{2}}}, \quad n \geq 1,$$

donde la determinación de $z^{\frac{n}{2}}$ se elegirá más adelante. Se sabe que f_n tiene sus ceros en \mathbb{T} , $f_n(e^{i\theta}) \in \mathbb{R}$, y, como hemos visto, las medidas discretas generadas μ_n son tales que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$.

Definición 2.3. *Sea $\omega_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Dados dos puntos $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$ con $\theta_j = \arg(\zeta_j) \in [\omega_0, \omega_0 + 2\pi)$, $j = 1, 2$, se define la siguiente relación de orden en \mathbb{T} :*

$$\zeta_1 < \zeta_2 \iff \theta_1 < \theta_2.$$

Si se escribe $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : \theta \in [\omega_0, \omega_0 + 2\pi)\}$, es claro que $f_n(e^{i\theta})$ es una función real C^∞ , definida en $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi)$, donde las potencias no enteras de z y w se toman tal que $\arg(z^{\frac{1}{2}}), \arg(w^{\frac{1}{2}}) \in [\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2} + \pi)$.

Sean $(\zeta_j^{(n)})_{j=1}^n$ y $(\zeta_j^{(n+1)})_{j=1}^{n+1}$ los ceros de f_n y f_{n+1} respectivamente. Se puede considerar que están dados de forma ordenada mediante la relación anterior. En [6] se muestra cómo es posible determinar una sucesión $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ tal que, para cada $n \geq 1$, se verifique

$$\zeta_j^{(n+1)} < \zeta_j^{(n)} < \zeta_{j+1}^{(n+1)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

cuando $\zeta_j^{(k)} \neq e^{i\omega_0}$, $k = n, n + 1$, en cuyo caso se dice que f_n y f_{n+1} tienen entrelazamiento de ceros. Más aún, en el mencionado trabajo se fijan dos sucesiones de funciones $(f_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ y $(f_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ dadas por

$$f_n^{(1)}(z; w) := \frac{\Phi_n^*(w)\Phi_n(z) - \Phi_n(w)\Phi_n^*(z)}{i(zw)^{\frac{n}{2}}}, \quad n \geq 1,$$

$$f_n^{(2)}(z; w) := \frac{\Omega_n^*(w)\Phi_n(z) + \Omega_n(w)\Phi_n^*(z)}{(zw)^{\frac{n}{2}}}, \quad n \geq 1,$$

donde $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la SPOM de segunda especie, para las que se demuestra que tienen los ceros entrelazados en $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi)$; además, cualquier par de funciones f_n, g_n tales que

$$f_n(z) = A_1 f_n^{(1)}(z; w) + A_2 f_n^{(2)}(z; w),$$

$$g_n(z) = B_1 f_n^{(1)}(z; w) + B_2 f_n^{(2)}(z; w),$$

con $A_j, B_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2$, y donde $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, verifican que f_n y g_n tienen los ceros entrelazados en $[\omega_0, \omega_0 + 2\pi)$.

La forma general de las funciones que generan las fórmulas de cuadratura de Szegő es

$$(18) \quad f_n(z) = \frac{\bar{\alpha}_n \Phi_n(z) - \alpha_n \Phi_n^*(z)}{iz^{\frac{n}{2}}}, \quad \alpha_n \neq 0.$$

La convergencia débil a μ de las medidas discretas, μ_n , asociadas a estas fórmulas, y el hecho de que tienen su soporte en los ceros de las funciones f_n implican que para cualquier sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ de funciones de la forma (18), un punto del soporte $\text{supp } \mu$ debe ser un punto límite del conjunto de ceros de todas las funciones f_n , o un cero de infinitas funciones f_n . Así, si se denota por A' el conjunto derivado de A , se llega a la proposición siguiente.

Proposición 2.4. *Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones de la forma (19), y sean \mathcal{Z} y \mathcal{X} el conjunto de ceros de todas las funciones f_n , y el conjunto de números complejos que son ceros de infinitas funciones f_n , respectivamente. Entonces,*

$$\text{supp } \mu \subseteq \mathcal{Z}' \cup \mathcal{X}.$$

Como $\mathcal{Z}'' \subset \mathcal{Z}'$ y $\mathcal{X}' \subset \mathcal{Z}'$, el corolario siguiente es inmediato.

Corolario 2.5. *Bajo las condiciones de la Proposición 2.4,*

$$(\text{supp } \mu)' \subseteq \mathcal{Z}'.$$

El Corolario 2.5 afirma que todo punto límite del $\text{supp } \mu$ es, también, punto límite de \mathcal{Z} . De la Proposición 2.4, el resto de puntos del $\text{supp } \mu$, esto es, los puntos aislados, podrían ser puntos límite de \mathcal{Z} , o bien, ceros de infinitas funciones f_n . El resultado siguiente proporciona más información sobre los puntos aislados, ya que asegura que todo punto aislado o bien es un punto límite de \mathcal{Z} , o bien es un cero de todas las funciones f_n , excepto para un número finito de estas.

Proposición 2.6. *Bajo las condiciones de la Proposición 2.4,*

$$\text{supp } \mu \subseteq \mathcal{Z}' \cup \tilde{\mathcal{X}},$$

donde $\tilde{\mathcal{X}}$ es el conjunto de los números complejos que son ceros de todas las funciones f_n excepto, a lo más, un número finito de ellas.

Se puede demostrar también un resultado casi recíproco del anterior.

Proposición 2.7. *Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones de la forma (18), y sean z_1, z_2 dos ceros de f_n . Entonces, en cada una de las dos componentes conexas de $\mathbb{T} \setminus \{z_1, z_2\}$ existe al menos un punto de $\text{supp } \mu$, y un cero de f_m para $m > n$.*

Como consecuencia directa se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.8. *Si I es un subconjunto conexo de \mathbb{T} tal que $\text{supp } \mu \subseteq I$, a lo sumo un cero de f_n está en la clausura de $\mathbb{T} \setminus I$.*

Resultados más precisos sobre $\text{supp } \mu$ se obtienen si se limita el estudio a aquellas sucesiones de funciones con entrelazamiento de ceros. Así, supongamos que $(f_n(z))_{n \geq 1}$ es una sucesión tal que

$$(19) \quad f_n(z) = A_1 f_n^{(1)}(z; w) + A_2 f_n^{(2)}(z; w), \quad (A_1, A_2) \neq (0, 0).$$

En este caso, f_n y f_{n+1} pueden tener un cero común en el punto w , dándose el entrelazamiento de ceros en $\mathbb{T} \setminus \{w\}$. Así, $\tilde{\mathcal{X}} \subseteq \{w\}$. De hecho se puede ver que $\tilde{\mathcal{X}} = \{w\}$ sólo cuando $A_2 = 0$.

Proposición 2.9. *Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones de la forma (18). Entonces, si $A_2 = 0$,*

$$\text{supp } \mu \subseteq \mathcal{Z}' \cup \{w\},$$

y, si $A_2 \neq 0$,

$$\text{supp } \mu \subseteq \mathcal{Z}'.$$

Ahora, centremos la atención en las funciones $f_n^{(1)}(z; w)$, es decir, en las funciones $f_n(z)$ con un cero común en $z = w$. Supongamos, además, que no se trata de una situación trivial, es decir, $\text{supp } \mu \neq \mathbb{T}$. Se elegirá un punto w en cada componente conexa de $\mathbb{T} \setminus \text{supp } \mu$, y se considerarán las correspondientes funciones $f_n^{(1)}(z; w)$. Así, la representación de $\text{supp } \mu$ estará dada a través de los ceros de varias sucesiones $(f_n^{(1)}(z; w))_{n \geq 1}$, una por cada componente conexa de $\mathbb{T} \setminus \text{supp } \mu$.

Teorema 2.10. *Supongamos que $\text{supp } \mu \neq \mathbb{T}$ y sea*

$$\mathbb{T} \setminus \text{supp } \mu = \bigcup_{k \in \mathcal{A}} C_k$$

la descomposición de $\mathbb{T} \setminus \text{supp } \mu$ en componentes conexas. Si $w_k \in C_k$ para cada $k \in \mathcal{A}$, entonces

$$\text{supp } \mu = \bigcap_{k \in \mathcal{A}} \mathcal{Z}(w_k)',$$

donde $\mathcal{Z}(w)$ es el conjunto de ceros de todas las funciones $f_n^{(1)}(z; w)$.

3. REPRESENTACIÓN PENTA-DIAGONAL DEL OPERADOR MULTIPLICACIÓN

Sea \mathcal{L} un funcional de momentos hermitiano definido positivo, con normalización $\mathcal{L}[1] = 1$. En estas condiciones, existe una única medida de probabilidad μ sobre \mathbb{T} , tal que

$$\mathcal{L}[f] = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu, \quad f \in \Lambda.$$

Como es habitual, denotaremos por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de parámetros de Schur asociada. La sucesión de polinomios ortonormales, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, viene definida mediante

$$\varphi_n(z) = \kappa_n \Phi_n(z); \quad \kappa_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}, \quad n \geq 0,$$

de modo que se verifica la relación de recurrencia

$$(20) \quad z\varphi_n(z) = \sigma_{n+1}\varphi_n(z) - a_{n+1}\varphi_n^*(z), \quad n \geq 0,$$

donde $\sigma_{n+1} = \kappa_n/\kappa_{n+1} = \sqrt{1 - |a_{n+1}|^2}$.

Definición 3.1. Se define el operador de multiplicación $\Pi : \Lambda \rightarrow \Lambda$ como $\Pi[f](z) = z f(z), \forall f \in \Lambda$.

En particular, de (20) se obtiene

$$z\varphi_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} d_{nj}\varphi_j(z), \quad d_{nj} = \begin{cases} \sigma_{n+1}, & j = n + 1, \\ -(\kappa_j/\kappa_n)\bar{a}_j a_{n+1}, & j \leq n. \end{cases}$$

Esto permite representar la restricción de Π al espacio de polinomios \mathcal{P} mediante la matriz de Hessenberg

$$M = \begin{pmatrix} d_{00} & 1 & 0 & \dots \\ d_{10} & d_{11} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

respecto de la base ortonormal $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si denotamos por M_n la submatriz principal de M de orden n e I_n la matriz unidad $n \times n$, es bien conocido que

$$\varphi_n(z) = \det(zI_n - M_n), \quad n \geq 1,$$

(ver, por ejemplo, [1]).

Consideremos el producto escalar en $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T}) = \bar{\Lambda}$ dado por

$$\langle f, g \rangle_\mu := \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)} d\mu(z), \quad f, g \in \bar{\Lambda}.$$

Nótese que $\bar{\mathcal{P}} \subset \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$, pero $\bar{\mathcal{P}} \neq \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$, en general.

El operador $\Pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ es isométrico, luego acotado y continuo. Entonces, existe una única extensión continua a $\bar{\mathcal{P}}, T : \bar{\mathcal{P}} \rightarrow \bar{\mathcal{P}}$. Puesto que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base de Hilbert de $\bar{\mathcal{P}}$, la matriz asociada a T en la base $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es también M . Ahora bien, aunque T es isométrico, no es unitario en general, ya que $T(\bar{\mathcal{P}}) = \overline{\Pi(\mathcal{P})} \subset \bar{\mathcal{P}}$, pero no podemos asegurar $T(\bar{\mathcal{P}}) = \bar{\mathcal{P}}$ puesto que $\Pi(\mathcal{P}) \subsetneq \mathcal{P}$.

Ejemplo. Si la sucesión de parámetros de Schur es tal que $a_n = 0 (n \geq 1), T\varphi_n = \varphi_{n+1}$, luego $\text{spec}(T) = \{z : |z| \leq 1\}$. Pero la medida asociada es la de Lebesgue, y $\text{supp}(\mu) = \mathbb{T}$. Obviamente, $\text{spec}(T) \not\subseteq \mathbb{T}$, pues T es isométrico pero no unitario.

Si el operador de multiplicación se considera sobre Λ , es decir $\Pi : \Lambda \rightarrow \Lambda$, se mantiene la propiedad de isometría y, como $\Pi(\Lambda) = \Lambda$, se sigue que la única extensión continua de Π a $\bar{\Lambda}, T : \bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda}$, es también isométrica y unitaria, ya que $T(\bar{\Lambda}) = \overline{\Pi(\Lambda)} = \bar{\Lambda}$. Obsérvese que la unitariedad de T no depende de qué medida se ha elegido en \mathbb{T} . Es remarcable esta diferencia con el caso de medidas soportadas en \mathbb{R} , donde el correspondiente operador T es hermítico pero puede ser no acotado, por lo que no siempre es autoadjunto.

Ya que $\bar{\Lambda} = \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$, el operador $T : \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$ es simplemente el operador multiplicación en $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$, es decir, $T(f)(z) = zf(z), \forall f \in \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$. En consecuencia, sin más que utilizar la definición de espectro de un operador, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea μ una medida de probabilidad sobre \mathbb{T} y sea el operador $T : \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$ definido por $T(f)(z) = zf(z), \forall f \in \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{T})$. Entonces*

$$\text{spec}(T) = \text{supp}(\mu).$$

Por tanto se puede estudiar el soporte de la medida de ortogonalidad mediante el análisis espectral del operador T . Para el estudio del $\text{spec}(T)$ resulta útil la búsqueda de una base ortonormal de $\Lambda, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, respecto de la cual la matriz de Π (es decir, la matriz de T) sea lo más sencilla posible.

3.1. Representación matricial de $\Pi : \Lambda \rightarrow \Lambda$. Sea la base de Λ dada por $\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots\}$. El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt proporciona una base ortonormal de Λ , de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Lambda_{0,0} & \subset & \Lambda_{0,1} & \subset & \Lambda_{-1,1} & \subset & \Lambda_{-1,2} & \cdots & \subset & \Lambda_{-n,n} & \subset & \Lambda_{-n,n+1} & \cdots \\ g_0 = 1 & & g_1 & & g_2 & & g_3 & \cdots & & g_{2n} & & g_{2n+1} & \cdots \end{array}$$

que se puede precisar más en la siguiente proposición casi inmediata:

Proposición 3.3. *Sean $(\varphi_n) \subset \mathcal{P}$ tales que $\text{grado } \varphi_n = n$, y $(g_n) \subset \Lambda$ dado por*

$$g_{2n} = z^{-n} \varphi_{2n}^*(z), \quad g_{2n+1} = z^{-n} \varphi_{2n+1}(z), \quad n \geq 0.$$

Entonces, (g_n) es base de Λ , y (φ_n) es ortonormal si y sólo si (g_n) es ortonormal.

Daremos ahora la expresión matricial de $\Pi : \lambda \rightarrow \Lambda$ en la base (g_n) : puesto que $zg_{2n} \perp \Lambda_{-n,n+1}$ y $g_{2n} \perp \Lambda_{-(n-1),n}$, se sigue que $zg_{2n} \perp z\Lambda_{-(n-1),n} = \Lambda_{-(n-2),n-1} = \langle g_0, \dots, g_{2n-3} \rangle$, y análogamente para g_{2n-1} . Luego

$$zg_{2n-1}, zg_{2n} \in \langle g_{2n-2}, \dots, g_{2n+1} \rangle,$$

es decir, existen matrices $A_n, B_n \in \mathbb{C}^{(2,2)}$ tales que

$$z \begin{pmatrix} g_{2n-1} \\ g_{2n} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} g_{2n-2} \\ g_{2n-1} \end{pmatrix} + B_n \begin{pmatrix} g_{2n} \\ g_{2n+1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Además, de (20) se tiene $zg_0 = c_0g_0 + c_1g_1$ lo que proporciona, para la expresión

$$J = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ A_1 & B_1 & 0 & \cdots \\ 0 & A_2 & B_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

que no es ya una matriz de Hessenberg, sino pentadiagonal.

Un cálculo elemental permite obtener $A_n = N_{2n-1}^T, B_n = N_{2n}$, con

$$N_n = \begin{pmatrix} -\sigma_n a_{n+1} & \sigma_n \sigma_{n+1} \\ \bar{a}_n a_{n+1} & \sigma_{n+1} \bar{a}_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Nótese que N_n es singular.

Según el Teorema 3.2 se tiene por tanto una representación espectral del soporte de la medida de ortogonalidad en términos de un operador pentadiagonal unitario. Además, una demostración análoga a la del caso de matrices de Hessenberg conduce al resultado siguiente:

Teorema 3.4. *Sea J_n la submatriz principal de orden n de J . Entonces,*

$$\Phi_n(z) = \det[zI_n - J_n], \quad n \geq 1.$$

Ejemplo. Sea la sucesión de parámetros de Schur dada por $a_n = a$ ($n \geq 1$), $|a| < 1$. Sean $d\mu$ la medida asociada, $T(a)$ el operador unitario sobre $L^2_\mu(\mathbb{T})$ y $J(a)$ la representación matricial de $T(a)$ en la base ortonormal (g_n) . El espectro esencial de $T(a)$ es un arco simétrico contenido en \mathbb{T} , es decir, $\text{supp}(\mu)$ es ese mismo arco, y, a lo sumo, un punto de masa (v., p. ej., [4]).

Supongamos que se perturba la anterior situación del siguiente modo: se considera la sucesión de parámetros de Schur $\alpha := (\alpha_n)_{n \geq 0}$ con $\alpha_n \rightarrow a$, y denotamos por $d\mu_\alpha$ la medida asociada, $T(\alpha)$ el operador unitario sobre $L^2_{\mu_\alpha}(\mathbb{T})$ y $J(\alpha)$ la matriz (pentadiagonal) de $T(\alpha)$ en la correspondiente base ortonormal (g_n^α) .

Sea $K = J(a) - J(\alpha)$; entonces, K es pentadiagonal y tal que sus elementos tienden a 0. Luego K es matriz de un cierto operador compacto, con lo que, según el teorema de Weyl, los espectros esenciales de $J(a)$ y $J(\alpha)$ coinciden. Es decir, $\text{supp}(\mu_\alpha)$ es, salvo puntos de masa aislados, el mismo que $\text{supp}(\mu)$.

Nota. La truncación de Π a espacios $\Lambda_{-p,q}$ no es unitaria en general. En el caso de medidas sobre \mathbb{R} , el operador de multiplicación es hermítico, y esta característica se mantiene en sus truncaciones sobre \mathcal{P}_n . Los operadores truncados $(\pi_n \Pi|_{\mathcal{P}_n})_{n \geq 1}$ (π_n es el proyector ortogonal sobre \mathcal{P}_n) son autoadjuntos y sus medidas espectrales discretas convergen a la medida espectral del operador T en una gran variedad de situaciones (por ejemplo, cuando T es acotado). La generalización a la circunferencia unidad de estas ideas, discutida en la siguiente sección, requiere la representación espectral de los ceros de las funciones semi-ortogonales.

3.2. Funciones semi-ortogonales y operadores unitarios. Ahora, consideremos una sucesión de parámetros de Schur $(a_n)_{n \geq 0}$ y una sucesión arbitraria de números complejos $(w_n)_{n \geq 1}$ con $|w_n| = 1$. Para cada $N \geq 1$, se define el operador unitario

$$U_N : \Lambda_{-p,q} \rightarrow \Lambda_{-p,q},$$

donde $p, q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q - p \leq 1$, $N = p + q$, dado por

$$U_N \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z g_0 \\ \vdots \\ z g_{n-1} \end{bmatrix} - b_N \tilde{g}_N,$$

con

$$\tilde{g}_N(z) = [z\varphi_{N-1}(z) + w_N \varphi_{N-1}^*(z)] z^{-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}$$

y

$$(21) \quad b_N = (0, \dots, 0, 0, 1)^\top \quad \text{si } N \text{ es par,}$$

$$(22) \quad b_N = (0, \dots, 0, \sigma_{N-1}, \bar{a}_{N-1})^\top \quad \text{si } N \text{ es impar.}$$

Nótese que $\{g_0, \dots, g_{N-1}, \tilde{g}_N\}$ es una base ortonormal de $\Lambda_{-p,q}$ con \tilde{g}_N función semi-ortogonal. Los ceros de \tilde{g}_N , simples y de módulo 1, son los valores propios del operador (U_N) . La correspondiente medida espectral discreta $d\mu_N$ está por tanto soportada en los ceros de \tilde{g}_N , de modo que $d\mu_N \xrightarrow{*} d\mu$ cuando $N \rightarrow \infty$ (v. §2.1).

Esta interpretación espectral de las FSO sugiere que el estudio más profundo de la medida $d\mu$ habrá de hacerse sobre la sucesión de los operadores unitarios (U_N) (v. [7], [8]).

REFERENCIAS

- [1] M. Alfaro, Una expresión de los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, en *Actas III Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas* (Sevilla 1974), Vol. 2 (1982), 1–8.
- [2] M. Alfaro, M. J. Cantero y L. Moral, Semi-orthogonal functions and orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 3–14.
- [3] A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen y O. Njåstad, *Orthogonal rational functions*, University Press, Cambridge, 1999.
- [4] M. J. Cantero, *Polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. Modificaciones de los parámetros de Schur*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 1997.
- [5] M. J. Cantero, M. P. Ferrer, L. Moral y L. Velázquez, Funciones semiortogonales y formulas de cuadratura, en *Actes des VI^{èmes} Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées et de Statistiques* (Jaca, España, 1999), Publications de L'Université de Pau, Pau, Francia (2001), 141–150.
- [6] M. J. Cantero, M. P. Ferrer, L. Moral y L. Velázquez, Measures and semi-orthogonal functions on the unit circle, prepublicación.
- [7] M. J. Cantero, M. P. Ferrer, L. Moral y L. Velázquez, Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle, prepublicación.
- [8] M. J. Cantero, M. P. Ferrer, L. Moral y L. Velázquez, Semi-orthogonal functions and spectral theory on the unit circle, prepublicación.
- [9] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, Nueva York, 1978.
- [10] G. Freud, *Orthogonal polynomials*, Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [11] Ya. L. Geronimus, *Orthogonal polynomials*, Consultants Bureau, Nueva York, 1961.
- [12] W. B. Jones, O. Njåstad y W. I. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 113–152.
- [13] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.^a edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

M. J. CANTERO Y L. VELÁZQUEZ: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, CENTRO POLITÉCNICO SUPERIOR, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, CALLE MARÍA DE LUNA S/N, 50015 ZARAGOZA, SPAIN

Correo electrónico: mjcante@posta.unizar.es, velazque@posta.unizar.es

M. P. FERRER Y L. MORAL: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, CALLE PEDRO CERBUNA 9, 50009 ZARAGOZA, SPAIN

Correo electrónico: pferrer@posta.unizar.es, lmoral@posta.unizar.es

ABOUT BAND LIMITED UP TO CONGRUENCES WAVELETS

RAQUEL G. CATALÁN AND JOSÉ GARAY

Dedicated to the memory of Chicho

ABSTRACT. If ψ is a BLC wavelet, a Chui-Shi family of redundant tight frames $\{\Psi(k); k \in \mathbb{Z}\}$ can be built. Its redundancy is studied through the subspaces of coefficients in $l^2(\mathbb{Z}^2)$. It will be proved that these subspaces converge to zero when ψ is a uniformly continuous wavelet. Also a Whittaker-Shannon-Kotel'nikov type sampling theorem will be given for discrete vector functions associated to $\Psi(k)$. Even more, it will be proved that does not exist a Shannon type sampling result for modifications in the scaling parameter.

1. INTRODUCTION

In many situations it is much more useful to manage a frame than an orthonormal basis, mainly when the application needs to reconstruct signals avoiding noise brought by perturbation in coefficients of the signal in an analysing system.

The redundancy of frames gets to reduce this noise, as can be seen in [M]; but the overcompleteness also brings the growing of computations needed for both analysis and synthesis. For these reasons it turns to be really interesting to construct redundant systems from a complete exact one, such as a Riesz basis, through a perturbation.

Among the different perturbations of a frame system in a Hilbert space that we can find (see [Ch], [CaCh] and [ChChp]) we will deal on the Charles K. Chui and Xianliang Shi one (see [ChuS1]), written as:

$$\Psi(k) = \{\psi_{j,n}^k(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - \frac{n}{k}); j, n \in \mathbb{Z}\}$$

for any $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.

In [ChuS1] and [ChuS2], the authors prove that

Teorema 1.1. *Let ψ be a wavelet such that $\Psi(1)$ is an A-B-frame. Then $\Psi(k)$ is also a frame with admissible bounds kA and kB for any odd k .*

This result is not true in general if k is even: take ψ the Haar wavelet. Clearly $\Psi(2)$ is not tight although $\Psi(1)$ is an orthonormal basis.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42A38, 44A05, 44A15.

Key words and phrases. Frames, BLC wavelets, Chui-Shi modification, Shannon's sampling theorem.

First author partially supported by the Spanish DGES PB97-1013, and PB98-0551.

Second author partially supported by the Spanish DGES PB97-1013.

In [C] is given a characterization (extension of a result of Wang [W] and Gripenberg [G] as appears in [HWe]) of the wavelets that make $\Psi(k)$ to be a k -tight frame, and then a characterization of the wavelets that maintain the relation between the frame bounds (tightness for an orthonormal basis) of the system through a Chui-Shi perturbation.

Teorema 1.2. *It will be said that a function $f \in L^2(\mathbb{R})$ is band limited up to congruences, with band width B (we will write $f \in B\text{-BLc}$) if there exist bounded intervals $\{I_k, k \in \mathbb{Z}\}$ such that $J_k = I_k - kB$ are disjoint, $J_k \subset [-B, B]$ and $\text{supp } \hat{f} \subset \cup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$.*

Denoting with \mathcal{F}_k the set of wavelets $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ such that $\Psi(k)$ is a k -tight frame in [C] is got the following characterization result:

Teorema 1.3. *Let $\psi \in \mathcal{F}_1$. The following are equivalent:*

- (a) $\psi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{2n}$,
- (b) $\psi \in \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{2^r}$,
- (c) ψ is $\pi\text{-BLc}$.

And so we have that

Corollary 1.4. *A wavelet $\psi \in \mathcal{F}_1$ is in \mathcal{F}_n for any $n \in \mathbb{N}$ if and only if it is $\pi\text{-BLc}$.*

From now on we will only consider ψ a BLc wavelet that generates an orthonormal basis by the action of the dyadic affine group, and so the family $\Psi(k)$ will be a tight frame in $L^2(\mathbb{R})$ for any $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.

In Section 2 we will study the redundancy of the frames of the families $\{\Psi(k); k \in \mathbb{N}\}$ through the subspaces of sequences of $l^2(\mathbb{Z}^2)$ that are the coefficients in the frame of the space of functions $L^2(\mathbb{R})$, namely

$$S(\Psi(k)) = S_k = \left\{ (\langle f, \psi_{j,n}^k \rangle)_{j,n \in \mathbb{Z}}; f \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Clearly $S_1 = l^2(\mathbb{Z}^2)$, and for any other $k \neq 1$ we just know, when ψ is band-limited up to congruences, that $S_k \subset l^2(\mathbb{Z}^2)$. The following section will prove that $\cap_{k \in \mathbb{N}} S_k = \{0\}$ when ψ is in $L^1(\mathbb{R})$, even more, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \{0\}$.

In Section 3 we will study another important feature of redundant systems: the relation between the coefficients in such a system. It will be proved that they verify a Shannon’s sampling type theorem. In Section 4 we will introduce a different perturbation and will see that is also maintains the relation between the frame bounds, but the redundancy got does not provide a Shannon type formula for the new frame coefficients.

2. REDUNDANCY

Lemma 2.1. *Let $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ be a uniformly continuous wavelet. Then, for any $j, p, l, h \in \mathbb{Z}$,*

$$\langle \psi(2^j \cdot -h), \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle \psi(2^j \cdot -h), \psi(2^p \cdot) \rangle = 2^{-p} \delta_h \delta_{j,p}.$$

Proof. The Theorem of continuity of functions defined by means of a parametric integral will be applied to

$$f(x, y) = \psi(2^j x - h) \overline{\psi(2^p x - y)}$$

for $x \in \mathbb{R}, y \in [0, \infty)$. It is a continuous function as ψ does.

As ψ is a uniformly continuous wavelet, given $\varepsilon = 1$ there exists $\delta > 0$ such that for any $x \in \mathbb{R}$ and $|z| < \delta, |\psi(x + z) - \psi(x)| < 1$.

Take $y_0 \in [0, \infty)$ and $V = (y_0 - \gamma, y_0 + \gamma)$ with $\gamma \leq \min\{\delta, y_0\}$ if $y_0 \neq 0$, and $V = [0, \gamma)$ with $\gamma \leq \delta$ if $y_0 = 0$.

Let's see that there exists an integrable function g_{y_0} such that $|f(x, y)| \leq g_{y_0}(x)$ for any $x \in \mathbb{R}, y \in V$:

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= |\psi(2^j x - h) \psi(2^p x - y)| \\ &= |\psi(2^j x - h)| |\psi(2^p x - y) - \psi(2^p x - y_0) + \psi(2^p x - y_0)| \\ &\leq |\psi(2^j x - h)| \{|\psi(2^p x - y_0 + (y_0 - y)) - \psi(2^p x - y_0)| + |\psi(2^p x - y_0)|\} \\ &\leq |\psi(2^j x - h)| + |\psi(2^j x - h)| |\psi(2^p x - y_0)|. \end{aligned}$$

Take $g_{y_0}(x) = |\psi(2^j x - h)| + |\psi(2^j x - h)| |\psi(2^p x - y_0)|$, which is integrable on \mathbb{R} as $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, and verifies that $|f(x, y)| \leq g_{y_0}(x)$ for any $x \in \mathbb{R}, y \in V$. So

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}} f_y(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(2^j x - h) \overline{\psi(2^p x - y)} dx$$

is continuous in $[0, \infty)$; in particular, taking $y = \frac{1}{k}$ and making $k \rightarrow \infty$ we have the lemma. □

Definition 2.2. A sequence of sets $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is convergent to Γ if $\overline{\lim} \Gamma_n = \underline{\lim} \Gamma_n = \Gamma$, where

$$\overline{\lim} \Gamma_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \Gamma_n \quad \text{and} \quad \underline{\lim} \Gamma_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \Gamma_n.$$

For more details see [Mu] for e.g.

Let us consider the subspaces

$$S_k = \{ \{ \langle f, \psi_{j,n}^k \rangle \}_{j,n \in \mathbb{Z}}; f \in L^2(\mathbb{R}) \}$$

in $l^2(\mathbb{Z}^2)$.

Teorema 2.3. Let $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ be a BLC uniformly continuous wavelet. Then

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k = \{0\}.$$

Proof. Let $\mathbf{x} = (x_{j,n}) \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$. As $\mathbf{x} \in S_k$ there exists $f_k \in L^2(\mathbb{R})$ such that

$$(1) \quad \mathbf{x} = \left(\langle f_k, 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - \frac{n}{k}) \rangle \right)_{j,n \in \mathbb{Z}}.$$

Consider the subsequence $x_{j,kh} = \langle f_k, 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot -h) \rangle$. As $\Psi(1)$ is an orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R})$, f_k can be expressed as

$$(2) \quad f_k = \sum_{j,h \in \mathbb{Z}} \langle f_k, \psi_{j,h} \rangle \psi_{j,h} = \sum_{j,h \in \mathbb{Z}} x_{j,kh} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -h)$$

and so, taking (2) to (1) we have that for any $p, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x_{p,l} &= \left\langle \sum_{j,h \in \mathbb{Z}} x_{j,kh} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \right\rangle \\ &= \sum_{j,h \in \mathbb{Z}} x_{j,kh} 2^{\frac{j+p}{2}} \langle \psi(2^j \cdot -h), \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{j+p}{2}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} x_{j,kh} \langle \psi(2^j \cdot -h), \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle. \end{aligned}$$

Grouping terms accurately we have

$$\begin{aligned} x_{p,l} &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq p}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} x_{j,kh} \langle 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \\ &\quad + \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h \neq 0}} x_{p,kh} \langle 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \\ &\quad + x_{p,0} \langle 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle. \end{aligned}$$

Call A , B and C these three terms respectively. Taking modulus and by triangular inequality we have that

$$(3) \quad \begin{aligned} |x_{p,l}| &\leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq p}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} |x_{j,kh}| \left| \langle 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \right| \\ &\quad + \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h \neq 0}} |x_{p,kh}| \left| \langle 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \right| \\ &\quad + |x_{p,0}| \left| \langle 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \right|. \end{aligned}$$

As ψ is uniformly continuous, given $\varepsilon > 0$ there exists $k_1 > 0$ such that for any $k \in \mathbb{Z}$ with $|k| > k_1$, $\|2^{\frac{p}{2}}\psi(2^p \cdot) - 2^{\frac{p}{2}}\psi(2^p \cdot -\frac{l}{k})\| < \varepsilon$.

We also have that, using Lemma 2.1, given $\varepsilon > 0$ there exists $k_2 > 0$ such that for any $k \in \mathbb{Z}$ with $|k| > k_2$, $|\langle 2^{\frac{p}{2}}\psi(2^p \cdot), 2^{\frac{p}{2}}\psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle| < 1 + \varepsilon$.

Taking $k_0 \geq \max\{k_1, k_2\}$, for any $|k| > k_0$ they two both hold.

Let's take the first term A of $x_{p,l}$:

$$\begin{aligned}
 |A| &\leq \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq p}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} |x_{j,kh}| \left| \langle 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \right| \\
 &\leq \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq p}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} |x_{j,kh}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq p}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left| \langle 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \|\mathbf{x}\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq p}} \left\| P_j [2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k})] \right\|^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

where we have applied the Cauchy-Schwarz inequality and that P_j is the projection on W_j . As the summation index does not equal p and $2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot) \in W_p$, we have that:

$$\begin{aligned}
 &\|\mathbf{x}\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq p}} \left\| P_j [2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k})] \right\|^2 \right)^{1/2} \\
 &= \|\mathbf{x}\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq p}} \left\| P_j [2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) - 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot)] \right\|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \|\mathbf{x}\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \left\| 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) - 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot) \right\| \\
 &\leq \|\mathbf{x}\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \varepsilon
 \end{aligned}$$

for $|k| > k_0$.

A similar process can be followed with the second term of $x_{p,l}$:

$$\begin{aligned}
 |B| &\leq \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h \neq 0}} |x_{p,kh}| \left| \langle 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \right| \\
 &\leq \left(\sum_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h \neq 0}} |x_{p,kh}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h \neq 0}} \left| \langle 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \|\mathbf{x}_p\|_{l^2(\mathbb{Z})} \left(\sum_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h \neq 0}} \left| \langle 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -h), 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) - 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot) \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \|\mathbf{x}_p\|_{l^2(\mathbb{Z})} \left\| P_p [2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) - 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot)] \right\| \\
 &\leq \|\mathbf{x}_p\|_{l^2(\mathbb{Z})} \left\| 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot -\frac{l}{k}) - 2^{\frac{p}{2}} \psi(2^p \cdot) \right\| \\
 &\leq \|\mathbf{x}_p\|_{l^2(\mathbb{Z})} \varepsilon.
 \end{aligned}$$

In this case, orthogonality between $\psi(2^p \cdot -h)$ and $\psi(2^p \cdot)$ for any $h \neq 0$ is used.

These bounds for the first two terms and the application of the Lemma 2.1 at the third one, take (3) to:

$$\begin{aligned} |x_{p,l}| &\leq \|\mathbf{x}\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \varepsilon + \|\mathbf{x}_p\|_{l^2(\mathbb{Z})} \varepsilon + |x_{p,0}| (1 + \varepsilon) \\ &= \varepsilon (\|\mathbf{x}\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} + \|\mathbf{x}_p\|_{l^2(\mathbb{Z})}) + |x_{p,0}| \end{aligned}$$

for any $\varepsilon > 0$. So, for any $l \in \mathbb{Z}$

$$(4) \quad |x_{p,l}| \leq |x_{p,0}|.$$

If $x_{p,0} = 0$, $\mathbf{x}_p = 0$ for all p and so $\mathbf{x} \equiv 0$. In other case, by inverse triangular inequality, we have that $|x_{p,l}| \geq \frac{1}{3}|x_{p,0}|$. As $\mathbf{x} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$, $\mathbf{x}_p \in l^2(\mathbb{Z})$ and so does the constant sequence equal to $x_{p,0}$. So $x_{p,0} = 0$ and then by (4) $\mathbf{x}_p \equiv 0$ for all $p \in \mathbb{Z}$, and so $\mathbf{x} \equiv 0$. \square

Corollary 2.4. *Let ψ be a wavelet as in Theorem 2.3. Then there exists the limit of S_k and equals $\{0\}$.*

Proof. As $\underline{\lim} S_k \subset \overline{\lim} S_k$ we just have to see that $\overline{\lim} S_k = \{0\}$.

Take $\mathbf{x} \in \overline{\lim} S_k$, then \mathbf{x} belongs to S_k for an infinite number of values of k , and so there exists a subsequence of natural numbers $\{k_n\}$ such that $\mathbf{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_{k_n}$.

The same proof of Theorem 2.3 can be followed to obtain that $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_{k_n} = \{0\}$, and so the announced result. \square

3. DISCRETE VECTOR SAMPLING THEOREM

Let f be a function in $L^2(\mathbb{R})$. Consider the biinfinite matrix

$$\mathbf{x} = (x_{j,n})_{j,n \in \mathbb{Z}} = (\langle f, \psi_{j,n}^k \rangle)_{j,n \in \mathbb{Z}}.$$

As $\Psi(1)$ is an orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R})$, $f = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$ and so

$$x_{l,p} = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} x_{j,nk} \langle \psi_{j,n}, \psi_{l,p}^k \rangle.$$

Call \mathbf{x}^n the n -th column of \mathbf{x} . It is clear that the matrix \mathbf{x} can be got just from the columns $\{\mathbf{x}^{hk}; h \in \mathbb{Z}\}$.

This is a situation that reminds a reconstruction from samples. We will see in this paper (in what will be called Discrete Vector Sampling Theorem, DVST) that it is a Shannon type one. With ‘‘Shannon type’’ we mean that the reconstruction will have the same structure of Shannon’s Sampling Theorem for band-limited functions:

Teorema 3.1 (Whittaker-Shannon-Kotel’nikov). *Let $f \in L^2(\mathbb{R})$ with $\text{supp } \hat{f} \subset [-B, B]$. Then*

$$(5) \quad f(\cdot) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\tau) \text{sinc} \left(\frac{\cdot}{\tau} - n \right)$$

for any $\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{2B}$, called Nyquist frequency. This equality holds in $L^2(\mathbb{R})$.

See, by e.g., [Z], pg. 15 and ff., for more details.

We will begin defining the space of discrete functions where we are going to work from now on. Given $F : \mathbb{Z} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$, the j -th element of the sequence $F(n)$ will be denoted by $F_j(n) = [F(n)]_j$. We will call $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ the space $l_2(l_2(\mathbb{Z}))$.

The subspace of $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ whose functions will verify the DVST, and that will play the analogous role of the band limited functions in Shannon’s Sampling Theorem, is the following:

Definition 3.2. *We will call*

$$(6) \quad \mathcal{B}_k = \{F : \mathbb{Z} \rightarrow l^2(\mathbb{Z}); \exists f \in L^2(\mathbb{R}), F_j(n) = \langle f, \psi_{j,n}^k \rangle\}.$$

As $\Psi(k)$ is a frame $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$.

Proposition 3.3. $(\mathcal{B}_k, \|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})})$ *is a Hilbert space.*

Proof. Let $(F^m)_{m \in \mathbb{N}}$ be a Cauchy sequence in \mathcal{B}_k . Then, given $m \in \mathbb{N}$, there exists $f_m \in L^2(\mathbb{R})$ such that $F_j^m(n) = \langle f_m, \psi_{j,n}^k \rangle$ for all $j, n \in \mathbb{Z}$.

And, by other side, we have that for any $\varepsilon > 0$ there exists $N_0 \in \mathbb{N}$ so that for any $p, h > N_0$

$$\sum_{j,n \in \mathbb{Z}} |F_j^p(n) - F_j^h(n)|^2 < \varepsilon.$$

As

$$\sum_{j,n \in \mathbb{Z}} |F_j^p(n) - F_j^h(n)|^2 = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} |\langle f_p - f_h, \psi_{j,n}^k \rangle|^2$$

and $\Psi(k)$ is a frame in $L^2(\mathbb{R})$ (let $A(k)$ and $B(k)$ be its bounds) we have that

$$A(k) \|f_p - f_h\|^2 \leq \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} |F_j^p(n) - F_j^h(n)|^2 \leq B(k) \|f_p - f_h\|^2.$$

This makes the family $\{f_m; m \in \mathbb{N}\}$ to be a Cauchy sequence in $L^2(\mathbb{R})$ and so convergent to a function $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Take $F \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ associated to f by (6). Clearly $F \in \mathcal{B}_k$ and

$$\begin{aligned} \|F^m - F\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})}^2 &= \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} |F_j^m(n) - F_j(n)|^2 = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} |\langle f_m - f, \psi_{j,n}^k \rangle|^2 \\ &\leq B(k) \|f_m - f\|^2. \end{aligned}$$

This proves that, for all $k \in \mathbb{Z}$, \mathcal{B}_k is complete and so closed in $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$, what concludes the result of the proposition. \square

We will define now the basic function that will take the role of the function sinc.

Definition 3.4. *Let us define $S : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ as:*

$$[S(l, m)]_j = \langle \psi, \psi_{j, l-2^j m} \rangle = \langle \psi, 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -l + 2^j m) \rangle.$$

Note that it is well defined; just take $l = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ and verify that

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle \psi, \psi_{j, l-2jm} \rangle|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle \psi, \psi_{j, p-2jm}^q \rangle|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{0,m}, \psi_{j,p}^q \rangle|^2 \\ &\leq B(q) \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

We can give now the DVST:

Theorem 3.5. *Let $k \in \mathbb{N}$ and $F \in \mathcal{B}_k$. Let S be the function defined upwards. Then*

$$(7) \quad F(\cdot) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(nk) * S\left(\frac{\cdot}{k}, n\right)$$

where $*$ is the convolution product in $l^2(\mathbb{Z})$. This equality holds in $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$.

Proof. First of all we will see the equality holds pointwise, it is

$$[F(l)]_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [F(nk) * S\left(\frac{l}{k}, n\right)]_p$$

for all $p, l \in \mathbb{Z}$.

Take $F \in \mathcal{B}_k$ and let $f \in L^2(\mathbb{R})$ be the function associated to it by (6). As $\Psi(1)$ is an orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R})$, $f = \sum_{j,n} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$. This gives:

$$\begin{aligned} F_p(l) &= \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \langle \psi_{j,n}, \psi_{p,l}^k \rangle = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,n}^k \rangle \langle \psi_{j,n}, \psi_{p,l}^k \rangle \\ &= \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} F_j(nk) \langle \psi_{j,n}, \psi_{p,l}^k \rangle = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} F_j(nk) \langle \psi, \psi_{p-j, \frac{l}{k} - 2^{p-j}n} \rangle \\ &= \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} [F(nk)]_j [S\left(\frac{l}{k}, n\right)]_{p-j} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [F(nk) * S\left(\frac{l}{k}, n\right)]_p \\ &= \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} F(nk) * S\left(\frac{l}{k}, n\right) \right]_p \end{aligned}$$

for any $p \in \mathbb{Z}$.

For getting the equality in $\mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$ it is not too difficult to see that what we have to prove is that

$$\sum_{l,p \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{|n| > N} [a^n(l)]_p \right|^2 \longrightarrow 0,$$

where

$$\begin{aligned} [a^n(l)]_p &= [F(nk) * S\left(\frac{l}{k}, n\right)]_p = \sum_{m \in \mathbb{Z}} [F(nk)]_m [S\left(\frac{l}{k}, n\right)]_{p-m} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n}^k \rangle \langle \psi, \psi_{p-m, \frac{l}{k} - 2^{p-m}n} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}, \psi_{p,l}^k \right\rangle. \end{aligned}$$

From here, and using that $\Psi(k)$ is a frame we have that there exists $B(k) > 0$ such that

$$\begin{aligned} \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{|n| > N} [a^n(l)]_p \right|^2 &= \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle \sum_{|n| > N} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}, \psi_{p,l}^k \right\rangle \right|^2 \\ &\leq B(k) \left\| \sum_{|n| > N} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= B(k) \sum_{|n| > N} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2. \end{aligned}$$

As $\Psi(1)$ is an orthonormal basis and $f \in L^2(\mathbb{R})$ we have the result of the theorem. □

Note that Theorems 3.5 and 3.1 are completely analogous, not only because of the type of convergence got in both of them, but also by the similar expressions (7) and (5) respectively. For this reason Theorem 3.5 can be said to be a Whittaker-Shannon-Kotel'nikov type theorem.

4. COLUMNS BY ROWS: THE FAMILY $\Psi^{[k]}$

By now only modifications in the translation parameter of an orthonormal wavelet basis have been considered, but the same type of modification can be made in the scaling parameter. We will call $\Psi^{[k]}$ the family

$$\Psi^{[k]} = \{ {}^k\psi_{j,n}(\cdot) = 2^{\frac{j}{2k}} \psi(2^{\frac{j}{k}} \cdot -n); j, n \in \mathbb{Z} \},$$

where $k \in \mathbb{N}$ and ψ is a wavelet such that $\Psi(1)$ is an orthonormal wavelet basis.

Proposition 4.1. *The family $\Psi^{[k]}$ is a tight frame in $L^2(\mathbb{R})$ for any $k \in \mathbb{N}$ and the frame bound is k .*

Proof. Take $f \in L^2(\mathbb{R})$ and consider the k different classes in $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, 2^{\frac{m}{2k}} \psi(2^{\frac{m}{k}} \cdot -n) \rangle|^2 &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \sum_{h=0}^{k-1} |\langle f(t) {}^k\psi_{m_k+h,n} \rangle|^2 \\ &= \sum_{h=0}^{k-1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f_{-\frac{h}{k},0}, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \sum_{h=0}^{k-1} \|f_{-\frac{h}{k},0}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = k \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

□

Note that this result is got for any wavelet ψ such that $\Psi(1)$ is an orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R})$, and finite band-width is not required.

Associated to the family $\Psi^{[k]}$ we can also try to obtain a discrete vector sampling theorem as before. We will see that a Shannon type theorem cannot be got.

Definition 4.2. *Let ψ be a wavelet such that $\Psi(1)$ is an orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R})$ and $k \in \mathbb{N}$. We will call \mathcal{A}_k the space*

$$(8) \quad \mathcal{A}_k = \{ G : \mathbb{Z} \rightarrow l^2(\mathbb{Z}); \exists g \in L^2(\mathbb{R}), G_j(n) = \langle g, {}^k\psi_{j,n} \rangle \}.$$

By Proposition 4.1 we have that $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{Z})$.

Proposition 4.3. *There is no Shannon type sampling theorem for the functions in \mathcal{A}_k .*

Proof. Take $G \in \mathcal{A}_k$, and let $g \in L^2(\mathbb{R})$ be the function associated to G by (8). As $\Psi(1)$ is an orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} [G(l)]_j &= \sum_{n,q \in \mathbb{Z}} \langle g, \psi_{n,q} \rangle \langle \psi_{n,q}, \psi_{l,j} \rangle \\ &= \sum_{n,q \in \mathbb{Z}} [G(nk)]_q \langle \psi_{n,q}, \psi_{\frac{l}{k},j} \rangle. \end{aligned}$$

Suppose there exists $T : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ such that

$$G(l) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(nk) * T\left(\frac{l}{k}, n\right)$$

for all $l \in \mathbb{Z}$. Then

$$[G(l)]_j = \sum_{n,q \in \mathbb{Z}} [G(nk)]_q [T\left(\frac{l}{k}, n\right)]_{j-q}.$$

From these two expressions of $[G(l)]_j$ we obtain that

$$[T\left(\frac{l}{k}, n\right)]_{j-q} = \langle \psi_{n,q}, \psi_{\frac{l}{k},j} \rangle,$$

what is the same, given $\lambda \in \mathbb{Q}$ and $n \in \mathbb{Z}$

$$[T(\lambda, n)]_{j-q} = \langle \psi_{n,q}, \psi_{\lambda,j} \rangle.$$

This would make $\langle \psi_{n,q}, \psi_{\lambda,j} \rangle$ to depend on j and q just by its difference, and so

$$\langle \psi_{n,q}, \psi_{\lambda,j} \rangle = \langle \psi_{n,0}, \psi_{\lambda,j-q} \rangle.$$

But it is not true, as $\langle \psi_{n,q}, \psi_{\lambda,j} \rangle = \langle \psi_{n,0}, \psi_{\lambda,2\lambda^{-n}q-j} \rangle$. □

Let us observe that the only, but essential, difference between the redundancy introduced in the family $\Psi(k)$ and in $\Psi^{[k]}$ is that $\langle \psi_{n,q}, \psi_{j,\frac{l}{k}} \rangle$ does depend on j and q just by its difference, and so we can build the function S so that

$$[F(l)]_j = \sum_{n,q \in \mathbb{Z}} [F(qk)]_n \langle \psi_{n,q}, \psi_{j,\frac{l}{k}} \rangle = \sum_{n,q \in \mathbb{Z}} [F(qk)]_n [S\left(\frac{l}{k}, n\right)]_{j-q}.$$

REFERENCES

[CaCh1] P. G. Casazza, and O. Christensen, Perturbation of operators and applications to frame theory, *Jour. Fourier Anal. Appl.* **3** (1997), 543–557.
 [CaCh2] P. G. Casazza, and O. Christensen, Frames containing a Riesz basis and preservation of this property under perturbations, *SIAM J. Math. Anal.* **29** (1998), 266–278.
 [C] R. G. Catalán, Oversampling and preservation of tightness in affine frames, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear. Preprint: *Publ. Sem. Mat. García de Galdeano*, Serie II, Sección 1, no. 10, 1998.
 [Ch1] O. Christensen, Frame perturbations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 1217–1220.

- [Ch2] O. Christensen, Perturbation of frames and applications to Gabor frames, in *Gabor analysis and algorithms* (H. G. Feichtinger and T. Strohmer, eds.), *Appl. Numer. Harmon. Anal.*, Birkhäuser Boston, Boston, MA (1998), 193–209.
- [Ch3] O. Christensen, Operators with closed range, pseudo-inverses, and perturbation of frames for a subspace, *Canad. Math. Bull.* **42** (1999), 37–45.
- [ChChp] O. Christensen, and H. Christopher, Perturbations of Banach frames and atomic decompositions, *Math. Nachr.* **185** (1997), 33–47.
- [ChuS1] C. K. Chui, and X. Shi, Bessel sequences and affine frames, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **1** (1993), 29–49.
- [ChuS2] C. K. Chui, and X. Shi, $n \times$ oversampling preserves any tight affine frame for odd n , *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (1994), 511–517.
- [G] G. Gripenberg, A necessary and sufficient condition for the existence of a father wavelet, *Studia Math.* **114** (1995), 207–226.
- [HWe] E. Hernández, and G. Weiss, *A first course on wavelets*, CRC Press, 1996.
- [M] N. J. Munch, Noise reduction in tight Weyl-Heisenberg frames, *IEEE Trans. Inform. Theory* **38** (1992), 608–616.
- [Mu] M. E. Munroe, *Introduction to measure and integration*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
- [W] X. Wang, *The study of wavelets from the properties of their Fourier transforms*, Ph. D. Thesis, Washington University in St. Louis, 1995.
- [Z] A. I. Zayed, *Advances in Shannon's sampling theory*, CRC Press, 1993.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA, UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA, CAMPUS DE ARROSADÍA, 31006 PAMPLONA, SPAIN

E-mail address: raquel.garcia@unavarra.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS, CIUDAD UNIVERSITARIA S/N, 50009 ZARAGOZA, SPAIN

E-mail address: jgaray@posta.unizar.es

SERIES DE FOURIER Y FUNCIONES DE LIPSCHITZ

JORGE BUSTAMANTE Y MIGUEL ANTONIO JIMÉNEZ

A la memoria de un gran amigo

ABSTRACT. This paper is an introductory approach to several approximation problems of periodic functions in connection with Fourier series, Lipschitz functions and related topics. Traditional results in this context are presented and discussed in the first two sections. Further, we introduce certain Hölder spaces of integrable functions that become homogeneous Banach (also Hilbert) spaces, while last section considers approximation problems under Hölder norms.

1. INTRODUCCIÓN

Sea $C_{2\pi}$ el espacio de las funciones reales continuas y 2π -periódicas. Muchos de los resultados que se presentarán aquí se pueden extender si dificultad al caso complejo. Para simplificar la exposición consideramos sólo el caso real. Para $p \in [1, \infty)$, denotaremos por $L_{2\pi}^p$ al espacio tradicional de funciones periódicas p integrables en $[0, 2\pi]$ con la norma

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

En $C_{2\pi}$ consideramos la norma de la convergencia uniforme, esto es,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|.$$

En lo que sigue, $X_{2\pi}$ denotará a uno cualquiera de los espacios antes definidos y $\|f\|_{X_{2\pi}}$ indica que se considera la norma del espacio $X_{2\pi}$.

Para cada entero no negativo n , denotemos por \mathcal{T}_n a la colección de todos los polinomios trigonométricos de grado no mayor que n . Esto es, $f \in \mathcal{T}_n$ si se puede representar en la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 26A16, 42A20.

Key words and phrases. Lipschitz (Hölder) functions, best approximation, modulus of smoothness, Fourier series, semigroup of operators, homogeneous Banach spaces.

Se conoce que los polinomios trigonométricos son densos en $X_{2\pi}$ ([7], [10], [22]). Luego, si para $f \in X_{2\pi}$ y un entero no negativo n definimos

$$E_n(f) := \inf_{g \in \mathcal{T}_n} \|f - g\|_{X_{2\pi}},$$

se tiene que $E_n(f) \rightarrow 0$, según $n \rightarrow \infty$. Al número $E_n(f)$ se le conoce como la mejor aproximación de f de orden n .

Teorema 1 ([7], [19]). *Si $f \in X_{2\pi}$ y n es un entero no negativo, existe un único polinomio $T_n \in \mathcal{T}_n$, tal que $E_n(f) = \|f - T_n\|_{X_{2\pi}}$.*

Al polinomio dado en el teorema anterior se le denomina el polinomio de la mejor aproximación. Su existencia se deriva del hecho que los espacios \mathcal{T}_n son finito dimensionales. Cuando $1 < p < \infty$, la unicidad se obtiene de la estructura estrictamente convexa de los espacios $L_{2\pi}^p$; para verificar la unicidad en $C_{2\pi}$ se utiliza el teorema de alternación de Chebyshev ([8]). En $L_{2\pi}^1$, se requiere de un trabajo más complicado (ver, por ejemplo, el Teorema 1.8 en [19]).

Desafortunadamente no existe una forma simple de obtener el polinomio de la mejor aproximación. Sólo en el caso $X_{2\pi} = L_{2\pi}^2$, debido a su estructura de espacio de Hilbert, se sabe que el polinomio coincide con la suma parcial de Fourier de orden n , según precisaremos más adelante. El problema general es cómo construir polinomios trigonométricos asociados a una función que resulten una buena aproximación; aunque no sean necesariamente la mejor. Muchos de los métodos relacionados con la aproximación de funciones periódicas están vinculados con las series de Fourier.

Recordemos que, para $f \in L_{2\pi}^1$ y $g \in L_{2\pi}^p$ se define la convolución de f con g mediante la expresión

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x - y) dy$$

y los coeficientes de Fourier de f mediante las fórmulas

$$a_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y

$$b_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dado un entero positivo n , se definen las sumas parciales de orden n de la serie de Fourier de la función f como

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = (f * D_n)(x),$$

donde

$$D_n(x) := \frac{\text{sen}(2n + 1)x/2}{2 \text{sen}(x/2)}.$$

La función $D_n(x)$ se conoce como el núcleo de Dirichlet ([7], [10], [11], [22]).

Un problema clásico en la teoría de las series de Fourier es el análisis de la convergencia. Esto es, si $f \in X_{2\pi}$ ¿es cierto que $\|S_n(f) - f\|_{X_{2\pi}} \rightarrow 0$? Se conoce que si $X_{2\pi} = L^p_{2\pi}$, con $1 < p < \infty$, la respuesta es afirmativa (ver [10], [22]). Para $X_{2\pi} = L^1_{2\pi}$ y $X_{2\pi} = C_{2\pi}$, la respuesta es negativa (ver [10], [22]). Este último hecho determina la búsqueda de condiciones suficientes que impliquen la convergencia de la series de Fourier en estos espacios, así como indagar sobre otros métodos de sumación que permitan recuperar las funciones a partir de sus series.

Teorema 2 ([19]). *Si $f \in C_{2\pi}$ y n es un entero, $n > 1$, entonces*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq \left(4 + \frac{2}{\pi} \log n\right) E_n(f).$$

Luego una condición suficiente para la convergencia de la serie de Fourier viene dada por $\lim E_n(f) \log n = 0$. Veamos que las funciones de Lipschitz satisfacen esta condición.

A cada $f \in C_{2\pi}$ se le asocia su módulo de continuidad definido para $t > 0$ como

$$\omega(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x+h) - f(x)|.$$

A cada $\alpha \in (0, 1]$, se le asocia un espacio $\text{Lip}^\alpha_{2\pi}$ de funciones de Lipschitz del modo siguiente: $f \in \text{Lip}^\alpha_{2\pi}$ si y sólo si

$$\theta_\alpha(f) := \sup_{0 < t \leq 2\pi} \frac{\omega(f, t)}{t^\alpha} < \infty.$$

Estos espacios devienen en un espacio de Banach si consideramos la norma

$$\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + \theta_\alpha(f).$$

Un resultado clásico de la teoría de la aproximación, debido a Jackson (ver el Teorema 7 más adelante), asegura que existe una constante positiva C tal que, para cada $f \in C_{2\pi}$,

$$(1) \quad E_n(f) \leq C\omega(f, 1/n).$$

Así que si $f \in \text{Lip}^\alpha_{2\pi}$, resulta que $E_n(f) \leq Cn^{-\alpha}$ y, utilizando el Teorema 2 obtenemos como un corolario la convergencia uniforme de las series de Fourier para las funciones de Lipschitz.

Estos resultados explican en parte el interés matemático en el estudio de las funciones de Lipschitz. Otras motivaciones vienen del estudio de las ecuaciones integrales singulares y de las ecuaciones diferenciales.

En la segunda sección de este trabajo expondremos brevemente algunos resultados generales relacionados con las funciones de Lipschitz en los espacios $X_{2\pi}$. En la tercera sección consideraremos problemas de aproximación en normas de Lipschitz.

Para finalizar esta introducción presentamos la definición del módulo de continuidad en los espacios $L^p_{2\pi}$. Si $f \in L^p_{2\pi}$ se define, para $t > 0$,

$$\omega(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Las clases de Lipschitz $\text{Lip}_{2\pi}^{p,\alpha}$ de los espacios $L_{2\pi}^p$ se definen de manera análoga al espacio $C_{2\pi}$. En el resto del trabajo $\text{Lip}_\alpha(X_{2\pi})$ denota al espacio de Lipschitz de orden α correspondiente a $X_{2\pi}$.

2. APROXIMACIÓN EN LOS ESPACIOS $X_{2\pi}$

En la teoría de las series de Fourier, la información sobre las funciones es desplazada a los coeficientes de Fourier. Según un teorema conocido de Riemann, extendido por Lebesgue, la sucesión de los coeficientes de Fourier de una función de $L_{2\pi}^1$ converge a cero. En algunos casos se conocen estimados de la velocidad de convergencia de las sucesiones:

Teorema 3 (Lebesgue, [22]). *Si $f \in \text{Lip}_\alpha(X_{2\pi})$, existe una constante $C(f)$ tal que*

$$(2) \quad |a_k(f)| + |b_k(f)| \leq \frac{C(f)}{n^\alpha}.$$

Este resultado motiva la pregunta siguiente. Si para $f \in X_{2\pi}$ se cumple una desigualdad como la anterior ¿es cierto que $f \in \text{Lip}_\alpha(X_{2\pi})$? Hasta donde los autores conocen, este es un problema abierto, con la excepción del caso $X_{2\pi} = L_{2\pi}^2$. Esto es, dada $f \in L_{2\pi}^2$, se tiene que $f \in L_\alpha(L_{2\pi}^2)$ si y sólo si se cumple (2).

Los espacios de funciones de Lipschitz suelen utilizarse para medir la efectividad de la aproximación de funciones mediante polinomios trigonométricos. Una de las maneras más simples de construir procesos aproximativos es utilizando la convolución con una sucesión fija de operadores sometidos a ciertas restricciones. Según indicamos anteriormente, las sumas parciales de las series de Fourier se obtienen mediante la convolución con el núcleo de Dirichlet. Luego no cualesquiera convoluciones servirán para estos propósitos.

Teorema 4 ([7]). *Sea $(I_n) \subset L_{2\pi}^1$ una sucesión tal que:*

(i) *Para toda n ,*

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_n(s) ds = 1.$$

(ii) *Existe M tal que, para toda n ,*

$$\|I_n\|_{L_{2\pi}^1} \leq M.$$

(iii) *Para cada $\delta \in (0, \pi)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |u| \leq \pi} |I_n(u)| du = 0.$$

Entonces, cualquiera sea $f \in X_{2\pi}$ se tiene que

$$\|f - (f * I_n)\|_{X_{2\pi}} \rightarrow 0.$$

A las sucesiones (I_n) que satisfacen las hipótesis del teorema anterior se les denomina identidades (o unidades) aproximativas. Es claro que el núcleo de Dirichlet (D_n) no define una unidad aproximativa. Es más, considerando a (D_n) como endomorfismo de $L_{2\pi}^1$, se tiene el estimado:

Teorema 5 ([7]).

$$\|D_n\| := \sup_{f \in L_{2\pi}^1 : \|f\|_{L_{2\pi}^1} \leq 1} \|f * D_n\|_{L_{2\pi}^1} = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1).$$

Entre las identidades aproximativas más utilizadas están:

(i) La de Fejér, definida por

$$F_n(x) := \frac{1}{n+1} \left[\frac{\text{sen}((n+1)x/2)}{\text{sen}(x/2)} \right]^2, \quad x \neq 2j\pi;$$

(ii) La de Jackson, dada por

$$J_n(x) = \frac{3}{n(2n^2+1)} \left[\frac{\text{sen}(nx/2)}{\text{sen}(x/2)} \right]^4, \quad x \neq 2j\pi$$

(iii) La de Fejér-Korovkin, definida por

$$K_n(x) := \frac{2 \text{sen}^2(\pi/(n+2))}{n+2} \left[\frac{\cos((n+2)x/2)}{\cos(\pi/(n+2)) - \cos x} \right]^2, \quad x \neq \pm \frac{\pi}{n+2} + 2j\pi.$$

Nótese que los núcleos anteriores son pares y positivos.

La condición relacionada con la acotación uniforme de la norma de los operadores asociados se reduce, dada la positividad de estos núcleos, a estudiar el comportamiento de las sucesiones de los coeficientes de Fourier ($a_0(I_n)$).

Teorema 6 ([7]). *Si (I_n) es una sucesión de núcleos pares y positivos que satisfacen (3) se tiene que existe una constante $C = C(X_{2\pi})$ de forma que, cualquiera sea $f \in X_{2\pi}$ y n entero no negativo*

$$\|f - (f * I_n)\|_{X_{2\pi}} \leq C\omega\left(f, \sqrt{1 - a_1(I_n)}\right).$$

Con esto se tiene no sólo la convergencia sino además un estimado de su velocidad. En efecto; en la tabla que sigue tenemos el cálculo de los $a_1(I_n)$ para los núcleos definidos anteriormente.

| Núcleo | Coficiente |
|----------------|-----------------------------------|
| Fejér | $a_1(I_n) = 1 - \frac{1}{n+1}$ |
| Jackson | $a_1(I_n) = 1 - \frac{3}{2n^2+1}$ |
| Fejér-Korovkin | $a_1(I_n) = \cos \frac{\pi}{n+2}$ |

Utilizando el núcleo de Jackson (o el de Fejér-Korovkin) y el Teorema 6, obtenemos el conocido teorema de Jackson:

Teorema 7. *Para cada espacio $X_{2\pi}$, existe una constante $C = C(X_{2\pi})$ de forma que, para cada entero no negativo n y cada $f \in X_{2\pi}$,*

$$E_n(f) \leq C\omega\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Con los resultados precedentes en mano podemos estudiar otros procesos de aproximación mediante polinomios trigonométricos. Por ejemplo, consideremos algunos procesos de sumación de series trigonométricas de la manera siguiente.

Fijemos una matriz triangular $\mathcal{A} = (\rho_{n,k})$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y $k = 0, 1, \dots, n$. Asumamos que se satisfacen las condiciones siguientes: (i) $\rho_{0,0} = 1$; (ii) cualesquiera sean n y k fijo, tales que $0 \leq k \leq n$, se tiene que $0 < \rho_{n,k+1} \leq \rho_{n,k}$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{n,k} = 1.$$

Se define en $X_{2\pi}$ el método de sumación asociado a \mathcal{A} mediante la fórmula

$$A_n(f, x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{n,k} (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \operatorname{sen}(kx)).$$

Con diferentes matrices apropiadas se puede lograr la convergencia de $A_n(f)$ a f en los espacios $X_{2\pi}$. En particular, cuando

$$\rho_{n,k} = \frac{n+1-k}{n+1},$$

$A_n(f)$ coincide con las medias de Cesàro definidas por

$$\sigma_n(f, x) := \frac{1}{n+1} (S_0(f, x) + S_1(f, x) + \dots + S_n(f, x)),$$

las que, a su vez, coinciden con la convolución de f con el núcleo de Fejér.

El análisis de la exactitud de los estimados relacionados con un cierto proceso de aproximación, se puede realizar estudiando su comportamiento en las clases de las funciones de Lipschitz. En general esto se hace mediante la búsqueda de algún teorema de tipo inverso. En efecto, de un teorema inverso debido a Bernstein y del Teorema de Jackson, se tiene que:

Teorema 8 ([7], [8]). *Para $f \in X_{2\pi}$ y $\alpha \in (0, 1)$,*

$$f \in \operatorname{Lip}_\alpha(X_{2\pi}) \quad \text{si y sólo si} \quad E_n(f) \leq \frac{C(f)}{n^\alpha}.$$

En particular se infiere de este resultado que el estimado de Jackson no puede ser mejorado (en cuanto a la velocidad de convergencia).

Existen funciones $f \in C_{2\pi}$ tales que $E_n(f) \leq C(f)/n$ y $f \notin \operatorname{Lip}^1(X_{2\pi})$. Para caracterizar a estas funciones debemos utilizar algunas ideas de Zygmund. Dado $\alpha \in (0, 1]$, diremos que $f \in \operatorname{Lip}_*^\alpha(X_{2\pi})$ si existe una constante M tal que, cualesquiera sean $x, h \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq M|h|^\alpha.$$

Teorema 9 ([21]). *Para $f \in C_{2\pi}$ se tiene que*

$$f \in \operatorname{Lip}_*^1(C_{2\pi}) \quad \text{si y sólo si} \quad E_n(f) \leq \frac{C(f)}{n}.$$

Se pueden caracterizar las funciones $f \in X_{2\pi}$, para las cuales existe la derivada r -ésima y $f^{(r)} \in \operatorname{Lip}^\alpha(X_{2\pi})$. Igualmente introducir los espacios $\operatorname{Lip}^\alpha(X_{2\pi})$ y $\operatorname{Lip}_*^\alpha(X_{2\pi})$, con $\alpha \geq 1$. Para tales estudios se necesita introducir módulos de continuidad de orden superior [6]. También en esta referencia, el lector puede consultar

otros resultados relacionados con identidades aproximativas y sumación de series de Fourier. Por otro lado, en los trabajos de J. Prestin [15], [16], [17] y [18], el lector puede encontrar caracterizaciones de diversas clases de funciones de Lipschitz.

3. ESPACIOS HOMOGÉNEOS

El estudio de la convergencia de las series de Fourier en diversos espacios se puede unificar mediante la introducción de los llamados espacios homogéneos.

Necesitamos una nueva notación: si f es una función 2π -periódica y $t \in \mathbb{R}$, denotemos $f_t(x) := f(x - t)$ (atendiendo al contexto, no debe confundirse la notación con el elemento f_n de la sucesión (f_n)). Se dice que un subespacio B de $L^1_{2\pi}$ provisto con una norma $\|\cdot\|_B$ es un espacio homogéneo si: (i) B es un espacio de Banach; (ii) existe una constante positiva C tal que, cualquiera sea $f \in B$, $\|f\|_{L^1_{2\pi}} \leq C\|f\|_B$; (iii) B contiene los polinomios trigonométricos; (iv) cualesquiera sean $f \in B$ y $t \in \mathbb{R}$, $\|f_t\|_B = \|f\|_B$; (v) cualquiera sea $f \in B$, la función $L(f, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow B$, definida por $L(f, t)(x) = f_t(x)$, es continua.

Las ideas primarias sobre los espacios homogéneos están en un artículo de Plessner [14]. A partir de ellas surgen trabajos de Bochner [1], Shilov [20], entre otros.

Teorema 10 ([10], [11]). *Si B es un espacio homogéneo, entonces las medias de Cesàro de cada función $f \in B$ convergen a f en la norma de B . En particular, los polinomios trigonométricos son densos en B .*

En realidad, conociendo la relación entre las sumas de Cesàro y el núcleo de Fejér, este teorema es un caso particular del siguiente:

Teorema 11 ([10], [11]). *Si B es un espacio homogéneo e (I_n) es una unidad aproximativa se tiene que, cualquiera sea $f \in B$,*

$$\|K_n * f - f\|_B \longrightarrow 0.$$

Es fácil verificar que los espacios $X_{2\pi}$ son homogéneos. También lo son los espacios $C^{(k)}_{2\pi}$ con la norma

$$\|f\| := \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty$$

y otros muchos. Sin embargo, los espacios $\text{Lip}^\alpha(X_{2\pi})$ no son espacios homogéneos, pues no se cumple la condición (v) de la definición anterior. A pesar de ello uno puede considerar espacios homogéneos de funciones de Lipschitz si nos limitamos a ciertos subespacios. Por ejemplo, para $\alpha \in (0, 1)$ sea

$$\text{lip}^\alpha(X_{2\pi}) := \{f \in \text{Lip}^\alpha(X_{2\pi}) : L(f, t) \text{ es continua}\}.$$

Para $\alpha \in (0, 1)$, $\text{lip}^\alpha(X_{2\pi})$ es un espacio homogéneo (ver [13]) y se tiene que

$$f \in \text{lip}^\alpha(X_{2\pi}) \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(f, t)}{t^\alpha} = 0,$$

donde el módulo de continuidad es el correspondiente al denotado por $X_{2\pi}$. Además, por el Teorema 10, $\text{lip}^\alpha(X_{2\pi})$ es la clausura de los polinomios trigonométricos en $\text{lip}^\alpha(X_{2\pi})$.

Existen otras formas de obtener espacios homogéneos de funciones periódicas. Veamos un tratamiento debido a M. A. Jiménez (ver [9]).

Se trata de modificar la definición tradicional de los espacios $\text{lip}^\alpha(X_{2\pi})$, para $1 \leq p < \infty$. Consideremos en \mathbb{R} la pseudométrica

$$\forall x, y \in [0, 2\pi), \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad d(x + 2j\pi, y + 2k\pi) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\}.$$

Para $f \in L^p_{2\pi}$, $\alpha > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$, definamos Lebesgue casi dondequiera

$$F_\alpha(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)^\alpha}; \quad \text{si } x \neq y.$$

Los espacios B^α_p están compuestos por aquellas funciones $f \in L^p_{2\pi}$ tales que $F_\alpha f \in L^p((2\pi)^2)$ y en B^α_p se considera la norma

$$\|f\|_{p,\alpha} := (\|f\|_p^p + \|F_\alpha(f)\|_p^p)^{1/p}.$$

Teorema 12 ([9]). *Para cada $1 \leq p < \infty$ y $0 < \alpha \leq 1$, B^α_p es un espacio homogéneo y el espacio clásico de Lipschitz $\text{Lip}^\alpha(L^p_{2\pi})$ se sumerge continuamente en B^α_p .*

En espacios como estos se puede aplicar el Teorema 11.

Terminamos esta sección indicando un resultado interesante relacionado con el espacio B^α_2 . A diferencia de los espacios $\text{Lip}^\alpha(L^2_{2\pi})$, B^α_2 se convierte en un espacio de Hilbert si consideramos el producto escalar

$$\langle f; g \rangle := \langle f; g \rangle_{L^2_{2\pi}} + \langle F_\alpha f; F_\alpha g \rangle_{L^2_{(2\pi)^2}}.$$

Aún más, el sistema clásico de las funciones trigonométricas constituye una base ortogonal en este espacio. Se infiere entonces que las funciones en B^α_2 tienen formalmente el mismo desarrollo en serie de Fourier que en $L^2_{2\pi}$. En particular, dada $f \in B^\alpha_2$ y un entero no negativo n , la mejor aproximación trigonométrica de f se alcanza justamente en el polinomio que realiza la mejor aproximación en la norma original, esto es, en la norma $\|\cdot\|_{L^2_{2\pi}}$.

4. APROXIMACIÓN EN NORMA DE LIPSCHITZ

En la sección anterior presentamos un resultado cualitativo relacionado con la aproximación de funciones en las clases $\text{lip}^\alpha(X_{2\pi})$. Veamos algunos resultados cuantitativos. Necesitamos algunas notaciones preliminares.

Si $f \in X_{2\pi}$, $\alpha \in (0, 1)$, para cada $t > 0$ sea

$$(4) \quad \theta_\alpha(f, t) := \sup_{0 < s \leq t} \frac{\omega(f, s)}{s^\alpha}.$$

Se ha demostrado en varios trabajos ([2], [3] y [5]), que esta función es un módulo de continuidad adecuado para estudiar la aproximación en espacios de funciones de Lipschitz.

En particular, se sigue de los resultados presentados en [2], que los polinomios construidos a partir del núcleo de Jackson para obtener una buena aproximación en $X_{2\pi}$, también ofrecen una buena aproximación en las normas de los espacios $\text{lip}^\alpha(X_{2\pi})$.

A partir del módulo de continuidad (4) se puede reiterar el proceso de definición de los espacios de Lipschitz para obtener nuevos espacios de Lipschitz con condiciones más fuertes. Por ejemplo, si $\alpha \in (0, 1)$ y $\beta \in (0, \alpha)$ se consideran el espacio $\text{lip}^{\alpha, \beta}(X_{2\pi})$ de las funciones $f \in \text{lip}^\alpha(X_{2\pi})$ para las cuales

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta_\alpha(f, t)}{t^\beta} = 0.$$

Con la norma

$$\|f\|_{\alpha, \beta} := \|f\|_{X_{2\pi}} + \theta_\alpha(f) + \sup_{0 < t \leq 2\pi} \frac{\theta_\alpha(f, t)}{t^\beta}.$$

Se obtiene un espacio homogéneo de Banach. Según [2] se sabe que, si denotamos por $E_{n, \alpha}(f)$ a la mejor aproximación de f en la norma de $\text{Lip}^\alpha(X_{2\pi})$ mediante polinomios trigonométricos, se tiene que

$$E_{n, \alpha}(f) \leq \frac{C(f)}{n^\beta} \quad \text{si y sólo si} \quad \theta_\alpha\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{D(f)}{n^\beta}.$$

Una última observación referente a las sumas de las series de Fourier que se expresen a través de la convolución con una unidad aproximativa (I_n), como en el caso de la suma de Cesàro.

Si $f \in \text{lip}^\alpha(C_{2\pi})$, entonces el módulo de continuidad (4), del producto de convolución de f con I_n , se acota de la manera siguiente

$$|(I_n * f)(x + t) - (I_n * f)(x)| \leq M \|f_t - f\|_\infty,$$

donde $M = \sup \|I_n\|_{L^1_{2\pi}}$.

Luego,

$$\sup_n \theta_\alpha(I_n * f, t) \leq M \theta_\alpha(f, t) \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

Se dice entonces que la sucesión es equilipschitziana y se deduce también por esta vía, un resultado válido incluso en contextos más generales, la convergencia de $I_n * f$ a f (ver [4]). Por otra parte, esta aproximación se puede igualmente cuantificar utilizando el estimado establecido en [12].

REFERENCIAS

- [1] S. Bochner, Additive set functions on groups, *Ann. of Math.* **40** (1939), 769–799.
- [2] J. Bustamante y M. A. Jiménez, The degree of best approximation in the Lipschitz norm by trigonometric polynomials, *Aportaciones Matemáticas* **25** (1999), 23–30.
- [3] J. Bustamante y M. A. Jiménez, Fourier series and convergence in Lipschitz norms, *Aportaciones Matemáticas* **25** (1999), 147–151.
- [4] J. Bustamante y M. A. Jiménez, Chebyshev and Hölder approximation, *Aportaciones Matemáticas* **27** (2000), 23–31.
- [5] J. Bustamante, D. Mocenchua y Carlos A. López, Smoothness of the remainder and Hölder norms, *Aportaciones Matemáticas* **27** (2000), 33–45.
- [6] P. L Butzer y H. Berens, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer-Verlag, Nueva York-Berlín, 1967.
- [7] P. L. Butzer y R. J. Nessel, *Fourier analysis and approximation theory, Vol. 1: One-dimensional theory*, Acad. Press, Nueva York y Londres, 1971.
- [8] E. W. Cheney, *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1966.
- [9] M. A. Jiménez, A new approach to Lipschitz spaces of periodic integrable functions, *Aportaciones Matemáticas* **25** (1999), 153–157.

- [10] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Wiley & Sons, 1968.
- [11] R. Lasser, *Introduction to Fourier Series*, Pure and Applied Math., M. Dekker, Nueva York-Basel-Hong Kong, 1996.
- [12] L. Leindler, A. Meir y V. Totik, On approximation of continuous functions in Lipschitz norms, *Acta Math. Hung.* **45** (1985), 411–443.
- [13] H. Mirkil, Continuous translation of Hölder and Lipschitz functions, *Can. J. Math.* **12** (1960), 674–685.
- [14] A. Plessner, Eine Kennzeichnung der totalstetig Funktionen, *J. Reine Angew. Math.* **160** (1929), 26–32.
- [15] J. Prestin, Best approximation in Lipschitz space, *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai* **49** (1985), 753–759.
- [16] J. Prestin, On the approximation by de la Vallée Poussin sums and interpolatory polynomials in Lipschitz norms, *Analysis Math.* **13** (1987), 251–259.
- [17] J. Prestin, Trigonometric interpolation in Hölder spaces, *J. Approx. Theory* **53** (1988), 145–154.
- [18] J. Prestin, Approximation in Hölder norms with higher order differences, *Rostock Math. Kolloq.* **51** (1997), 33–50.
- [19] T. H. Rivlin, *An introduction to the approximation theory*, Dover, Nueva York, 1969.
- [20] G. E. Shilov, Homogeneous rings of functions (en ruso), *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)* **6** (1951), no. 1 (41), 91–137. Traducción al inglés: *Amer. Math. Soc. Translation* **1953** (1953), no. 92.
- [21] A. Zygmund, Smooth functions, *Duke Math. J.* **12** (1945), 47–76.
- [22] A. Zygmund, *Trigonometrics series*, Dover, Nueva York, 1955.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA, APARTADO POSTAL J-27, COLONIA SAN MANUEL, PUEBLA, 72571, PUE., MÉXICO

Correo electrónico: jbusta@fcfm.buap.mx, mjimenez@fcfm.buap.mx

CEROS DE POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV

MANUEL ALFARO Y M. LUISA REZOLA

En recuerdo a Chicho

ABSTRACT. In this expository paper, zeros of Sobolev orthogonal polynomials are considered. Properties like location, interlacing or asymptotic distribution of zeros are presented.

1. INTRODUCCIÓN

Los ceros de los polinomios ortogonales desempeñan un papel importante en teoría de interpolación, fórmulas de cuadratura, teoría espectral de algunos operadores lineales, diseño de filtros digitales, ... por lo que su estudio posee gran interés.

Dada una medida de Borel finita y positiva μ con soporte S_μ contenido en \mathbb{R} , la expresión

$$(p, q) = \int_{S_\mu} pq \, d\mu, \quad p, q \in \mathcal{P},$$

define un producto escalar en el espacio \mathcal{P} de los polinomios con coeficientes reales, que tiene asociada una sucesión de polinomios ortogonales (única salvo un factor multiplicativo). En lo sucesivo, llamaremos estándar tanto a estos productos como a sus correspondientes polinomios ortogonales.

Nótese que el operador multiplicación por x es simétrico respecto a este producto, es decir, $(xp, q) = (p, xq)$, $\forall p, q \in \mathcal{P}$.

Los ceros de los polinomios ortogonales estándar tienen buenas propiedades. Así, están situados en el interior de la envoltura convexa de S_μ (luego son reales), son simples y los de cada dos polinomios consecutivos se entrelazan. (Para las propiedades generales de los polinomios ortogonales ver, por ejemplo, [10] y [31].)

En la década de los sesenta, motivados por un artículo de Lewis [16] en el que mediante mínimos cuadrados se estudiaba la aproximación simultánea de una función y sus derivadas, varios matemáticos alemanes estudiaron productos escalares del tipo

$$(1.1) \quad (p, q)_S = \int_{S_{\mu_0}} pq \, d\mu_0 + \lambda \int_{S_{\mu_1}} p'q' \, d\mu_1$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 33C45, 42C05.

Key words and phrases. Sobolev orthogonal polynomials, zeros.

La investigación de ambos autores está subvencionada por el proyecto BFM2000-0206-C04-03 de la DGI.

siendo μ_0 y μ_1 medidas con $S_{\mu_0} = S_{\mu_1}$ un intervalo de \mathbb{R} y $\lambda \geq 0$. Si $\lambda > 0$, el producto no es estándar (obsérvese que el operador multiplicación no es simétrico) y los correspondientes polinomios ortogonales poseen propiedades distintas de las usuales en los polinomios estándar, entre ellas el comportamiento de los ceros.

Los primeros resultados sobre ceros fueron dados por Althammer [6], Brenner [7] y Cohen [11] para casos particulares de (1.1): $\mu_0 = \mu_1$ clásicas, obteniendo sobre localización de ceros situaciones similares a las de los polinomios estándar, si bien en [6] se da el primer ejemplo de un producto escalar Sobolev para el que un polinomio tiene un cero fuera del intervalo de ortogonalidad. Además, en [11], se plantean cuestiones tales como entrelazamiento de ceros de polinomios consecutivos o dependencia monótona de los ceros del parámetro λ , que se dejan abiertas.

El producto (1.1) es un caso particular de los llamados productos escalares Sobolev, denominación que suele emplearse para aquéllos en que aparecen derivadas. Más concretamente, un producto escalar Sobolev es de la forma

$$(1.2) \quad (p, q)_S = \sum_{i=0}^m M_i \int_{S_{\mu_i}} p^{(i)} q^{(i)} d\mu_i$$

donde μ_i son de Borel, finitas y positivas, con $S_{\mu_i} \subset \mathbb{R}$, $M_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m-1$ y $M_0, M_m > 0$. Para garantizar la existencia de sucesión de polinomios ortogonales respecto de (1.2), hay que imponer que al menos uno de los soportes S_{μ_i} sea un conjunto infinito.

Nos encontramos ahora con dos situaciones generales. Si las medidas μ_i , $i = 1, \dots, m$, son discretas, los polinomios ortogonales asociados reciben el nombre de polinomios ortogonales tipo Sobolev o Sobolev discretos. Cuando todas las medidas en (1.2) poseen parte absolutamente continua, tenemos los llamados polinomios ortogonales Sobolev continuos que corresponden a ortogonalidad en espacios de Sobolev.

Es de señalar que en la literatura sobre polinomios ortogonales se consideran también formas bilineales definidas a partir de funcionales lineales que en el caso de ser positivos, por el teorema de Riesz, poseen una representación integral. Esta situación puede aplicarse para definir también productos Sobolev, sin embargo en este artículo, por razones de simplicidad, nos limitaremos a los casos de productos definidos mediante medidas. Por los mismos motivos nos centraremos principalmente en el estudio de productos escalares reales.

El propósito de este trabajo es presentar una exposición no exhaustiva sobre el comportamiento de los ceros de los polinomios ortogonales Sobolev contemplando las dos situaciones citadas. Uno de los puntos de interés de este tema es que las propiedades de tales ceros difieren notablemente de las de los ceros de los polinomios estándar.

2. PRODUCTOS SOBOLÉV DISCRETOS

Durante los últimos años varios autores han estudiado polinomios ortogonales respecto de productos escalares tipo Sobolev de la forma

$$(2.1) \quad (p, q)_S = \int_I p q d\mu + \sum_{i=0}^m M_i p^{(i)}(c) q^{(i)}(c),$$

donde μ es una medida de Borel positiva y finita soportada en un intervalo I de \mathbb{R} , $c \notin I^\circ$ (el interior de I), $m \geq 1$, $M_i \geq 0$ para $i = 0, \dots, m - 1$ y $M_m > 0$. La localización de los ceros de los polinomios Q_n ortogonales respecto del producto (2.1) ha sido considerada por ejemplo en [4], [14], [15], [20], [23], destacando la existencia de ceros fuera de la envoltura convexa de $I \cup \{c\}$, que pueden ser incluso complejos ([2], [24]).

Uno de los primeros resultados sobre ceros de los polinomios Q_n es que éstos tienen al menos $n - (m + 1)$ cambios de signo o ceros de multiplicidad impar en I° siempre que $n \geq m + 1$. Esta propiedad es debida a que los polinomios Q_n son cuasi-ortogonales de orden $m + 1$ con respecto de la medida $(x - c)^{m+1} d\mu$, esto es, $\int_I p Q_n (x - c)^{m+1} d\mu = 0$ para todo polinomio p con $\text{gr } p \leq n - (m + 1) - 1$.

Analizando dos casos particulares de producto Sobolev, se tiene:

- (i) Si $M_i = 0$ para $i = 1, \dots, m - 1$ y $M_0 > 0$ entonces, siempre que $n \geq m + 1$, Q_n tiene al menos $n - 2$ ceros de multiplicidad impar en I° . Además, si c pertenece a la frontera de I , Q_n tiene al menos $n - 1$ ceros de multiplicidad impar en I° (ver [4], [28]).
- (ii) Cuando el producto (2.1) es

$$(p, q)_S = \int_I p q d\mu + M_r p^{(r)}(c) q^{(r)}(c) + M_s p^{(s)}(c) q^{(s)}(c)$$

donde $1 \leq r < s$ y $M_r, M_s > 0$ entonces, para cada $n \geq s + 1$, Q_n tiene al menos $n - 2$ ceros de multiplicidad impar en I° (ver [8]).

Estos dos resultados parecen sugerir que el número de ceros de Q_n en I° no depende del orden de las derivadas en el producto (2.1) sino del número de términos en la parte discreta del producto escalar. Esta conjetura fue resuelta afirmativamente en [1] incluso cuando los coeficientes M_i en el producto son negativos, no siendo en este caso el producto definido positivo.

Consideremos el producto

$$(2.2) \quad (p, q)_S = \int_{S_\mu} p q d\mu + \sum_{i=1}^m M_i p^{(\nu_i)}(c) q^{(\nu_i)}(c),$$

donde μ es una medida de Borel positiva y finita con soporte conteniendo un conjunto infinito de puntos, $S_\mu \subset \mathbb{R}$, $0 \leq \nu_1 < \dots < \nu_m$ y $M_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sea \mathbb{Z}_+ el conjunto de los enteros positivos y Q_n el n -ésimo polinomio mónico de menor grado, no idénticamente cero, tal que $(p, Q_n)_S = 0$, $p \in \mathcal{P}_{n-1}$. La existencia de Q_n se deduce de resolver un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas. La unicidad se sigue de imponer que sea la solución polinómica de menor grado. Si el producto es definido positivo entonces el grado de Q_n es n y todos los Q_n son distintos. En general, esto no es así y para distintos valores de n podemos tener el mismo Q_n . Para los polinomios Q_n , ortogonales respecto de (2.2), tenemos el siguiente resultado sobre localización de sus ceros:

Teorema 1 ([1]). *Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, Q_n tiene al menos $n - \bar{n}$ cambios de signo en el interior de la envoltura convexa de S_μ , donde \bar{n} denota el número de términos en la parte discreta del producto (2.2) cuyo orden de derivación es menor que n .*

Como consecuencia de este teorema y del teorema 4 en [17], se tiene que para n suficientemente grande y cierto tipo de medidas μ para las que exista la llamada asintótica relativa de la sucesión (Q_n) (por ejemplo, medidas tales que la derivada de Radon-Nikodym, μ' , respecto de la medida de Lebesgue es mayor que cero en casi todo punto de S_μ), los polinomios Q_n ortogonales con respecto a (2.2) con $M_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, m$, tienen exactamente $n - m$ ceros simples en el interior de S_μ y los m ceros restantes son atraídos por el punto c .

En [3], [5], [14], por ejemplo, pueden verse resultados sobre acotación y aceleración de los ceros que están fuera del soporte de la medida en términos de las masas M_i cuando S_μ es un intervalo I y c pertenece a la frontera de I .

Otra propiedad interesante es el entrelazamiento de los ceros de estos polinomios ortogonales. Si no hay parte discreta tenemos la definición clásica de ortogonalidad y todos los ceros de Q_{n+1} entrelazan con los de Q_n . Para productos tipo Sobolev con $M_i \geq 0$, los polinomios Q_n y Q_{n+1} pueden tener ceros comunes (ver [2]). Si algunos coeficientes M_i son negativos, sabemos que puede ocurrir que $Q_n \equiv Q_{n+1}$. La propiedad de separación de los ceros de los polinomios ortogonales estándar se puede deducir de la fórmula de cuadratura de Gauss-Jacobi (ver por ejemplo teorema 6.2, p. 34 de [10]). Usando la cuasi-ortogonalidad de Q_n respecto de la medida $(x - c)^{\nu_{m+1}} d\mu$, en [1] se obtiene una fórmula de cuadratura tipo Gauss-Jacobi y a partir de ella, información sobre el entrelazamiento entre los ceros de Q_n y Q_{n+1} . Más concretamente, si designamos por $x_{n1} < x_{n2} < \dots < x_{nN_n}$ los puntos del interior de la envoltura convexa de S_μ , $(\text{co}(S_\mu))^\circ$, donde Q_n cambia de signo y por κ_n el número de intervalos $I_{nh} = (x_{nh}, x_{n,h+1})$, $h = 1, \dots, N_n - 1$ que contienen al menos un punto donde Q_{n+1} cambia de signo, entonces se tiene:

Teorema 2 ([1]). *Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $2\nu_j + 3 \leq n < \nu_{j+1}$ ($j = 0, \dots, m$) se cumple uno de los dos casos siguientes:*

- (i) $\kappa_n \geq n - 2\nu_j - 3$, o
- (ii) *los polinomios Q_n y Q_{n+1} tienen al menos $\lfloor \frac{1}{2}(n + 1 - \nu_j + N_{n+1}) \rfloor$ ceros comunes en $(\text{co}(S_\mu))^\circ$, donde $\lfloor x \rfloor$ designa la parte entera de x .*

En consecuencia, una situación interesante aparece cuando consideramos el producto

$$(p, q)_S = \int_{S_\mu} p q d\mu + \sum_{i=0}^{m-1} M_i p^{(i)}(c) q^{(i)}(c)$$

donde $c \in \mathbb{R} \setminus \text{co}(S_\mu)$, $M_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mu' > 0$ en casi todo punto de $\text{co}(S_\mu)$. Hemos señalado antes que, en este caso y para n suficientemente grande, Q_n tiene $n - m$ ceros en $(\text{co}(S_\mu))^\circ$ y el resto fuera de $\text{co}(S_\mu)$. Por lo tanto no se da el caso (ii) del teorema anterior y se tiene que $\kappa_n \geq n - 2m - 1$ para n grande.

Permanece abierto el estudio anterior cuando en la parte discreta del producto (2.2) consideramos puntos distintos $(c_i)_{i=1}^m$.

3. PRODUCTOS SOBOLEV CONTINUOS

Para polinomios ortogonales de Sobolev continuos, a diferencia de lo que ocurre en el caso discreto, en general, no se conocen propiedades de cuasi-ortogonalidad

de estos polinomios respecto de alguna medida. Esto lleva consigo que la técnica de localización de ceros citada en el caso discreto no puede aplicarse ahora.

En la última década, se han obtenido bastantes resultados para productos (1.1) con medidas μ_0 y μ_1 particulares, generalmente, clásicas o modificaciones de las clásicas (pares coherentes). Se trata de resultados de localización, en los que es bastante habitual que haya un cero (dos, en los casos simétricos) fuera del soporte de la medida, como ocurría en el ejemplo de Althammer, y de entrelazamiento de los ceros de los polinomios Sobolev con los ceros de los polinomios ortogonales respecto de μ_0 (véase, por ejemplo, [21], [25], [27]). También se ha probado para determinados productos la existencia de ceros complejos ([9], [26]).

Por otra parte, propiedades sobre acumulación de ceros pueden deducirse a partir de propiedades asintóticas de los polinomios. En efecto, si (P_n) es una sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto de una medida μ con soporte en un intervalo I y probamos que Q_n/P_n converge a una función no nula, uniformemente sobre compactos de $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$, el teorema de Hurwitz nos permite afirmar que los ceros de los polinomios Q_n se acumulan en I . Resultados de este tipo pueden verse en [22], entre otros.

La distribución asintótica de ceros de polinomios ortogonales y de sus derivadas puede deducirse a partir de resultados de convergencia débil de medidas. A cada polinomio p de grado n , se le puede asociar su medida de contar ceros normalizada:

$$\nu(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j}$$

donde x_1, \dots, x_n son los ceros de p , contados tantas veces como indica su multiplicidad y δ_{x_j} es la medida de Dirac en x_j . Se dice que una sucesión de polinomios (p_n) con $\text{gr } p_n = n$, tiene distribución asintótica de ceros μ , si μ es una medida de probabilidad y la sucesión de sus medidas de contar normalizadas $(\nu(p_n))$ converge débilmente a μ

$$\nu(p_n) \xrightarrow{*} \mu,$$

es decir, para toda función continua f se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\nu(p_n) = \int f d\mu.$$

La distribución asintótica de ceros para polinomios estándar ha sido ampliamente estudiada. Una referencia obligada es [30], donde se introduce la clase **Reg** de medidas regulares. Uno de los motivos de interés de esta clase es que si una medida $\mu \in \mathbf{Reg}$ y con (P_n) denotamos sus correspondientes polinomios ortogonales mónicos, entonces

$$\nu(P_n) \xrightarrow{*} \omega_{S_\mu},$$

donde ω_{S_μ} es la medida de equilibrio de S_μ .

En esta dirección, en [13] se ha probado:

Teorema 3. *Sea Q_n la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto de (1.1), donde μ_0 y μ_1 son medidas sobre \mathbb{R} de la clase **Reg**, con soportes compactos*

que verifican ciertas condiciones de regularidad. Entonces,

$$\nu(Q'_n) \xrightarrow{*} \omega_{S_{\mu_0} \cup S_{\mu_1}}.$$

Además, si $S_{\mu_1} \subset S_{\mu_0}$ entonces

$$\nu(Q_n) \xrightarrow{*} \omega_{S_{\mu_0}}.$$

4. PRODUCTOS SOBOLEV GENERALES

El problema de la localización de los ceros de los polinomios Q_n ortogonales respecto de productos más generales como

$$(4.1) \quad (p, q)_S = \sum_{k=0}^m \int p^{(k)}(x) \overline{q^{(k)}(x)} d\mu_k,$$

donde $(\mu_k)_{k=0}^m$ son medidas de Borel positivas y finitas con soporte compacto contenido en \mathbb{C} , no es trivial. Como antes hemos citado, tanto en el caso discreto como en el continuo, ejemplos sencillos muestran que los ceros no están necesariamente en la envoltura convexa de la unión de los soportes de las medidas μ_k y que incluso cuando todas las medidas μ_k están soportadas en \mathbb{R} puede haber ceros complejos. En [13], se presentan algunos resultados numéricos en esta línea.

Los primeros resultados para estos productos aparecen en [18], donde bajo condiciones bastante generales sobre las medidas μ_k con $S_{\mu_k} \subset \mathbb{R}$ se obtiene que los ceros de los polinomios ortogonales Sobolev están contenidos en un subconjunto compacto del plano complejo. Éste y otros resultados han sido generalizados en [19] para medidas con soporte compacto en \mathbb{C} . Más concretamente, sea M el operador multiplicación definido en \mathcal{P} , $Mp(z) = zp(z)$, entonces se tiene:

Teorema 4 ([19]). *Si el operador multiplicación M está acotado entonces los ceros de los polinomios Q_n , ortogonales respecto de (4.1), están contenidos en el disco $\{z : |z| \leq \|M\|\}$.*

Por su elegancia y sencillez exponemos a continuación la demostración de este hecho:

Sea z_0 un cero de Q_n entonces $zp(z) = z_0p(z) + Q_n(z)$ con $p \in \mathcal{P}_{n-1}$. Como p y Q_n son ortogonales se tiene

$$|z_0|^2 \|p\|_S^2 = \|zp\|_S^2 - \|Q_n\|_S^2 \leq \|zp\|_S^2 = \|Mp\|_S^2 \leq \|M\|^2 \|p\|_S^2.$$

Se dice que el producto (4.1) es **secuencialmente dominado** si cumple las siguientes condiciones:

- (i) $S_{\mu_k} \subset S_{\mu_{k-1}}$, $k = 1, \dots, m$.
- (ii) $d\mu_k = f_{k-1} d\mu_{k-1}$, $f_{k-1} \in L_\infty(\mu_{k-1})$, $k = 1, \dots, m$.

Por ejemplo, es secuencialmente dominado cuando todas las medidas μ_k son iguales.

Este concepto fue introducido en [18] demostrándose que es una condición suficiente para que el operador multiplicación sea acotado. En un principio pareció que ésta era una condición demasiado restrictiva, sin embargo en un reciente trabajo

(ver [29]) se ve que para una amplia clase de productos escalares Sobolev soportados en \mathbb{R} la acotación del operador multiplicación implica que la norma asociada al producto es equivalente a la norma de un producto secuencialmente dominado.

Puede ocurrir que el producto no sea secuencialmente dominado y sin embargo que los ceros de los polinomios Q_n estén uniformemente acotados, como muestra el siguiente teorema para el producto (4.1) con $m = 1$.

Teorema 5 ([18]). *Si $\text{co}(S_{\mu_0}) \cap \text{co}(S_{\mu_1}) = \emptyset$, entonces los ceros de Q'_n son simples y están contenidos en el interior de $\text{co}(S_{\mu_0}) \cup \text{co}(S_{\mu_1})$, y los ceros de Q_n están contenidos en el disco centrado en el punto de $\text{co}(S_{\mu_1})$ más alejado de $\text{co}(S_{\mu_0})$ y radio el diámetro de $\text{co}(S_{\mu_0}) \cup \text{co}(S_{\mu_1})$.*

Recientemente, en [12] se ha extendido el resultado del teorema 4 a productos del tipo (4.1) sin imponer que los soportes S_{μ_k} sean compactos, mejorando la cota que allí aparece. El nuevo método empleado para la localización de los ceros no hace uso de la acotación del operador multiplicación.

El resultado a que nos referimos es el siguiente:

Teorema 6 ([12]). *Sea el producto (4.1) donde $d\mu_k = w_k d\mu$ con $\frac{w_k}{w_{k-1}} \in L_\infty(\mu)$, $k = 1, \dots, m$. Si z_0 es un cero de Q_n entonces*

$$d(z_0, \text{co}(S_\mu)) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^m k^2 \|w_k/w_{k-1}\|_\infty}$$

Permanece abierta la cuestión de si los ceros de los polinomios ortogonales Sobolev están uniformemente acotados incluso cuando los soportes de las medidas sean compactos.

REFERENCIAS

- [1] M. Alfaro, G. López y M. L. Rezola, Some properties of zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **69** (1996), 171–179.
- [2] M. Alfaro, F. Marcellán, H. G. Meijer y M. L. Rezola, Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products, *J. Math. Anal. Appl.* **184** (1994), 360–381.
- [3] M. Alfaro, F. Marcellán y M. L. Rezola, Estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials, *Appl. Anal.* **67** (1997), 157–174.
- [4] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux, On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 737–757.
- [5] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux, Sobolev-type orthogonal polynomials: the nondiagonal case, *J. Approx. Theory* **83** (1995), 266–287.
- [6] P. Althammer, Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation, *J. Reine Angew. Math.* **211** (1962), 192–204.
- [7] J. Brenner, Über eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen, en *Constructive theory of functions* (Budapest, 1969), Akadémiai Kiadó, Budapest (1972), 77–83.
- [8] M. G. de Bruin, A tool for locating zeros of orthogonal polynomials in Sobolev inner product spaces, *J. Comput. Appl. Math.* **49** (1993), 27–35.
- [9] M. G. de Bruin y H. G. Meijer, Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete Sobolev spaces, *Ann. Numer. Math.* **2** (1995), 233–246.
- [10] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, Nueva York, 1978.

- [11] E. A. Cohen, Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in the Sobolev space $W^{1,2}[-1, 1]$, *SIAM J. Math. Anal.* **6** (1975), 105–116.
- [12] A. J. Durán y E. B. Saff, Zero location for nonstandard orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* (por aparecer).
- [13] W. Gautschi y A. B. J. Kuijlaars, Zeros and critical points of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **91** (1997), 117–137.
- [14] R. Koekoek, *Generalizations of classical Laguerre polynomials and some q -analogues*, Doctoral Dissertation, Techn. Univ. of Delft, Holanda, 1990.
- [15] R. Koekoek y H. G. Meijer, A generalization of Laguerre polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), 768–773.
- [16] D. C. Lewis, Polynomial least square approximation, *Amer. J. Math.* **69** (1947), 273–278.
- [17] G. López, F. Marcellán y W. Van Assche, Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product, *Constr. Approx.* **11** (1995), 107–137.
- [18] G. López Lagomasino y H. Pijeira Cabrera, Zero Location and nth Root Asymptotics of Sobolev Orthogonal Polynomials, *J. Approx. Theory* **99** (1999), 30–43.
- [19] G. López Lagomasino, H. Pijeira Cabrera y I. Pérez Izquierdo, Sobolev orthogonal polynomials in the complex plane, *J. Comput. Appl. Math.* **127** (2001), 219–230.
- [20] F. Marcellán, T. E. Pérez y M. A. Piñar, On zeros of Sobolev type orthogonal polynomials, *Rend. Mat. Appl.* **12** (1992), 455–473.
- [21] F. Marcellán, T. E. Pérez y M. A. Piñar, Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials, en *Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II* (Wilrijk, 1993), *Math. Appl.* **296**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1994), 71–82.
- [22] A. Martínez-Finkelshtein y J. J. Moreno-Balcázar, Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for a Jacobi weight, *Methods Appl. Anal.* **4** (1997), 430–437.
- [23] H. G. Meijer, Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space, *J. Math. Anal. Appl.* **172** (1993), 520–532.
- [24] H. G. Meijer, On real and complex zeros of orthogonal polynomials in a discrete Sobolev space, *J. Comput. Appl. Math.* **49** (1993), 179–191.
- [25] H. G. Meijer, Coherent pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials, *Indag. Math. (N.S.)* **4** (1993), 163–176.
- [26] H. G. Meijer, Sobolev orthogonal polynomials with a small number of real zeros, *J. Approx. Theory* **77** (1994), 305–313.
- [27] H. G. Meijer y M. G. de Bruin, Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following from coherent pairs, *J. Comput. Appl. Math.* (por aparecer).
- [28] T. E. Pérez y M. A. Piñar, Global properties of the zeros for Sobolev-type orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **49** (1993), 225–232.
- [29] J. M. Rodríguez, Multiplication operator in Sobolev spaces with respect to measures, *J. Approx. Theory* **109** (2001), 157–197.
- [30] H. Stahl y V. Totik, *General orthogonal polynomials*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [31] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4.^a edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, CALLE PEDRO CERBUNA 12, 50009 ZARAGOZA, SPAIN

Correo electrónico: alfaro@posta.unizar.es, rezola@posta.unizar.es

LA TEORÍA ASINTÓTICA DE SZEGŐ PARA P.O. DE SOBOLEV SOBRE EL CÍRCULO UNIDAD

ELÍAS BERRIOCHOA Y ALICIA CACHAFEIRO

En homenaje al Profesor José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»

ABSTRACT. The aim of this paper is to study of asymptotic behavior of the orthogonal polynomials with respect to a Sobolev inner product of the following type

$$\langle f(z), g(z) \rangle_s = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\mu_0(\theta) + \int_0^{2\pi} f'(e^{i\theta}) \overline{g'(e^{i\theta})} d\mu_1(\theta),$$

$z = e^{i\theta}$, where μ_0 and μ_1 are finite positive Borel measures on $[0, 2\pi]$.

We determine necessary and sufficient conditions on measures μ_0 and μ_1 in order that the Szegő's asymptotic theorem holds true outside the open unit disk. Moreover, we also study when the asymptotic formula can be extended up to the boundary and inside the open unit disk.

Finally, we generalize, in a natural way, the preceding results for the case when p derivatives, with $p > 1$, appear in the inner product.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de Polinomios Ortogonales (P.O.) con respecto a productos escalares de Sobolev sobre la circunferencia unidad se ha desarrollado en los últimos años, constituyendo una elegante teoría, que tiene grandes analogías con la teoría estándar.

En el presente trabajo presentamos dos resultados que constituyen el núcleo central de la teoría pues en ellos se establecen las condiciones necesarias y suficientes para poder garantizar la asintótica fuerte de los P.O. en subconjuntos compactos del exterior del disco unidad, así como para que sea válida su extensión a la frontera y al interior del disco unidad.

Para ello se consideran μ_0 y μ_1 dos medidas de Borel finitas y positivas sobre $[0, 2\pi]$ y el producto escalar de Sobolev definido por

$$(1) \quad \langle f(z), g(z) \rangle_s = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\mu_0(\theta) + \int_0^{2\pi} f'(e^{i\theta}) \overline{g'(e^{i\theta})} d\mu_1(\theta), \quad z = e^{i\theta}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 33C47, 42C05.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, Sobolev inner products, Szegő's theory, Carathéodory function.

Esta investigación se ha realizado en el marco del proyecto de investigación BFM2000-0015 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Cuando ambas medidas verifican la condición de Szegő se ha probado en [11] que los P.O. de Sobolev mónicos $\{\tilde{\phi}_n\}$ tienen el siguiente comportamiento asintótico:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\Pi_1(0)} \text{ uniformemente en subconjuntos compactos de } |z| > 1,$$

donde $\Pi_1(z)$ es la función de Szegő de la segunda medida μ_1 .

Es claro que la condición impuesta a la segunda medida es necesaria, pero esta misma condición no es necesaria para la primera medida. De hecho en [1] se ha obtenido el comportamiento asintótico sin condiciones para la primera medida, aunque exigiendo condiciones más fuertes para la segunda medida.

En el presente trabajo probamos en primer lugar el análogo del teorema de Szegő de asintótica fuerte.

Teorema 1. *Si μ_0 es una medida de Borel finita y positiva y μ_1 es una medida verificando la condición de Szegő, entonces la sucesión de P.O. mónicos con respecto a (1), $\{\tilde{\phi}_n\}$, tiene el siguiente comportamiento asintótico:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\Pi_1(0)}$$

uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > 1$, donde $\Pi_1(z)$ es la función de Szegő de la segunda medida μ_1 .

En la segunda parte del trabajo estudiamos el comportamiento asintótico en la frontera y el interior del disco unidad, probando el siguiente resultado.

Teorema 2. *Si μ_0 es una medida de Borel finita y positiva cuya función de Carathéodory tiene extensión analítica a $|z| < \frac{1}{r_0}$ con $r_0 < 1$ y μ_1 es una medida de la clase Szegő cuya función de Szegő, $\Pi_1(z)$, tiene extensión analítica a $|z| < \frac{1}{r_1}$ con $r_1 < 1$, entonces la sucesión de P.O. mónicos con respecto a (1), $\{\tilde{\phi}_n\}$, verifica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\Pi_1(0)}$$

uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > \max\{r_0, r_1\}$, donde $\Pi_1(z)$ es la función de Szegő de la segunda medida μ_1 .

Finalmente se presenta la generalización de los resultados anteriores al caso de productos escalares de Sobolev que involucren a p derivadas.

2. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN EL EXTERIOR DEL DISCO UNIDAD

2.1. Propiedades de los P.O. con respecto a μ_1 y de sus primitivas con desplazamiento. Consideraremos a lo largo de esta sección dos medidas de Borel finitas y positivas μ_0 y μ_1 y supondremos que μ_1 es una medida de la clase Szegő con función de Szegő $\Pi_1(z)$, que es analítica en el interior del disco unidad D .

Recordemos que la medida μ_1 pertenece a la clase Szegő si $\log \mu'_1 \in L^1[0, 2\pi]$ y que la función de Szegő $\Pi_1(z)$ de la medida μ_1 está definida por

$$\Pi_1(z) = \exp \left(-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log(\mu'_1(\theta)) d\theta \right) \quad \text{para } |z| < 1.$$

Denotaremos por $\{\phi_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ_1 . Como μ_1 es de la clase Szegő se tiene entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_{\mu_1}^2 = m(\mu_1) > 0$, donde $\|\phi_n\|_{\mu_1}^2 = \int_0^{2\pi} |\phi_n(e^{i\theta})|^2 d\mu_1(\theta)$ (véase [10]).

Sea M un número natural fijo y supongamos que $\phi_M(z) = \sum_{k=0}^M a_{k,M} z^k$ con $a_{M,M} = 1$. Para cada $n \geq M + 1$ definimos la primitiva con desplazamiento de grado n como el polinomio $\psi_{n,M}(z) = n \int z^{n-M-1} \phi_M(z) dz$, esto es,

$$(2) \quad \psi_{n,M}(z) = z^n + \frac{n}{n-1} a_{M-1,M} z^{n-1} + \dots + \frac{n}{n-M+1} a_{1,M} z^{n-M+1} + \frac{n}{n-M} a_{0,M} z^{n-M}.$$

En estas condiciones los polinomios $\{\psi_{n,M}\}_{n \geq M+1}$ verifican las siguientes propiedades:

Proposición 1. *Se verifica*

- (i) $\|\psi'_{n,M}\|_{\mu_1}^2 = n^2 \|\phi_M\|_{\mu_1}^2$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 = \|\phi_M\|_{\mu_0}^2$.
- (iii) $\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}$ uniformemente en subconjuntos compactos de $|z| > 1$.

Demostración. (i) De acuerdo con la definición $\psi'_{n,M}(z) = n z^{n-M-1} \phi_M(z)$. Por tanto, $\|\psi'_{n,M}\|_{\mu_1}^2 = n^2 \|\phi_M\|_{\mu_1}^2$.

(ii) Teniendo en cuenta (2),

$$\begin{aligned} & \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 \\ &= \left\| z^{n-M} \left(z^M + \frac{n}{n-1} a_{M-1,M} z^{M-1} + \dots + \frac{n}{n-M+1} a_{1,M} z + \frac{n}{n-M} a_{0,M} \right) \right\|_{\mu_0}^2 \\ &= \left\| z^M + \frac{n}{n-1} a_{M-1,M} z^{M-1} + \dots + \frac{n}{n-M+1} a_{1,M} z + \frac{n}{n-M} a_{0,M} \right\|_{\mu_0}^2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 = \|\phi_M\|_{\mu_0}^2$.

(iii) Sea K un subconjunto compacto de $|z| > 1$ y sea $r = \min_{z \in K} |z|$. Dado que μ_1 es una medida de la clase Szegő, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\overline{\Pi_1(0)}}$ uniformemente en subconjuntos compactos de $|z| > 1$ (véase [10]). Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe un número natural M_0 tal que para todo $m \geq M_0$ y para todo $z \in K$ se verifica que

$$\left| \frac{\phi_m(z)}{z^m} - \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\overline{\Pi_1(0)}} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así si tomamos $M \geq M_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\phi_M(z)}{z^M} \right| &= \left| \frac{1}{n-1} a_{M-1,M} \frac{1}{z} + \dots + \frac{M}{n-M} a_{0,M} \frac{1}{z^M} \right| \\ &\leq \frac{1}{n-1} |a_{M-1,M}| \frac{1}{r} + \dots + \frac{M}{n-M} |a_{0,M}| \frac{1}{r^M} \\ &< \frac{1}{n-1} |a_{M-1,M}| + \dots + \frac{M}{n-M} |a_{0,M}| < \frac{M^2}{n-M} \max\{|a_{M-1,M}|, \dots, |a_{0,M}|\}. \end{aligned}$$

Por tanto, existe un número natural N tal que, para $n \geq N$, $\left| \frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\phi_M(z)}{z^M} \right| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $z \in K$. Así, el resultado queda probado.

Obsérvese que el resultado es válido para subconjuntos K del plano complejo tales que $\inf_{z \in K} |z| > 1$. □

2.2. Relación de recurrencia para los polinomios ortogonales de Sobolev.

Sea $\{\tilde{\phi}_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto escalar de Sobolev (1).

Proposición 2. *Se verifica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\tilde{\phi}_n\|_s^2}{n^2} = m(\mu_1).$$

Demostración. Aplicando la propiedad minimal de la norma de los polinomios ortogonales obtenemos:

$$n^2 m(\mu_1) \leq n^2 \|\phi_{n-1}\|_{\mu_1}^2 \leq \|\tilde{\phi}'_n\|_{\mu_1}^2 \leq \|\tilde{\phi}_n\|_s^2 \leq \|\psi_{n,M}\|_s^2 = \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 + n^2 \|\phi_M\|_{\mu_1}^2.$$

Dividiendo por n^2 ,

$$m(\mu_1) \leq \frac{\|\tilde{\phi}_n\|_s^2}{n^2} \leq \frac{\|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2}{n^2} + \|\phi_M\|_{\mu_1}^2.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 1 (ii), si tomamos límites cuando n tiende a infinito obtenemos, para cada M fijo,

$$m(\mu_1) \leq \underline{\lim} \frac{\|\tilde{\phi}_n\|_s^2}{n^2} \leq \overline{\lim} \frac{\|\tilde{\phi}_n\|_s^2}{n^2} \leq \|\phi_M\|_{\mu_1}^2.$$

Por último, tomando límites cuando M tiende a infinito se tiene el resultado. □

A continuación estudiamos los coeficientes de la siguiente relación de recurrencia que satisfacen los polinomios ortogonales de Sobolev. Si M es un número natural fijo y $n \geq M + 1$, entonces $\tilde{\phi}_n(z)$ puede ser representado de la siguiente forma:

$$(3) \quad \tilde{\phi}_n(z) = \psi_{n,M}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k,M} \tilde{\phi}_k(z).$$

Proposición 3. *Sean $\{\alpha_{n,k,M}\}$ los coeficientes de la relación de recurrencia (3). Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe un número natural M_0 tal que, para cada $M \geq M_0$, existe un número natural N_M tal que, para todo $n \geq N_M$,*

$$(4) \quad (n-1)^2 |\alpha_{n,n-1,M}|^2 + \dots + (1)^2 |\alpha_{n,1,M}|^2 + |\alpha_{n,0,M}|^2 < \epsilon n^2.$$

Demostración. Denotamos $c_n(\mu_0)$ los momentos de la medida μ_0 , esto es, $c_n(\mu_0) = \langle z^n, 1 \rangle_{\mu_0}$. Entonces, si tomamos normas Sobolev en (3) y aplicamos que $n^2 m(\mu_1) \leq \|\tilde{\phi}_n\|_s^2, \forall n \geq 1$, y $\|\tilde{\phi}_0\|_s^2 = c_0(\mu_0)$, tenemos:

$$(5) \quad K \left[(n-1)^2 |\alpha_{n,n-1,M}|^2 + \dots + (1)^2 |\alpha_{n,1,M}|^2 + |\alpha_{n,0,M}|^2 \right] \leq \|\psi_{n,M}\|_s^2 - \|\tilde{\phi}_n\|_s^2,$$

con $K = \min\{m(\mu_1), c_0(\mu_0)\}$.

Por otra parte, téngase en cuenta que $\|\psi_{n,M}\|_s^2 = \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 + n^2 \|\phi_M\|_{\mu_1}^2$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|\phi_M\|_{\mu_1}^2 = m(\mu_1) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 = \|\phi_M\|_{\mu_0}^2.$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$ y $\epsilon' = \frac{K\epsilon}{2} > 0$ existe un número natural M_0 tal que, para $M \geq M_0$, $\|\phi_M\|_{\mu_1}^2 < m(\mu_1) + \epsilon'$. Más aun, para cada $M \geq M_0$ existe un número natural n_M tal que, para $n \geq n_M$, $\|\psi_{n,M}\|_{\mu_0}^2 < \|\phi_M\|_{\mu_0}^2 + \epsilon'$. Se sigue entonces, de (5),

$$\begin{aligned} & K \left[(n-1)^2 |\alpha_{n,n-1,M}|^2 + \dots + (1)^2 |\alpha_{n,1,M}|^2 + |\alpha_{n,0,M}|^2 \right] \\ & < \|\phi_M\|_{\mu_0}^2 + \epsilon' + n^2 \left(m(\mu_1) + \epsilon' \right) - n^2 \left(m(\mu_1) \right) \\ & = \|\phi_M\|_{\mu_0}^2 + \epsilon' + n^2 \epsilon' \quad \text{para } M \geq M_0 \text{ y } n \geq n_M. \end{aligned}$$

Por tanto, si tomamos n suficientemente grande, esto es, $n \geq N_M$, entonces

$$\|\phi_M\|_{\mu_0}^2 + \epsilon' < \epsilon' n^2,$$

de donde se sigue (4). □

Corolario 1. *Dado $\epsilon > 0$ existe un número natural M_0 tal que para cada $M \geq M_0$ existe un número natural N_M tal que para todo $n \geq N_M$ y para todo $R > 1$ se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$(6) \quad \sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < \frac{4\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{R^2-1}},$$

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < \frac{n\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{R^2-1}R^{\frac{n}{2}}}.$$

(Denotamos $E[\frac{n}{2}]$ a la parte entera de $\frac{n}{2}$.)

Demostración. Comencemos con (6). Utilizando (4) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} |\alpha_{n,k,M}| k \frac{1}{kR^{n-k}} \leq \left(\sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} |\alpha_{n,k,M}|^2 k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} \frac{1}{k^2 R^{2(n-k)}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & < \sqrt{\epsilon} n \left(\frac{1}{(E[\frac{n}{2}])^2} \sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} \frac{1}{R^{2(n-k)}} \right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\epsilon} n \frac{1}{E[\frac{n}{2}]} \frac{1}{\sqrt{R^2-1}} < \frac{4\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{R^2-1}}. \end{aligned}$$

Para probar (7), procediendo al igual que en el apartado anterior,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} &= |\alpha_{n,0,M}| \frac{1}{R^n} + \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]-1} |\alpha_{n,k,M}| k \frac{1}{kR^{n-k}} \\ &\leq \left(|\alpha_{n,0,M}|^2 + \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]-1} |\alpha_{n,k,M}|^2 k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{R^{2n}} + \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]-1} \frac{1}{R^{2(n-k)} k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \frac{\sqrt{\epsilon n}}{\sqrt{R^2 - 1} R^{n-E[\frac{n}{2}]}} \leq \frac{\sqrt{\epsilon n}}{\sqrt{R^2 - 1} R^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

□

Corolario 2. Dado $R > 1$, existe un número natural M_0 tal que para cada $M \geq M_0$ existe un número natural N'_M tal que para cada $n \geq N'_M$ se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < \frac{1}{3} \quad y \quad \sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < \frac{1}{3}.$$

Demostración. La primera es una consecuencia inmediata de (6) tomando ϵ tal que $\frac{4}{\sqrt{R^2 - 1}} \sqrt{\epsilon} < \frac{1}{3}$.

Y la segunda se sigue de (7) tomando n suficientemente grande, esto es, $n \geq N'_M$ y tal que $\frac{\sqrt{\epsilon n}}{\sqrt{R^2 - 1} R^{\frac{n}{2}}} < \frac{1}{3}$. □

2.3. Asintótica fuerte.

Proposición 4. La sucesión $\left\{ \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} \right\}_{n \geq 1}$ está uniformemente acotada en subconjuntos K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > 1$.

Demostración. Sea K un subconjunto tal que $\inf_{z \in K} |z| > 1$, sea $r = \inf_{z \in K} |z|$ y sea R tal que $1 < R < r$. Elijamos M y n como en el Corolario 2, esto es, $M \geq M_0$ y $n \geq N'_M$.

Para este $M \geq M_0$ sea $K_0 = \max_{z \in K} \max_{n \geq M+1} \left\{ \left| \frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} \right| \right\}$ y para un $n_0 \geq N'_M$ tal que $n_0 \geq M + 1$, tomemos $K_1 = \max_{z \in K} \max_{k=0, \dots, n_0-1} \left\{ \left| \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k} \right| \right\}$.

A partir de la relación de recurrencia (3), y teniendo en cuenta el Corolario 2, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}} \right| &\leq \left| \frac{\psi_{n_0,M}(z)}{z^{n_0}} \right| + \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0}{2}]-1} \left| \frac{\alpha_{n_0,k,M}}{z^{n_0-k}} \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k} \right| + \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]}^{n_0-1} \left| \frac{\alpha_{n_0,k,M}}{z^{n_0-k}} \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k} \right| \\ &\leq K_0 + \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n_0,k,M}|}{R^{n_0-k}} K_1 + \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]}^{n_0-1} \frac{|\alpha_{n_0,k,M}|}{R^{n_0-k}} K_1 < K_0 + \frac{2}{3} K_1. \end{aligned}$$

Si tomamos $K_2 = \max\{3K_0, 3K_1\}$ entonces $K_0 + \frac{2}{3}K_1 \leq \frac{K_2}{3} + \frac{2}{3}\frac{K_2}{3} < K_2$.

Procediendo del mismo modo,

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0+1}(z)}{z^{n_0+1}} \right| \leq K_0 + \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0+1}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n_0+1,k,M}|}{R^{n_0+1-k}} K_2 + \sum_{k=E[\frac{n_0+1}{2}]}^{n_0} \frac{|\alpha_{n_0+1,k,M}|}{R^{n_0+1-k}} K_2.$$

Así

$$\sum_{k=0}^{E[\frac{n_0+1}{2}]-1} \frac{|\alpha_{n_0+1,k,M}|}{R^{n_0+1-k}} < \frac{\sqrt{\epsilon}(n_0+1)}{\sqrt{R^2-1}} \frac{1}{R^{\frac{n_0+1}{2}}} < \frac{1}{3},$$

y

$$\sum_{k=E[\frac{n_0+1}{2}]}^{n_0} \frac{|\alpha_{n_0+1,k,M}|}{R^{n_0+1-k}} < \frac{1}{3};$$

por tanto,

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0+1}(z)}{z^{n_0+1}} \right| < K_0 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_2 \leq K_2.$$

Por inducción obtenemos que $\left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0+p}(z)}{z^{n_0+p}} \right| < K_2 \quad \forall p \geq 1$ y, en definitiva, el resultado queda probado, esto es, existe un número natural K_3 tal que $\left| \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} \right| < K_3$ para todo $z \in K$ y $n \geq 0$. \square

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema central de esta sección.

Teorema 1. Si μ_0 es una medida de Borel finita y positiva y μ_1 es una medida verificando la condición de Szegő, entonces la sucesión de P.O. mónicos con respecto a (1), $\{\tilde{\phi}_n\}$, verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi}_1(\frac{1}{z})}{\Pi_1(0)}$$

uniformemente en subconjuntos $K \subset \mathbb{C}$ tales que $\inf_{z \in K} |z| > 1$.

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 1 iii), es suficiente probar que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} \right) = 0$$

uniformemente en subconjuntos $K \subset \mathbb{C}$ tales que $\inf_{z \in K} |z| > 1$.

Sea K un subconjunto de \mathbb{C} tal que $r = \inf_{z \in K} |z| > 1$ y elijamos R tal que $1 < R < r$. Para $\epsilon > 0$ tomemos $\epsilon_1 > 0$ tal que $\frac{5K_3}{\sqrt{R^2-1}} \sqrt{\epsilon_1} < \epsilon$.

Aplicando el Corolario 1, tenemos que para $\epsilon_1 > 0$ existe M_0 tal que para cada $M \geq M_0$ existe N_M tal que para cada $n \geq N_M$ y para $R > 1$ se verifican (6) y (7). Si se tiene en cuenta la Proposición 4 se obtiene

$$\left| \frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n,k,M}}{z^{n-k}} \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} \left| \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k} \right|$$

$$\begin{aligned} < K_3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k,M}|}{R^{n-k}} < K_3 \left(\frac{4}{\sqrt{R^2-1}} \sqrt{\epsilon_1} + \frac{n\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{R^2-1}R^{\frac{n}{2}}} \right) \\ &= \frac{K_3}{\sqrt{R^2-1}} \left(4 + \frac{n}{R^{\frac{n}{2}}} \right) \sqrt{\epsilon_1}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\left| \frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n} - \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} \right| < \epsilon$ para n suficientemente grande, lo que demuestra la tesis del teorema. □

Corolario 3. *Para cada $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande, las raíces de $\tilde{\phi}_n(z)$ están en $|z| < 1 + \epsilon$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 1 y del Teorema de Hurwitz (véase [13]). □

Observación 1. *El Corolario anterior no puede ser mejorado como ilustra el siguiente ejemplo. Consideremos las siguientes medidas: $\mu_0 = \delta_1$, donde δ_1 es la medida de Dirac con punto de masa en 1 y μ_1 una modificada polinómica de la medida de Lebesgue, esto es, $d\mu_1(\theta) = |e^{i\theta} - 1|^2 d\theta$. Es fácil probar que el polinomio ortogonal mónico de Sobolev de grado n , $\tilde{\phi}_n(z)$, viene dado por $\tilde{\phi}_n(z) = \sum_{k=1}^n z^k - n$, y que tiene, por lo menos, una raíz (de hecho $n - 1$ raíces) en el exterior del disco unidad cerrado.*

2.4. Análisis de la técnica utilizada. En esta sección hemos trabajado según el siguiente esquema:

1. Formular una hipótesis sobre el comportamiento asintótico de $\frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}$ en subconjuntos compactos de una región del plano complejo (véanse [1], [2], [3], [4], [5], [9] y [11]).
2. Representar $\tilde{\phi}_n(z)$ adecuadamente con respecto a nuestra hipótesis de trabajo, esto es $\tilde{\phi}_n(z) = \psi_{n,M}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k,M} \tilde{\phi}_k(z)$, donde $\psi_{n,M}(z)$ es un polinomio mónico de grado n , dependiente también de M , y cuya asintótica $\frac{\psi_{n,M}(z)}{z^n}$ se parece para M y n suficientemente grandes a la deseada.
3. Buscar propiedades para los coeficientes de la relación de recurrencia, destacando que esta búsqueda de propiedades se hace manipulando en su conjunto los coeficientes.
4. Finalmente utilizar esta representación y las propiedades obtenidas para sus coeficientes, para obtener el teorema de convergencia y sus interesantes consecuencias.

El camino presentado previamente tiene continuidad en el segundo problema que tratamos en este trabajo. El objetivo es la extensión de la asintótica fuerte a la frontera \mathbb{T} y al interior del disco unidad bajo una condición suficiente. Si bien las ideas anteriores son válidas, es claro que la elección de $\psi_{n,M}(z)$ no es natural. La elección más simple sería aquella en que el cálculo del producto escalar $\langle \psi_{n,M}(z), \tilde{\phi}_n(z) \rangle_s$

sea sencillo, lo que facilitará la obtención de propiedades para los coeficientes la recurrencia de forma individualizada, haciendo posible la demostración del teorema central. Siguiendo estas ideas, la elección adecuada es la primitiva del polinomio ortogonal de grado $n - 1$ respecto de μ_1 . Si bien este camino creemos que puede desarrollarse para la sección anterior, podemos asegurar que es de complicada exposición y manipulación. Obsérvese que la función $\frac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\Pi_1(0)}$ no está definida sobre \mathbb{T} y no es sencillo acotar adecuadamente la norma μ_0 del polinomio que representa el papel de $\psi_{n,M}(z)$ si utilizamos alguno muy parecido a $z^n \frac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\Pi_1(0)}$. Cuando esta restricción desaparece podemos considerar la convergencia sobre \mathbb{T} y el candidato natural a jugar el papel de $\psi_{n,M}(z)$ es, sin duda, para el grado n , la primitiva normalizada del polinomio ortogonal $(n - 1)$ -ésimo respecto de μ_1 .

3. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN LA FRONTERA Y EL INTERIOR DEL DISCO UNIDAD

3.1. Propiedades de los polinomios ortogonales con respecto a μ_1 y de sus primitivas.

En esta subsección obtendremos resultados relativos a la medida μ_1 que suponemos de Borel, finita, positiva y que cumple la condición de Szegő. Denotaremos por $\{\phi_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ_1 sabiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_{\mu_1}^2 = m(\mu_1) > 0$ (véase [10]). También asumiremos que

la función de Szegő $\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_1(0)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} z^k$ tiene extensión analítica hasta $|z| < \frac{1}{r_1}$

con $r_1 < 1$, lo que es equivalente a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\phi_n(0)|} = r_1$. En esta situación es bien conocido que los coeficientes de los polinomios ortogonales $\{\phi_n\}$ están uniformemente acotados y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\Pi_1(0)}$ uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} con $\inf_{z \in K} |z| > r_1$ (véase [12]).

A continuación obtenemos un resultado que mejora la acotación uniforme de los coeficientes de los polinomios $\{\phi_n\}$. Por simplicidad escribimos $\phi_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} z^k$ con $a_{n,n} = 1$.

Proposición 5. *Dado R_1 tal que $r_1 < R_1 < 1$, existen $C_1 > 0$ y un número natural N_1 tal que para cualquier $k \geq 0$ y $n \geq N_1$,*

$$(8) \quad |a_{n,k}| < C_1 R_1^{n-k}.$$

Demostración. En [7] se obtiene como consecuencia del comportamiento asintótico de los parámetros de Schur de la medida.

Una demostración alternativa se basa en utilizar la fórmula integral de Cauchy para obtener una representación de los coeficientes de $\phi_n(z)$, tomando una circunferencia de radio menor que R_1 , y utilizar la asintótica conocida de $\frac{\phi_n(z)}{z^n}$ para obtener la acotación deseada. □

Seguidamente se introducen las primitivas normalizadas de los polinomios ortogonales mediante $\psi_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} a_{n-1,k-1} z^k$. Por simplicidad denotamos $b_{n,k} = \frac{n}{k} a_{n-1,k-1}$ a los coeficientes de estos polinomios, y obtenemos, en primer lugar, un resultado sobre la acotación de estos coeficientes.

Proposición 6.

(i) Dado R_2 tal que $r_1 < R_2 < 1$, existen $C_2 > 0$ y un número natural N_2 tal que, para cada $k \geq 0$ y $n \geq N_2$,

$$|b_{n,k}| < C_2 R_2^{n-k}.$$

(ii) Existe $M_\psi > 0$ tal que $|b_{n,k}| < M_\psi$ para todo $0 \leq k \leq n$.

Demostración. (i) Sea R_2 tal que $r_1 < R_2 < 1$ y elijamos R_1 con $r_1 < R_1 < R_2$. Entonces existe un número natural M_2 tal que $nR_1^{\frac{n}{2}} < R_2^{\frac{n}{2}}$ para cada $n \geq M_2$.

Por la Proposición 5 sabemos que existen $C_1 > 0$ y un número natural N_1 tal que $|a_{n,k}| < C_1 R_1^{n-k}$ para cualquier $k \geq 0$ y $n \geq N_1$.

Por tanto, si $n - 1 > \max\{N_1, M_2\}$ entonces para $k > \frac{n}{2}$ se verifica

$$|b_{n,k}| = \frac{n}{k} |a_{n-1,k-1}| < 2C_1 R_2^{n-k},$$

y, para $k \leq \frac{n}{2}$, $|b_{n,k}| \leq nC_1 R_1^{n-k} < C_1 R_2^{n-k}$. Si elegimos $C_2 = 2C_1$ y $N_2 = \max\{N_1, M_2\}$, entonces se verifica (i).

(ii) Es una consecuencia inmediata de (i). □

Proposición 7. Se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\Pi_1(0)}$ uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > r_1$.

Demostración. Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_{n-1}(z)}{z^{n-1}} = \frac{\overline{\Pi_1(\frac{1}{z})}}{\Pi_1(0)}$ uniformemente en subconjuntos

K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > r_1$, es suficiente probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\phi_{n-1}(z)}{z^{n-1}} \right) = 0$ uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > r_1$.

Consideremos $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto con $r = \inf_{z \in K} |z| > r_1$ y elijamos R_1 tal que $r_1 < R_1 < r$.

Para $z \in K$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\phi_{n-1}(z)}{z^{n-1}} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k} a_{n-1,k-1} z^{k-n} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1,k-1} z^{k-n} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}} \right|. \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 5 sabemos que existen $C_1 > 0$ y un número natural N_1 cumpliendo que $|a_{n,k}| < C_1 R_1^{n-k}$ para cualquier $k \geq 0$ y $n \geq N_1$. Por otra parte,

para un $\epsilon > 0$ determinado tomemos M tal que $\frac{rC_1}{r-R_1} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{M+1} < \frac{\epsilon}{3}$ y elijamos N_2 tal que para $n \geq N_2$ se verifiquen las siguientes desigualdades:

$$\left[\frac{1}{(n-1)} + \dots + \frac{M}{n-M} \right] \frac{M_\phi}{r_1^M} < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y} \quad \frac{rC_1}{r-R_1} \left[n^2 \left(\frac{R_1}{r}\right)^n \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Entonces, para $n > \max\{2(M+2), N_1+1, N_2\}$ y $z \in K$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\phi_{n-1}(z)}{z^{n-1}} \right| &\leq \left| \sum_{k=n-M}^{n-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}} \right| \\ &+ \left| \sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-M-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}} \right| + \left| \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}} \right| \end{aligned}$$

con

$$\left| \sum_{k=n-M}^{n-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}} \right| < \frac{M_\phi}{r_1^M} \left[\frac{1}{(n-1)} + \dots + \frac{M}{n-M} \right] < \frac{\epsilon}{3},$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-M-1} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}} \right| &< \sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-M-1} \left| a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}} \right| \\ &< C_1 \sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-M-1} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n-k} < \frac{rC_1}{r-R_1} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{M+1} < \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]} \frac{n-k}{k} a_{n-1,k-1} \frac{1}{z^{n-k}} \right| &< \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]} nC_1 \left(\frac{R_1}{|z|}\right)^{n-k} \leq \sum_{k=1}^{E[\frac{n}{2}]} nC_1 \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n-k} \\ &< \frac{nC_1 r}{r-R_1} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n-E[\frac{n}{2}]} \leq \frac{nC_1 r}{r-R_1} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{\frac{n}{2}} < \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Así el resultado queda demostrado. \square

Corolario 4. Existe $C_3 > 0$ tal que, para cualquier número natural $n \geq 0$, se verifica $\|\psi_n\|_{\mu_0} \leq C_3$.

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 7,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\overline{\Pi_1}\left(\frac{1}{z}\right)}{\overline{\Pi_1}(0)} \right\|_{\mu_0}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\Pi} \left| \frac{\psi_n(z)}{z^n} - \frac{\overline{\Pi_1}\left(\frac{1}{z}\right)}{\overline{\Pi_1}(0)} \right|^2 d\mu_0(\theta) = 0, \quad z = e^{i\theta};$$

esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \psi_n(z) - z^n \frac{\overline{\Pi_1}\left(\frac{1}{z}\right)}{\overline{\Pi_1}(0)} \right\|_{\mu_0} = 0.$$

Consecuentemente $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n(z)\|_{\mu_0} = \left\| \frac{\overline{\Pi_1}\left(\frac{1}{z}\right)}{\overline{\Pi_1}(0)} \right\|_{\mu_0}$. \square

3.2. Relación de recurrencia para los P.O. de Sobolev.

Proposición 8. *Sea $\{P_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ_0 , $\{\phi_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ_1 y $\{\tilde{\phi}_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a (1). Entonces*

- (i) $\|P_n\|_{\mu_0} \leq \|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_0} \leq \|\psi_n\|_{\mu_0}$.
- (ii) $0 \leq \|\tilde{\phi}'_n\|_{\mu_1}^2 - n^2\|\phi_{n-1}\|_{\mu_1}^2 \leq \|\psi_n\|_{\mu_0}^2 - \|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_0}^2$.

Demostración. Aplicando la propiedad minimal de la norma de los polinomios ortogonales tenemos

$$\begin{aligned} \|P_n\|_{\mu_0} + n^2\|\phi_{n-1}\|_{\mu_1}^2 &\leq \|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_0}^2 + \|\tilde{\phi}'_n\|_{\mu_1}^2 = \|\tilde{\phi}_n\|_s^2 \leq \|\psi_n\|_s^2 \\ &= \|\psi_n\|_{\mu_0}^2 + n^2\|\phi_{n-1}\|_{\mu_1}^2 \leq \|\psi_n\|_{\mu_0}^2 + \|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_1}^2, \end{aligned}$$

de donde resultan (i) y (ii). □

Proposición 9. *Si representamos*

$$(9) \quad \tilde{\phi}_n(z) = \psi_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} \tilde{\phi}_k(z)$$

entonces existe $C_4 > 0$ tal que, para cada $n \geq 0$, se verifica que

$$(10) \quad |\alpha_{n,k}| \leq \frac{C_4}{k^2} \quad \text{para } 1 \leq k \leq n-1 \quad \text{y} \quad |\alpha_{n,0}| \leq C_4.$$

Demostración. Dado que, para $k < n$,

$$0 = \langle \tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}_k \rangle_s = \langle \psi_n, \tilde{\phi}_k \rangle_s + \alpha_{n,k} \|\tilde{\phi}_k\|_s^2 = \langle \psi_n, \tilde{\phi}_k \rangle_{\mu_0} + \alpha_{n,k} \|\tilde{\phi}_k\|_s^2,$$

se tiene

$$|\alpha_{n,k}| = \frac{|\langle \psi_n, \tilde{\phi}_k \rangle_{\mu_0}|}{\|\tilde{\phi}_k\|_s^2} \leq \frac{\|\psi_n\|_{\mu_0} \|\tilde{\phi}_k\|_{\mu_0}}{\|\tilde{\phi}_k\|_s^2}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $k^2 m(\mu_1) \leq k^2 \|\phi_{k-1}\|_{\mu_1}^2 \leq \|\tilde{\phi}_k\|_s^2$, y aplicando el Corolario 4 y la Proposición 8 (i), tenemos nuestra tesis. □

Seguidamente probamos que los coeficientes de los polinomios ortogonales de Sobolev están uniformemente acotados.

Proposición 10. *Si $\tilde{\phi}_n(z) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} z^k$ con $A_{n,n} = 1$, entonces existe $M_{\tilde{\phi}} > 0$ tal que para cada $n \geq 0$ y $k \geq 0$,*

$$|A_{n,k}| \leq M_{\tilde{\phi}}.$$

Demostración. Consideremos un número natural $n \geq 0$ fijo, y $J = \max(\{M_\psi\} \cup \{A_{m,k} : 0 \leq k \leq m \leq n\})$.

Dado que $\tilde{\phi}_{n+1}(z) = \psi_{n+1}(z) + \sum_{k=0}^n \alpha_{n+1,k} \tilde{\phi}_k(z)$, si utilizamos las relaciones (9) y (10) tenemos

$$|A_{n+1,k}| \leq M_\psi + C_4 \left[\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{1^2} + 1 \right] J = S.$$

En el siguiente paso $\tilde{\phi}_{n+2}(z) = \psi_{n+2}(z) + \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{n+2,k} \tilde{\phi}_k(z)$, obteniendo

$$|A_{n+2,k}| \leq M_\psi + \frac{C_4 S}{(n+1)^2} + C_4 \left[\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{1^2} + 1 \right] J = S \left(1 + \frac{C_4}{(n+1)^2} \right).$$

Por tanto, procediendo por inducción deducimos que, para cada p ,

$$|A_{n+p,k}| \leq S \left(1 + \frac{C_4}{(n+1)^2} \right) \dots \left(1 + \frac{C_4}{(n+p-1)^2} \right) < S \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{C_4}{(n+k)^2} \right) = M_{\tilde{\phi}}. \quad \square$$

A continuación mejoramos los resultados obtenidos en (10). Para ello consideraremos que la medida μ_0 satisface que $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = r_0 < 1$ donde $c_n = \langle z^n, 1 \rangle_{\mu_0}$. Esto es, suponemos que la función de Carathéodory de la medida μ_0 tiene extensión analítica a $|z| < \frac{1}{r_0}$.

Proposición 11. *Sea $\rho = \max\{r_0, r_1\}$. Para cada R_1 tal que $\rho < R_1 < 1$, existen $E > 0$ y un número natural H tal que*

$$(11) \quad |\alpha_{n,k}| < E \frac{R_1^{n-k}}{k^2} \text{ para } n-k > H \quad \text{y} \quad |\alpha_{n,0}| < ER_1^n \text{ para } n > H.$$

Demostración. Tomemos R tal que, $\rho < R < R_1$. De la Proposición 6 se deduce que $|b_{n,k}| < C_2 R^{n-k}$ para cada $k \geq 0$ y $n \geq N_2$.

Por otra parte, también podemos asegurar que existe un entero $h \geq 0$ tal que para $n \geq h$ $|c_n| < R^n$ y $|c_n| \leq 1$ para $0 \leq n \leq h-1$.

Luego, eligiendo una constante apropiada C_5 podemos establecer que $|b_{n,k}| < C_5 R^{n-k}$ para cada $0 \leq k \leq n$ y $|c_n| < C_5 R^n$ para cada n .

Seguidamente probamos que existe $C_6 > 0$ y un número natural H tal que

$$|\langle \tilde{\phi}_k, \psi_n \rangle_s| < C_6 R_1^{n-k} \text{ para } n-k > H.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} |\langle z^k, \psi_n \rangle_s| &= |\langle z^k, \psi_n \rangle_{\mu_0}| = \left| \sum_{j=-k+1}^{n-k} c_j b_{n,j+k} \right| \leq \sum_{j=-k+1}^0 |b_{n,j+k}| + \sum_{k=1}^{n-k} |c_j| |b_{n,j+k}| \\ &\leq \sum_{j=-k+1}^0 C_5 R^{n-j-k} + \sum_{k=1}^{n-k} C_5 R^j C_5 R^{n-j-k} < \frac{C_5}{1-R} R^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-k} C_5^2 R^{n-k} \\ &= \frac{C_5}{1-R} R^{n-k} + C_5^2 (n-k) R^{n-k}. \end{aligned}$$

Dado que existe un número natural $H_1 \geq 0$ tal que $\frac{1}{1-R} < n-k$ si $n-k > H_1$, se tiene entonces

$$|\langle z^k, \psi_n \rangle_s| < C_5 (n-k) R^{n-k} + C_5^2 (n-k) R^{n-k} = C (n-k) R^{n-k}.$$

Así, si tomamos un número natural $H \geq 0$ tal que $(n-k) R^{n-k} < R_1^{n-k}$ para $(n-k) > H$, obtenemos $|\langle z^k, \psi_n \rangle_s| \leq CR_1^{n-k}$ para $n-k > H$.

Por lo tanto

$$|\langle \tilde{\phi}_k, \psi_n \rangle_s| \leq M_{\tilde{\phi}} C [R_1^n + \dots + R_1^{n-k}] < M_{\tilde{\phi}} C \frac{R_1^{n-k}}{1 - R_1} = C_6 R_1^{n-k}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $|\alpha_{n,k}| = \frac{|\langle \tilde{\phi}_k, \psi_n \rangle_s|}{\|\tilde{\phi}_k\|_s^2}$, se obtiene (11). □

Proposición 12. *Se verifican las siguientes relaciones:*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\phi}_n - \psi_n\|_s = 0.$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_0} = \left\| \frac{\overline{\Pi_1}(\frac{1}{z})}{\Pi_1(0)} \right\|_{\mu_0}.$

Demostración. (i) Tomando normas en (9),

$$(12) \quad \|\tilde{\phi}_n - \psi_n\|_s^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{n,k}|^2 \|\tilde{\phi}_k\|_s^2.$$

Utilizando (10), (11) y que

$$\|\tilde{\phi}_n\|_s^2 \leq \|\psi_n\|_{\mu_0}^2 + n^2 \|\phi_{n-1}\|_{\mu_1}^2 \leq F + n^2 c, \quad \text{con } F = C_3^2 \text{ y } c = \|1\|_{\mu_1}^2,$$

se sigue, de (12),

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi}_n - \psi_n\|_s^2 &= \sum_{j=1}^H |\alpha_{n,n-j}|^2 \|\tilde{\phi}_{n-j}\|_s^2 + \sum_{j=H+1}^n |\alpha_{n,n-j}|^2 \|\tilde{\phi}_{n-j}\|_s^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^H \frac{Q}{(n-j)^4} [F + (n-j)^2 c] + \sum_{j=H+1}^n \frac{QR_1^{2j}}{(n-j)^4} [F + (n-j)^2 c] \end{aligned}$$

con $Q = \max\{C_4^2, E^2\}$. Ahora, es inmediato deducir (i).

(ii) A partir de (i), $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\phi}_n - \psi_n\|_{\mu_0} = 0$, lo que implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\phi}_n\|_{\mu_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{\mu_0}$. Por tanto, aplicando el Corolario 4, obtenemos (ii). □

3.3. Asintótica fuerte.

Proposición 13. *La sucesión $\frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n}$ está uniformemente acotada en subconjuntos K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > \rho$ con $\rho = \max\{r_0, r_1\}$.*

Demostración. Sea K un subconjunto de \mathbb{C} tal que $\inf_{z \in K} |z| > \rho$. Sea $r = \inf_{z \in K} |z|$ y sea

R_1 tal que $\rho < R_1 < r$. Dado que la sucesión $\frac{\psi_n(z)}{z^n}$ está uniformemente acotada en subconjuntos K de \mathbb{C} con $\inf_{z \in K} |z| > \rho$, consideremos un número natural fijo $n_0 \geq 0$ tal

que $(E[\frac{n_0}{2}] + 1)^2 \leq (\frac{r}{R_1})^{\frac{n_0}{2}}$ y elijamos $M = \max_{z \in K} \left\{ \left| \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k} \right|_{k=0, \dots, n_0-1}, \left| \frac{\psi_k(z)}{z^k} \right|_{k \geq 0} \right\}.$

Se sigue entonces de (9), para $z \in K$,

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}} \right| = \left| \frac{\psi_{n_0}(z)}{z^{n_0}} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{\alpha_{n_0,k}}{z^{n_0-k}} \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k} \right| < M + \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{|\alpha_{n_0,k}|}{|z^{n_0-k}|} M.$$

Aplicando la Proposición 11 tenemos que existen $E > 0$ y un número natural $H \geq 0$ tal que $|\alpha_{n,k}| < \frac{ER_1^{n-k}}{k^2}$ y $|\alpha_{n,0}| < ER_1^n$, para $n - k > H$.

Por tanto, si también tenemos en cuenta (10) obtenemos, para $z \in K$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}} \right| &\leq M \left[1 + \sum_{k=n_0-H}^{n_0-1} \frac{|\alpha_{n_0,k}|}{|z|^{n_0-k}} \right] + M \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]+1}^{n_0-H-1} \frac{|\alpha_{n_0,k}|}{|z|^{n_0-k}} + M \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0}{2}]} \frac{|\alpha_{n_0,k}|}{|z|^{n_0-k}} \\ &\leq M \left[1 + \sum_{k=n_0-H}^{n_0-1} \frac{C_4}{k^2 r^{n_0-k}} \right] + M \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]+1}^{n_0-H-1} \frac{ER_1^{n_0-k}}{k^2 r^{n_0-k}} + M \sum_{k=1}^{E[\frac{n_0}{2}]} \frac{ER_1^{n_0-k}}{k^2 r^{n_0-k}} + M \frac{ER_1^{n_0}}{r^{n_0}} \\ &\leq M \left[1 + \frac{HC_4}{(n_0 - H)^2 r^H} \right] + \frac{ME}{(E[\frac{n_0}{2}] + 1)^2} \sum_{k=E[\frac{n_0}{2}]+1}^{n_0-H-1} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{n_0-k} + ME \sum_{k=0}^{E[\frac{n_0}{2}]} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{n_0-k} \\ &< M \left[1 + \frac{A}{(n_0 - H)^2} + \frac{B}{(E[\frac{n_0}{2}] + 1)^2} + C \left(\frac{R_1}{r} \right)^{n_0 - E[\frac{n_0}{2}]} \right] \\ &\leq M \left[1 + \frac{A + B}{(E[\frac{n_0}{2}] + 1)^2} + C \left(\frac{R_1}{r} \right)^{\frac{n_0}{2}} \right], \end{aligned}$$

con $A = \frac{HC_4}{r^H}$, $B = \frac{Er}{r - R_1} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{H+1}$ y $C = \frac{Er}{r - R_1}$. Entonces

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}} \right| < M \left[1 + \frac{V}{(E[\frac{n_0}{2}] + 1)^2} \right]$$

con $V = A + B + C$ y por lo tanto $\left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0}(z)}{z^{n_0}} \right| \leq M \left[1 + \frac{G}{n_0^2} \right]$, $\forall z \in K$.

Procediendo por inducción podemos obtener

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_{n_0+p}(z)}{z^{n_0+p}} \right| \leq M \prod_{p=0}^{\infty} \left[1 + \frac{G}{(n_0 + p)^2} \right], \forall z \in K.$$

En definitiva hemos probado que existe L tal que $\left| \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} \right| \leq L$ para todo $z \in K$ y para todo $n \geq 0$. □

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema central de esta sección.

Teorema 2. Si μ_0 es una medida de Borel finita y positiva cuya función de Carathéodory tiene extensión analítica a $|z| < \frac{1}{r_0}$ con $r_0 < 1$ y μ_1 es una medida de la

clase Szegő cuya función de Szegő, $\Pi_1(z)$, tiene extensión analítica a $|z| < \frac{1}{r_1}$ con $r_1 < 1$, entonces la sucesión de P.O. mónicos con respecto a (1), $\{\tilde{\phi}_n\}$, verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_1\left(\frac{1}{z}\right)}}{\Pi_1(0)}$$

uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > \rho$, con $\rho = \max\{r_0, r_1\}$.

Demostración. De acuerdo con la Proposición 7, bastará probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} - \frac{\psi_n(z)}{z^n} \right) = 0$ uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} tales que $\inf_{z \in K} |z| > \rho$.

Sea K un subconjunto de \mathbb{C} con $r = \inf_{z \in K} |z| > \rho$ y sea R_1 tal que $\rho < R_1 < r$.

Utilizando (9) y la Proposición 13 tenemos, para $z \in K$,

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} - \frac{\psi_n(z)}{z^n} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n,k}}{z^{n-k}} \frac{\tilde{\phi}_k(z)}{z^k} \right| \leq L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k}|}{r^{n-k}}.$$

Si ahora procedemos del mismo modo que en la Proposición 13 y tenemos en cuenta (10) y (11) resulta

$$\sum_{k=n-H}^{n-1} \frac{|\alpha_{n,k}|}{r^{n-k}} < \frac{A}{(n-H)^2}, \quad \sum_{k=E[\frac{n}{2}]+1}^{n-H-1} \frac{|\alpha_{n,k}|}{r^{n-k}} < \frac{B}{(E[\frac{n}{2}]+1)^2}$$

y

$$\sum_{k=0}^{E[\frac{n}{2}]} \frac{|\alpha_{n,k}|}{r^{n-k}} < C \left(\frac{R_1}{r} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Para un $\epsilon > 0$ fijo, elegimos $N \geq 0$ tal que para $n \geq N$ se verifica

$$\frac{LA}{(n-H)^2} < \frac{\epsilon}{3}, \quad \frac{LB}{(E[\frac{n}{2}]+1)^2} < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y} \quad LC \left(\frac{R_1}{r} \right)^{\frac{n}{2}} < \frac{\epsilon}{3},$$

lo que nos permite obtener el resultado. □

Corolario 5. Para todo $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande, las raíces de $\tilde{\phi}_n(z)$ están en $|z| < \rho + \epsilon$.

Demostración. Se procede como en el Corolario 3. □

Proposición 14. Bajo las hipótesis del Teorema 2, se cumple

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\phi}_n(z) = 0$ uniformemente en subconjuntos compactos de $|z| < 1$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{\phi}_n(z)| = \left| \frac{\overline{\Pi_1\left(\frac{1}{z}\right)}}{\Pi_1(0)} \right|$ uniformemente para $|z| = 1$.

Demostración. (i) Basta tener en cuenta que $|z| < 1$ y proceder de la misma forma que en la Proposición 13.

(ii) Es inmediato a partir del Teorema 2. □

4. GENERALIZACIÓN

Los esquemas de razonamiento utilizados tanto en la sección 2 como en la 3 son variantes de una misma argumentación. El problema extremal

$$\begin{array}{ll} \text{Mín} & \|p(z)\|_s^2 = \text{Mín} & \left\{ \|p(z)\|_{\mu_0}^2 + \|p'(z)\|_{\mu_1}^2 \right\} \\ \text{sujeto a } p(z) \in \mathbb{P}_n & & \text{sujeto a } p(z) \in \mathbb{P}_n \\ p(z) = z^n + \text{t.m.g.} & & p(z) = z^n + \text{t.m.g.} \end{array}$$

es un problema de minimización múltiple, en el que la componente que gobierna el problema es la que afecta a las derivadas, siempre que la segunda medida esté en la clase Szegő y que n sea suficientemente grande.

Obsérvese que este hecho sugiere los asintóticos probados y que, en definitiva, la construcción prueba que no hay gran diferencia entre el polinomio que resuelve el segundo problema extremal individual y el que resuelve el problema Sobolev. Obsérvese también que la solución del problema Sobolev se parece a la primitiva de $\phi_n(z)$.

Una generalización natural del producto escalar de Sobolev (1) es considerar un producto escalar con $p + 1$ componentes, esto es

$$(13) \quad \langle f(z), g(z) \rangle_s = \sum_{i=0}^p \int_0^{2\pi} f^{(i)}(e^{i\theta}) \overline{g^{(i)}(e^{i\theta})} d\mu_i(\theta), \quad z = e^{i\theta},$$

donde $\mu_i, i = 0, \dots, p$, son medidas de Borel finitas y positivas en $[0, 2\pi]$.

Para este problema denotaremos $c_{n,k}$ al momento n -ésimo de la k -ésima medida, esto es $c_{n,k} = \langle z^n, 1 \rangle_{\mu_k}$ con $k = 0, \dots, p - 1$, $\phi_n(z)$ al n -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a la medida p , $a_{n,0}$ al término independiente de $\phi_n(z)$ y $\tilde{\phi}_n(z)$ al n -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto al producto escalar de Sobolev (13).

Las ideas expuestas en la sección 2 son fácilmente generalizables si se supone que μ_p es una medida de la clase Szegő y de forma natural se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3. Sean $\mu_i (i = 0, \dots, p - 1)$ medidas de Borel finitas y positivas, y μ_p una medida verificando la condición de Szegő. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi_p(\frac{1}{z})}}{\Pi_p(0)}$$

uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} con $\inf_{z \in K} |z| > 1$, siendo $\Pi_p(z)$ la función de Szegő de μ_p .

Demostración. Seguir las pautas marcadas en la sección 2 y, para los detalles, véase [8]. □

De igual forma, siguiendo las pautas de la sección 3, aunque con cálculos mucho más complicados, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4. Sean $\mu_i, i = 0, \dots, p - 1$, medidas de Borel finitas y positivas y μ_p una medida verificando la condición de Szegő con función de Szegő $\Pi_p(z)$. Si

$\overline{\lim} \sqrt[k]{|c_{n,k}|} = r_k$, $k = 0, \dots, p-1$, $y \overline{\lim} \sqrt[p]{|a_{n,0}|} = r_p$, $y \max\{r_0, r_1, \dots, r_p\} = \rho < 1$
 entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{z^n} = \frac{\overline{\Pi}_p(\frac{1}{z})}{\overline{\Pi}_p(0)}$$

uniformemente en subconjuntos K de \mathbb{C} con $\inf_{z \in K} |z| > \rho$.

REFERENCIAS

- [1] A. Aptekarev, E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Strong asymptotics for the continuous Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory* **100** (1999), 381–391.
- [2] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Lebesgue Sobolev orthogonality on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.* **96** (1998), 27–34.
- [3] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.* **105** (1999), 163–173.
- [4] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Continuous Sobolev inner products on the unit circle: canonical models, *Rend. Mat. Appl. (7)* **19** (1999), 89–106.
- [5] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Bernstein-Szegő-Lebesgue Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Differ. Equations Appl.* **6** (2000), 719–737.
- [6] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Asymptotic behavior inside the disk for Lebesgue Sobolev orthogonal polynomials, *J. Inequal. Appl.* (2001).
- [7] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Strong asymptotics inside the unit disk for Sobolev orthogonal polynomials, *Comput. Math. Appl.* (2001).
- [8] E. Berriochoa y A. Cachafeiro, Szegő's asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials, pre-publicación (2001).
- [9] E. Berriochoa, A. Cachafeiro y F. Marcellán, Differential properties for Sobolev orthogonality on the unit circle, *J. Comput. Appl. Math.* (2001).
- [10] Ja. L. Geronimus, *Orthogonal polynomials: Estimates, asymptotic formulas, and series of polynomials orthogonal on the unit circle and on an interval*, Consultants Bureau, Nueva York, 1961.
- [11] A. Martínez-Finkelshtein, Bernstein-Szegő's theorem for Sobolev orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **16** (2000), 73–84.
- [12] P. Nevai y V. Totik, Orthogonal polynomials and their zeros, *Acta Sci. Math.* **53** (1989), 99–104.
- [13] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, 5.ª edición, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **20**, Providence, RI, 1969.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE VIGO,
 32004 OURENSE, SPAIN

Correo electrónico: esnaola@correo.uvigo.es

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, E. T. S. INGENIEROS INDUSTRIALES, UNIVERSIDAD
 DE VIGO, 36280 VIGO, SPAIN

Correo electrónico: acachafe@dma.uvigo.es

POLINOMIOS ORTOGONALES, CUADRATURA GAUSSIANA Y PROBLEMAS DE VALORES PROPIOS

JOSÉ-JAVIER MARTÍNEZ

Dedicado a la memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe, quien tan bien me acogió en mis inolvidables inicios como docente en el Colegio Universitario de La Rioja

ABSTRACT. The basic theory of Gaussian quadrature formulae, as well as its connection with the classical theory of orthogonal polynomials and with eigenvalue problems is presented in a concise and clear way. The effective computation of the Gaussian formulae by means of several techniques and the relevant role computer algebra systems can play in the different phases of the computation are emphasized.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo se centra en el problema de la construcción de *fórmulas de cuadratura gaussianas*, que se basa por un lado en la teoría de *polinomios ortogonales* y por otro (si se desea, como es natural, disponer de métodos eficientes y apropiados desde el punto de vista numérico) en el cálculo de *valores y vectores propios* de matrices.

Nuestro objetivo es condensar en unas breves páginas diversos conceptos y resultados que constituyen el fundamento de la construcción de dichas fórmulas de integración aproximada y configuran un núcleo de conocimientos básicos necesarios para abordar el estudio de importantes generalizaciones a las que hacemos referencia en la Sección 4. Para hacer accesible el trabajo al mayor número posible de lectores, normalmente no familiarizados con todos los aspectos abordados, se hace hincapié en la claridad de la exposición, basada por una parte en la precisión de los enunciados y por otra en una notación unificada que resume muy diversas contribuciones.

Destacaremos fundamentalmente investigaciones debidas a Golub y Welsch por una parte y a Gautschi por otra, los cuales, basándose en la obra de los matemáticos que les precedieron (algunos de ellos tan grandes como Gauss, Jacobi y Christoffel) abordaron, a partir del uso generalizado de los ordenadores, el problema de la construcción efectiva de las fórmulas.

Un enfoque más novedoso del problema —y al cual en nuestra opinión no se ha prestado la suficiente atención— consiste en el uso de sistemas de cálculo simbólico

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 65D30, 65D32, 33C45, 42C05, 65F15.

Key words and phrases. Orthogonal polynomials, Gauss quadrature formulas, eigenvalues, eigenvectors.

La investigación está subvencionada por el Proyecto BFM2000-1253 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

como *Maple* o *Mathematica*, que no solamente permiten hallar (o redescubrir) de manera exacta expresiones explícitas relacionadas con diferentes aspectos de los polinomios ortogonales, sino que para cálculos en precisión finita (es decir *no exactos*) nos permiten trabajar con un gran número de cifras significativas cuando ello resulte necesario. Este enfoque que hemos querido destacar debe contribuir a aumentar la utilidad de la exposición para un lector no especialista.

El resto del artículo se estructura en tres secciones. En la Sección 2 se introduce la noción de *fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio* para abordar a continuación el caso particularmente importante de las fórmulas *gaussianas*, que son las que consiguen el grado de precisión óptimo entre las fórmulas de esa clase. Dado que las fórmulas gaussianas se basan en los polinomios ortogonales, se presentan a continuación los elementos básicos de la teoría de polinomios ortogonales y su aplicación a la construcción de las fórmulas de cuadratura.

La Sección 3, basada de manera esencial en la *relación de recurrencia* que verifican los polinomios ortogonales, nos conduce a descubrir la manera más eficiente de construir las fórmulas, mediante el cálculo de valores y vectores propios de una matriz tridiagonal simétrica. En esta sección presentamos con detalle la demostración del resultado central en el que se basa el algoritmo de Golub y Welsch, que combina de manera armoniosa los tres campos a que se refiere el título del artículo: las fórmulas de cuadratura, los polinomios ortogonales y el cálculo de valores propios.

Por último, en la Sección 4 introducimos brevemente una faceta esencial de todo lo expuesto anteriormente: su aplicabilidad a numerosos tipos de problemas relacionados con la extensión de la noción de polinomios ortogonales y de fórmulas de cuadratura gaussiana.

2. FÓRMULAS DE CUADRATURA GAUSSIANAS Y POLINOMIOS ORTOGONALES

Sea $dw(x)$ una medida no negativa sobre el intervalo real (a, b) (que puede ser acotado o no acotado) tal que existen y son finitos los *momentos*

$$\mu_k := \int_a^b x^k dw(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Queremos aproximar el valor de la integral

$$\int_a^b f(x) dw(x)$$

mediante una *fórmula de integración numérica* (o *fórmula de cuadratura*) de la forma

$$\int_a^b f(x) dw(x) \approx w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n),$$

donde la integral de la función f respecto a la medida dw es aproximada por medio de una suma finita que involucra n valores de f en distintos *nodos* x_i adecuadamente seleccionados.

Consideraremos fórmulas *de tipo interpolatorio*, en las cuales la aproximación se obtiene integrando el polinomio de interpolación, es decir

$$\int_a^b f(x) dw(x) \approx \int_a^b p(x) dw(x),$$

donde $p(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de $f(x)$ en x_1, \dots, x_n , que en la base de Lagrange $\{l_1(x), \dots, l_n(x)\}$ viene expresado como

$$p(x) = f(x_1)l_1(x) + \dots + f(x_n)l_n(x).$$

En otras palabras, la fórmula es de tipo interpolatorio si los *pesos* w_i vienen dados por

$$w_i = \int_a^b l_i(x) dw(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

El siguiente resultado facilita grandemente el cálculo de los pesos w_i :

Teorema 1. *Dados los nodos x_1, \dots, x_n , la fórmula de cuadratura*

$$\int_a^b f(x) dw(x) \approx w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$$

es de tipo interpolatorio si y sólo si es exacta para los polinomios $1, x, \dots, x^{n-1}$.

El resultado anterior permite calcular los pesos w_i de la fórmula resolviendo el sistema lineal que se obtiene imponiendo las n condiciones de exactitud, es decir el sistema lineal

$$Vc = d,$$

donde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

es una *matriz de Vandermonde traspuesta* y

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T,$$

con

$$d_k = \int_a^b x^{k-1} dw(x), \quad k = 1, \dots, n.$$

La matriz de Vandermonde V^T es la matriz del sistema lineal cuya solución proporciona los coeficientes del polinomio de interpolación en x_1, \dots, x_n . Los sistemas lineales con matrices de Vandermonde (o de Vandermonde traspuestas) pueden resolverse de manera eficiente mediante los algoritmos de Björck-Pereyra (ver [1], [12]).

La matriz V se construye fácilmente con *Maple V* mediante la instrucción

$$V := \text{transpose}(\text{vandermonde}([x[1], x[2], x[3], x[4]]));$$

(si tenemos, por ejemplo, $n = 4$).

Se dice que la fórmula de cuadratura tiene grado de precisión d si es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que d . Como hemos visto, una fórmula de tipo interpolatorio con n nodos posee al menos grado de precisión $n - 1$.

Puede probarse fácilmente mediante la teoría de polinomios ortogonales (ver, por ejemplo, [18]) que no puede construirse una fórmula de tipo interpolatorio con n nodos y grado de precisión $2n$. En consecuencia, el grado de precisión óptimo usando n nodos es $2n - 1$. Las fórmulas de cuadratura gaussianas son las que alcanzan dicho grado de precisión óptimo.

La teoría de las fórmulas de cuadratura gaussianas se basa en la teoría de *polinomios ortogonales*, que resumimos, en sus aspectos básicos, a continuación. Una buena presentación de dicha teoría puede verse en el primer capítulo de [3].

Una sucesión de polinomios $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, con $p_n(x)$ de grado n , se llamará sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dw(x)$$

(o, dicho de otra forma, respecto a la medida $dw(x)$) si se verifica

$$(p_j, p_k) = 0, \quad j \neq k.$$

Dada una sucesión de polinomios ortogonales respecto a una cierta medida, cada $p_n(x)$ está unívocamente determinado salvo multiplicación por una constante no nula. Por lo tanto una manera sencilla y general de establecer una única sucesión de polinomios ortogonales para cada medida es especificar que todos ellos sean *mónicos*, es decir con coeficiente director igual a 1.

Dada una medida $dw(x)$ tal que existe y es finito μ_k (el momento de orden k) para todo k , una condición suficiente para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales respecto a dicha medida es que la integral

$$\int_a^b q(x) dw(x)$$

sea positiva para todo polinomio $q(x)$ no idénticamente nulo y no negativo para todo x del intervalo (a, b) .

El siguiente teorema establece una propiedad clave de los polinomios ortogonales de cara a la construcción de una fórmula de cuadratura, cual es el hecho de que las n raíces (en principio complejas) del polinomio ortogonal de grado n son reales y distintas:

Teorema 2. *Sea $p_n(x)$ el polinomio ortogonal (mónico) de grado n . Entonces, las n raíces de $p_n(x)$ son reales, simples y pertenecientes al intervalo abierto (a, b) .*

Otro aspecto fundamental de la teoría de polinomios ortogonales es la existencia de *relaciones de recurrencia*, que son cruciales para el cálculo efectivo de los polinomios ortogonales y de las fórmulas de cuadratura gaussianas. Detallaremos esta parte de la teoría en la Sección 3.

Los tres teoremas siguientes, que pueden verse con su demostración en [18], resumen la teoría básica acerca de las fórmulas de cuadratura gaussianas.

Teorema 3. Sean x_1, \dots, x_n las raíces del polinomio ortogonal $p_n(x)$ (de grado n) para la medida $dw(x)$ en (a, b) . Supongamos que se hallan los pesos w_1, \dots, w_n imponiendo la exactitud para los polinomios de grado menor o igual que $n - 1$, es decir que se construye la fórmula de tipo interpolatorio

$$\int_a^b f(x) dw(x) \approx w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n).$$

Entonces, dicha fórmula tiene grado de precisión $2n - 1$.

El segundo resultado afirma que no es posible hallar por otro procedimiento otra fórmula de tipo interpolatorio con grado de precisión $2n - 1$:

Teorema 4. Si una fórmula

$$\int_a^b f(x) dw(x) \approx w_1^* f(x_1^*) + \dots + w_n^* f(x_n^*)$$

tiene grado de precisión $2n - 1$, entonces los puntos x_i^* deben ser los ceros del polinomio ortogonal $p_n(x)$ para la medida $dw(x)$ en (a, b) .

El último resultado afirma la positividad de los pesos:

Teorema 5. En una fórmula de cuadratura gaussiana, todos los pesos w_i son positivos.

Dado que las fórmulas de cuadratura gaussianas son en particular fórmulas de tipo interpolatorio, si se obtienen en primer lugar los nodos x_1, \dots, x_n como raíces del polinomio ortogonal $p_n(x)$, los pesos w_1, \dots, w_n pueden calcularse resolviendo el correspondiente sistema con la matriz de Vandermonde traspuesta [9].

Por ejemplo, haciendo uso de la función `solve` y de otras contenidas en los paquetes `linalg` (álgebra lineal) y `orthopoly` (polinomios ortogonales) de *Maple*, podemos hallar los nodos (que resultan ser $-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$) y los pesos (que resultan ser $5/9, 8/9, 5/9$) de la fórmula de cuadratura de *Gauss-Legendre* con tres puntos en $(-1, 1)$:

```
> with(linalg):
> with(orthopoly):
> r:=solve(P(3,x),x);
> V:=transpose(vandermonde([r[1],r[2],r[3]]));
> d:=vector([2,0,2/3]);
> w:=linsolve(V,d);
```

Debe observarse que mediante la orden `P(n,x)` del paquete `orthopoly`, *Maple* no nos proporciona los polinomios de Legendre (en $(-1, 1)$) mónicos, sino los que verifican la condición $\phi_k(1) = 1$ para todos los valores de k , los cuales son de interés en ciertos problemas de ecuaciones diferenciales.

Si se conocen las raíces x_1, \dots, x_n , otro procedimiento para calcular los pesos w_i es hacer uso de la siguiente relación, que puede obtenerse (ver [3], [14]) como consecuencia de la *forma confluyente de la identidad de Christoffel-Darboux*:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(p_k(x_i))^2}{\gamma_k} = \frac{1}{w_i}.$$

En la expresión anterior,

$$\gamma_k = \int_a^b (p_k(x))^2 dw(x),$$

es decir, el cuadrado de la norma de $p_k(x)$ respecto al producto escalar

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dw(x).$$

Se debe ser cuidadoso al considerar la anterior relación, ya que en ocasiones aparece expresada como

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\pi_k(x_i))^2 = \frac{1}{w_i},$$

en cuyo caso hay que tener presente que los $\pi_k(x)$ son los polinomios *ortonormales* (es decir ortogonales y de norma igual a uno):

$$\pi_k(x) = \frac{p_k(x)}{\sqrt{\gamma_k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En [4] Gautschi indica que esta relación es particularmente adecuada (desde el punto de vista numérico) para el cálculo efectivo de los pesos, puesto que se trata de una suma de términos positivos. No obstante, el mismo autor advierte acerca de los problemas de *inestabilidad numérica* al trabajar con polinomios ortogonales *no clásicos*, es decir cuando no se tienen expresiones explícitas para los polinomios.

Es precisamente esta relación entre los pesos, los nodos y los polinomios ortogonales, junto con la relación de recurrencia que consideraremos a continuación, lo que permite reducir a un problema de valores y vectores propios el problema del cálculo de los nodos y los pesos de una fórmula de cuadratura gaussiana.

3. CUADRATURA GAUSSIANA Y PROBLEMAS DE VALORES PROPIOS

Uno de los elementos fundamentales de la teoría de polinomios ortogonales es que pueden calcularse mediante una relación de recurrencia, tal como describimos a continuación (ver [2], [3], [7]).

Sea $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios *mónicos* ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dw(x),$$

es decir tales que

$$(p_j, p_k) = 0, \quad j \neq k.$$

Entonces, los polinomios p_j verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} p_0(x) &:= 1, & p_1(x) &:= x - a_0, \\ p_{k+1}(x) &= (x - a_k)p_k(x) - b_k p_{k-1}(x), & k &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

con coeficientes

$$a_k := \frac{(p_k, xp_k)}{(p_k, p_k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$b_k := \frac{(p_k, p_k)}{(p_{k-1}, p_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Notemos que los coeficientes b_k son todos positivos, y que por lo tanto podemos tomar la raíz cuadrada positiva $\sqrt{b_k}$ de cada uno de ellos.

Se suele definir también

$$b_0 = \int_a^b dw(x),$$

es decir, la medida del intervalo (a, b) .

Observemos que, partiendo de $p_0(x) = 1$, podemos combinar la relación de recurrencia con las expresiones de los a_k y b_k para construir tantos coeficientes a_k y b_k (y tantos polinomios $p_k(x)$) como deseemos. Este procedimiento ha sido llamado por Gautschi ([5], [7]) *procedimiento de Stieltjes*.

El problema que surge al tratar de aplicar dicho procedimiento es la dificultad de evaluar los productos escalares que determinan los coeficientes a_k y b_k , por lo que es habitual el uso de métodos relacionados con los momentos, como el *algoritmo de Chebyshev modificado* ([5], [7]).

No obstante, el procedimiento de Stieltjes puede ser llevado a la práctica en muchos casos si se hace uso de un sistema de cálculo simbólico para evaluar los coeficientes de manera exacta o con precisión finita pero con un número de cifras significativas suficientemente elevado para contrarrestar la posible inestabilidad numérica.

Por ejemplo, las siguientes instrucciones de *Maple* nos proporcionan los coeficientes a_k y b_k y los polinomios ortogonales mónicos en el caso de la *medida de Chebyshev* (es decir $dw(x) = (1 - x^2)^{-1/2} dx$ en el intervalo $(-1, 1)$):

```
> p[0]:=1;
> a[0]:=int(x*p[0]^2/sqrt(1-x^2),
  x=-1..1)/int(p[0]^2/sqrt(1-x^2),x=-1..1);
> b[0]:=int(1/sqrt(1-x^2),x=-1..1);
> p[1]:=x-a[0];
> for n from 1 to 9 do
  a[n]:=int(x*p[n]^2/sqrt(1-x^2),
  x=-1..1)/int(p[n]^2/sqrt(1-x^2),x=-1..1);
  b[n]:=int(p[n]^2/sqrt(1-x^2),
  x=-1..1)/int(p[n-1]^2/sqrt(1-x^2),x=-1..1);
  p[n+1]:=expand((x-a[n])*p[n]-b[n]*p[n-1]);
> od;
```

Se obtienen de este modo los coeficientes bien conocidos (ver [7]) para los *polinomios de Chebyshev*: $a_k = 0$ para todo k , $b_0 = \pi$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_k = \frac{1}{4}$ para $k = 2, 3, \dots$

Partiendo solamente del conocimiento de los coeficientes a_k y b_k , el cálculo efectivo de los nodos x_i y los pesos w_i de la correspondiente fórmula de cuadratura gaussiana puede reducirse a un problema de valores y vectores propios para una

matriz tridiagonal simétrica. Este resultado y el algoritmo correspondiente se deben a Golub y Welsch [13].

Pese a que dicho algoritmo se remonta (en su versión publicada) a 1969, casi tres décadas después puede leerse en [15] que es *el algoritmo definitivo* para el cálculo de las fórmulas de cuadratura gaussianas. Una versión del algoritmo está incluida en el reciente paquete de *software* debido a Gautschi que se describe extensamente, junto con la teoría correspondiente, en [8].

El resultado es el siguiente:

Teorema 6. *Sea*

$$J_n = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{b_{n-2}} & a_{n-2} & \sqrt{b_{n-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

la matriz de Jacobi (de orden n , tridiagonal y simétrica) construida a partir de los coeficientes a_k y b_k de la relación de recurrencia para los polinomios mónicos ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dw(x).$$

Entonces, los nodos x_i de la correspondiente fórmula de cuadratura gaussiana con n puntos son los valores propios de J_n , y los pesos w_i vienen dados por

$$w_i = b_0 v_{i1}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde v_{i1} es la primera componente del vector v_i , el vector propio de norma euclídea igual a 1 asociado al valor propio x_i , y

$$b_0 = \int_a^b dw(x).$$

La afirmación del teorema anterior respecto a los nodos no es sorprendente (ver [17], [20]): siendo J_n una matriz tridiagonal simétrica, si denotamos por J_k ($1 \leq k \leq n$) la submatriz de J_n formada tomando sus primeras k filas y columnas, entonces se tiene que los polinomios característicos q_1, \dots, q_n de esas n matrices (definidos como $q_k = \det(xI - J_k)$ para que todos ellos tengan coeficiente director igual a 1) verifican (tomando $q_0(x) = 1$) la misma relación de recurrencia que los polinomios ortogonales mónicos p_1, \dots, p_n . En particular, $p_n = q_n$ y así las raíces del polinomio ortogonal p_n son las raíces de q_n , es decir los valores propios de J_n .

Naturalmente, es también conocido que cualquier polinomio mónico es el polinomio característico (si definimos el polinomio característico de A como $\det(xI - A)$) de una cierta matriz: la llamada *matriz compañera* del polinomio, que en *Maple* se construye mediante la orden `companion` del paquete `linalg`. Lo realmente notable en el caso de los polinomios ortogonales es que son polinomios característicos de matrices *tridiagonales simétricas*.

Mucho menos evidente es la afirmación del teorema acerca de los pesos w_k . Golub y Welsch se basan en resultados que aparecen en [19], haciendo referencia en particular a la identidad de Christoffel-Darboux.

Merece la pena exponer la demostración de esta parte, no suficientemente clara en el muy citado artículo [13] debido a que Golub y Welsch no parten de la relación de recurrencia para los polinomios ortogonales mónicos.

Observemos en primer lugar que las relaciones de recurrencia para la polinomios mónicos

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - a_0, \\ p_{k+1}(x) = (x - a_k)p_k(x) - b_k p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

pueden reescribirse como

$$xp_0(x) = a_0 p_0(x) + p_1(x), \\ xp_k(x) = b_k p_{k-1}(x) + a_k p_k(x) + p_{k+1}(x).$$

A su vez, las relaciones anteriores pueden expresarse en forma matricial como sigue:

$$x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_n(x) \end{pmatrix},$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es una matriz tridiagonal.

Ahora bien, si x_i ($i = 1, \dots, n$) son las n raíces de $p_n(x)$ se tiene

$$x_i P_i = T P_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde

$$P_i = (p_0(x_i), \dots, p_{n-1}(x_i))^T.$$

Es decir x_1, \dots, x_n son los valores propios de la matriz T y P_1, \dots, P_n son los correspondientes vectores propios.

Sin embargo, la matriz T no es simétrica. Para obtener una matriz simétrica, consideremos la matriz diagonal D de orden n con elementos diagonales d_0, d_1, \dots, d_{n-1} , siendo $d_k = 1/\sqrt{\gamma_k}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), donde

$$\gamma_k = \int_a^b (p_k(x))^2 dw(x).$$

Observemos que, a partir de la definición de los coeficientes b_k de la relación de recurrencia, se tiene

$$b_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}},$$

es decir

$$\frac{\sqrt{\gamma_k}}{\sqrt{\gamma_{k-1}}} = \sqrt{b_k}.$$

De este modo se tiene, para $k = 1, \dots, n-1$,

$$\frac{d_{k-1}}{d_k} = \sqrt{b_k}, \quad \frac{d_k}{d_{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{b_k}},$$

y por lo tanto

$$DTD^{-1} = J_n,$$

donde J_n es la matriz de Jacobi de orden n del enunciado.

Ahora, J_n es una matriz semejante a T y por lo tanto tiene los mismos valores propios que T : los ceros del polinomio ortogonal $p_n(x)$.

Por otro lado, es fácil ver que si P_i es un vector propio de T asociado al valor propio x_i , entonces DP_i es un vector propio de $J_n = DTD^{-1}$ asociado al mismo valor propio. En consecuencia, para $i = 1, \dots, n$,

$$Q_i = DP_i = \left(\frac{p_0(x_i)}{\sqrt{\gamma_0}}, \dots, \frac{p_{n-1}(x_i)}{\sqrt{\gamma_{n-1}}} \right)^T$$

es un vector propio de J_n correspondiente al valor propio x_i .

Haciendo uso de la relación

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(p_k(x_i))^2}{\gamma_k} = \frac{1}{w_i},$$

ya citada en la Sección 2 (consecuencia de la forma confluyente de la identidad de Christoffel-Darboux) se tiene que la norma euclídea de Q_i es $1/\sqrt{w_i}$. Es decir si v_i es el vector propio de J_n correspondiente a x_i con norma euclídea igual a 1, se tendrá

$$v_i = \sqrt{w_i} Q_i.$$

Finalmente, de esta relación se deduce fácilmente (teniendo en cuenta que $p_0(x_i) = 1$ para $i = 1, \dots, n$, y que hemos definido $b_0 = \gamma_0$) que

$$w_i = b_0 v_{i1}^2,$$

donde v_{i1} es la primera componente del vector v_i , y

$$b_0 = \int_a^b dw(x).$$

Es importante observar el papel y el valor de b_0 en el enunciado del teorema, ya que en ocasiones (por ejemplo el mismo Golub en [11]) se cita el resultado como

$$w_i = v_{i1}^2,$$

de modo evidentemente incorrecto. Lo que explica este aparente error es que páginas atrás se ha supuesto (o simplemente se supone sin afirmarlo expresamente) $b_0 = 1$, y no vuelve a recordarse este hecho a la hora de enunciar el resultado.

Además del teorema anterior, se presenta en [13] un algoritmo que, partiendo del método *QR* de Francis y Kublanovskaya para el cálculo de los valores propios de J_n , simplifica el cálculo de los vectores propios normalizados debido a que solamente se necesita *la primera componente* de cada uno de ellos.

Si bien en [13] no se especifica la complejidad computacional, en [2] se destaca que, una vez conocidos los coeficientes a_k y b_k de la relación de recurrencia, los nodos y pesos de la fórmula de cuadratura gaussiana pueden calcularse (todos ellos) mediante el algoritmo de Golub-Welsch en $O(n^2)$ operaciones aritméticas.

4. APLICACIONES

Para las medidas *clásicas* (ver [7]), entre las que se encuentran las asociadas a los polinomios ortogonales de Jacobi, de Laguerre y de Hermite, son bien conocidos en forma explícita los coeficientes de las correspondientes relaciones de recurrencia. No obstante, los resultados que aparecen en las secciones precedentes muestran cómo calcular dichos coeficientes y los nodos y pesos de las correspondientes fórmulas de cuadratura gaussianas haciendo uso de un sistema de cálculo simbólico como *Maple* o *Mathematica* sin tener que recurrir a tablas dispersas en diversas referencias bibliográficas.

Aún más interesante es la posibilidad de aplicación de la teoría a medidas *no estándar* como las citadas en [6], [7]. Por ejemplo, podemos concretar una de las medidas no clásicas que aparecen en ciertas aplicaciones [7]: una *medida de Laguerre finita*, dada en un intervalo finito $(-c, c)$ por

$$dw(x) = e^{-x} dx.$$

Si elegimos $c = 2$ y tratamos de hacer los cálculos con 16 cifras significativas en *Maple*, la inestabilidad numérica hace imposible el cálculo correcto de los coeficientes de la relación de recurrencia. Afortunadamente, *Maple* (a diferencia de los sistemas tradicionales de cálculo numérico con precisión finita) permite aumentar cuanto queramos el número de cifras significativas y así, tomando 25 cifras significativas con la orden `Digits:=25`, conseguimos generar los correspondientes polinomios ortogonales (al menos hasta grado 10).

Otra fuente importante de aplicaciones de la teoría (básica) que hemos presentado es que constituye la base para extensiones posteriores de las fórmulas de cuadratura de Gauss: las fórmulas de Gauss-Radau, de Gauss-Lobatto y de Gauss-Kronrod (ver [2], [9], [15]).

Finalmente, una generalización aún mayor consiste en considerar *polinomios ortogonales en espacios de Sobolev* (ver por ejemplo [16]). Una aplicación importante de la teoría de las dos secciones anteriores al caso de *polinomios ortogonales de tipo Sobolev* puede verse en [10]. En dicho artículo se muestra la utilidad de las fórmulas de cuadratura gaussianas en la generalización del procedimiento de Stieltjes para el cálculo de los coeficientes de la relación de recurrencia que verifican los polinomios de tipo Sobolev.

REFERENCIAS

- [1] A. Björck y V. Pereyra, Solution of Vandermonde systems of equations, *Math. Comp.* **24** (1970), 893–903.
- [2] D. Calvetti, G. H. Golub, W. B. Gragg y L. Reichel, Computation of Gauss-Kronrod quadrature rules, *Math. Comp.* **69** (2000), 1035–1052.
- [3] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, Nueva York, 1978.
- [4] W. Gautschi, Construction of Gauss-Christoffel quadrature formulas, *Math. Comp.* **22** (1968), 251–270.
- [5] W. Gautschi, On generating orthogonal polynomials, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **3** (1982), 289–317.
- [6] W. Gautschi, Some new applications of orthogonal polynomials, en *Polynômes Orthogonaux et Applications* (Proceedings, Bar-le-Duc 1984, C. Brezinski, A. Draux, A. P. Magnus, P. Maroni y A. Ronveaux, eds.) *Lecture Notes in Mathematics* **1171**, Springer-Verlag, Berlín (1985), 63–73.
- [7] W. Gautschi, Computational aspects of orthogonal polynomials, en *Orthogonal polynomials* (Columbus, OH, 1989, P. Nevai, ed.), NATO ASI Ser. C, Math. Phys. Sci. **294**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1990), 181–216.
- [8] W. Gautschi, Algorithm 726: ORTHPOL — A package of routines for generating orthogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules, *ACM Trans. Math. Software* **20** (1994), 21–62.
- [9] W. Gautschi, Orthogonal polynomials and quadrature, *Electron. Trans. Numer. Anal.* **9** (1999), 65–76.
- [10] W. Gautschi y M. Zhang, Computing orthogonal polynomials in Sobolev spaces, *Numer. Math.* **71** (1995), 159–183.
- [11] G. H. Golub, Some modified matrix eigenvalue problems, *SIAM Rev.* **15** (1973), 318–334.
- [12] G. H. Golub y C. F. Van Loan, *Matrix computations*, 3.^a edición, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [13] G. H. Golub y J. H. Welsch, Calculation of Gauss quadrature rules, *Math. Comp.* **23** (1969), 221–230.
- [14] F. B. Hildebrand, *Introduction to numerical analysis*, 2.^a edición, Dover Publications, Nueva York, 1987.
- [15] D. P. Laurie, Calculation of Gauss-Kronrod quadrature rules, *Math. Comp.* **66** (1997), 1133–1145.
- [16] F. Marcellán, M. Alfaro y M. L. Rezola, Orthogonal polynomials in Sobolev spaces: old and new directions, *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993), 113–131.
- [17] J. Stoer y R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, 2.^a edición, Springer-Verlag, Nueva York, 1993.
- [18] A. H. Stroud, *Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Nueva York, 1974.
- [19] H. Wilf, *Mathematics for the physical sciences*, Wiley, Nueva York, 1962.
- [20] J. H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ALCALÁ, CAMPUS UNIVERSITARIO, 28871 ALCALÁ DE HENARES (MADRID), SPAIN

Correo electrónico: jjavier.martinez@uah.es

URL: <http://www2.alcala.es/matema/pp/jjavier/>

GENERALIZED ORTHOGONAL PROJECTIONS AND SHORTED OPERATORS

GUSTAVO CORACH, ALEJANDRA MAESTRIPIERI AND DEMETRIO STOJANOFF

Dedicated to the memory of our friend Chicho Guadalupe

ABSTRACT. Let \mathcal{H} be a Hilbert space, $L(\mathcal{H})$ the algebra of all bounded linear operators on \mathcal{H} and $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ the bounded sesquilinear form induced by a selfadjoint $A \in L(\mathcal{H})$, $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle A\xi, \eta \rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Given $T \in L(\mathcal{H})$, T is A -selfadjoint if $AT = T^*A$. If $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ is a closed subspace, we study the set of A -selfadjoint projections onto \mathcal{S} ,

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{Q \in L(\mathcal{H}) : Q^2 = Q, R(Q) = \mathcal{S}, AQ = Q^*A\}$$

for different choices of A , mainly under the hypothesis that $A \geq 0$. In this paper we study the close relationship between the existence and properties of A -selfadjoint projections onto \mathcal{S} and the shorted operator (also called Schur complement) $A_{/\mathcal{S}}$ of A to \mathcal{S} and the \mathcal{S} -compression $A_{\mathcal{S}} = A - A_{/\mathcal{S}}$.

1. INTRODUCTION

Let \mathcal{H} be a Hilbert space, \mathcal{S} a closed subspace of \mathcal{H} and A a bounded linear positive (semidefinite) operator on \mathcal{H} . The pair (A, \mathcal{S}) is said to be *compatible* if there exists a bounded linear (not necessarily selfadjoint) projection Q which maps \mathcal{H} onto \mathcal{S} such that AQ is selfadjoint. Thus, if

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{Q \in L(\mathcal{H}) : Q^2 = Q, R(Q) = \mathcal{S}, AQ = Q^*A\},$$

then (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ is not empty. In a recent paper [7] the authors introduced and studied this notion (see also Hassi and Nordström [13]). In particular it was shown that there exists a strong relationship between compatibility, the projections of $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ and the shorted operator $A_{/\mathcal{S}}$ of Krein [15] and Anderson-Trapp [2].

This paper is devoted to refine several results of [7], providing new formulae and properties of the so called *minimal projection* $P_{A, \mathcal{S}}$ of $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$, and new characterization of compatible pairs, in order to apply them to shorted operators and compressions.

Observe that the elements of $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ are selfadjoint for the sesquilinear form defined by A . Therefore, the usual best approximation properties of selfadjoint

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47A64, 47A07 and 46C99.

Key words and phrases. Orthogonal projection, Schur complement, shorted operators, compression, abstract splines.

Partially supported by CONICET (PIP 4463/96), Universidad de Buenos Aires (UBACYT TX92 and TW49) and UNLP.

projections can be extended to the elements of $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Let us mention the following application of the notion of compatibility and A -selfadjoint projections to approximation theory.

Given two Hilbert spaces \mathcal{H} and \mathcal{H}_1 , $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$, \mathcal{S} a closed subspace of \mathcal{H} and $\xi \in \mathcal{H}$, an *abstract spline* or a (T, \mathcal{S}) -*spline interpolant* to ξ is any element of the set

$$\text{sp}(T, \mathcal{S}, \xi) = \{\eta \in \xi + \mathcal{S} : \|T\eta\| = \min_{\sigma \in \mathcal{S}} \|T(\xi + \sigma)\|\}.$$

It turns out that, if $A = T^*T$, then (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $\text{sp}(T, \mathcal{S}, \xi)$ is not empty for any $\xi \in \mathcal{H}$ and, in that case, $\text{sp}(T, \mathcal{S}, \xi) = \{(1 - Q)\xi : Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})\}$ for any $\xi \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{S}$. Moreover, the vector of $\text{sp}(T, \mathcal{S}, \xi)$ with minimal norm is exactly $(1 - P_{A, \mathcal{S}})\xi$, where $P_{A, \mathcal{S}}$ is a distinguished element of $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ defined in section 4 which is called the *minimal projection*. See [8] for proofs of these and related facts.

The notion of *shorted operator* of A to \mathcal{S} , introduced by M. G. Krein [15] as part of the theory of extensions of Hermitian operators, was later rediscovered by W. N. Anderson and G. E. Trapp [1], [2], who applied it in electrical network theory.

In finite dimensional spaces, the shorted operator is one of the various manifestations of the Schur complement of a matrix. Given a block matrix

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix},$$

with B invertible, then $E - DB^{-1}C$ is the Schur complement of B in A . This definition is due to E. Haynsworth [14], but it has appeared in several disguised forms since the beginning of the theory of matrices. The reader is referred to the nice surveys by R. W. Cottle [6] and D. Carlson [5] for many properties and applications. The notion was generalized in several directions. In particular, T. Ando [3] introduced, simultaneously with a generalization of the Schur complement, the concept of \mathcal{S} -compression $A_{\mathcal{S}}$ of an operator A in the case of a finite dimensional space. In Ando's definition, if \mathcal{S} is a subspace of \mathcal{H} and A is an operator on \mathcal{H} of the form $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$, with B invertible on \mathcal{S} , then

$$A_{/\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E - DB^{-1}C \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & DB^{-1}C \end{pmatrix}.$$

W. N. Anderson [1] showed that if $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^* & D \end{pmatrix}$ is a $n \times n$ positive semidefinite matrix and B is a square $k \times k$ submatrix, then the operator

$$A_{/\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E - DB^\dagger C \end{pmatrix},$$

where B^\dagger is the Moore-Penrose pseudoinverse of B and \mathcal{S} the subspace of \mathbb{C}^n generated by the first k canonical vectors, has the following interpretation in electrical network theory: if A is the impedance matrix of a resistive n -port network, then $A_{/\mathcal{S}}$ is the impedance matrix of the network obtained by shorting the first k ports. He proved that

$$A_{/\mathcal{S}} = \max\{X \in \mathbb{C}^{n \times n} : 0 \leq X \leq A \quad \text{and} \quad R(X) \subseteq \mathcal{S}^\perp\}$$

and used this property to extend the notion to Hilbert space positive operators:

Definition 1.1. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and let $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ be a closed subspace. Then*

1. *The shorted operator of A by \mathcal{S} is defined by*

$$A_{/\mathcal{S}} = \max\{X \in L(\mathcal{H})^+ : X \leq A \quad \text{and} \quad R(X) \subseteq \mathcal{S}^\perp\}$$

where the maximum is taken for the natural order relation in $L(\mathcal{H})^+$ (see [2]).

2. *The \mathcal{S} -compression $A_{\mathcal{S}}$ of A is defined as $A_{\mathcal{S}} = A - A_{/\mathcal{S}}$.*

The following general properties about the range and kernel of $A_{/\mathcal{S}}$ and $A_{\mathcal{S}}$ are proved in section 2:

1. $\overline{\ker A + \mathcal{S}} \subseteq \ker A_{/\mathcal{S}} \subseteq A^{-1/2}(\overline{A^{1/2}(\mathcal{S})})$.
2. $\ker A_{/\mathcal{S}} = \ker A + \mathcal{S}$ if and only if $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A)$.
3. $A(\mathcal{S}) \subseteq R(A_{\mathcal{S}}) \subseteq \overline{A(\mathcal{S})}$ and both inclusions may be strict.
4. $\ker A_{\mathcal{S}} = A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) = A(\mathcal{S})^\perp$.

The following list contains some of the results of the paper relating the compatibility of the pair (A, \mathcal{S}) with the properties of $A_{/\mathcal{S}}$ and $A_{\mathcal{S}}$:

1. If (A, \mathcal{S}) is compatible, and $E \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$, then

$$A_{\mathcal{S}} = AE \quad \text{and} \quad A_{/\mathcal{S}} = A(1 - E).$$

2. (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $A_{/\mathcal{S}} = \min\{R^*AR : R^2 = R, \ker R = \mathcal{S}\}$ (see 5.1).
3. (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if

$$\ker A_{/\mathcal{S}} = \mathcal{S} + \ker A \quad \text{and} \quad R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A).$$

In this case, $R(A_{/\mathcal{S}}) = R(A) \cap \mathcal{S}^\perp$ (see 5.4).

4. (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $R(A_{\mathcal{S}}) = A(\mathcal{S})$ (see 5.5).
5. $R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A)$ if and only if the pair $(A, \ker A_{/\mathcal{S}})$ is compatible (see 5.2).

Section 2 contains some properties of shorted operators and compressions we shall use later. In section 3 we present several results about A -selfadjoint operators and compatibility, for A a positive (semidefinite) operator. In section 4 we define and show formulas and properties of the minimal projection $P_{A,\mathcal{S}}$ of $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. In section 5 we get the mentioned characterizations of compatibility for a pair (A, \mathcal{S}) , in terms of the properties of shorted operators and compressions. Section 6 contains some examples.

2. PRELIMINARIES

In this paper \mathcal{H} denotes a Hilbert space, $L(\mathcal{H})$ is the algebra of all linear bounded operators on \mathcal{H} , $L(\mathcal{H})^+$ is the subset of $L(\mathcal{H})$ of all (selfadjoint) positive operators, $GL(\mathcal{H})$ is the group of all invertible operators in $L(\mathcal{H})$ and $GL(\mathcal{H})^+ = GL(\mathcal{H}) \cap L(\mathcal{H})^+$ (positive invertible operators). For every $C \in L(\mathcal{H})$ its range is denoted by $R(C)$ and its nullspace by $\ker C$. Denote by \mathcal{Q} (resp., \mathcal{P}) the set of all projections (resp., selfadjoint projections) in $L(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(L(\mathcal{H})) = \{Q \in L(\mathcal{H}) : Q^2 = Q\}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(L(\mathcal{H})) = \{P \in \mathcal{Q} : P = P^*\}.$$

The nonselfadjoint elements of \mathcal{Q} will be called *oblique projections*.

Along this note we use the fact that every $P \in \mathcal{P}$ induces a representation of elements of $L(\mathcal{H})$ by 2×2 matrices: if $T \in L(\mathcal{H})$ decomposes as

$$T = PTP + PT(1 - P) + (1 - P)TP + (1 - P)T(1 - P),$$

then T is represented by the matrix $\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$, where for example $T_1 = PTP$, which is alternatively viewed as an element of $L(\mathcal{H})$ or $L(P(\mathcal{H}))$. Under this representation P can be identified with

$$\begin{pmatrix} I_{P(\mathcal{H})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and all idempotents Q with the same range as P have the form

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

for some $x \in L(\ker P, R(P))$.

Now we state the well known criterium due to Douglas [11] about ranges and factorizations of operators:

Theorem 2.1. *Let $A, B \in L(\mathcal{H})$. Then the following conditions are equivalent:*

1. $R(B) \subseteq R(A)$.
2. *There exists a positive number λ such that $BB^* \leq \lambda AA^*$.*
3. *There exists $D \in L(\mathcal{H})$ such that $B = AD$.*

Moreover, the operator D is unique if it satisfies the conditions

$$B = AD, \quad \ker D = \ker B \quad \text{and} \quad R(D) \subseteq \overline{R(A^*)}.$$

In this case $\|D\|^2 = \inf\{\lambda : BB^* \leq \lambda AA^*\}$ and A is called the **reduced** solution of the equation $AX = B$.

We state the following elementary result because we shall use it several times in this paper.

Lemma 2.2. *Ler $A \in L(\mathcal{H})^+$. Then*

1. $\ker A = \ker A^{1/2}$.
2. $R(A) \subseteq R(A^{1/2}) \subseteq \overline{R(A)}$.
3. *If $R(A)$ is not closed then $R(A)$ is properly included in $R(A^{1/2})$.*

Proof. Item 1 and 2 are easy to see. If $R(A) = R(A^{1/2})$ and $\xi \in (\ker A)^\perp$, then there exists $\rho \in (\ker A)^\perp$ such that $A^{1/2}\xi = A\rho$. Therefore $A^{1/2}\rho = \xi$ and $R(A^{1/2})$ is closed. Clearly this implies that $R(A)$ is also closed. □

Shorted operator and compressions.

2.3. As before, let $P \in \mathcal{P}$ be the orthogonal projection onto the closed subspace $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$. The classical notion of Schur complement of a matrix (see [6] and [5] for concise surveys on the subject) has been extended to positive Hilbert space operators by M. G. Krein [15] and, later and independently, by W. N. Anderson and G. E.

Trapp [2] defining what is called the *shorted operator*: if $A \in L(\mathcal{H})^+$ then there exists

$$A_{/\mathcal{S}} = \max\{X \in L(\mathcal{H})^+ : X \leq A \text{ and } R(X) \subseteq \mathcal{S}^\perp\}$$

where the maximum is taken for the natural order relation in $L(\mathcal{H})^+$ (see [2]). $A_{/\mathcal{S}}$ is called the *shorted operator* of A to \mathcal{S}^\perp . $\Sigma : \mathcal{P} \times L(\mathcal{H})^+ \rightarrow L(\mathcal{H})^+$, $(P, A) \mapsto A_{/\mathcal{S}}$. Next we collect some results of Anderson-Trapp and E. L. Pekarev [19] which are relevant in this paper.

Theorem 2.4. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ with matrix representation $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$.*

1. $R(b) \subseteq R(a^{1/2})$ and if $d \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S})$ is the RS of the equation $a^{1/2} x = b$ then

$$A_{/\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c - d^*d \end{pmatrix}$$

2. If $\mathcal{M} = \overline{A^{1/2}(\mathcal{S})}$ and $P_{\mathcal{M}}$ is the orthogonal projection onto \mathcal{M} then

$$A_{/\mathcal{S}} = A^{1/2}(1 - P_{\mathcal{M}})A^{1/2}.$$

3. $A_{/\mathcal{S}}$ is the infimum of the set $\{R^*AR : R \in \mathcal{Q}, \ker R = \mathcal{S}\}$; in general, the infimum is not attained.
4. $R(A) \cap \mathcal{S}^\perp \subseteq R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A_{/\mathcal{S}}^{1/2}) = R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S}^\perp$; in general, the inclusions are strict.

The reader is referred to [2] and [19] for proofs of these facts.

Corollary 2.5. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$. Then*

1. $\overline{\ker A + \mathcal{S}} \subseteq \ker(A_{/\mathcal{S}}) = A^{-1/2}(\overline{A^{1/2}(\mathcal{S})})$.
2. $\ker A_{/\mathcal{S}} = \ker A + \mathcal{S}$ if and only if $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A^{1/2})$.

Proof.

1. By Theorem 2.4, if $\mathcal{M} = \overline{A^{1/2}(\mathcal{S})}$, then $A_{/\mathcal{S}} = A^{1/2}(1 - P_{\mathcal{M}})A^{1/2}$. Hence both $\ker A$ and \mathcal{S} are included in $\ker A_{/\mathcal{S}}$. On the other hand,

$$\ker A_{/\mathcal{S}} = \ker A^{1/2}(1 - P_{\mathcal{M}})A^{1/2} = \ker(1 - P_{\mathcal{M}})A^{1/2} = A^{-1/2}(\mathcal{M}).$$

2. It is clear that $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A^{1/2})$ if and only if $\mathcal{M} \cap R(A^{1/2}) = A^{1/2}(\mathcal{S})$ if and only if $A^{-1/2}(\mathcal{M}) = A^{-1/2}(A^{1/2}(\mathcal{S})) = \ker A + \mathcal{S}$.

□

Definition 2.6. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$, $P \in \mathcal{P}$ and $\mathcal{S} = R(P)$. The positive operator*

$$A_{\mathcal{S}} := A - A_{/\mathcal{S}}$$

will be called the \mathcal{S} -compression of A .

Remark 2.7. Let $A \in L(\mathcal{H})^+$, $P \in \mathcal{P}$ and $\mathcal{S} = R(P)$. Using Theorem 2.4 and Proposition 5.1, one can easily deduce the following properties of $A_{\mathcal{S}}$:

1. $(A_{\mathcal{S}})_{/\mathcal{S}} = 0$.

2. If $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ and d is the reduced solution of the equation $a^{1/2}x = b$, then

$$A_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d^*d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ d^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1/2} & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $A_{\mathcal{S}} = A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$, where $\mathcal{M} = \overline{A^{1/2}(\mathcal{S})}$.
 4. $\ker A_{\mathcal{S}} = A^{-1}(\mathcal{S}^{\perp})$. Indeed, since $\mathcal{M}^{\perp} = A^{-1/2}(\mathcal{S}^{\perp})$, then

$$\ker A_{\mathcal{S}} = \ker P_{\mathcal{M}}A^{1/2} = A^{-1/2}(\mathcal{M}^{\perp}) = A^{-1/2}(A^{-1/2}(\mathcal{S}^{\perp})) = A^{-1}(\mathcal{S}^{\perp}).$$

5. $A(\mathcal{S}) \subseteq R(A_{\mathcal{S}}) \subseteq \overline{A(\mathcal{S})}$ and the inclusions may be strict. Indeed,

$$A(\mathcal{S}) = A_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) \subseteq R(A_{\mathcal{S}}) \subseteq (\ker A_{\mathcal{S}})^{\perp} = (A^{-1}(\mathcal{S}^{\perp}))^{\perp} = \overline{A(\mathcal{S})}.$$

See Example 6.9 in order to see an example of strict inclusions.

3. A -SELFADJOINT PROJECTIONS AND COMPATIBILITY

Throughout, \mathcal{S} is a closed subspace of \mathcal{H} and P is the orthogonal projection onto \mathcal{S} . As we said in the introduction, we consider a bounded sesquilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ determined by a positive operator $A \in L(\mathcal{H})$: $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle A\xi, \eta \rangle$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. This form induces the notion of A -orthogonality. For example, easy computations show that the A -orthogonal of \mathcal{S} is

$$\mathcal{S}^{\perp_A} := \{ \xi : \langle A\xi, \eta \rangle = 0 \ \forall \eta \in \mathcal{S} \} = A^{-1}(\mathcal{S}^{\perp}) = A(\mathcal{S})^{\perp}.$$

Given $T \in L(\mathcal{H})$, an operator $W \in L(\mathcal{H})$ is called an A -adjoint of T if

$$\langle T\xi, \eta \rangle_A = \langle \xi, W\eta \rangle_A, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

or, which is the same, if $T^*A = AW$. Therefore, the existence of an A -adjoint W of T is equivalent to $R(T^*A) \subseteq R(A)$. In particular, if $Q \in \mathcal{Q}$, then the existence of an A -adjoint of Q is also equivalent to

$$(1) \quad R(A) = R(A) \cap \ker Q^* \oplus R(A) \cap R(Q^*) = R(A) \cap (\ker Q)^{\perp} \oplus R(A) \cap R(Q)^{\perp}.$$

Observe that T may have no A -adjoint, only one or many of them. We shall not deal in this paper with the general problem of existence and uniqueness of A -adjoint operators. Instead, we shall study the existence and uniqueness of A -selfadjoint projections, i.e., $Q \in \mathcal{Q}$ such that $AQ = Q^*A$. Among them, we are interested in those whose range is exactly \mathcal{S} . Thus, the main goal of the paper is the study of the set

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{ Q \in \mathcal{Q} : R(Q) = \mathcal{S}, AQ = Q^*A \}$$

for different choices of A .

We shall state all the results for positive operators, though some of them are still true in a more general case. For general results on A -selfadjoint operators the reader is referred to the papers by Lax [16] and Dieudonné [10]; a recent paper by Hassi and Nordström [13] contains many interesting results on A -selfadjoint projections.

The following lemma gives equivalent conditions for a projection to be A -selfadjoint. Observe that they are similar to those for a selfadjoint projection.

Lemma 3.1. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and $Q \in \mathcal{Q}$. Then the following conditions are equivalent:*

1. Q is A -selfadjoint.
2. $\ker Q \subseteq R(Q)^{\perp A}$.
3. Q is an A -contraction, i.e. $\langle Q\xi, Q\xi \rangle_A \leq \langle \xi, \xi \rangle_A \quad \xi \in \mathcal{H}$.

Proof. **1** \leftrightarrow **2**: If $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ and $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, then

$$(2) \quad \langle A\eta, Q\xi \rangle = \langle Q^*A\eta, \xi \rangle = \langle AQ\eta, \xi \rangle = \langle Q\eta, A\xi \rangle,$$

so $\ker Q \subseteq A^{-1}(S^\perp)$. The converse can be proved in a similar way.

1 \leftrightarrow **3**: First observe that condition 3 is equivalent to $Q^*AQ \leq A$. Now suppose that $Q^*AQ \leq A$. Then, by Theorem 2.1, the reduced solution D of the equation $A^{1/2}X = Q^*A^{1/2}$ satisfies $\|D\| \leq 1$. We shall see that $D^2 = D$. Indeed, note that $AD^2 = Q^*A^{1/2}D = (Q^*)^2A^{1/2} = Q^*A^{1/2}$. Also

$$\ker Q^*A^{1/2} = \ker D \subseteq \ker D^2 \subseteq \ker AD^2 = \ker Q^*A^{1/2}$$

and $R(D^2) \subseteq R(D) \subseteq \overline{R(A^*)}$. Thus, D^2 is a reduced solution of $AX = Q^*A^{1/2}$ and, by uniqueness, $D^2 = D$. Since $\|D\| = 1$, it must be $D^* = D$. Since $Q^*A = A^{1/2}DA^{1/2}$, we conclude that $Q^*A = AQ$. Conversely, note that $AQ = Q^*AQ \geq 0$ and, if $E = 1 - Q$, then also $AE = E^*AE$. Therefore, $A = A(Q + E) = Q^*AQ + E^*AE \geq Q^*AQ$. \square

Throughout, we use the matrix representation determined by P . Given $A \in L(\mathcal{H})^+$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$, where $a = PAP$, $b = PA(I - P)$ and $c = (I - P)A(I - P)$.

Definition 3.2. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ a closed subspace. The pair (A, \mathcal{S}) is said to be compatible if there exists an A -selfadjoint projection with range \mathcal{S} , i.e. if $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ is not empty.*

Now, we state equivalent conditions to compatibility, in terms of the matrix representation given by P . Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ with matrix representation $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$.

Proposition 3.3. *Given $A \in L(\mathcal{H})^+$, the following conditions are equivalent:*

1. The pair (A, \mathcal{S}) is compatible.
2. $R(PA) = R(PAP)$ or equivalently $R(b) \subseteq R(a)$.
3. The equation $ax = b$ admits a solution.

Proof. **2** \leftrightarrow **3**: Apply Theorem 2.1.

1 \leftrightarrow **3**: Recall that $a = PAP$ and $b = PA(1 - P)$. If Y is a solution to $(PAP)X = PA(1 - P)$, consider $y = PY(1 - P)$ and $Q = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Easy computations shows that $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Conversely if $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ then writing the equality $AQ = Q^*A$ in matrix form, we get that q is a solution to $ax = b$. \square

Remark 3.4. Let $A \in L(\mathcal{H})^+$, $P \in \mathcal{P}$ with $R(P) = \mathcal{S}$. Then,

1. If $R(PAP)$ is closed, the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. Indeed, if $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ then, by Theorem 2.4, $R(b) \subseteq R(a^{1/2})$. But if $R(PAP)$ is closed, $R(a^{1/2}) = R(a)$. Then, by Proposition 3.3, the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. In particular:
2. If $\dim \mathcal{H} < \infty$ then every pair (A, \mathcal{S}) is compatible.
3. If $\dim \mathcal{S} < \infty$ then (A, \mathcal{S}) is compatible.
4. If $A \in GL(\mathcal{H})^+$, then $R(PAP) = \mathcal{S}$, so that (A, \mathcal{S}) is compatible. In this case, the unique projection $P_{A,\mathcal{S}}$ onto \mathcal{S} which is A -selfadjoint, is determined (see [4]) by the formulae

$$(3) \quad P_{A,\mathcal{S}} = P(1 + P - A^{-1}PA)^{-1} = \left(PAP + (1 - P)A(1 - P) \right)^{-1} PA.$$

Example 3.5. Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and consider

$$M = \begin{pmatrix} A & A^{1/2} \\ A^{1/2} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})^+.$$

If $\mathcal{S} = \mathcal{H} \oplus \{0\}$, then, by Lemma 2.2, the pair (M, \mathcal{S}) is compatible if and only if $R(A)$ is closed.

Now we give equivalent conditions to compatibility, in this case in terms of subspaces.

Proposition 3.6. *Given $A \in L(\mathcal{H})^+$, the following conditions are equivalent:*

1. *The pair (A, \mathcal{S}) is compatible.*
2. *$\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp A} = \mathcal{H}$.*
3. *$R(A^{1/2}) = A^{1/2}(\mathcal{S}) \oplus (A^{1/2}(\mathcal{S})^\perp \cap R(A^{1/2}))$.*
4. *If $\mathcal{M} = A^{1/2}(\mathcal{S})$, then $R(P_{\mathcal{M}}A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2}P)$.*

Proof. **1** \leftrightarrow **2**: follows from Lemma 3.1 with $R(Q) = \mathcal{S}$.

2 \leftrightarrow **3**: If $\mathcal{H} = \mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp A}$ then applying $A^{1/2}$ to both sides of the equality we get that $A^{1/2}(\mathcal{H}) = A^{1/2}(\mathcal{S}) + A^{1/2}(A^{-1}(\mathcal{S}^\perp))$ or $R(A^{1/2}) = A^{1/2}(\mathcal{S}) + A^{-1/2}(\mathcal{S}^\perp) \cap R(A^{1/2}) = A^{1/2}(\mathcal{S}) \oplus A^{1/2}(\mathcal{S})^\perp \cap R(A^{1/2})$. Conversely, from $R(A^{1/2}) = A^{1/2}(\mathcal{S}) \oplus A^{1/2}(\mathcal{S})^\perp \cap R(A^{1/2})$ we get that $\mathcal{H} = \mathcal{S} + A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) + \ker A^{1/2} = \mathcal{S} + A^{-1}(\mathcal{S}^\perp)$.

3 \leftrightarrow **4**: If $y \in R(A^{1/2})$ then $y = y_1 + y_2$ for unique $y_1 \in A^{1/2}(\mathcal{S})$ and $y_2 \in A^{1/2}(\mathcal{S})^\perp$, but then $P_{\mathcal{M}}(y) = y_1 \in R(A^{1/2}P)$. The converse is similar. \square

Remark 3.7. If the pair (A, \mathcal{S}) is compatible it follows from item 3 of Proposition 3.6 that $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A^{1/2})$. Observe that in this case if $\mathcal{M} = A^{1/2}(\mathcal{S})$ then

$$R(A^{1/2}) = \mathcal{M} \cap R(A^{1/2}) \oplus \mathcal{M}^\perp \cap R(A^{1/2}).$$

Conversely if $R(A^{1/2}) = \mathcal{M} \cap R(A^{1/2}) \oplus \mathcal{M}^\perp \cap R(A^{1/2})$ and $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A^{1/2})$ then (A, \mathcal{S}) is compatible.

Proposition 3.8. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$, $P \in \mathcal{P}$ and $\mathcal{S} = R(P)$. Then*

1. $(A^2_{/s})^{1/2} \leq A_{/s}$.
2. *If $A(\mathcal{S})$ is closed in $R(A)$, then $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A^{1/2})$.*

3. If (A, \mathcal{S}) is compatible, then $A(\mathcal{S})$ is closed in $R(A)$.

Proof.

1. $A^2_{/\mathcal{S}} \leq A^2$ implies that $(A^2_{/\mathcal{S}})^{1/2} \leq A$. But $R((A^2_{/\mathcal{S}})^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}^\perp$.
2. Using Corollary 2.5, the fact that $A(\mathcal{S})$ is closed in $R(A)$ implies that

$$\ker A^2_{/\mathcal{S}} = \ker A^2 + \mathcal{S} = \ker A + \mathcal{S}.$$

Using item 1, we can deduce that $\ker A_{/\mathcal{S}} \subseteq \ker A + \mathcal{S}$, so that $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A^{1/2})$, again by Corollary 2.5.

3. Assume that (A, \mathcal{S}) is compatible. By equation (1), if $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$, then

$$R(A) = R(A) \cap R(Q^*) \oplus R(A) \cap \ker Q^*.$$

Therefore $A(\mathcal{S}) = R(AQ) = R(Q^*A) = R(Q^*) \cap R(A)$ is closed in $R(A)$. □

Lemma 3.9. *If $A \in L(\mathcal{H})^+$ then*

1. *The following conditions are equivalent:*
 - (a) $R(PAP)$ is closed.
 - (b) $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed.
 - (c) $A(\mathcal{S})$ is closed.
2. *If $R(PAP)$ is closed, then the pair (A, \mathcal{S}) is compatible.*
3. *If the pair (A, \mathcal{S}) is compatible, then $\mathcal{S} + \ker A$ is closed.*

Proof.

1. Since $A^{1/2}(\mathcal{S}) = R(A^{1/2}P)$ and $PAP = (A^{1/2}P)^*A^{1/2}P$, we get that (a) is equivalent to (b). Suppose that $R(PAP)$ is closed. Note that $A(\mathcal{S}) = R(AP)$ and $R(AP)$ is closed if and only if $R(PA)$ is closed if and only if $R(PA^2P)$ is closed. Note that $(PAP)^2 \leq PA^2P$ and

$$\ker(PAP)^2 = \ker PA^2P = \mathcal{S}^\perp \oplus (\mathcal{S} \cap \ker A).$$

Since $PA^2P \geq (PAP)^2 > 0$ in $(\ker(PAP)^2)^\perp$ we get that $R(PA^2P)$ is closed.

The reverse implication is easy to see.

2. See Remark 3.4.
3. If (A, \mathcal{S}) is compatible, then, by item 3 of Proposition 3.6, $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A^{1/2})$ and then $\mathcal{S} + \ker A = A^{-1/2}(A^{1/2}(\mathcal{S}))$ is closed. □

The condition “ $A(\mathcal{S})$ closed in $R(A)$ ” (or equivalently “ $A(\mathcal{S})$ closed” when A has closed range), which is necessary for the pair (A, \mathcal{S}) to be compatible (by Proposition 3.8), turns out to be sufficient when A has closed range, as we will see in the following proposition.

Proposition 3.10. *If $A \in L(\mathcal{H})^+$ has closed range then the following conditions are equivalent:*

1. *The pair (A, \mathcal{S}) is compatible.*
2. *$R(PAP)$ is closed.*
3. *$\mathcal{S} + \ker A$ is closed.*

Proof. By Lemma 3.9, we know that $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$. If $\mathcal{S} + \ker A$ is closed then $P_{R(A)}(\mathcal{S})$ is closed. Therefore $A(\mathcal{S}) = A(P_{R(A)}(\mathcal{S}))$ which is closed because $P_{R(A)}(\mathcal{S}) \subseteq R(A)$ is closed. \square

Remark 3.11. If $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ have both the same closed range, then $\ker A = \ker B$ and, by Proposition 3.10, (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if (B, \mathcal{S}) is compatible. Moreover, $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ and $\mathcal{P}(B, \mathcal{S})$ are *parallel* affine manifolds by Remark 4.2 above.

For positive injective operators the following equivalences hold:

Proposition 3.12. *If $A \in L(\mathcal{H})^+$ is injective then the following conditions are equivalent:*

1. *The pair (A, \mathcal{S}) is compatible.*
2. *$\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^{\perp A} = \mathcal{H}$.*
3. *$\mathcal{S}^{\perp} \oplus \overline{A(\mathcal{S})}$ is closed.*

Proof. **1** \leftrightarrow **2**: follows from Proposition 3.6 and the fact that $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp A} = \{0\}$ when A is injective.

2 \leftrightarrow **3**: First observe that, if $\mathcal{W} = \overline{A(\mathcal{S})}$, then $\mathcal{S}^{\perp} + \mathcal{W}$ is always a dense set when A is injective because $\overline{\mathcal{S}^{\perp} + \mathcal{W}} = (\mathcal{S} \cap A(\mathcal{S})^{\perp})^{\perp} = \mathcal{H}$. Then $\mathcal{S}^{\perp} + \mathcal{W} = \mathcal{H}$ if and only if $\mathcal{S}^{\perp} + \mathcal{W}$ is closed. The equivalence follows by using the general fact that given closed subspaces \mathcal{M} and \mathcal{N} then $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$ if and only if $\mathcal{M}^{\perp} \oplus \mathcal{N}^{\perp} = \mathcal{H}$. \square

Remark 3.13. Given two subspaces \mathcal{S}, \mathcal{T} , the cosine of the Friedrichs angle between them is defined by

$$c(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \sup\{|\langle \xi, \eta \rangle| : \xi \in \mathcal{S} \cap (\mathcal{S} \cap \mathcal{T})^{\perp}, \|\xi\| \leq 1, \eta \in \mathcal{T} \cap (\mathcal{S} \cap \mathcal{T})^{\perp}, \|\eta\| \leq 1\}.$$

It is well known that $c(\mathcal{S}, \mathcal{T}) < 1$ if and only if $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ is closed. Then compatibility in the case of a closed range operator or in the injective case is related to an angle condition between two subspaces:

1. If $A \in L(\mathcal{H})^+$ has closed range, then (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $c(\mathcal{S}, \ker A) < 1$ (see Proposition 3.10).
2. If $A \in L(\mathcal{H})^+$ is injective, then, by Proposition 3.12, (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $c(\mathcal{S}^{\perp}, \overline{A(\mathcal{S})}) < 1$.

4. THE MINIMAL PROJECTION

Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ a closed subspace such that the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. Using Lemma 3.1 or Proposition 3.6, it is clear that $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ is a singleton if and only if $\ker A \cap \mathcal{S} = \{0\}$. If this is not the case, there exists a projection in $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ with optimal properties:

Definition 4.1. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and suppose that the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. If $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ and $d \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S})$ is the reduced solution of the equation $ax = b$, we define the following oblique projection onto \mathcal{S} :*

$$P_{A, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remark 4.2. Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and suppose that (A, \mathcal{S}) is compatible. Denote by $\mathcal{N} = A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) \cap \mathcal{S} = \ker A \cap \mathcal{S}$. Then $P_{A, \mathcal{S}} \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$, $\ker P_{A, \mathcal{S}} = A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) \ominus \mathcal{N}$ and $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ is an affine manifold that can be parametrized as

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = P_{A, \mathcal{S}} + L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{N}),$$

where $L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{N})$ is viewed as a subspace of $L(\mathcal{H})$. Observe that $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ has a unique element $(P_{A, \mathcal{S}})$ if and only if $\mathcal{N} = \{0\}$, i.e. if $\mathcal{S} \oplus A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) = \mathcal{H}$.

Moreover $P_{A, \mathcal{S}}$ has minimal norm in $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Nevertheless, $P_{A, \mathcal{S}}$ is not in general the unique $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ that realizes the minimum. For a proof of these facts see 3.6 of [7].

Proposition 3.3 shows that the pair (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $R(PA) \subseteq R(PAP)$. Therefore, if (A, \mathcal{S}) is compatible, it is natural to look at the reduced solution Q of the equation

$$(4) \quad (PAP)X = PA$$

and its relation with $P_{A, \mathcal{S}}$. Observe that $R(Q) \subseteq \overline{R(PAP)}$ which can be strictly included in \mathcal{S} , so that, in general, $Q \neq P_{A, \mathcal{S}}$. Nevertheless:

Proposition 4.3. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ such that the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. Let Q be the reduced solution of the equation (4). Let $\mathcal{N} = \ker A \cap \mathcal{S}$. Then $Q = P_{A, \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}}$ and*

$$P_{A, \mathcal{S}} = P_{\mathcal{N}} + Q.$$

Proof. Let $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$. In $L(\mathcal{S})$, $\ker a = \mathcal{N}$ and $\overline{R(a)} = \overline{R(a^{1/2})} = \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$.

Note that $R(Q) \subseteq \overline{R(a)}$. Also $\ker Q = \ker(PA) = A^{-1}(\mathcal{S}^\perp)$. If $\xi \in \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$, then

$$a(Q\xi) = (PAP)Q\xi = PA\xi = PAP\xi = a(\xi).$$

Since a is injective in $\mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$, we can deduce that $Q\xi = \xi$ for all $\xi \in \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$. Now, the compatibility of (A, \mathcal{S}) implies that $\mathcal{S} + A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) = \mathcal{H}$. Also $A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) \cap \mathcal{S} = \ker A \cap \mathcal{S} = \mathcal{N}$. Therefore $A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) \oplus (\mathcal{S} \ominus \mathcal{N}) = \mathcal{H}$. Then $Q^2 = Q$ and $R(Q) = \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$. Note that

$$\ker Q = A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) \subseteq A^{-1}((\mathcal{S} \ominus \mathcal{N})^\perp) = R(Q)^\perp,$$

so that Q is A -selfadjoint by Lemma 3.1. On the other hand, $(\mathcal{S} \ominus \mathcal{N}) \cap \ker A = \{0\}$, so that Q is the unique element of $\mathcal{P}(A, \mathcal{S} \ominus \mathcal{N})$, by Remark 4.2. Observe that $\mathcal{N} \subseteq \ker A \subseteq A^{-1}(\mathcal{S}^\perp)$. Therefore

$$(P_{\mathcal{N}} + Q)^2 = P_{\mathcal{N}} + Q, \quad R(P_{\mathcal{N}} + Q) = \mathcal{S} \quad \text{and}$$

$$\ker(P_{\mathcal{N}} + Q) = (A^{-1}(\mathcal{S}^\perp)) \ominus \mathcal{N}.$$

These formulae clearly implies that $P_{\mathcal{N}} + Q = P_{A, \mathcal{S}}$ (see Remark 4.2). □

By Proposition 3.6, the pair (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $R(P_{\mathcal{M}}A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2}P)$ or equivalently if equation $A^{1/2}PX = P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$ admits a solution. Moreover, equation (4) and equation $A^{1/2}PX = P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$ have the same reduced solution as we will see in the following proposition.

Proposition 4.4. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ such that the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. Let $\mathcal{M} = \overline{A^{1/2}(\mathcal{S})}$ and $\mathcal{N} = \ker A \cap \mathcal{S}$. Consider Q the reduced solution of the equation*

$$(5) \quad (A^{1/2}P)X = P_{\mathcal{M}}A^{1/2}.$$

Then $Q = P_{A, \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}}$ and $P_{A, \mathcal{S}} = P_{\mathcal{N}} + Q$. In particular, if $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed and $\ker A \cap \mathcal{S} = \{0\}$, then

$$(6) \quad P_{A, \mathcal{S}} = (A^{1/2}P)^\dagger P_{\mathcal{M}}A^{1/2} = (A^{1/2}P)^\dagger A^{1/2}$$

where $(A^{1/2}P)^\dagger$ denotes the Moore-Penrose pseudoinverse of $(A^{1/2}P)$.

Proof. We will prove that equations (4) and (5) have the same RS. Denote $B = A^{1/2}$. Recall that $\mathcal{M} = \overline{B(\mathcal{S})} = B^{-1}(\mathcal{S}^\perp)^\perp$. Observe that

$$(7) \quad BP_{\mathcal{M}}B = AP_{A, \mathcal{S}} = APP_{A, \mathcal{S}}.$$

In fact, for $\xi \in \mathcal{H}$, let $\eta = P_{A, \mathcal{S}}\xi$ and $\rho = \xi - \eta \in A^{-1}(\mathcal{S}^\perp)$; then $B\eta \in \mathcal{M}$ and $B\rho \in B^{-1}(\mathcal{S}^\perp) = \mathcal{M}^\perp$. Hence $BP_{\mathcal{M}}B\xi = A\eta = AP_{A, \mathcal{S}}\xi$. By Proposition 4.3, the projection $Q = P_{A, \mathcal{S}} - P_{\mathcal{N}}$ is the reduced solution of the equation $PAPX = PA$. We shall see that Q is the reduced solution of the equation (5). First note that, by equation (7), $BP_{\mathcal{M}}B = (AP)P_{A, \mathcal{S}} = (AP)Q$, so $B(P_{\mathcal{M}}B - BPQ) = 0$. But $R(P_{\mathcal{M}}B - BPQ) \subseteq \overline{R(B)} = (\ker B)^\perp$. Hence Q is a solution of (5). Note that $\ker P_{\mathcal{M}}B = B^{-1}(B^{-1}(\mathcal{S}^\perp)) = A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) = \ker Q$ by Proposition 4.3. Finally,

$$\overline{R((BP)^*)} = \overline{R(PB)} = \overline{R(PAP)} = \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} = R(Q).$$

The first equality of equation (6) follows directly. The second, from the fact that

$$(A^{1/2}P)^\dagger P_{\mathcal{M}} = (A^{1/2}P)^\dagger.$$

□

Formula (6), for operators with closed range, is due to Golomb [12].

Corollary 4.5. *Consider $A \in L(\mathcal{H})^+$ injective such that the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. Then, with the same notations as in Proposition 4.4,*

$$P_{A, \mathcal{S}} = A^{-1/2} P_{\mathcal{M}}A^{1/2}.$$

5. THE RELATIONSHIP WITH SHORTED OPERATORS

As before, let $P \in \mathcal{P}$ be the orthogonal projection onto the closed subspace $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$. The following proposition relates, when (A, \mathcal{S}) is compatible, the shorted operator $A_{/\mathcal{S}}$ defined in section 2.3 with the elements of $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$.

Proposition 5.1. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ such that the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. Let $E \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ and $Q = 1 - E$. Then*

1. $A_{/\mathcal{S}} = AQ = Q^*AQ$.
2. $A_{/\mathcal{S}} = \min\{R^*AR : R \in \mathcal{Q}, \ker R = \mathcal{S}\}$. *Actually, this property is equivalent to the compatibility of the pair (A, \mathcal{S}) .*
3. $R(A_{/\mathcal{S}}) = R(A) \cap \mathcal{S}^\perp$.
4. $\ker A_{/\mathcal{S}} = \ker A + \mathcal{S}$.

Proof.

1. Note that $0 \leq AQ = Q^*AQ \leq A$, by Lemma 3.1. Also $R(AQ) = R(Q^*A) \subseteq R(Q^*) = \mathcal{S}^\perp$. Given $X \leq A$ with $R(X) \subseteq \mathcal{S}^\perp$, then, since $\ker Q = \mathcal{S}$, we have that

$$X = Q^*XQ \leq Q^*AQ = AQ,$$

where the first equality can be easily checked because $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

2. By item 1, $Q^*AQ = A_{/\mathcal{S}}$ and $\ker Q = \mathcal{S}$. So the minimum is attained at Q by Theorem 2.4. On the other hand, if the minimum is attained at some projection Y , then $Y^*AY = A_{/\mathcal{S}} \leq A$ implies that Y is A -selfadjoint, by Lemma 3.1. Therefore $1 - Y \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$.
3. Clearly the equation $A_{/\mathcal{S}} = AQ$ implies that $R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A) \cap \mathcal{S}^\perp$. The other inclusion always holds by Theorem 2.4.
4. It follows from Remark 3.7 and Corollary 2.5

□

The condition $R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A)$, which is necessary for compatibility, implies that some subspace bigger than \mathcal{S} (actually $\ker A_{/\mathcal{S}}$) is A -compatible:

Proposition 5.2. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ such that $R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A)$. Denote $\ker A_{/\mathcal{S}} = \mathcal{T}$. Then*

1. $A_{/\mathcal{T}} = A_{/\mathcal{S}}$.
2. The pair (A, \mathcal{T}) is compatible.
3. Let Q be the reduced solution of the equation $AX = A_{/\mathcal{S}}$. Then

$$1 - Q = P_{A, \mathcal{T}}.$$

Proof. Item 1 follows directly from the definition of shorted operator. Condition $R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A)$ implies, by Douglas theorem, that the set

$$\Delta = \left\{ Q \in L(\mathcal{H}) : AQ = A_{/\mathcal{S}} \text{ and } \ker Q = \mathcal{T} \right\}$$

is not empty. Let $Q \in \Delta$. Clearly Q verifies that $\ker Q = \mathcal{T}$ and $Q^*A = AQ$, because $A_{/\mathcal{S}}$ is selfadjoint. In order to prove that $1 - Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{T})$, it just remain to show that $Q^2 = Q$. Let us first prove that, if $\mathcal{Z} = A^{-1/2}(\mathcal{S}^\perp) = A^{1/2}(\mathcal{S})^\perp$, then Q is a solution of the equation $A^{1/2}X = P_{\mathcal{Z}}A^{1/2}$. Recall that $A_{/\mathcal{S}} = A^{1/2}P_{\mathcal{Z}}A^{1/2}$, so $A^{1/2}(A^{1/2}Q - P_{\mathcal{Z}}A^{1/2}) = 0$. Then, if $\xi \in \mathcal{H}$, $P_{\mathcal{Z}}A^{1/2}\xi = A^{1/2}Q\xi + \eta$ with $\eta \in \ker A^{1/2} = R(A^{1/2})^\perp \subseteq \mathcal{Z}$. So that

$$\|\eta\|^2 = \langle P_{\mathcal{Z}}A^{1/2}\xi, \eta \rangle - \langle A^{1/2}Q\xi, \eta \rangle = \langle A^{1/2}\xi, P_{\mathcal{Z}}\eta \rangle = \langle A^{1/2}\xi, \eta \rangle = 0.$$

Therefore $A^{1/2}Q = P_{\mathcal{Z}}A^{1/2}$. Note that also $A^{1/2}Q^2 = (P_{\mathcal{Z}})^2A^{1/2} = P_{\mathcal{Z}}A^{1/2}$, so $A^{1/2}(Q^2 - Q) = 0$. Let $\rho \in R(Q)$. Then $Q\rho - \rho \in \ker A \cap R(Q)$. If $Q\rho - \rho = Q\omega$, for some $\omega \in \mathcal{H}$, then $0 = AQ\omega = A_{/\mathcal{S}}\omega$. So $\omega \in \ker A_{/\mathcal{S}} = \mathcal{T} = \ker Q$. Therefore $Q\rho = \rho$ for every $\rho \in R(Q)$. This clearly implies that $Q^2 = Q$ and $1 - Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{T})$, showing item 2.

Denote by Q_o the reduced solution of $AX = A_{/S}$. Then $R(Q_o) \subseteq \overline{R(A)} = (\ker A)^\perp$. Also $\ker Q_o = \ker A_{/S} = \mathcal{T}$ so that $1 - Q_o \in \mathcal{P}(A, \mathcal{T})$ and $R(Q_o) \subseteq A^{-1}(\mathcal{T}^\perp)$. Then $R(1 - Q_o) = \mathcal{T} = R(P_{A, \mathcal{T}})$ and

$$\begin{aligned} \ker(1 - Q_o) &= R(Q_o) \subseteq A^{-1}(\mathcal{T}^\perp) \cap (\ker A)^\perp \\ &\subseteq A^{-1}(\mathcal{T}^\perp) \cap (\mathcal{T} \cap \ker A)^\perp = \ker P_{A, \mathcal{T}} \end{aligned}$$

by Remark 4.2. Therefore it must be $P_{A, \mathcal{T}} = 1 - Q_o$. □

Remark 5.3.

1. Observe that if A has closed range then (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $\ker(A_{/S}) = \mathcal{S} + \ker A$. Indeed, (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed (see Proposition 3.10) if and only if $A^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(A^{1/2})$ (because $R(A^{1/2}) = R(A)$ is closed) if and only if $R(A_{/S}) = \mathcal{S} + \ker A$ (see Corollary 2.5). Note that $R(A_{/S}) = R(A) \cap \mathcal{S}^\perp$ if $R(A)$ closed.
2. If A is injective, using Propositions 5.1 and 5.2, one gets that (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $R(A_{/S}) = R(A) \cap \mathcal{S}^\perp$ and $\ker(A_{/S}) = \mathcal{S}$ (see also 5.5 of [7]).

Now we state a general result:

Theorem 5.4. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and \mathcal{S} a closed subspace of \mathcal{H} . Then (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $R(A_{/S}) = R(A) \cap \mathcal{S}^\perp$ and $\ker A_{/S} = \ker A + \mathcal{S}$.*

Proof. One implication is stated in Proposition 5.1. Conversely, if $R(A_{/S}) = R(A) \cap \mathcal{S}^\perp$ and $\ker A_{/S} = \ker A + \mathcal{S} = \mathcal{T}$ then, by Proposition 5.2, pair (A, \mathcal{T}) is compatible, or equivalently $\mathcal{T} + A^{-1}(\mathcal{T}^\perp) = \mathcal{H}$. But

$$\ker A \subseteq A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) = A(\mathcal{S})^\perp = A(\mathcal{T})^\perp = A^{-1}(\mathcal{T}^\perp),$$

so that $\mathcal{S} + A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) = \mathcal{H}$. Then (A, \mathcal{S}) is compatible. □

Compressions. Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ a closed subspace. Recall from Definition 2.6, that the *compression* of A by \mathcal{S} is $A_{\mathcal{S}} = A - A_{/S}$. Using Proposition 5.1, if (A, \mathcal{S}) is compatible, then $A_{\mathcal{S}} = AP_{A, \mathcal{S}}$. So that $R(A_{\mathcal{S}}) = A(\mathcal{S})$. In the next Proposition we shall see that this equality actually characterizes compatibility:

Proposition 5.5. *Let $A \in L(\mathcal{H})^+$, $P \in \mathcal{P}$ and $\mathcal{S} = R(P)$. Then*

1. *The pair (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if $R(A_{\mathcal{S}}) = A(\mathcal{S})$.*
2. *If (A, \mathcal{S}) is compatible and Y is the reduced solution of the equation $(AP)X = A_{\mathcal{S}}$ and $\mathcal{N} = \ker A \cap \mathcal{S}$, then $Y = P_{A, \mathcal{S} \oplus \mathcal{N}}$ and*

$$P_{A, \mathcal{S}} = Y + P_{\mathcal{N}}.$$

Proof. If (A, \mathcal{S}) is compatible then from the properties of $A_{\mathcal{S}}$ above, $R(A_{\mathcal{S}}) = A(\mathcal{S})$. Conversely, $R(A_{\mathcal{S}}) = A(\mathcal{S})$ implies that the equation $APX = A_{\mathcal{S}}$ admits a solution (apply Douglas' theorem). Denote by Y the reduced solution of the equation $APX = A_{\mathcal{S}}$. Then

$$(8) \quad \ker Y = \ker A_{\mathcal{S}} = A(\mathcal{S})^\perp \quad \text{and}$$

$$(9) \quad R(Y) \subseteq (\ker AP)^\perp = (\mathcal{S}^\perp + \mathcal{N})^\perp = \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}.$$

So that $PY = Y$ and $A_{\mathcal{S}} = AY = Y^*A$, which means that Y is A -selfadjoint. On the other hand, because $A|_{\mathcal{S}} = A_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}}$ and the fact that $A|_{\mathcal{S} \ominus \mathcal{N}}$ is injective, we can deduce that $Y\xi = \xi$ for every $\xi \in \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$, which means that $Y^2 = Y$. Then Y^2 is the reduced solution and $Y = Y^2$. So $\mathcal{H} = R(Y) + \ker Y \subseteq \mathcal{S} + A(\mathcal{S})^\perp$ and the pair (A, \mathcal{S}) is compatible. Using formulae (8) and (9), item 2 follows as in the proof of Proposition 4.3. \square

6. SOME EXAMPLES

Example 6.1. Given a positive injective operator $A \in L(\mathcal{H})$ with non-closed range. Let $\xi \in R(A^{1/2})$ and let P_ξ be the orthogonal projection onto the subspace $\langle \xi \rangle$ generated by ξ . Then $R(P_\xi) \subseteq R(A^{1/2})$, so that, by Douglas' theorem, $P_\xi \leq \lambda A$ for some positive number λ which we can suppose equal to 1, by changing A by λA . It is well known that this implies that the operator $B \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ defined by

$$B = \begin{pmatrix} A & P_\xi \\ P_\xi & A \end{pmatrix}$$

is positive. By Lemma 2.2, $R(A)$ is strictly contained in $R(A^{1/2})$. Suppose that $\xi \in R(A^{1/2}) \setminus R(A)$. Let $\mathcal{S} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \oplus 0$. Then $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{H}_2 = 0 \oplus \mathcal{H}$. We shall see that B is injective, $\ker B|_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$, moreover $B(\mathcal{S})$ is closed in $R(B)$ (this condition is necessary for compatibility and it implies that $B^{1/2}(\mathcal{S})$ is closed in $R(B^{1/2})$ i.e. $\ker B|_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$, by Proposition 3.8), but the pair (B, \mathcal{S}) is incompatible. Indeed, it is clear that B does not verify condition 3 of Proposition 3.3, so the pair (B, \mathcal{S}) is incompatible. Let D be the reduced solution of $P_\xi = A^{1/2}X$. Then $B|_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A - D^*D \end{pmatrix}$. Note that $\ker D = \ker P_x$ implies $DP_\xi = D$. So $D^*D = P_\xi D^*D$. Then, if $0 \oplus \eta \in \ker B|_{\mathcal{S}}$,

$$A\eta = D^*D\eta = P_\xi D^*D\eta = \lambda\xi \quad \text{for some } \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \eta = 0$$

because $\xi \notin R(A)$ and A is injective. So $\ker B|_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$. Also

$$B(\omega \oplus \eta) = 0 \oplus 0 \Rightarrow A\omega + P_\xi \eta = 0 = A\eta + P_\xi \omega \Rightarrow A\omega = A\eta = 0 \Rightarrow \omega = \eta = 0,$$

so that B is injective. Finally, $\mathcal{H} \oplus \langle \xi \rangle \cap R(B) = B(\mathcal{H} \oplus 0)$, because if $\omega \neq 0$, then $A\omega \notin \langle \xi \rangle$ and $B(\eta \oplus \omega) \notin \mathcal{H} \oplus \langle \xi \rangle$ for every $\eta \in \mathcal{H}$. Therefore $B(\mathcal{S})$ is closed in $R(B)$.

Remark 6.2. Let $P \in \mathcal{P}$, $R(P) = \mathcal{S}$ and $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H})^+$. It is well known that the positivity of A implies that $R(b) \subseteq R(a^{1/2})$. Therefore it is true, without restrictions on A , that if $\dim \mathcal{S} < \infty$, then the pair (A, \mathcal{S}) is compatible, since in this case $R(a) = R(PAP)$ must be closed, so $R(b) \subseteq R(a^{1/2}) = R(a)$ and Proposition 3.3 can be applied. On the other hand, if $\dim \mathcal{S}^\perp < \infty$ and $R(A)$ is closed then, by Proposition 3.10, (A, \mathcal{S}) is compatible. However, if $R(A)$ is not closed, then Example 6.3 shows that the result fails in general.

Example 6.3. Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ be injective non invertible. Let $\xi \in \mathcal{H} \setminus R(A)$ a unit vector. Denote by \mathcal{S}^\perp the subspace generated by ξ , $P = P_{\mathcal{S}}$ and $P_\xi = 1 - P$. If

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$$

in terms of P and $A\xi = \lambda\xi + \eta$ with $\eta \in \mathcal{S}$, then $\lambda = \langle A\xi, \xi \rangle \neq 0$ and $\eta \neq 0$ (otherwise $\xi \in R(A)$). Therefore $c = \lambda P_\xi$ and $b(\mu\xi) = \mu\eta$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Suppose that $\eta \in R(a)$, i.e., there exists $\nu \in \mathcal{S}$ which verifies $a\nu = b\xi$. Then $PA(\nu - \xi) = a\nu - b\xi = 0$, so $A(\nu - \xi)$ is a multiple of ξ , which must be 0 ($\xi \notin R(A)$). So $\nu = \xi$, a contradiction. Therefore $R(b) \not\subseteq R(a)$ and the pair (A, \mathcal{S}) is incompatible.

Let d be the reduced solution of the equation $a^{1/2}x = b$. The facts that $\eta \notin R(a)$ and that $a^{1/2}$ is injective in \mathcal{S} clearly implies that $R(a^{1/2}) \cap R(d) = \{0\}$. Consider now the operator

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & dd^* \end{pmatrix} \geq 0.$$

Then the pair (B, \mathcal{S}) is also incompatible and $B_{/\mathcal{S}} = 0$. But in this case B is injective. Indeed,

$$B = \begin{pmatrix} a & a^{1/2}d \\ d^*a^{1/2} & dd^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ d^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1/2} & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and therefore

$$\ker B = \ker \begin{pmatrix} a^{1/2} & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{0\}$$

because $R(a^{1/2}) \cap R(d) = \{0\}$, $a^{1/2}$ is injective in \mathcal{S} and d is injective in \mathcal{S}^\perp . This example shows the intrinsic necessity of the condition $\ker A_{/\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ in the equivalence given in Theorem 5.4: if A is injective, the pair (A, \mathcal{S}) is compatible $\iff R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A)$ and $\ker A_{/\mathcal{S}} = \mathcal{S}$. In fact the example shows that $R(A_{/\mathcal{S}}) \subseteq R(A)$ does not imply $\ker A_{/\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ neither in the injective case. In this sense this example complements Example 6.1.

6.4. Two positive operators $A, B \in L(\mathcal{H})$ are in the same ‘‘Thompson component’’, if

$$A \sim B \iff R(A^{1/2}) = R(B^{1/2}) \iff \lambda A \leq B \leq \mu A$$

for some constants λ, μ in \mathbb{R}_+ . A natural question is: given \mathcal{S} a closed subspace of \mathcal{H} , is it true that (A, \mathcal{S}) is compatible if and only if (B, \mathcal{S}) is compatible? This is true for closed range operators by Remark 3.11. Unfortunately, in general the answer is no, as we shall see in the following example. We first need a lemma:

Lemma 6.5. *Let $A, B \in L(\mathcal{H})^+$.*

1. *If $R(A) = R(B)$ then $R(A^t) = R(B^t)$ for $0 \leq t \leq 1$. In particular $A \sim B$.*
2. *If $A \in L(\mathcal{H})^+$ and $R(A)$ is not closed, then there exists $B \in L(\mathcal{H})^+$ such that $A \sim B$ but $R(A) \neq R(B)$.*

Proof.

1. By Douglas theorem, $R(A) = R(B)$ implies that there exist $\lambda, \mu > 0$ such that $\lambda A^2 \leq B^2 \leq \mu A^2$. Then, by Löwner theorem [17], $\lambda^t A^{2t} \leq B^{2t} \leq \mu^t A^{2t}$ and $R(A^t) = R(B^t)$, for $0 \leq t \leq 1$. Taking $t = 1/2$ one gets that $A \sim B$.
2. Denote $C = A^{1/2}$. If $G \in GL(\mathcal{H})^+$, then $R(C) = R(CG^{1/2}) = R((CGC)^{1/2})$. We claim that G can be chosen in such a way that $R(A) \neq R(CG C)$. Indeed, take $\xi \in R(C) \setminus R(A)$, $\eta \in (\ker C)^\perp$ such that $C\eta = \xi$, and $\rho \in R(C)$ such that $\langle \rho, \eta \rangle > 0$ (recall that $R(C)$ is dense in $(\ker C)^\perp$). Choose $G \in GL(\mathcal{H})^+$ such that $G\rho = \eta$. This can be done working separately in the subspace \mathcal{Z} generated by ρ and η , and in \mathcal{Z}^\perp . The condition $\langle \rho, \eta \rangle > 0$ is sufficient by an easy 2×2 argument. Then $\xi = C\eta = CG\rho \in R(CG C) \setminus R(A)$. Take $B = CG C$.

□

Example 6.6. Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ injective but not invertible. Suppose that $A \sim B$ and $\lambda A \leq B \leq \mu A$ with $\lambda < 1 < \mu$. By last lemma, we can also suppose that $R(A) \neq R(B)$. So there exists $\xi \in R(A) \setminus R(B) \subseteq R(A^{1/2}) = R(B^{1/2})$. Let P_ξ be the orthogonal projection onto the subspace generated by ξ . Then $R(P_\xi) \subseteq R(A^{1/2}) = R(B^{1/2})$. So that, by Douglas theorem, we can suppose $2P_\xi \leq A$ and $2P_\xi \leq B$. As in Example 6.1, the operators $M_A, M_B \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ defined by

$$M_A = \begin{pmatrix} A & P_\xi \\ P_\xi & A \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} B & P_\xi \\ P_\xi & B \end{pmatrix}$$

are positive. Let $\mathcal{S} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \oplus 0$. Then $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{H}_2 = 0 \oplus \mathcal{H}$. In Example 6.1 it is shown that M_B is injective but the pair (M_B, \mathcal{S}) is incompatible. On the other hand, since $\xi \in R(A)$, then the pair (M_A, \mathcal{S}) is compatible. We shall see that $M_A \sim M_B$, thus contradicting the previous conjecture. Indeed, note that

$$2P_\xi \leq A \text{ and } \frac{1}{\mu} B \leq A \quad \Rightarrow \quad 2A - \frac{1}{\mu} B \geq 2P_\xi \geq \left(2 - \frac{1}{\mu}\right)P_\xi.$$

Therefore

$$2M_A = 2 \begin{pmatrix} A & P_\xi \\ P_\xi & A \end{pmatrix} \geq \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} B & P_\xi \\ P_\xi & B \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu} M_B.$$

Analogously $2P_\xi \leq B$ and $\lambda A \leq B$ implies that $2B - \lambda A \geq 2P_\xi \geq (2 - \lambda)P_\xi$. Therefore

$$2M_B = 2 \begin{pmatrix} B & P_\xi \\ P_\xi & B \end{pmatrix} \geq \lambda \begin{pmatrix} A & P_\xi \\ P_\xi & A \end{pmatrix} = \lambda M_A.$$

Example 6.7. Let $\mathcal{A} = \{(A, P) \in L(\mathcal{H})^+ \times \mathcal{P} : \text{the pair } (A, \mathcal{S}) \text{ is compatible}\}$. If $\dim \mathcal{H} = \infty$, then the space \mathcal{A} is neither open nor closed in $L(\mathcal{H})^+ \times \mathcal{P}$. Indeed, the proper subset $GL(\mathcal{H})^+ \times \mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ of \mathcal{A} is dense in $L(\mathcal{H})^+ \times \mathcal{P}$, so \mathcal{A} is not closed. On the other hand, let A be a positive injective operator in $L(\mathcal{H})$ with non-closed range and $\xi \in R(A^{1/2})$. Consider the operator $B \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ defined in Example 6.1. If $\mathcal{S} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \oplus 0$, then (B, \mathcal{S}) is compatible if and only if $\xi \in R(A)$. It is easy to see that some $\xi \in R(A)$ can be approached by elements of $R(A^{1/2}) \setminus R(A)$ and so, the

compatible pair (B, \mathcal{S}) can be approached by non compatible pairs. Since $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ is isomorphic to \mathcal{H} , this shows that \mathcal{A} is not open in $L(\mathcal{H})^+ \times \mathcal{P}$.

Example 6.8. Consider the map $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Q}$ given by $\alpha(A, P) = P_{A, \mathcal{S}}$, where \mathcal{A} is the set defined in Example 6.7. We shall see that α is not continuous. Indeed, fix $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ and consider $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$, such that $R(b) = R(a)$ is a closed subspace \mathcal{M} properly included in \mathcal{S} . Denote by $\mathcal{N} = \mathcal{S} \ominus \mathcal{M}$ and consider the projection $P_{\mathcal{N}}$ and some element $u \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{N}) \subseteq L(\mathcal{H})$, $u \neq 0$. Consider, for every $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_n &= A + \frac{1}{n} (P_{\mathcal{N}} + u)^*(P_{\mathcal{N}} + u) \\ &= A + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ u^* & 0 & u^*u \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n}u \\ 0 & a & b \\ \frac{1}{n}u^* & b^* & c + \frac{1}{n}u^*u \end{pmatrix} \geq A \geq 0. \end{aligned}$$

It is clear that $A_n \rightarrow A$. Note that a is invertible in $L(\mathcal{M})$. Then, by Remark 4.2,

$$P_{A, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^{-1}b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix}.$$

Note that $a + \frac{1}{n}P_{\mathcal{N}}$ is invertible in $L(\mathcal{S})$. Then, by equation (3),

$$P_{A_n, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n}u \\ 0 & a & b \\ \frac{1}{n}u^* & b^* & c + \frac{1}{n}u^*u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & a^{-1}b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore $\alpha(A_n, P) = P_{A_n, \mathcal{S}} \not\rightarrow P_{A, \mathcal{S}} = \alpha(A, P)$. Remark that the sequence $\alpha(A_n, P)$ converges (actually, it is constant) to $P_{A, \mathcal{S}} + u$, which belongs to $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ by Remark 4.2. Also, it is easy to see that, for every $n \in \mathbb{N}$, $(A_n)_{/\mathcal{S}} = A_{/\mathcal{S}}$.

Example 6.9. Let $A \in L(\mathcal{H})^+$ and

$$M = \begin{pmatrix} A & A^{1/2} \\ A^{1/2} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})^+$$

like in Example 3.5. Denote by $\mathcal{S} = \mathcal{H} \oplus \{0\}$ and by $N = \begin{pmatrix} A^{1/2} & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Since $M = N^*N$, then $\ker M = \ker N = \{\xi \oplus -A^{1/2}\xi : \xi \in \mathcal{H}\}$ which is the graph of $-A^{1/2}$. Note that $R(N) = (R(A^{1/2}) + R(I)) \oplus \{0\} = \mathcal{S}$, so that $R(M)$ is also closed. Also $M_{/\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{\ker A} \end{pmatrix}$, because the reduced solution of the equation $A^{1/2}X = A^{1/2}$ is $D = P_{R(A)}$.

If A is injective not invertible, then (M, \mathcal{S}) is not compatible (because $R(A)$ is properly included in $R(A^{1/2})$). Also $M = M_{\mathcal{S}}$ and $M(\mathcal{S}) \neq R(M_{\mathcal{S}})$. Hence in this example $R(M_{\mathcal{S}}) = \overline{M(\mathcal{S})}$ while $M(\mathcal{S})$ is not closed (see Proposition 5.5).

REFERENCES

- [1] W. N. Anderson, Shorted operators, *SIAM J. Appl. Math.* **20** (1971), 520–525.
- [2] W. N. Anderson and G. E. Trapp, Shorted operators II, *SIAM J. Appl. Math.* **28** (1975), 60–71.
- [3] T. Ando, Generalized Schur complements, *Linear Algebra Appl.* **27** (1979), 173–186.
- [4] E. Andruchow, G. Corach and D. Stojanoff, Geometry of oblique projections, *Studia Math.* **137** (1999), 61–79.
- [5] D. Carlson, What are Schur complements, anyway?, *Linear Algebra Appl.* **74** (1986), 257–275.
- [6] R. W. Cottle, Manifestations of the Schur complement, *Linear Algebra Appl.* **8** (1974), 189–211.
- [7] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff, Schur complements and oblique projections, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **67** (2001), 439–459.
- [8] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff, Oblique projections and abstract splines, preprint.
- [9] F. Deutsch, The angle between subspaces in Hilbert space, in *Approximation theory, wavelets and applications* (S. P. Singh, ed.), Kluwer, Netherlands (1995), 107–130.
- [10] J. Dieudonné, Quasi-hermitian operators, in *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces* (Jerusalem, 1961), Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford (1961), 115–122.
- [11] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966) 413–416.
- [12] M. Golomb, *Splines, n-widths and optimal approximations*, MRC Technical Summary Report **784**, 1967.
- [13] S. Hassi, K. Nordström, On projections in a space with an indefinite metric, *Linear Algebra Appl.* **208/209** (1994), 401–417.
- [14] E. Haynsworth, Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix, *Linear Algebra Appl.* **1** (1968), 73–81.
- [15] M. G. Krein, The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian operators and its applications, *Mat. Sb. (N.S.)* **20(62)** (1947), 431–495
- [16] P. D. Lax, Symmetrizable linear transformations, *Comm. Pure Appl. Math.* **7** (1954), 633–647.
- [17] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Zeit.* **38** (1934), 177–216.
- [18] Z. Pasternak-Winiarski, On the dependence of the orthogonal projector on deformations of the scalar product, *Studia Math.* **128** (1998), 1–17.
- [19] E. L. Pekarev, Shorts of operators and some extremal problems, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **56** (1992), 147–163.
- [20] V. Ptak, Extremal operators and oblique projections, *Časopis Pěst. Math.* **110** (1985), 343–350.
- [21] A. C. Thompson, On certain contraction mappings in a partially ordered vector space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 438–443.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
E-mail address: gcorach@ciudad.com.ar

INSTITUTO DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO, SAN MIGUEL, ARGENTINA
E-mail address: amaestri@ungs.edu.ar

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA, LA PLATA, ARGENTINA
E-mail address: demetrio@mate.unlp.edu.ar
URL: <http://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/>

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS PRIMITIVES

ALFREDO FUNDORA ROLO, HÉCTOR PIJEIRA CABRERA AND
WILFREDO URBINA ROMERO

En recuerdo de nuestro cariño y amistad con Chicho

ABSTRACT. We study the zero location and the asymptotic behavior of the primitives of the standard orthogonal polynomials with respect to a finite positive Borel measure concentrate on $[-1, 1]$.

1. INTRODUCTION

Let μ be a finite positive Borel measure with $\text{supp}(\mu) = \Delta \subseteq [-1, 1]$, such that it contains an infinite number of points. Let us consider $L_n(z) = z^n + \dots$ the n th monic (i.e. its leading coefficient is equal to one) orthogonal polynomial with respect to μ , that is

$$(1) \quad \int_{\Delta} L_n(x) x^k d\mu(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Let us consider a monic polynomial $P_n(x)$ of degree n and a complex number ζ fixed, such that

$$(2) \quad (n+1)L_n(z) = ((z-\zeta)P_n(z))' = P_n(z) + (z-\zeta)P_n'(z).$$

Note that $\Lambda(z) = (z-\zeta)P_n(z)$ is a monic polynomial primitive of $(n+1)L_n(z)$, normalized by $\Lambda(\zeta) = 0$. A direct consequence of (1)–(2) is that $P_n(z)$ satisfy the orthogonality relations

$$(3) \quad \int_{\Delta} [P_n(x) + (x-\zeta)P_n'(x)] x^k d\mu(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

The location of critical points of polynomials has many physical and geometrical interpretations. Let us consider, for instance, a field of forces given by a system of n masses m_j , $1 \leq j \leq n$, at the fixed points z_j , $1 \leq j \leq n$, that repels a movable unit mass at z according to the law of repulsion being the inverse distance law.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42C05, 33C25.

Key words and phrases. orthogonal polynomials, zero location, asymptotics.

Research of second and third authors partially supported by a research grant # PI 03-14-4744-2000 from Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH) of the Universidad Central de Venezuela.

Let $Q_m(z)$, where $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, be the polynomial $(z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_n)^{m_n}$. The logarithmic derivative of $Q_m(z)$ is

$$(4) \quad \frac{d(\log(Q_m(z)))}{dz} = \frac{Q'_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{m_1}{(z - z_1)} + \frac{m_2}{(z - z_2)} + \dots + \frac{m_n}{(z - z_n)}.$$

The conjugate of $\frac{m_j}{(z - z_j)}$ is a vector whose direction (including sense) is the direction from z_j to z , so this vector represents the force at the movable unit mass z due to a single fixed particle at z_j . Every multiple zero (but no simple zero) of $Q_m(z)$ is a zero of $Q'_m(z)$; every other zero of $Q'_m(z)$ is by (4) a position of equilibrium in the field of force; every position of equilibrium is by (4) a zero of $Q'_m(z)$. This result is known as Gauss's theorem (1816).

Now, we consider an inverse problem, let z'_1, z'_2, \dots, z'_n be the zeros of the orthogonal polynomial L_n and the equilibrium positions of a field of forces with $n + 1$ units masses, one of which ζ is given. What is the location of the remaining masses?

By (2),

$$(5) \quad \frac{(n + 1) L_n(z)}{(z - \zeta) P_n(z)} = \frac{1}{z - \zeta} + \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \frac{\Lambda'(z)}{\Lambda(z)}.$$

Then, according with (5) and the above interpretation of the logarithmic derivative, the location of the remaining units masses are the zeros of the polynomial $P_n(z)$ defined in (2).

The main purpose of this paper is to study some of the algebraic and analytic properties of the orthogonal polynomials primitives.

2. LOCALIZATION OF ZEROS

It is well know that the zeros of $L_n(z)$ are simple, using (2) is easy to see that the zeros of $P_n(z)$ have at most multiplicity two. Nevertheless the zeros of $P_n(z)$ need not to be simple as we can see in the following example

Let μ be the Lebesgue measure in $[-1, 1]$ and set in (3) $\zeta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ or $\zeta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. The corresponding monic polynomials of degree two defined by (2) are $P_2(z) = z^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}z + \frac{1}{3}$ or $P_2(z) = z^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}z + \frac{1}{3}$ respectively. Note that $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ or $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ are zeros of multiplicity two of the corresponding polynomials $P_2(z)$.

Our next propose is to prove that all the zeros of the polynomials of the sequence $\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ are contained in a disc which radius is independent of n . First, let us rewrite the polynomials P_n and L_n in terms of $(z - \zeta)$, that is

$$(6) \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - \zeta)^k, \quad L_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k (z - \zeta)^k.$$

Lemma 1. *The coefficients a_k of P_n and b_k of L_n in (6) are related by*

$$(7) \quad a_k = \frac{n + 1}{k + 1} b_k.$$

Proof. Replacing (6) in (2). □

The proof of the next result is based in the following Szegő's theorem (see [5] or [2, page 23]).

Lemma 2. *Given the polynomials*

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \binom{n}{k} z^k, \quad \alpha_n \neq 0 \quad \text{and} \quad g(z) = \sum_{k=0}^n \beta_k \binom{n}{k} z^k, \quad \beta_n \neq 0,$$

let us construct a third polynomial as $h(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k \binom{n}{k} z^k$.

If all the zeros of $f(z)$ lie in a closed disk \bar{D} and $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ are the zeros of $g(z)$. Then every zero of $h(z)$ has the form $\lambda_k \gamma_k$, where $\gamma_k \in \bar{D}$.

Then we have that

Theorem 1. *All the zeros of P_n are contained in the closed disk \mathbf{D} , where*

$$(8) \quad \mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2 + 3|\zeta|\}.$$

Proof. Let us write $w = z - \zeta$, hence

$$f(w) = \sum_{k=0}^n b_k w^k = L_n(z), \quad h(w) = \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} b_k w^k = P_n(z)$$

and

$$g(w) = \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} w^k = \frac{(1+w)^{n+1} - 1}{w} = \frac{(1+z-\zeta)^{n+1} - 1}{z-\zeta}.$$

If z_0 is a zero of L_n , it is well known that $-1 \leq z_0 \leq 1$, hence $w_0 = z_0 - \zeta$ is a zero of $f(w)$ and lie in a closed disk $\bar{D} = \{|w + \zeta| \leq 1\}$. On the other hand, if w_1 is a zero of $g(w)$ then $|1 + w_1| = 1$.

Finally, by Lemma 2, if $h(w_3) = 0$ we have that $|w_3| \leq 2 + 3|\zeta|$ and then the theorem is proved. □

3. AUXILIARY RESULTS

In order to obtain the asymptotic behaviour of the sequence $\{P_n\}$ we need some general results that we will discuss in what follows.

If $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of measures on a compact set, we say that μ_n converges weakly to the measure μ as $n \rightarrow \infty$ if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$$

for every continuous function f on \mathbb{C} having compact support. In this case, we write $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, or $d\mu_n \xrightarrow{*} d\mu$, or if μ is absolutely continuous, $d\mu_n(x) \xrightarrow{*} \mu'(x)dx$.

For any polynomial q of degree exactly n , we consider

$$\nu_n(q) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{z_j},$$

where z_1, \dots, z_n are the zeros of q repeated according to their multiplicity, and δ_{z_j} is the Dirac measure with mass one at the point z_j . This is the so called *normalized zero counting measure associated with q* .

Let $\|\cdot\|_\Delta$ denotes the supremum norm on Δ and $\text{Cap}(\Delta)$ the logarithmic capacity of a set Δ . Another result needed is

Lemma 3 ([1], Theorem 2.1 and Corollary 2.1). *Let $\Delta \subset \mathbb{C}$ be a compact set with empty interior, connected complement and positive logarithmic capacity. If $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ is a sequence of monic polynomials, $\deg(P_n) = n$, such that*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|_\Delta^{\frac{1}{n}} \leq \text{Cap}(\Delta),$$

then

$$\nu_n(P_n) \xrightarrow{*} \omega_\Delta,$$

where ω_Δ is the equilibrium measure of Δ .

Finally, we have the following useful result

Lemma 4 ([3], Lemma 3). *Let $\{P_n\}$ be a sequence of polynomials. Then, for all $j \in \mathbb{Z}_+$,*

$$(9) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|P_n^{(j)}\|_\Delta}{\|P_n\|_\Delta} \right)^{1/n} \leq 1.$$

For $\Delta = [-1, 1]$ is well known that $\text{Cap}(\Delta) = \frac{1}{2}$ and the equilibrium measure on Δ is the so-called arcsin measure given by

$$(10) \quad \mu_\Delta(B) = \int_B \frac{\arcsin'(x) dx}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_B \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

where B is a Borel set in $[-1, 1]$.

4. ASYMPTOTIC BEHAVIOR

Let us set $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. φ is a conformal map of $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ onto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Here the branch of the square root is chosen so that $|z + \sqrt{z^2 - 1}| > 1$ for $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Let $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ be a fixed point, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbf{D}$ and $\Delta = [-1, 1]$.

Theorem 2. *With the previous conditions it holds, for all $j \in \mathbb{Z}_+$,*

- the sequence $\{P_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$ verifies

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n^{(j)}\|_\Delta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2};$$

- $\nu_{n,j}(P_n^{(j)})$ converges to the arcsin measure in the sense of the weak-* topology of measures, that is

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-j} \sum_{k=1}^{n-j} f(x_{n,k}^{(j)}) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

for every continuous function on \mathbf{D} , where $\{x_{n,k}^{(j)}\}_{k=1}^{n-j}$ is the set of zeros of $P_n^{(j)}(z)$.

Proof. Let us prove first that

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

If $x \in \Delta$, integrating in (2) we have

$$(n + 1) \int_{\zeta}^x L_n(t) dt = (x - \zeta)P_n(x),$$

by taking absolute values both sides, we obtain

$$M(n + 1)\|L_n(x)\|_{\Delta} \geq (n + 1) \left| \int_{\zeta}^x L_n(t) dt \right| = |x - \zeta| |P_n(x)|, \geq m|P_n(x)|,$$

where $m = \inf_{x \in \Delta} |x - \zeta|$ and $M = \sup_{x \in \Delta} |x - \zeta|$. Then

$$M(n + 1)\|L_n(x)\|_{\Delta} \geq m\|P_n\|_{\Delta} \geq m\|T_n\|_{\Delta},$$

where T_n is the n -th Chebyshev polynomial in $[-1, 1]$.

It is well known, for general theory of orthogonal polynomials, that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

hence we have (13).

By Lemma 4 and (13),

$$(14) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|P_n^{(j)}\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|P_n^{(j)}\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}}}{\|P_n\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}}} \|P_n\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2} = \text{Cap}(\Delta).$$

But

$$(15) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|P_n^{(j)}\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T_{n-j}\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} = \text{Cap}(\Delta)$$

and then (14) and (15) implies (11).

Finally, by Lemma 3 we deduce that (11) implies (12). □

Theorem 3. *With the above assumptions, it holds:*

- For all $j \in \mathbb{Z}_+$,

$$(16) \quad \frac{P_n^{(j+1)}(z)}{nP_n^{(j)}(z)} \xrightarrow[n]{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

uniformly on compact subsets of Ω .

- (Relative Asymptotic) For all $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_+$,

$$(17) \quad n^{j_2-j_1} \frac{L_n^{(j_1)}(z)}{P_n^{(j_2)}(z)} \xrightarrow[n]{\Rightarrow} \frac{z - \zeta}{\sqrt{z^2 - 1}} \left(\sqrt{z^2 - 1} \right)^{j_2-j_1}$$

uniformly on compact subsets of Ω .

Proof. Let $x_{n,k}^j$, $k = 1, \dots, n - j$, denote the $n - j$ zeros of the polynomial $P_n^{(j)}$. It is known that all the critical points of a non-constant polynomials P_n and it's derivatives lied in the convex hull of his zeros, then by theorem 1 $x_{n,k}^j \in \mathbf{D} = \{z : |z| \leq 2 + 3|\zeta|\}$, $k = 1, \dots, n - j$. Using the decomposition in simple fractions and the definition of $\nu_{n,j}(P_n^{(j)})$, we obtain

$$(18) \quad \frac{P_n^{(j+1)}(z)}{nP_n^{(j)}(z)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-j} \frac{1}{z - x_{n,k}^j} = \frac{n-j}{n} \int \frac{d\nu_{n,j}(x)}{z - x}.$$

Therefore, the family of functions

$$(19) \quad \left\{ \frac{P_n^{(j+1)}(z)}{nP_n^{(j)}(z)} \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

is uniformly bounded on each compact subset of $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbf{D}$.

On the other hand, all the measures $\nu_{n,j}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, are supported in \mathbf{D} and for $z \in \Omega$ fixed, the function $(z - x)^{-1}$ is continuous on \mathbf{D} with respect to x . Therefore, from (12) and (18), we find that any subsequence of (19) which converges uniformly on compact subsets of Ω converges pointwise to $\int (z - x)^{-1} d\omega_{\Delta}(x)$. Finally, by (10), the Cauchy's formula and the residue Theorem,

$$\int_{-1}^1 \frac{d\omega_{\Delta}(x)}{(z - x)} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{(z - x)} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Thus, the whole sequence converges uniformly on compact subsets of Ω to this function as stated in (16).

For $j_1 = j_2 = j$, the proof of (17) is a direct consequence of the j -th derivative of (2) and (16), that is

$$(20) \quad \frac{n+1}{n} \frac{L_n^{(j)}(z)}{P_n^{(j)}(z)} = \frac{j+1}{n} + (z - \zeta) \frac{P_n^{(j+1)}(z)}{nP_n^{(j)}(z)} \xrightarrow[n]{\Rightarrow} \frac{z - \zeta}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

uniformly on compact subsets of Ω .

Assume without loss of generality that $j_2 < j_1$, hence

$$(21) \quad \frac{1}{n^{j_1-j_2}} \frac{L_n^{(j_1)}(z)}{P_n^{(j_2)}(z)} = \frac{L_n^{(j_1)}(z)}{P_n^{(j_1)}(z)} \frac{P_n^{(j_1)}(z)}{nP_n^{(j_1-1)}(z)} \dots \frac{P_n^{(j_2+2)}(z)}{nP_n^{(j_2+1)}(z)} \frac{P_n^{(j_2+1)}(z)}{nP_n^{(j_2)}(z)}.$$

Then we have (17) from (16), (20) and (21). □

Theorem 4. *With the above conditions, the following statements hold:*

- (Strong Asymptotic) *If $\mu'(x)$ satisfy the Szegő condition*

$$\int_{-1}^1 \frac{\log \mu'(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} > -\infty$$

then, for all $j \in \mathbb{Z}_+$,

$$(22) \quad \frac{P_n^{(j)}(z)}{n^j \left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^n} \xrightarrow[n]{\Rightarrow} \frac{(\sqrt{z^2 - 1})^{1-j}}{z - \zeta} \frac{\mathcal{D}(\mu'(\cos \theta) |\sin \theta|, 0)}{\mathcal{D}(\mu'(\cos \theta) |\sin \theta|, \varphi^{-1}(z))},$$

uniformly on compact subsets of Ω , where $\mathcal{D}(h, z)$ is the Szegő function of h

$$\mathcal{D}(h, z) = \exp \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log h(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right), \quad |z| < 1.$$

- (Ratio Asymptotic) If $\mu'(x) > 0$ a.e. in $[-1, 1]$ then, for all $j_1, j_2, k \in \mathbb{Z}_+$,

$$(23) \quad \frac{n^{j_2} \frac{P_{n+k}^{(j_1)}(z)}{P_n^{(j_2)}(z)}}{(n+k)^{j_1}} \xrightarrow[n]{\Rightarrow} \left(\sqrt{z^2 - 1} \right)^{j_2 - j_1} \left(\frac{\varphi(z)}{2} \right)^k,$$

uniformly on compact subsets of Ω .

- (n -th Root Asymptotic) If the measure μ is such that for all measurable set $E \subset \text{supp}(\mu)$ with $\mu(E) = \mu([-1, 1])$ it holds that $\text{Cap}(E) = \frac{1}{2}$, then, for all $j \in \mathbb{Z}_+$,

$$(24) \quad \sqrt[n]{|P_n^{(j)}(z)|} \xrightarrow[n]{\Rightarrow} \frac{|\varphi(z)|}{2},$$

uniformly on compact subsets of Ω , where $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbf{D}$, $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ and the branch of the square root is chosen so that $|z + \sqrt{z^2 - 1}| > 1$ for $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Proof. The theorem is a direct consequence of (17) in theorem 3 and the well known strong asymptotic, ratio asymptotic and n -th root asymptotic behavior of standard orthogonal polynomials L_n . □

REFERENCES

- [1] H. P. Blatt, E. B. Saff and M. Simkani, Jentzsch-Szegő type theorems for the zeros of best approximants, *J. London Math. Soc.* **38** (1988), 192–204.
- [2] P. Borwein and T. Erdélyi, *Polynomials and polynomials inequalities*, Graduate Text in Mathematics **161**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] G. López and H. Pijeira, Zero location and n -th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **99** (1999), 30-43.
- [4] H. Stahl and V. Totik, *General orthogonal polynomials*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [5] G. Szegő, Bemerkungen zu einen Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen, *Math. Z.* **13** (1922), 28–55.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MATANZAS, AUTOPISTA DE VARADERO KM. 3, 44740 MATANZAS, CUBA

E-mail address: alfredo@quimec.umtz.edu.cu

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MATANZAS, AUTOPISTA DE VARADERO KM. 3, 44740 MATANZAS, CUBA

E-mail address: pijeira@cdict.umtz.edu.cu

ESCUELA DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA, APT. 47195 LOS CHAGUARAMOS, CARACAS 1041-A, VENEZUELA

E-mail address: wurbina@euler.ciens.ucv.ve

FIBRE BUNDLES OVER ORBITS OF STATES

ESTEBAN ANDRUCHOW AND ALEJANDRO VARELA

A la memoria de Chicho

ABSTRACT. We review topologic properties of orbits of states of von Neumann algebras, starting with unitary orbits, and proceeding with more general sets of states, namely vector states with symbol a spheric vector in a Hilbert C^* -module of the algebra. This is done by considering natural bundles over these sets, which enable one to relate their topologic properties to those of the unitary groups of von Neumann algebras related to the original algebra and the state involved. These views are applied to the topologic study of states, partial isometries and projections of the hyperfinite II_1 factor.

1. INTRODUCTION

In this paper we treat results contained in work done previously in [4], [5], [6] and [1], and try to give a unified exposition of them. Some of the proofs are only outlined. The main objects of this study are a von Neumann algebra, i.e. a ring of bounded operators acting on a Hilbert space H , which is closed under the strong operator topology, and a state of the algebra, that is, a positive functional of norm one. Typical states are obtained by means of unit vectors in the Hilbert space: if $f \in H$, with $\|f\| = 1$, then $\omega_f(a) = (af, f)$ is a positive functional of norm 1 (for a an operator in the von Neumann algebra). These are called vector states. We shall consider more general types of vectors states, with symbols in a right Hilbert C^* -module, rather than a Hilbert space.

Tools from homotopy theory have been used in operator algebras for quite some time. Starting with N. H. Kuiper's theorem [18], establishing the contractibility of the unitary group of an infinite dimensional Hilbert space, following with further generalizations, to properly infinite von Neumann algebras ([10], [8], [11]). Araki, M. Smith and L. Smith considered the case when the von Neumann algebra is finite, and in [8] showed for example that the π_1 group of the unitary group of a II_1 factor is isomorphic to the additive group \mathbb{R} . These results were later extended by Schröder in [26]. Also some results appeared computing the homotopy type of the unitary groups of certain classes of C^* -algebras ([15], [30]). The topology considered for the unitary groups of the von Neumann algebras in these papers is the one induced by the norm of the algebra. Only a few years ago Popa and Takesaki [24] studied the

homotopy theory of the unitary and automorphism groups of a factor in the weak topologies of the algebra.

We shall establish here certain natural bundles, and use them to obtain topologic information about our sets of states. Let us describe which are these sets.

First we shall consider unitary orbits. Let \mathcal{B} be a von Neumann algebra, we denote by $U_{\mathcal{B}}$ the group of unitary operators of \mathcal{B} , or shortly, the unitary group of \mathcal{B} . If φ is a state of \mathcal{B} , and $u \in U_{\mathcal{B}}$, then φ_u given by $\varphi_u(a) = \varphi(u^*au)$ is another state of \mathcal{B} . This gives an action of the group $U_{\mathcal{B}}$ on the set of states. For simplicity let us restrict to faithful states, i.e. states with the property that $\varphi(a^*a) = 0$ implies $a = 0$, or equivalently states with support equal to the identity (in general, the support will be a projection of the algebra). Let us denote by $\mathcal{U}_{\varphi} = \{\varphi_u : u \in U_{\mathcal{B}}\}$ the orbit of φ under this action, the unitary orbit of φ . The natural map over this set \mathcal{U}_{φ} is

$$U_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{U}_{\varphi}, \quad u \mapsto \varphi_u.$$

The fibre over φ is the set of unitaries v satisfying that $\varphi(v^*av) = \varphi(a)$ for all $a \in \mathcal{B}$. Or equivalently $\varphi(va) = \varphi(av)$ for all $a \in \mathcal{B}$. The set of operators $b \in \mathcal{B}$ verifying that $\varphi(ba) = \varphi(ab)$ is a von Neumann algebra, usually called the the centralizer algebra of φ , and denoted by \mathcal{B}^{φ} . Then the fibre of this map over φ is $U_{\mathcal{B}^{\varphi}}$ the unitary group of \mathcal{B}^{φ} . So there is a natural bijection between \mathcal{U}_{φ} and the quotient $U_{\mathcal{B}}/U_{\mathcal{B}^{\varphi}}$, by means of $\varphi_u \mapsto [u]$, where $[u]$ denotes the class of u in this quotient. We shall endow \mathcal{U}_{φ} with the topology induced by this bijection, that is, we identify these sets, where the homogeneous space $U_{\mathcal{B}}/U_{\mathcal{B}^{\varphi}}$ is considered with the quotient topology of the usual norm topology of \mathcal{B} . The first fact is that with this topology, the map $U_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{U}_{\varphi}$ is a fibre bundle. This bundle will be studied in section 2 of this paper. The main result about it is that though the unitary group $U_{\mathcal{B}}$ has non trivial homotopy groups, \mathcal{U}_{φ} is simply —but in general not doubly— connected.

A right Hilbert C^* -module over \mathcal{B} is a right \mathcal{B} -module X with a \mathcal{B} -valued inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, which is additive in both variables, and satisfying the following axioms:

$$\langle x, x \rangle \text{ is a positive operator of } \mathcal{B},$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \text{ implies } x = 0,$$

$$\langle x, y \cdot a \rangle = \langle x, y \rangle a,$$

and

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*.$$

Moreover, these axioms imply that $\|x\|_X = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$ is a norm for X . We make the assumption that X is complete with this norm. Since we are dealing with von Neumann algebras, which are closed under a topology weaker than the norm topology, we shall eventually further require that X behaves well with respect to weak topologies. Namely we shall require that X is selfdual, which briefly means that \mathcal{B} -valued, \mathcal{B} -module forms of X are of the form $x \mapsto \langle y, x \rangle$ for appropriate $y \in X$.

There is an algebra of operators associated to such a module X , the set of operators $t : X \rightarrow X$ which are adjointable for the inner product, i.e. there exists another operator $s : X \rightarrow X$ such that $\langle tx, y \rangle = \langle x, sy \rangle$. Remarkably, adjointable operators

are automatically \mathcal{B} -linear and bounded, and the set of all adjointable operators, denoted by $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$, is a C^* -algebra. If moreover X is selfdual then $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ is a von Neumann algebra. These are standard facts on C^* -modules, and can be found in the original paper [21] by W. Paschke. Further references on this subject are [22], [25] and [19].

A vector $x \in X$ will be called spherical if $\langle x, x \rangle = 1$, and we shall denote by $S_1(X)$ the unit sphere of X , or the set of all spherical vectors. More generally if p is a projection in \mathcal{B} , $S_p(X)$ denotes the set of $x \in X$ such that $\langle x, x \rangle = p$. Geometric and topologic properties of these spheres and p -spheres were studied in [2] and [3]. Their homotopy groups can be computed in some cases, though not always, because they include as particular cases the classical finite dimensional spheres. However, if X is selfdual, the π_1 -group can be computed in terms of the type decomposition of \mathcal{B} [2].

If $x \in S_p(X)$ and φ is a state with support p , then one obtains a state of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$, called φ_x , by means of

$$\varphi_x(t) = \varphi(\langle x, tx \rangle), \quad t \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X).$$

If $X = \mathcal{B}$ (with the inner product given by $\langle x, y \rangle = x^*y$), then $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ identifies with \mathcal{B} . A unitary operator $u \in U_{\mathcal{B}}$ is a spherical vector of this X , and clearly the notation φ_u is consistent with the previous definition of this symbol. In other words, this notion of vector state generalizes the unitary action considered above.

We shall denote by \mathcal{O}_{φ} the set of all vector states, with φ fixed and x varying in $S_p(X)$, where p is the support projection of φ . The natural map over this set is

$$S_p(X) \rightarrow \mathcal{O}_{\varphi}, \quad x \mapsto \varphi_x,$$

which generalizes the previous map. Again, we endow \mathcal{O}_{φ} with the quotient topology induced by this map ($S_p(X)$ considered with the norm topology of X). This map is considered in section 3. It is shown that the topology above is given by the following metric

$$d_{\varphi}(\varphi_{x_0}, \varphi_{y_0}) = \inf\{\|x - y\| : x, y \text{ such that } \varphi_x = \varphi_{x_0}, \varphi_y = \varphi_{y_0}\}.$$

Again, with these topologies this map is a fibre bundle, with fibre equal to the unitary group of the centralizer of the state φ restricted to the reduced algebra $p\mathcal{B}p$.

In section 4 we let φ vary over the set of all states with support p (with p fixed). The set thus obtained is shown to be the set of all states of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ with *equivalent* supports. The natural map here is

$$(x, \varphi) \mapsto \varphi_x,$$

for $x \in S_p(X)$ and φ a state of \mathcal{B} with support p . If these two sets are considered with the norm topology, the quotient topology induced on the set of modular vector states φ_x is given by a metric d , given by $d(\Phi, \Psi) = \|\Phi - \Psi\| + \|\text{supp}(\Phi) - \text{supp}(\Psi)\|$. It is shown that the map above is a fibre bundle.

Apparently, this metric gives a topology which is much stronger than the norm topology (of the dual of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$). If one is interested in the set of states φ_x in the norm topology, one is forced to consider a weaker topology for the sphere $S_p(X)$. This is done in sections 5 and 6. A well known faithful representation ([25], [21]) of

$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ enables one to rewrite the map $(x, \varphi) \mapsto \varphi_x$ as a map $f \mapsto \omega_f$ for a set of vectors f in this representation. The weak topology in $\mathcal{S}_p(X)$ is harder to handle, but imposing conditions on the algebra \mathcal{B} one obtains that this map is again a fibre bundle.

These facts are applied in section 6, to prove that the set of states of (for example) the hyperfinite II_1 factor, with support equivalent to a fixed projection, has trivial homotopy groups of all orders. It is also shown that the set of partial isometries of this factor, with initial space fixed, in the ultraweak topology, has trivial homotopy groups of all orders. Finally, it is shown, that unitary orbits of states of this algebra are simply connected in the norm topology as well.

We include an application of these results in section 7. First we prove a statement which in our opinion is of interest in itself, and follows as an easy consequence of a result in section 5: the map which consists of taking the support projection of a state is continuous, when restricted to states of a finite von Neumann algebra with a priori equivalent supports, in the norm topology, with range in the set of projections of the algebra, regarded with the strong operator topology. Then it is shown that the support map in this setting defines a strong deformation retract. Therefore applying the result of section 6, it follows that the set of projections of the class of algebras considered there, has trivial homotopy groups for all orders $n \geq 1$ (this set is not connected).

If \mathcal{A} is a von Neumann algebra and $q \in \mathcal{A}$ a projection, $\Sigma_q(\mathcal{A})$ denotes the set of normal states of \mathcal{A} with support equal to q , and $P\Sigma_q(\mathcal{A})$ the set of normal states with support equivalent to q .

2. UNITARY ORBITS OF FAITHFUL STATES

Throughout this section φ will denote a faithful normal (i.e. ultraweakly continuous) state of a von Neumann algebra \mathcal{B} . As remarked above, if u is a unitary element of \mathcal{B} , then φ_u given by $\varphi_u(a) = \varphi(u^*au)$, is also a faithful state. We denote \mathcal{U}_φ the unitary orbit of φ , i.e. $\mathcal{U}_\varphi = \{\varphi_u : u \in U_{\mathcal{B}}\}$. The set of unitaries of this action which leave φ fixed is the unitary group of the centralizer \mathcal{B}^φ of φ , $\mathcal{B}^\varphi = \{b \in \mathcal{B} : \varphi(ab) = \varphi(ba) \text{ for all } \mathcal{A} \in \mathcal{B}\}$. Thus the orbit \mathcal{U}_φ identifies with the homogeneous space $U_{\mathcal{B}}/U_{\mathcal{B}^\varphi}$. We will consider on \mathcal{U}_φ the topology induced by this identification, where both $U_{\mathcal{B}}$ and $U_{\mathcal{B}^\varphi}$ are considered with the norm topology of \mathcal{B} . In other words, we endow \mathcal{U}_φ with the quotient topology given by the map

$$\pi_\varphi : U_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{U}_\varphi, \quad \pi_\varphi(u) = \varphi_u.$$

Now, as \mathcal{U}_φ is a set of bounded functionals of \mathcal{B} , there is another natural topology on it, namely the norm topology of the dual \mathcal{B}^* .

There is yet a third norm-induced topology on \mathcal{U}_φ . Recall that a conditional expectation between C^* -algebras $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ is a norm 1 projection $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, which automatically preserves adjoints, positive operators, and is \mathcal{A} -linear. E is said to be faithful if $E(b^*b) = 0$ implies $b = 0$, and normal when it is continuous for the ultraweak topology. By the modular theory of states in von Neumann algebras, given a faithful normal state such as φ , there exists a unique faithful and normal conditional expectation $E_\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^\varphi$ which is φ -invariant, $\varphi \circ E_\varphi = \varphi$. Using E_φ

one can define a new norm in \mathcal{B} , which is the $\mathcal{B}^\varphi - C^*$ -Hilbert module norm, given by the inner product

$$\langle b, c \rangle = E_\varphi(b^*c).$$

This modular norm is therefore $\|b\|_{E_\varphi} = \|E_\varphi(b^*b)\|^{1/2}$. The usual norm and this latter norm are equivalent in \mathcal{B} if and only if the index of the expectation E_φ is finite. An expectation $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ is said to be of finite index ([16], [23]) if there exists a positive number κ such that $E - \kappa I$ is a positive mapping in \mathcal{B} . It is a strong condition, particularly for expectations onto state centralizers such as E_φ . It forces that the algebra \mathcal{B} must be finite, and if it is a factor, then the state φ must be of the form $\varphi(b) = \tau(ha)$, where τ is the unique trace of the finite factor and h is a positive operator with finite spectrum (see [4]).

On the other hand, both norms clearly coincide in \mathcal{B}^φ . We are interested in the topologies they induce in the quotient $U_{\mathcal{B}}/U_{\mathcal{B}^\varphi}$. The following results clarify the relationship between these three topologies: *norm of the dual, usual norm quotient and modular norm quotient*.

Lemma 2.1. *Let $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ be a faithful conditional expectation of infinite index. Then the norm of \mathcal{B} and the norm $\|\cdot\|_E$ induced by E define topologies in $U_{\mathcal{B}}/U_{\mathcal{A}}$ which are not equivalent.*

Proof. Since the index of E is infinite ([9], [14]), there exist elements $a_n \in \mathcal{B}$ with $0 \leq a_n \leq 1$, $\|a_n\| = 1$ and $E(a_n) \rightarrow 0$ as n tends to infinity. It is straightforward to verify that the distance $d(a_n, \mathcal{A}) = \inf\{\|a_n - b\| : b \in \mathcal{A}\}$ does not tend to zero with n . Let $u_n \in U_{\mathcal{B}}$ be unitaries such that $1 - a_n = \frac{u_n + u_n^*}{2}$. Then

$$\|u_n - 1\|_E^2 = \|2 - E(u_n + u_n^*)\| = 2\|E(a_n)\| \rightarrow 0.$$

Therefore the sequence of the classes of the elements u_n tends to the class of 1 in the modular topology. We claim that $[u_n]$ does not tend to $[1]$ in the usual topology (induced by the norm of \mathcal{B}). Suppose not. Then there exist unitaries $v_n \in U_{\mathcal{A}}$ such that $u_n v_n \rightarrow 1$. Then

$$\|u_n - v_n^*\|^2 = \|(u_n - v_n^*)(u_n^* - v_n)\| = \|2 - u_n v_n - v_n^* u_n^*\| \rightarrow 0.$$

This implies that $d(u_n, \mathcal{A}) \rightarrow 0$, and therefore $d(a_n, \mathcal{A}) \rightarrow 0$, a contradiction. □

Proposition 2.2. *The usual norm quotient and the modular norm quotient topologies coincide in \mathcal{U}_φ if and only if the index of E_φ is finite.*

The following inequalities show the order that prevails between the three topologies:

Proposition 2.3. *Let u and w be unitaries in \mathcal{B} , then*

$$(1) \quad \|\varphi_u - \varphi_w\| \leq 2\|u - w\|_E \leq 2\|u - w\|.$$

Proof. The second inequality is obvious, because E_φ is contractive. In order to prove the first note that for any $x \in \mathcal{B}$,

$$|\varphi(u^*xu) - \varphi(w^*xw)| \leq |\varphi(u^*x(u - w))| + |\varphi((u^* - w^*)xw)|.$$

Note that if v is unitary, by the Cauchy-Schwarz inequality we have that $|\varphi(zv)| \leq \varphi(zz^*)^{1/2}$ and $|\varphi(v^*z)| \leq \varphi(z^*z)^{1/2}$. Applying these inequalities we obtain

$$|\varphi(u^*x(u-w))| \leq \varphi((u^* - w^*)x^*x(u-v))^{1/2} = \varphi \circ E_\varphi((u^* - w^*)x^*x(u-v))^{1/2},$$

and

$$|\varphi((u^* - w^*)xw)| \leq \varphi \circ E_\varphi((u^* - w^*)xx^*(u-w))^{1/2}.$$

Note that $(u^* - w^*)x^*x(u-v) \leq \|x\|^2(u^* - w^*)(u-v)$, and analogously for the other term. Thus we obtain

$$\begin{aligned} |\varphi(u^*xu) - \varphi(w^*xw)| &\leq 2\|x\| \varphi \circ E_\varphi((u^* - w^*)(u-v))^{1/2} \\ &\leq 2\|x\| \|E_\varphi((u^* - w^*)(u-v))\|^{1/2}. \end{aligned}$$

□

These inequalities also show that the inclusion $\mathcal{U}_\varphi \hookrightarrow \mathcal{B}^*$ is continuous, when \mathcal{U}_φ is considered both with the usual norm quotient or the modular norm quotient topologies. We will return to the dual norm topology in section 6.

For the remaining of the section we shall consider the features of these two topologies separately. For the usual norm quotient topology, perhaps the most remarkable fact is that \mathcal{U}_φ is simply connected. Let us establish this fact. To do so our main tool will be the map

$$\pi_\varphi : U_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{U}_\varphi, \quad \pi_\varphi(u) = \varphi_u.$$

First we check that it is a fibre bundle. The following fact is perhaps well known, the reference we know for it is [7].

Proposition 2.4. *Let $A \subset B$ be complex Banach algebras with the same unit, such that A is complemented in B . Denote by G_A, G_B the groups of invertible elements of A and B . Then the quotient map*

$$G_B \rightarrow G_B/G_A$$

has continuous local cross sections.

In our setting, \mathcal{B}^φ is complemented in \mathcal{B} , because we have the projection E_φ . Starting with continuous local cross sections for quotient of invertible groups it is not difficult to obtain unitary cross sections for the quotient of unitary groups: it suffices to restrict to the unitary quotient, and to compose the cross section on the invertible group of \mathcal{B} with the map which consists in taking the unitary part in the polar decomposition (the unitary on the left hand side), which is continuous on the group of invertibles.

It follows that the homogeneous space $U_{\mathcal{B}}/U_{\mathcal{B}^\varphi}$ has continuous local cross sections, and therefore π_φ is a fibre bundle. Once this fact is clear, we use the tail of the homotopy exact sequence of this bundle to prove that $\pi_1(\mathcal{U}_\varphi)$ is trivial. That $\pi_0(\mathcal{U}_\varphi)$ is trivial follows from the fact that the unitary group of a von Neumann algebra is connected. One has

$$\dots \pi_1(U_{\mathcal{B}^\varphi}, 1) \rightarrow \pi_1(U_{\mathcal{B}}, 1) \xrightarrow{\pi_\varphi^*} \pi_1(\mathcal{U}_\varphi, \varphi) \rightarrow 0.$$

A von Neumann algebra has a type decomposition, one can find projections p_f, p_i in the centre of \mathcal{B} such that $p_f + p_i = 1$, $p_f\mathcal{B}$ is a finite von Neumann algebra (with unit p_f) and $p_i\mathcal{B}$ is properly infinite (with unit p_i). These projections factor the algebras, $\mathcal{B} = p_f\mathcal{B} \oplus p_i\mathcal{B}$, the states, $\psi = \psi_f + \psi_i$ where $\psi_f(x) = \psi(p_fx)$ and $\psi_i(x) = \psi(p_ix)$, and the centralizer algebras $\mathcal{B}^\varphi = (p_f\mathcal{B})^{\varphi_f} \oplus (p_i\mathcal{B})^{\varphi_i}$. In other words, this projections enable one to consider the properly infinite and the finite case separately. One can further decompose the algebra, for our purposes it will suffice to proceed with the finite part, which splits into the type I part and the type II_1 part. The type I part further decomposes in the the type I_n parts, $1 \leq n < \infty$. Let us state the result, with an outline of the proof.

Theorem 2.5. *Let φ be a faithful and normal state on a von Neumann algebra \mathcal{B} . Then the unitary orbit \mathcal{U}_φ with the norm quotient topology is simply connected.*

Proof. By the above remark, we may proceed by cases.

- (1) If \mathcal{B} is properly infinite, it was proved by Breuer in [10] that $U_{\mathcal{B}}$ is contractible in the norm topology. It follows that $\pi_1(\mathcal{U}_\varphi, \varphi) = 0$.
- (2) If \mathcal{B} is of type II_1 , then \mathcal{B}^φ is finite, but may have type I and/or type II parts. To deal with this situation, we need the following lemma, which can be found in [3]. It is based on the fact [13] that if $p \in \mathcal{B}$ is a projection, the map

$$U_{\mathcal{B}} \rightarrow \{upu^* : u \in U_{\mathcal{B}}\}, \quad u \mapsto upu^*$$

is a fibre bundle, with fibre equal to the unitary group of the commutant $\{p\}' \cap \mathcal{B}$.

Lemma 2.6. *Let \mathcal{B} be a von Neumann algebra and p a projection. Then the unitary orbit $\{upu^* : u \in U_{\mathcal{B}}\}$ of p is simply connected.*

Note that the unitary group of the commutant $\{upu^* : u \in U_{\mathcal{B}}\}$ can be identified with the product $U_{p\mathcal{B}p} \times U_{(1-p)\mathcal{B}(1-p)}$. In our case, we have projections p_I and p_{II} in the centre of \mathcal{B}^φ (which may be bigger than the centre of \mathcal{B}) with $p_I + p_{II} = 1$, $p_I\mathcal{B}^\varphi$ of type I and $p_{II}\mathcal{B}^\varphi$ of type II . Therefore

$$U_{\mathcal{B}} / (U_{p_I\mathcal{B}p_I} \times U_{p_{II}\mathcal{B}p_{II}})$$

is simply connected. The inclusion $U_{\mathcal{B}^\varphi} \subset U_{\mathcal{B}}$ can be factorized

$$U_{\mathcal{B}^\varphi} = U_{p_I\mathcal{B}^\varphi} \times U_{p_{II}\mathcal{B}^\varphi} \subset U_{p_I\mathcal{B}p_I} \times U_{p_{II}\mathcal{B}p_{II}} \subset U_{\mathcal{B}}.$$

In the inclusion $U_{p_I\mathcal{B}^\varphi} \subset U_{p_I\mathcal{B}p_I}$, $p_I\mathcal{B}^\varphi$ is of type I and $p_I\mathcal{B}p_I$ is of type II_1 . Analogously, the inclusion $U_{p_{II}\mathcal{B}^\varphi} \subset U_{p_{II}\mathcal{B}p_{II}}$ involves type II_1 algebras. Therefore it suffices to prove the result when \mathcal{B}^φ is either of type II_1 or of type I .

- (a) If both \mathcal{B} and \mathcal{B}^φ are of type II_1 , their π_1 groups are isomorphic, as additive groups, to the sets of selfadjoint elements of their centres (see [15], [26]). Moreover, it can be shown using the arguments of these papers cited, that the morphism $i^* : \pi_1(U_{\mathcal{B}^\varphi}, 1) \rightarrow \pi_1(U_{\mathcal{B}}, 1)$ induced by the inclusion map $i : U_{\mathcal{B}^\varphi} \hookrightarrow U_{\mathcal{B}}$ at the π_1 level, under that

identification, becomes the restriction of the center valued trace τ of \mathcal{B} to $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^\varphi)$,

$$\tau|_{\mathcal{Z}(\mathcal{B}^\varphi)} : \mathcal{Z}(\mathcal{B}^\varphi) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{B}).$$

Here $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ denotes the centre of \mathcal{A} . This morphism is clearly onto, because $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^\varphi)$ contains $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. It follows that $\pi_1(\mathcal{U}_\varphi, \varphi) = 0$.

- (b) If \mathcal{B} is of type II_1 and \mathcal{B}^φ is of type I (and finite), let p_n be the projections in the centre of \mathcal{B}^φ decomposing it in its I_n types, $n < \infty$. Since \mathcal{B}^φ is of type I ([26], [15]), $\pi_1(U_{\mathcal{B}^\varphi}, 1)$ identifies with the additive group of selfadjoint elements in the centre of \mathcal{B}^φ which have their spectrum contained in \mathbb{Z} . Here the inclusion map $i : U_{\mathcal{B}^\varphi} \hookrightarrow U_{\mathcal{B}}$ again induces the morphism i^* at the π_1 level which identifies with the restriction of the center valued trace τ of \mathcal{B} , to the set of selfadjoint elements in the centre of \mathcal{B}^φ with integer spectrum. We must also show here that this morphism is onto. Pick $c \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$, and put $c_n = cp_n$. Suppose that for each n we can find a projection q_n in the centre of $p_n\mathcal{B}^\varphi$ (equal to $p_n\mathcal{Z}(\mathcal{B}^\varphi)$), such that $\tau(q_n) = c_n$. Then the element $r = \sum_n q_n$ would be a selfadjoint element in the centre of \mathcal{B}^φ with integer spectrum, satisfying $\tau(r) = c$. This in turn would mean that i^* is onto, and therefore $\pi_1(\mathcal{U}_\varphi, \varphi)$ would be trivial. This remark implies that it suffices to prove our statement when \mathcal{B}^φ is of type I_n . Let us make this assumption, and let e be an abelian projection in \mathcal{B}^φ with $\tau(e) = 1/n$. Again pick $0 \leq c \leq 1$ in $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. Now $e\mathcal{B}e$ is of type II_1 , and the restriction of φ to $e\mathcal{B}e$ has centralizer equal to the commutative algebra $e\mathcal{B}^\varphi e$. Suppose now that we have proven our result for the case when \mathcal{B}^φ is commutative. Then there would exist a projection $q \in \mathcal{Z}(e\mathcal{B}^\varphi e) = e\mathcal{Z}(\mathcal{B}^\varphi)$ such that

$$\tau(q) = ec,$$

where here τ denotes the center valued trace of $e\mathcal{B}e$. Taking trace in the above inequality yields $(1/n)\tau(q) = (1/n)c$, and the statement follows. Therefore it suffices to prove the result in the case when \mathcal{B}^φ is commutative. Since it is the centralizer of a state, it must be maximal commutative inside \mathcal{B} , and it is generated by a single positive operator h , essentially satisfying $\varphi = \tau(h)$. Here a straightforward spectral theoretic argument shows our result (see [5] for the details).

- (3) Finally, it remains to check the case when \mathcal{B} is of type I and finite. A similar argument as above enables one to reduce to the case when \mathcal{B} is of type I_n . But in this case the result is apparent, elements in $\pi_1(U_{\mathcal{B}}, 1)$ are of finite sums $\sum_i m_i p_i$ with m_i integers and p_i mutually orthogonal projections in $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. Since $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Z}(\mathcal{B}^\varphi)$, the mentioned restriction of the centre valued trace is surjective.

□

Let us now consider the modular norm quotient topology in \mathcal{U}_φ , i.e. the topology on the quotient $U_{\mathcal{B}}/U_{\mathcal{B}^\varphi}$ induced by the modular norm $\|a\|_{E_\varphi} = \|E_\varphi(a^*a)\|^{1/2}$ on \mathcal{B} .

We shall make use of the Jones basic extension (see for example [9]) of the conditional expectation E_φ . In our case this means the following. Let H_φ be the GNS Hilbert space of φ , i.e. the completion of the pre-Hilbert space \mathcal{B} with the scalar product $\langle a, b \rangle_\varphi = \langle a, b \rangle = \varphi(b^*a)$. It is easy to see that the linear map $E_\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^\varphi \subset \mathcal{B}$ is bounded in the norm of H_φ , and therefore extends to a selfadjoint projection in $B(H_\varphi)$, denoted by e_φ (usually called the Jones projection of E_φ), whose range is the closure of \mathcal{B}^φ in H_φ . Denote by \mathcal{B}_1 the von Neumann subalgebra of $B(H_\varphi)$ generated by \mathcal{B} and e_φ . Among the properties of this construction, we shall need the following:

- (1) $e_\varphi a e_\varphi = E_\varphi(a) e_\varphi$, $a \in \mathcal{B}$. In particular, e_φ commutes with \mathcal{B}^φ .
- (2) $\mathcal{B} \cap \{e_\varphi\}' = \mathcal{B}^\varphi$.
- (3) The map $x \mapsto x e_\varphi$ is a *-isomorphism between \mathcal{B}^φ and $\mathcal{B}^\varphi e_\varphi$.

The first pleasant fact about this topology is that it enables one to represent the space \mathcal{U}_φ as a set of operators in \mathcal{B}_1 . Consider the following map:

$$\mathcal{U}_\varphi \rightarrow U_{\mathcal{B}}(e_\varphi) = \{u e_\varphi u^* : u \in \mathcal{B}\}, \quad \varphi_u \mapsto u e_\varphi u^*.$$

Strictly speaking, $U_{\mathcal{B}}(e_\varphi)$ is not the unitary orbit of a projection, because the projection e_φ does not belong to \mathcal{B} (with the exception of the trivial case when $\mathcal{B} = \mathcal{B}^\varphi$, i.e. φ is a trace and \mathcal{U}_φ reduces to a point). First note that this map is well defined: if $u e_\varphi u^* = w e_\varphi w^*$ for $w, u \in U_{\mathcal{B}}$, then w^*u commutes with e_φ , which by the second property cited above implies that $w^*u \in \mathcal{B}^\varphi$, which means that $\varphi_u = \varphi_w$.

This map is continuous, if $U_{\mathcal{B}}(e_\varphi) \subset \mathcal{B}_1 \subset B(H_\varphi)$ is considered with the norm topology [4]. Moreover, it is a homeomorphism. Indeed, if $u e_\varphi u^*$ is close (in norm) to e_φ , then also $u^* e_\varphi u$ is close to e_φ . Using the properties of the basic extension, this implies that both $E_\varphi(u)E_\varphi(u^*)$ and $E_\varphi(u^*)E_\varphi(u)$ are close to 1, and therefore $E_\varphi(u^*)$ is invertible. Let $\mu(g)$ be the continuous map consisting of taking the unitary part of the invertible element $g \in \mathcal{B}$, $g = \mu(g)|g|$ (explicitly, $\mu(g) = g(g^*g)^{-1/2}$). Then $\mu(E_\varphi(u^*))$ is a unitary in \mathcal{B}^φ , and $u\mu(E_\varphi(u^*))$ is close to 1 in the norm $\| \cdot \|_{E_\varphi}$,

$$\|u\mu(E_\varphi(u^*)) - 1\|_{E_\varphi}^2 = \|2 - E_\varphi(u)\mu(E_\varphi(u^*)) - \mu(E_\varphi(u))E_\varphi(u)\|.$$

Note that

$$E_\varphi(u)\mu(E_\varphi(u^*)) = E_\varphi(u)E_\varphi(u^*)[E_\varphi(u)E_\varphi(u^*)]^{-1/2} = (E_\varphi(u)E_\varphi(u^*))^{1/2},$$

which is close to 1 because $E_\varphi(u)E_\varphi(u^*)$ is close to 1. The other term inside the norm is dealt in a similar way. This implies not only that the map $\varphi_u \mapsto u e_\varphi u^*$ is a homeomorphism, but also that the assignment $u e_\varphi u^* \mapsto u\mu(E_\varphi(u^*))$, which is continuous and well defined on a neighbourhood of e_φ in \mathcal{B}_1 , defines a continuous local cross section for

$$U_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{U}_\varphi \simeq U_{\mathcal{B}}(e_\varphi), \quad u \mapsto \varphi_u \sim u e_\varphi u^*$$

when $U_{\mathcal{B}}$ is considered with the modular norm $\| \cdot \|_{E_\varphi}$ and \mathcal{U}_φ with the quotient of this topology.

However, by [5] $U_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}_1$ is a submanifold, or equivalently, the map above has local cross sections which are continuous in the *norm* topology of $U_{\mathcal{B}}$, if and only if the index of E_φ is finite.

It is easy to see that \mathcal{U}_φ is closed (in \mathcal{B}^*) when regarded with the usual norm quotient topology. This may not be true in the modular norm quotient topology. In the closure of \mathcal{U}_φ with this topology, there come up states of the form $\varphi_x, \varphi_x(a) = \langle x, xa \rangle$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the \mathcal{B}^φ -valued inner product of the completion of the pre-Hilbert C^* -module \mathcal{B} . Namely, the elements x are limits of unitaries in \mathcal{B} , in the modular norm $\| \cdot \|_{E_\varphi}$. These elements are spherical elements: if $u_n \rightarrow x$ in the norm $\| \cdot \|_{E_\varphi}$, then

$$1 = E_\varphi(u_n u_n^*) = \langle u_n, u_n \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle.$$

This motivates the generalization considered in the next section.

3. ORBITS OF STATES UNDER SPHERICAL ELEMENTS

Let \mathcal{B} be a von Neumann algebra, X a right C^* -module over \mathcal{B} which is selfdual, and $\mathcal{L}_\mathcal{B}(X)$ the von Neumann algebra of adjointable operators of X . All states considered will supposed to be normal. If $p \in \mathcal{B}$ is a projection, denote by $\mathcal{S}_p(X) = \{x \in X : \langle x, x \rangle = p\}$ the p -sphere of X . We shall study the states of $\mathcal{L}_\mathcal{B}(X)$ which are vector states in the modular sense. That is, for a state φ of \mathcal{B} and a vector $x \in \mathcal{S}_p(X)$, we consider the state φ_x with density x , given by

$$\varphi_x(t) = \varphi(\langle x, t(x) \rangle), \quad t \in \mathcal{L}_\mathcal{B}(X).$$

If $x, y \in X$, let $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}_\mathcal{B}(X)$ be the “rank one” operator given by $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle$. If $\langle x, x \rangle = p$ then the operator $\theta_{x,x} = e_x$ is a selfadjoint projection, and all projections arising in this manner, from vectors in $\mathcal{S}_p(X)$, are mutually (Murray-von Neumann) equivalent. It turns out that these *modular vector states* as we shall subsequently call them, are precisely the states of $\mathcal{L}_\mathcal{B}(X)$ with support of rank one, i.e. equal to one of these projections e_x .

In this section we will consider the following generalization of the unitary orbit of φ :

$$\mathcal{O}_\varphi = \{\varphi_x : x \in \mathcal{S}_p(X)\}$$

for φ a fixed state in \mathcal{B} , with support projection $\text{supp}(\varphi) = p$. We denote by $\Sigma_p(\mathcal{B})$ the set of states of \mathcal{B} with support p .

Let us state some elementary facts about modular vector states ([5]):

Proposition 3.1. *Let $\psi, \varphi \in \Sigma_p(\mathcal{B})$, $x, y \in \mathcal{S}_p(X)$. Then*

- (a) $\varphi_x = \psi_x$ if and only if $\varphi = \psi$.
- (b) $\varphi_x = \psi_y$ if and only if $\psi = \varphi \circ \text{Ad}(u)$, with $y = xu$ and $u \in U_{p\mathcal{B}p}$.
- (c) $\varphi_x = \varphi_y$ if and only if $y = xv$, for v a unitary element in \mathcal{B}_p^φ .

Proof. Let us start with (a): $\varphi(b) = \varphi_x(\theta_{xb,x}) = \psi_x(\theta_{xb,x}) = \psi(b)$.

To prove (b), suppose that $\varphi_x = \psi_y$. Then they have the same support, i.e. $e_x = e_y$, which implies that there exists a unitary element $u \in U_{p\mathcal{B}p}$ such that $y = xu$ (see [3]). Then

$$\varphi_x(t) = \psi_y(t) = \psi(\langle xu, t(xu) \rangle) = \psi(u^* \langle x, t(x) \rangle u) = [\psi \circ \text{Ad}(u^*)]_x(t).$$

Using part (a), this implies that $\varphi = \psi \circ \text{Ad}(u^*)$, or $\psi = \varphi \circ \text{Ad}(u)$.

To prove (c), use (b), and note that the unitary element $u \in U_{p\mathcal{B}p}$ satisfies $\varphi = \varphi \circ \text{Ad}(u)$, i.e. $u \in \mathcal{B}_p^\varphi$. □

Our main tool here will be the natural map

$$\sigma : \mathcal{S}_p(X) \rightarrow \mathcal{O}_\varphi, \sigma(x) = \varphi_x.$$

Let us consider the following natural metric in \mathcal{O}_φ :

$$d_\varphi(\varphi_x, \varphi_y) = \inf\{\|x' - y'\| : x', y' \in \mathcal{S}_p(X), \varphi_{x'} = \varphi_x, \varphi_{y'} = \varphi_y\}$$

It is clear that this metric induces the same topology as the quotient topology given by the map σ , also, that in view of 3.1 it can be computed as follows:

$$d_\varphi(\varphi_x, \varphi_y) = \inf\{\|x - yv\| : v \text{ unitary in } \mathcal{B}_p^\varphi\}.$$

First note that this is indeed a metric. For instance, if $d_\varphi(\varphi_x, \varphi_y) = 0$, then there exist unitaries v_n in \mathcal{B}_p^φ such that $\|x - yv_n\| \rightarrow 0$, i.e. $yv_n \rightarrow x$ in $\mathcal{S}_p(X)$. In particular yv_n is a Cauchy sequence, and therefore v_n is a Cauchy sequence, converging to a unitary v in \mathcal{B}_p^φ . Then $x = yv$ and $\varphi_x = \varphi_y$. The other properties follow similarly.

With this metric, \mathcal{O}_φ is homeomorphic to the quotient $\mathcal{S}_p(X)/U_{\mathcal{B}_p^\varphi}$. The following result implies that the inclusion $\mathcal{O}_\varphi \subset \mathcal{B}^*$ is continuous.

Lemma 3.2. *If $x, y \in \mathcal{S}_p(X)$, then $\|\varphi_x - \varphi_y\| \leq 2\|x - y\|$. In particular*

$$\|\varphi_x - \varphi_y\| \leq 2d_\varphi(\varphi_x, \varphi_y)$$

where the norm $\|\cdot\|$ of the functionals denotes the usual norm of the conjugate space $\mathcal{L}_{\mathcal{B}(X)}^*$.

Proof. If $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}(X)}$, then $|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)| \leq |\varphi(\langle x, t(x - y) \rangle)| + |\varphi(\langle x - y, ty \rangle)|$. Now by the Cauchy-Schwarz inequality $\|\langle x, t(x - y) \rangle\| \leq \|t\| \|x - y\|$, and $\|\langle x - y, ty \rangle\| \leq \|x - y\| \|t\|$. Then $\|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\| \leq 2\|t\| \|x - y\|$, and the result follows. \square

Recall that for a normal state φ with support p there exists a conditional expectation $E_\varphi : p\mathcal{B}p \rightarrow \mathcal{B}_p^\varphi$.

Theorem 3.3. *The map $\sigma : \mathcal{S}_p(X) \rightarrow \mathcal{O}_\varphi, \sigma(x) = \varphi_x$ is a locally trivial fibre bundle. The fibre of this bundle is the unitary group $U_{\mathcal{B}_p^\varphi}$ of \mathcal{B}_p^φ .*

We give an outline of the proof. It suffices to construct continuous local cross sections for σ at every point $\varphi_{x_0}, x_0 \in \mathcal{S}_p(X)$. Suppose that $d_\varphi(\varphi_x, \varphi_{x_0}) < r < 1$, and let us adjust r . There exists a unitary operator $v \in U_{\mathcal{B}_p^\varphi}$ such that $\|xv - x_0\| < r < 1$. In particular,

$$\|p - \langle xv, x_0 \rangle\| = \|\langle x_0, x_0 \rangle - \langle xv, x_0 \rangle\| = \|\langle x_0 - xv, x_0 \rangle\| \leq \|x_0 - xv\| < 1$$

and therefore $\langle xv, x_0 \rangle$ is invertible in the algebra $p\mathcal{B}p$ (with unit p). Therefore one can find r such that also $E_\varphi(\langle xv, x_0 \rangle)$ is invertible. Let us put

$$\eta_{x_0}(\varphi_x) = x\mu(E_\varphi(\langle xv, x_0 \rangle)),$$

defined on the ball $\{\varphi_x : d_\varphi(\varphi_x, \varphi_{x_0}) < r\}$, where as before, μ denotes the unitary part in the polar decomposition. Then all it remains is to verify that this map η_{x_0} does the job: it is well defined, continuous, and is a cross section for σ .

We shall need the following fact, which is straightforward to verify.

Lemma 3.4. *Suppose that one has the following commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\pi_1} & X \\
 & \searrow \pi_2 & \downarrow p \\
 & & Y,
 \end{array}$$

where E, X, Y are topological spaces, π_1, π_2 are fibrations and p is continuous and surjective. Then p is also a fibration.

Denote by $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ the set of projections of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$. In general, the space of projections of a von Neumann algebra is a differentiable submanifold of the algebra, whose components are the unitary orbits of single projections [13]. Let $\mathcal{E}_e \subset \mathcal{E}$ denote the set of projections which are Murray-von Neumann equivalent to $e \in \mathcal{E}$. It is clear that \mathcal{E}_e , being a union of connected components of \mathcal{E} , is also a submanifold of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$. There is another natural map associated to \mathcal{O}_{φ} ,

$$\mathcal{O}_{\varphi} \rightarrow \mathcal{E}_e, \quad \varphi_x \mapsto e_x,$$

where e is any projection of the form e_{x_0} for some $x_0 \in \mathcal{S}_p(X)$ (they are all equivalent). Since $e_x = \text{supp}(\varphi_x)$, we shall call this map supp . In general, taking support of positive functionals does not define a continuous map. However it is continuous in this context, i.e. restricted to the set \mathcal{O}_{φ} with the metric d_{φ} . Indeed, as seen before, convergence of $\varphi_{x_n} \rightarrow \varphi_x$ in this metric implies the existence of unitaries v_n of $\mathcal{B}_p^{\varphi} \subset p\mathcal{B}p$ such that $x_n v_n \rightarrow x$ in $\mathcal{S}_p(X)$. This implies that $e_{x_n v_n} = e_{x_n} \rightarrow e_x$. Moreover, one has

Theorem 3.5. *The map $\text{supp} : \mathcal{O}_{\varphi} \rightarrow \mathcal{E}_e$ is a fibration with fibre $U_{p\mathcal{B}p}/U_{\mathcal{B}_p^{\varphi}}$. One has the following commutative diagram of fibre bundles*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}_p(X) & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{O}_{\varphi} \\
 & \searrow \sigma & \downarrow \text{supp} \\
 & & \mathcal{E}_e.
 \end{array}$$

This is a consequence of 3.4, and the fact that $\mathcal{S}_p(X) \rightarrow \mathcal{E}_e$ is a fibre bundle [3].

One can use the homotopy exact sequences of these bundles to relate the homotopy groups of $\mathcal{O}_{\varphi}, \mathcal{S}_p(X), \mathcal{E}_e, U_{p\mathcal{B}p}, U_{\mathcal{B}_p^{\varphi}}$ and $U_{p\mathcal{B}p}/U_{\mathcal{B}_p^{\varphi}}$. There are many results concerning the homotopy groups of the unitary group of a von Neumann algebra, the survey by Schröder [27] is an excellent reference to these. The homotopy groups of $\mathcal{S}_p(X)$ where considered in [2], [3]. Finally, the set \mathcal{U}_{φ} was considered in the previous section. The sequences are:

$$\dots \pi_n(U_{\mathcal{B}_p^{\varphi}}, p) \rightarrow \pi_n(\mathcal{S}_p(X), x_0) \xrightarrow{\sigma_*} \pi_n(\mathcal{O}_{\varphi}, \varphi_{x_0}) \rightarrow \pi_{n-1}(U_{\mathcal{B}_p^{\varphi}}, p) \rightarrow \dots$$

where x_0 is a fixed element in $\mathcal{S}_p(X)$, and

$$\dots \pi_n(U_{p\mathcal{B}p}/U_{\mathcal{B}_p^{\varphi}}, [p]) \rightarrow \pi_n(\mathcal{O}_{\varphi}, \varphi_{x_0}) \xrightarrow{\text{supp}^*} \pi_n(\mathcal{E}, e_{x_0}) \rightarrow \pi_{n-1}(U_{p\mathcal{B}p}/U_{\mathcal{B}_p^{\varphi}}, [p]) \rightarrow \dots$$

with φ a fixed state in $\Sigma_p(\mathcal{B})$.

In [3] it was shown that if \mathcal{B} is finite von Neumann algebra, then $\mathcal{S}_p(X)$ is connected. It follows that if \mathcal{B} is finite, then \mathcal{O}_φ is connected as well. Let us cite some conclusions which follow from direct observation of the above sequences:

(1)

$$\pi_1(\mathcal{O}_\varphi, \varphi_x) \simeq \pi_1(\mathcal{E}_e, e_x).$$

If moreover Xp is selfdual (as a $p\mathcal{B}p$ -module), then $\pi_1(\mathcal{O}_\varphi, \varphi_x) = 0$. For the first assertion we use the fact proved in the previous section, that $\mathcal{U}_\varphi = U_{\mathcal{B}}/U_{\mathcal{B}^\varphi}$ is simply connected. For the second, we use [3] that unitary orbits of projections of a von Neumann algebra are simply connected.

(2) If Xp is selfdual, then for any $x_0 \in \mathcal{S}_p(X)$ fixed and any closed continuous path $x(t) \in \mathcal{S}_p(X)$, with $x(0) = x(1) = x_0$, there exists a path of unitaries $v(t)$ in \mathcal{B}_p^φ , with $v(0) = v(1) = p$, such that $x(t)$ is homotopic to $x_0v(t)$. This is because the inclusion map $i : U_{\mathcal{B}_p^\varphi} \hookrightarrow \mathcal{S}_p(X)$ given by $v \mapsto x_0v$ is onto at the π_1 level.

(3) Suppose that Xp is selfdual and $p\mathcal{B}p$ is properly infinite, then for $n \geq 1$

$$\pi_n(\mathcal{O}_\varphi, \varphi_x) \simeq \pi_{n-1}(U_{\mathcal{B}_p^\varphi}, p).$$

(4) The same conclusion follows if Xp is selfdual, $p\mathcal{B}p$ is of type II_1 and $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ is properly infinite. This is the case if for example $p\mathcal{B}p$ is a II_1 factor and Xp is not finitely generated.

These last two follow from the fact that if one has either of the two conditions, then $\mathcal{S}_p(X)$ is contractible ([3]). A consequence from these is that (in both situations) $\pi_1(\mathcal{O}_\varphi)$ is trivial. But $\pi_2(\mathcal{O}_\varphi)$ may not, because \mathcal{B}_p^φ is a finite von Neumann algebra ([26], [15]), which can have non trivial π_1 group.

4. MODULAR VECTOR STATES

The set we consider in this section is the union of the orbits \mathcal{O}_φ , with φ ranging in the set $\Sigma_p(\mathcal{B})$ of normal states with support p , and p fixed. It was remarked before that these states are characterized as states of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ with support *equivalent* to e_x , for any $x \in \mathcal{S}_p(X)$. Recall that if \mathcal{A} is a von Neumann algebra and $q \in \mathcal{A}$ is a projection, $P\Sigma_q(\mathcal{A})$ denotes the set of normal states with support equivalent to q . Our set is then $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$, with $e = e_x$ as above. We continue in the fashion of relating our sets with other spaces already studied. The natural map to study here is

$$\mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B}) \rightarrow P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)), \quad (x, \varphi) \mapsto \varphi_x.$$

Let us endow $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ with the quotient topology given by this map, where $\mathcal{S}_p(X)$ is considered with the norm topology of X , and $\Sigma_p(\mathcal{B})$ with the norm topology of \mathcal{B}^* . We shall find a metric which induces this topology. First note that the unitary group $U_{p\mathcal{B}p}$ acts both on $\mathcal{S}_p(X)$ (via the right action of the module X) and on $\Sigma_p(\mathcal{B})$ (by inner conjugation, $u \cdot \varphi = \varphi_u$, the action introduced in section 1). Consider the diagonal action of $U_{p\mathcal{B}p}$ on the product of both spaces. It is easy to see, using 3.4, that the set $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ is the quotient of $\mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B})$ by this diagonal action.

Proposition 4.1. *The metric d in $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ given by*

$$d(\Phi, \Psi) = \|\Phi - \Psi\| + \|\text{supp}(\Phi) - \text{supp}(\Psi)\|$$

induces the same topology as the quotient topology described above.

We omit the proof, which can be found in [6]. If $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ is not finite dimensional, this metric is stronger than the norm metric. It is not hard to find examples. On the other hand, if $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ is finite dimensional, it can be proved that taking the support is continuous when one restricts to states with equivalent support. We shall return to this question of continuity of the support under certain conditions.

Note that the inclusion $(P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)), d) \subset \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)^*$ is continuous.

At this point it will be convenient to give a name to the map $(x, \varphi) \mapsto \varphi_x$.

Theorem 4.2. *The map $\wp_1 : \mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B}) \rightarrow P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$, $\wp_1(x, \varphi) = \varphi_x$ is a principal fibre bundle with fibre $U_p\mathcal{B}p$.*

We give an outline of the proof. We shall use here the projective bundle studied in [3],

$$\rho : \mathcal{S}_p(X) \rightarrow \mathcal{E}_e, \quad \rho(x) = e_x$$

which is a principal fibre bundle also with fibre $U_p\mathcal{B}p$. To prove our statement it suffices to exhibit a local cross section around a generic base point φ_x . We claim that there is a neighborhood of φ_x such that elements ψ_y in this neighborhood satisfy that $\langle y, x \rangle$ is invertible. Indeed, if $d(\varphi_x, \psi_y) < r$, then $\|e_x - e_y\| < r$. If we choose r small enough so that e_y lies in the ball around e_x in which a local cross section of $\rho(x) = e_x$ is defined, then there exists a unitary u in $p\mathcal{B}p$ such that $\|x - yu\| < 1$. Note that

$$\|p - \langle yu, x \rangle\| = \|\langle x - yu, x \rangle\| \leq \|x - yu\| < 1.$$

Then $\langle yu, x \rangle = u^* \langle y, x \rangle$ is invertible in $p\mathcal{B}p$, and therefore also $\langle y, x \rangle$. In this neighborhood put

$$s(\psi_y) = (y\mu(\langle y, x \rangle), \psi \circ Ad(\mu(\langle y, x \rangle))),$$

where μ denotes the unitary part in the polar decomposition of invertible elements in $p\mathcal{B}p$ as before, and $Ad(v)(x) = vxv^*$. The proof finishes by showing that s is well defined, is a local cross section and is continuous.

Now we have seen that

$$P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)) \simeq \mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B}) / (x, \varphi) \sim (xu, \varphi_u).$$

There arise two more natural maps, namely

$$\wp_2 : \mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B}) / (x, \varphi) \sim (xu, \varphi_u) \rightarrow \mathcal{S}_p(X) / x \sim xu, \quad \wp_2([(x, \varphi)]) = [x]$$

with fibre $\Sigma_p(\mathcal{B})$, and

$$\wp_3 : \mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B}) / (x, \varphi) \sim (xu, \varphi_u) \rightarrow \Sigma_p(\mathcal{B}) / \varphi \sim \varphi_u, \quad \wp_3([(x, \varphi)]) = [\varphi]$$

with fibre $\mathcal{S}_p(X)$.

We will see that \wp_2 is a fibre bundle, but that \wp_3 , which is far more interesting, is not. To see this, consider the case when $X = \mathcal{B}$ is a finite algebra, and $p = 1$. Here $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ and $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ consists of the states of \mathcal{B} with support equivalent to 1 (note that $x \in \mathcal{S}_1(X)$ verifies $x^*x = 1$, i.e. $x \in U_{\mathcal{B}}$, and $e_x = 1$). That is, $P\Sigma_e(\mathcal{B})$ is

the set of faithful states of \mathcal{B} ($= \Sigma_1(\mathcal{B})$ in our notation). It follows that \wp_3 is just the quotient map

$$\Sigma_1(\mathcal{B}) \rightarrow \Sigma_1(\mathcal{B})/U_{\mathcal{B}}.$$

Take $\mathcal{B} = M_n(\mathbb{C})$ ($n < \infty$). Then the quotient map above is not a weak fibration. Indeed, both sets $\Sigma_1(M_n(\mathbb{C}))$ and $\Sigma_1(M_n(\mathbb{C}))/U_{M_n(\mathbb{C})}$ are convex metric spaces. The latter can be identified, using the density matrices, as the n -tuples of eigenvalues $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ arranged in decreasing order and normalized such that $\sum \lambda_k = 1$, with the ℓ_1 distance. If this quotient map were a weak fibration, then the fibre would have trivial homotopy groups of all orders. This is clearly not the case, since the fibre is the unitary group $U(n)$ of $M_n(\mathbb{C})$.

We focus on the other map \wp_2 . First note that the quotient $\mathcal{S}_p(X)/x \sim xu$ is homeomorphic to \mathcal{E}_e (recall the bundle ρ). The map can be written in the following fashion

$$\wp_2 : P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)) \rightarrow \mathcal{E}_e, \quad \wp_2(\varphi_x) = e_x.$$

Recall that $\text{supp}(\varphi_x) = e_x$, so that this map could also have been named supp . The next result shows that taking support, under the current circumstances, is a fibration:

Theorem 4.3. *The map $\wp_2 : P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)) \rightarrow \mathcal{E}_e$, given by $\wp_2(\varphi_x) = e_x$ is a fibration with fibre $\Sigma_p(\mathcal{B})$.*

Consider the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\wp_1} & P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)) \\ & \searrow \pi & \downarrow \wp_2 \\ & & \mathcal{E}_e, \end{array}$$

where π is given by $p(x, \varphi) = e_x$. Clearly π is a fibre bundle, because it is the composition of the projective bundle $x \mapsto e_x$ with the projection $(x, \varphi) \mapsto x$. The map \wp_1 was shown to be a fibration. It follows from 3.4 that \wp_2 is a fibration.

As in the previous section, let us write down the homotopy exact sequences of these fibrations:

$$\begin{aligned} \dots \pi_n(U_{p\mathcal{B}p}, p) &\rightarrow \pi_n(\mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B}), (x_0, \varphi)) \xrightarrow{(\wp_1)^*} \pi_n(P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)), \varphi_{x_0}) \\ &\rightarrow \pi_{n-1}(U_{p\mathcal{B}p}, p) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

and

$$\dots \pi_n(\Sigma_p(\mathcal{B}), \varphi) \rightarrow \pi_n(P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)), \varphi_{x_0}) \xrightarrow{(\wp_2)^*} \pi_n(\mathcal{E}_e, e) \rightarrow \pi_{n-1}(\Sigma_p(\mathcal{B}), \varphi) \dots$$

First note that $\Sigma_p(\mathcal{B})$ is convex, therefore $\mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B})$ has the same homotopy type as $\mathcal{S}_p(X)$, and

$$\pi_*(P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))) = \pi_*(\mathcal{E}_e).$$

Also note that if $p\mathcal{B}p$ is finite (i.e. p is finite in \mathcal{B}) then $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ is connected.

Let us state now two consequences, which again follow from direct inspection of the above sequences:

- (1) If $p\mathcal{B}p$ is properly infinite, then for $n \geq 0$

$$\pi_n(P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)), \varphi_x) = 0.$$

It would be interesting to know if in such circumstances $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ is contractible.

- (2) In general, one has

$$\pi_1(P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)), \varphi_x) = 0.$$

Finally let us remark that the natural inclusion $(\mathcal{O}_{\varphi}, d_{\varphi}) \rightarrow (P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)), d)$ is continuous (recall that taking support is continuous in \mathcal{O}_{φ}). However the identity mapping $(\mathcal{O}_{\varphi}, d_{\varphi}) \rightarrow (\mathcal{O}_{\varphi}, d)$ is not (in general) a homeomorphism ([6]).

5. PURIFICATION OF $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$

One may argue not without reason that the metric d induces on $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ a topology which is weird, or at least too strong. However, note that this topology is forced on us if we consider the sets $\mathcal{S}_p(X)$ and $\Sigma_p(\mathcal{B})$ with their norm topologies. If one is interested in the set $P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$ with, for example, its usual norm topology, as a subset of the dual space of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$, then one must weaken the topologies on $\mathcal{S}_p(X)$ or $\Sigma_p(\mathcal{B})$. We choose to do the first thing: we will consider (again) \mathcal{B} a von Neumann algebra and X a selfdual module, which is then a conjugate space [21]. We shall endow $\mathcal{S}_p(X) \subset X$ with the relative w^* -topology.

First we shall recall a faithful representation ρ of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ as operators in a Hilbert space \mathcal{H} , on which all the modular vector states φ_x will become genuine vector states, that is, on which one can find unit vectors $f \in \mathcal{H}$ which implement φ_x . This representation was introduced and studied in the seminal papers by M. Rieffel [25] and W. Paschke [21] on Hilbert C^* -modules over non commutative operator algebras.

Let us pick what is called a standard representation for \mathcal{B} on a Hilbert space H . A standard representation has many remarkable properties. Among them, there is a cone $\mathcal{P} \subset H$, called the standard positive cone, such that every normal positive functional of \mathcal{B} is implemented by a unique vector in this cone.

Consider the algebraic tensor product $X \otimes H$, and on this vector space consider the positive semidefinite form given by $[x \otimes \xi, y \otimes \eta] = (\xi, \langle x, y \rangle \eta)$. Denote by $Z = \{z \in X \otimes H : [z, z] = 0\}$, and let \mathcal{H} be the Hilbert space obtained as the completion of the pre-Hilbert space $X \otimes H/Z$ with the positive definite form induced by $[\cdot, \cdot]$ on the quotient. The representation $\rho : \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$ is given by $\rho(t)(x \otimes \xi + Z) = t(x) \otimes \xi + Z$.

Let us state without proof the basic properties which make this representation useful to our study. Let us denote

$$\mathcal{A}(X) = \{x \otimes \xi + Z : x \in \mathcal{S}_p(X), \xi \text{ implements a state in } \Sigma_p(\mathcal{B})\}.$$

Proposition 5.1. *Let $\mathcal{B} \subset B(H)$ be a finite algebra in standard form, and $\mathcal{P} \subset H$ the positive standard cone.*

- (1) Let $\xi \in \mathcal{P}$ be the unique unit vector implementing φ ($\varphi(a) = \omega_\xi(a) = (a\xi, \xi)$), then the state φ_x is implemented by the vector $x \otimes \xi + Z$, namely

$$\varphi_x(t) = \omega_{x \otimes \xi + Z}(\rho(t)) = [\rho(t)(x \otimes \xi), x \otimes \xi], \quad t \in \mathcal{L}_B(X).$$

- (2) Let $x, y \in \mathcal{S}_p(X)$ and $\xi, \eta \in \mathcal{P}$, where ξ and η implement states in \mathcal{B} with support p . Then the elementary tensors $x \otimes \xi$ and $y \otimes \eta$ induce the same element in $\mathcal{A}(X)$ (i.e. $x \otimes \xi - y \otimes \eta \in Z$) only if $x = y$ and $\xi = \eta$. In other words, there is a bijection

$$\mathcal{S}_p(X) \times \Sigma_p(\mathcal{B}) \leftrightarrow \mathcal{A}(X), \quad (x, \varphi) \rightarrow x \otimes \xi + Z.$$

The proofs follow straightforward from the definitions and the basic properties of the standard representation.

In order to simplify the exposition, we shall restrict to the case $p = 1$. This in fact will mean no restriction, because $\mathcal{S}_p(X)$ is the unit sphere of the $p\mathcal{B}p$ -module Xp . But with this simplification, unit vectors implement states with support $p = 1$ if and only if they are cyclic and separating for \mathcal{B} (the algebra $p\mathcal{B}p$ would have appeared anyway).

This proposition enables one to replace the map

$$\wp_1 : \mathcal{S}_1(X) \times \Sigma_1(\mathcal{B}) \rightarrow P\Sigma_e(\mathcal{L}_B(X)), \quad \wp_1(x, \varphi) = \varphi_x$$

with the map

$$\omega : \mathcal{A}(X) \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}(X)}, \quad \omega(x \otimes \xi + Z) = \omega_{x \otimes \xi + Z},$$

where $\omega_{x \otimes \xi + Z}$ is the vector state induced by $x \otimes \xi + Z \in \mathcal{H}$, restricted to the von Neumann algebra $\rho(\mathcal{L}_B(X))$, and $\Omega_{\mathcal{A}(X)}$ is the set of all ω_f for $f \in \mathcal{A}(X)$. In what follows we simplify the notation: $\rho(\mathcal{L}_B(X))$ will be identified with $\mathcal{L}_B(X)$, and the vectors $x \otimes \xi + Z$ will be denoted by $x \otimes \xi$. There is no ambiguity with this respect, because as shown above, there is only one such representative $x \otimes \xi$ in each coset $x \otimes \xi + Z$.

This standpoint enables one to study the set $P\Sigma_e(\mathcal{L}_B(X)) \sim \Omega_{\mathcal{A}(X)}$ with the norm topology of the dual of $\mathcal{L}_B(X)$, while still having the map $\wp_1 \sim \omega$ to be a fibration, however this latter under strong assumptions on the algebra \mathcal{B} . It is for us an interesting problem if the map ω can be a fibration for a broader family of algebras.

The set $\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{H}$ comes equipped with the Hilbert space norm topology. Much of the rest of this section is devoted to establish that:

- (1) When such election is done, the bijection $\mathcal{A}(X) \leftrightarrow \mathcal{S}_1(X) \times \Sigma_1(\mathcal{B})$ induces on this set the product topology of the w^* -topology of $\mathcal{S}_1(X) \subset X$ times the norm topology of $\Sigma_1(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}^*$.
- (2) The quotient topology induced in $\Omega_{\mathcal{A}(X)}$ by the Hilbert space norm in $\mathcal{A}(X)$ and the map ω is the norm topology of $\mathcal{L}_B(X)^*$.

Certain facts have to be established in the way. Recall that the other main feature of the standard representation of a von Neumann algebra, other than the positive cone \mathcal{P} , is the antiunitary operator $J : H \rightarrow H$ leaving the cone \mathcal{P} fixed. Let us first examine the fibre of ω (which is a copy of U_B) in this context.

Proposition 5.2. *Given a fixed element $x \otimes \xi \in \mathcal{A}(X)$, the fibre $\omega^{-1}(\omega_{x \otimes \xi})$ is the set $\{xu \otimes u^*Ju^*J\xi : u \in U_{\mathcal{B}}\}$ which is in one to one correspondence with $U_{\mathcal{B}}$. The relative topology induced on $U_{\mathcal{B}}$ by this bijection is the strong operator topology.*

The proof is straightforward.

Since $\mathcal{A}(X) \sim \mathcal{S}_1(X) \times \Sigma_1(\mathcal{B})$, the sphere $\mathcal{S}_1(X)$ and the set $\Sigma_1(\mathcal{B})$ of faithful states of \mathcal{B} lie inside $\mathcal{A}(X)$. Let us make explicit these inclusions, and their induced topologies. Pick a fixed element $x_0 \in \mathcal{S}_1(X)$ and $\xi_0 \in \mathcal{P}$ unit, cyclic and separating, inducing the state φ_0 . The following maps are one to one:

$$\mathcal{S}_1(X) \rightarrow \{x \otimes \xi_0 : x \in \mathcal{S}_1(X)\} \subset \mathcal{A}(X), \quad x \mapsto x \otimes \xi_0,$$

and

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\mathcal{B}) &\rightarrow \{x_0 \otimes \xi : \xi \in \mathcal{P} \text{ unit, cyclic and separating}\}, \\ &\varphi \mapsto x_0 \otimes \xi, \end{aligned}$$

where ξ is the vector in the cone associated to φ .

The first bijection endows $\mathcal{S}_1(X)$ with the relative topology induced from \mathcal{H} , which is given by the following: a net x_α converges to x if and only if $\varphi_0(\langle x_\alpha - x, x_\alpha - x \rangle) \rightarrow 0$, if and only if $|x_\alpha - x| \rightarrow 0$ in the strong operator topology of $\mathcal{B} \subset B(H)$. The sphere $\mathcal{S}_1(X) \subset X$ is closed in this topology.

The second bijection is a homeomorphism when $\Sigma_1(\mathcal{B})$ is regarded with the norm topology and $\{x_0 \otimes \xi : \xi \in \mathcal{P} \text{ unit, cyclic and separating}\} \subset \mathcal{H}$ is regarded with the Hilbert space norm of \mathcal{H} .

Remark 5.3. Since X is selfdual, it is a conjugate space [21]. The result above shows that the topology of $\mathcal{S}_1(X)$ induced by the Hilbert space norm of \mathcal{H} coincides with the w^* topology of $X \supset \mathcal{S}_1(X)$. Indeed, it was shown in [21] that a net $x_\alpha \rightarrow x$ in the w^* topology if and only if $\varphi(\langle x_\alpha, y \rangle) \rightarrow \varphi(\langle x, y \rangle)$ for all $y \in X$, $\varphi \in \mathcal{B}_*^+$. This clearly implies that $\varphi(\langle x_\alpha - x, x_\alpha - x \rangle) \rightarrow 0$, which is the topology considered above (here the fact $\langle x, x \rangle = \langle x_\alpha, x_\alpha \rangle = 1$ is crucial). Conversely

$$\varphi(\langle x_\alpha - x, y \rangle) \leq \varphi(\langle x_\alpha - x, x_\alpha - x \rangle)^{1/2} \varphi(\langle y, y \rangle)^{1/2}$$

yields the other implication.

We have examined the topologies induced on $\mathcal{S}_1(X)$ and $\Sigma_1(\mathcal{B})$ by the described inclusions on $\mathcal{A}(X)$. We have seen also that $\mathcal{A}(X) \sim \mathcal{S}_1(X) \times \Sigma_1(\mathcal{B})$. These facts alone however do not imply that $\mathcal{A}(X)$ is homeomorphic to $\mathcal{S}_1(X) \times \Sigma_1(\mathcal{B})$ in the product topology (of the w^* topology and the norm topology respectively). The next result states that this is the case.

Theorem 5.4. *The bijection*

$$\mathcal{S}_1(X) \times \Sigma_1(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}(X), \quad (x, \varphi) \mapsto x \otimes \xi$$

is a homeomorphism when $\mathcal{S}_1(X) \times \Sigma_1(\mathcal{B})$ is endowed with the product topology of the w^ topology of $\mathcal{S}_1(X)$ and the norm topology of $\Sigma_1(\mathcal{B})$.*

We omit the proof (see [6]).

Note that since $\Sigma_1(\mathcal{B})$ is convex, this implies that the set $\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{H}$ is homotopically equivalent to the sphere $\mathcal{S}_1(X)$ in the w^* topology.

Now we focus on the set of states $\Omega_{\mathcal{A}(X)}$ ($\sim P\Sigma_e(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X))$) and the map ω . $\Omega_{\mathcal{A}(X)} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)^*$ can be endowed with two topologies, the norm topology of the dual space $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)^*$ and the quotient norm given by ω . As said before, these two coincide, a fact which will be useful when trying to find fibration properties for this map. In general, a map of the form $f \mapsto \omega_f|_{\mathcal{A}}$ defined on a certain set of vectors f of a Hilbert space on which \mathcal{A} acts will define a (quotient) topology stronger than the topology given by the norm of the functionals. Recall Bures metric [12] for states, which is a metric giving a topology equivalent to the norm topology and, roughly speaking, is defined as the infimum of the distances between vectors inducing the states measured, taken over all possible representations on which the states measured are vector states.

Theorem 5.5. *The quotient and the norm topology coincide in $\Omega_{\mathcal{A}(X)}$.*

The proof is elementary but rather long (see [6]).

In order to see if this map is a fibration, we shall look for local cross sections. A powerful tool to state the existence of cross sections is Michael’s theory of continuous selections [20]. A remarkable example of the use of this theory in the context of operator algebras is the paper by S. Popa and M. Takesaki [24], which will be widely used in this paper. To invoke Michael’s theorem one must check first that the set function $\omega_{z \otimes \xi} \mapsto \omega^{-1}(\omega_{z \otimes \xi})$ which assigns to each point in the base space the fibre over it, is *lower semicontinuous* [20].

In our context lower semicontinuity means that for any $r > 0$, and $x \otimes \xi \in \mathcal{A}(X)$ the set $\{\omega_{y \otimes \eta} : \|y \otimes Ju^*\eta - x \otimes \xi\| < r \text{ for some } u \in U_{\mathcal{B}}\}$ is open in $\Omega_{\mathcal{A}(X)}$. In other words, for a state $\omega_{y \otimes \eta}$ close to $\omega_{x \otimes \xi}$ one should find an element $y \otimes Ju^*\eta$ in the fibre of $\omega_{y \otimes \eta}$ at distance less than r to the fibre of $\omega_{x \otimes \xi}$. The theorem above states that this is granted for our map ω . Indeed, two states in $\Omega_{\mathcal{A}(X)}$ are close in this quotient topology if and only if there are elements in their fibres which are close in $\mathcal{A}(X)$.

The next result uses the proof of the crucial lemma 3 of the paper by S. Popa and M. Takesaki [24]. They consider separable von Neumann factors admitting a one parameter group of automorphism which scales the trace. This means that there is a one parameter group $\{\theta_s : s \in \mathbb{R}\}$ of automorphisms of $\mathcal{B} \otimes B(K)$ (K a separable Hilbert space) such that $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$, $s \in \mathbb{R}$, with τ a faithful normal trace of $\mathcal{B} \otimes B(K)$. This condition on \mathcal{B} is strong, but there are remarkable examples fulfilling it, most notably the hyperfinite II_1 -factor \mathcal{R}_0 .

Theorem 5.6. *If \mathcal{B} is a separable factor of type II_1 such that the tensor product $\mathcal{B} \otimes B(K)$ (K a separable Hilbert space) admits a one parameter automorphism group, then the map*

$$\omega : \mathcal{A}(X) \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}(X)}, \quad \omega(x \otimes \xi) = \omega_{x \otimes \xi}$$

admits a (global) continuous cross section when $\Omega_{\mathcal{A}(X)}$ is endowed with the norm topology of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)^$.*

Proof. In this case, since \mathcal{B} is finite, $U_{\mathcal{B}}$ is complete in the strong (= strong*) operator topology [29]. Moreover, Popa and Takesaki proved in [24] that it admits

a geodesic structure in the sense of Michael [20]. It has been already remarked that the set function $\omega_{x \otimes \xi} \mapsto \{xu \otimes u^*Ju^*J\xi : u \in U_{\mathcal{B}}\}$ is lower semicontinuous in the norm topology. Therefore theorem 5.4 of [20] applies, and ω has a continuous cross section. \square

Corollary 5.7. *If \mathcal{B} is a II_1 factor satisfying the conditions of 5.6, then for all $n \geq 0, x \in \mathcal{S}_1(X), \varphi = \omega_{\xi} \in \Sigma_1(\mathcal{B}),$*

$$\pi_n(\Omega_{\mathcal{A}(X)}, \omega_{x \otimes \xi}) = \pi_n(\mathcal{S}_1(X), x),$$

where $\Omega_{\mathcal{A}(X)}$ is considered with the norm topology, and $\mathcal{S}_1(X)$ with the w^* topology.

Proof. In [24] it was proven that the unitary group $U_{\mathcal{B}}$ of such a factor is contractible in the ultra strong operator topology, and therefore also in the strong operator topology. The statement follows using the above result, recalling that the fibre of the fibration \wp_1 is $U_{\mathcal{B}}$ with this topology. \square

6. STATES OF THE HYPERFINITE II_1 FACTOR

We will apply the results of the previous section to obtain our main result, namely, that the set $P\Sigma_p(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}^*$ of states of \mathcal{R} , a factor satisfying the hypothesis of 5.6, having support equivalent to a given projection p , considered with the norm topology, has trivial homotopy groups of all orders.

To do so, we must first construct the appropriate module X . If \mathcal{R} is a von Neumann factor satisfying 5.6, and $p \in \mathcal{R}$ is a proper projection, put $X = \mathcal{R}p$ and $\mathcal{B} = p\mathcal{R}p$. \mathcal{B} is also factor which verifies the hypothesis of 5.6. Note that $\langle X, X \rangle = \text{span}\{px^*yp : x, y \in \mathcal{R}p\} = p\mathcal{R}p = \mathcal{B}$ in this case. Therefore by 2.2 of [22], $\{\theta_{x,y} : x, y \in X\}$ spans an ultraweakly dense two sided ideal of $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$. On the other hand, it is clear that $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$ as left multipliers, and also that $\theta_{x,y} \in \mathcal{R}$, for $x, y \in X = \mathcal{R}p$. Indeed, $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle = xpy^*z$, i.e. left multiplication by $xpy^* \in \mathcal{R}$. Therefore $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X) = \mathcal{R}$. In particular, if $x \in \mathcal{S}_1(X)$, $e_x = \theta_{x,x} = xpx^*$ which is equivalent to $px^*xp = \langle x, x \rangle = p$ in $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)$. The set $P\Sigma_e(\mathcal{B}) = \Omega_{\mathcal{A}(X)}$ equals then the set of states of \mathcal{R} with support (unitarily) equivalent to p . Note that this set is (arcwise) connected in the norm topology. Indeed, if \mathcal{B} is finite, $\mathcal{S}_1(X)$ is connected. Using the map \wp_1 of section 4, it follows that any two points in $P\Sigma_e(\mathcal{B})$ can be joined with a path (in $P\Sigma_e(\mathcal{B})$) continuous in the d -topology, and therefore also in the norm topology.

Applying 5.6 in this situation implies the following:

Lemma 6.1. *Let \mathcal{R} be a factor as in 5.6, and $p \in \mathcal{R}$ an arbitrary projection. The set of states of \mathcal{R} with support equivalent to p considered with the norm topology has the same homotopy groups as the set*

$$\mathcal{S}_p(\mathcal{R}) = \{v \in \mathcal{R} : v^*v = p\} \subset \mathcal{R}$$

of partial isometries of \mathcal{R} with initial space p , regarded with the (relative) ultraweak topology.

Proof. In this case $\mathcal{S}_1(X)$ clearly equals $\mathcal{S}_p(\mathcal{R})$ above, and the topology is the w^* (i.e.) ultraweak topology of \mathcal{R} . If $p = 0$ the statement is trivial. If $p = 1$ it follows

from the strong operator contractibility of $U_{\mathcal{R}}$ for such \mathcal{R} proved in [24]. The case of a proper projection follows from 5.6 and the above remark. \square

If $p = 0, 1$, then $\mathcal{S}_p(\mathcal{R})$ is contractible (if $p = 1$, $\mathcal{S}_p(\mathcal{R}) = U_{\mathcal{R}}$). A natural question would be if $\mathcal{S}_p(\mathcal{R})$ is contractible for proper $p \in \mathcal{R}$.

We need the following elementary fact:

Lemma 6.2. *Let $\mathcal{M} \subset B(H)$ be a finite von Neumann algebra, and let $a_n \in \mathcal{M}$ such that $\|a_n\| \leq 1$ and $a_n^*a_n$ tends to 1 in the strong operator topology. Then there exist unitaries u_n in \mathcal{M} such that $u_n - a_n$ converges strongly to zero.*

Proof. Consider the polar decomposition $a_n = u_n|a_n|$, where u_n can be chosen unitaries because \mathcal{M} is finite. Note that $|a_n| \rightarrow 1$ strongly. Indeed, since $\|a_n\| \leq 1$, $a_n^*a_n \leq (a_n^*a_n)^{1/2}$. Therefore, for any unit vector $\xi \in H$, $1 \geq (|a_n|\xi, \xi) \geq (a_n^*a_n\xi, \xi) \rightarrow 1$. Therefore

$$\|(a_n - u_n)\xi\|^2 = \|u_n(|a_n| - 1)\xi\|^2 \leq \| |a_n|\xi - \xi \|^2 = 1 + (a_n^*a_n\xi, \xi) - 2(|a_n|\xi, \xi),$$

which tends to zero. \square

In [3] it was proven that for a fixed $x_0 \in \mathcal{S}_1(X)$ the map $\pi_{x_0} : U_{\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(X)} \rightarrow \mathcal{S}_1(X)$ given by $\pi_{x_0}(U) = U(x_0)$ is onto when \mathcal{B} is finite. In that paper it was considered with the norm topologies. Here we shall regard it with the weak topologies and in the particular case at hand, namely $X = \mathcal{R}p$ and $\mathcal{B} = p\mathcal{R}p$ with \mathcal{R} as above. Then, choosing $x_0 = p \in \mathcal{S}_1(X) = \mathcal{S}_p(\mathcal{R})$, the mapping π_p is

$$\pi_p : U_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{S}_p(\mathcal{R}), \quad \pi_p(u) = up.$$

Theorem 6.3. *If \mathcal{R} is a factor satisfying the hypothesis of 5.6, then the map π_p above is a trivial principal bundle, when $U_{\mathcal{R}}$ is regarded with the strong operator topology and $\mathcal{S}_p(\mathcal{R})$ is regarded with the ultraweak topology. The fibre is (homeomorphic to) the unitary group of $q\mathcal{R}q$, where $q = 1 - p$, again with the strong operator topology.*

Proof. The key of the argument is again Lemma 3 of [24]. In that result it is shown that the homogeneous space $U_{\mathcal{R}}/U_{\mathcal{M}}$ admits a global continuous cross section, where $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ are factors satisfying the hypothesis of 5.6, and their unitary groups are endowed with the strong operator topology. In our situation, the fibre of π_p (over p) is the set $\{u \in U_{\mathcal{R}} : up = p\} = \{qwq + p : qwq \in U_{q\mathcal{R}q}\} = U_{q\mathcal{R}q} \times \{p\}$. The fibre is not the unitary group of a subfactor with the same unit, nevertheless the argument carries on anyway. Therefore in order to prove our result it suffices to show that in $\mathcal{S}_p(\mathcal{R})$ the ultraweak topology (equal to the weak operator topology) coincides with the quotient topology induced by the map π_p . In other words, that the bijection

$$U_{\mathcal{R}}/U_{q\mathcal{R}q} \times \{p\} \rightarrow \mathcal{S}_p(\mathcal{R}), \quad [u] \mapsto up$$

is a homeomorphism in the mentioned topologies. It is clearly continuous. It suffices to check continuity of the inverse at the point p . Suppose that u_{α} is a net of unitaries in $U_{\mathcal{R}}$ such that $u_{\alpha}p$ converges weakly to p . Then we claim that there are unitaries

$qw_\alpha q$ in $q\mathcal{R}q$ such that $qw_\alpha q + p - u_\alpha$ converges strongly to zero, which would end the proof. This amounts to saying that there exists unitaries $qw_\alpha q$ verifying that

$$\operatorname{Re}((qw_\alpha q + p)\xi, u_\alpha \xi) \rightarrow \|\xi\|^2$$

for all $\xi \in H$. Now since $u_\alpha p \rightarrow p$, one has $u_\alpha p \xi \rightarrow p \xi$, the former limit is equivalent to the following

$$\operatorname{Re}(qw_\alpha q \xi, u_\alpha q \xi) \rightarrow \|q \xi\|^2.$$

Again, $u_\alpha p \rightarrow p$ strongly (and the fact that \mathcal{R} is finite), imply that $qu_\alpha p$, $pu_\alpha q$, $qu_\alpha^* p$ and $pu_\alpha^* q$ all converge to zero strongly. Using that u_α are unitaries, these facts imply that $qu_\alpha^* qu_\alpha q \rightarrow q$ strongly. Using the lemma above, for the algebra $\mathcal{M} = q\mathcal{R}q$, and $a_\alpha = qu_\alpha q$, it follows that there exist unitaries $qw_\alpha q$ in $q\mathcal{R}q$ such that $qw_\alpha q - qu_\alpha q$ converges to zero strongly. Since $pu_\alpha q$ also tends to zero, it follows that

$$qw_\alpha q - u_\alpha q = qw_\alpha q - qu_\alpha q - pu_\alpha q \rightarrow 0$$

strongly. Clearly this last limit proves our claim. □

Our main result then follows easily

Theorem 6.4. *Let \mathcal{R} be a factor satisfying the hypothesis of 5.6, and let p be a projection in \mathcal{R} . Then both $\mathcal{S}_p(\mathcal{R})$ with the ultraweak topology, and the set $P\Sigma_p(\mathcal{B})$ of normal states of \mathcal{R} with support equivalent to p with the norm topology, have trivial homotopy groups of all orders.*

Proof. By the above theorem, $\mathcal{S}_p(\mathcal{R})$ has trivial homotopy groups, since it is the base space of a fibration with contractible space and contractible fibre. The same consequence holds for the set of normal states with support equivalent to p , using 6.1. □

We can restrict the fibration ω to obtain information about the unitary orbit \mathcal{U}_φ of section 2, but this time with the norm topology.

Remark 6.5. Let \mathcal{B} be a factor satisfying the condition of 5.6. Consider now the restriction of the fibration $\omega : \mathcal{A}(X) \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}(X)}$ to the subset $\{\omega_{x \otimes \xi_0} : x \in \mathcal{S}_1(X)\} \subset \Omega_{\mathcal{A}(X)}$, for a fixed unit, cyclic and separating vector ξ_0 i.e.

$$\{x \otimes \xi_0 : x \in \mathcal{S}_1(X)\} \simeq \mathcal{S}_1(X) \rightarrow \{\omega_{x \otimes \xi_0} : x \in \mathcal{S}_1(X)\}, \quad x \otimes \xi_0 \mapsto \omega_{x \otimes \xi_0},$$

which is again a fibration with the relative topologies. Note that the latter set is in one to one correspondence with \mathcal{O}_φ of section 3, where $\varphi = \omega_{\xi_0}$. Therefore one recovers the map $\sigma : \mathcal{S}_1(X) \rightarrow \mathcal{O}_\varphi$, $\sigma(x) = \varphi_x = \omega_{x \otimes \xi_0}$ of section 2, now considered with the w^* topology for $\mathcal{S}_1(X)$ and the norm topology for \mathcal{O}_φ . It follows that this map is a fibration, with fibre equal to $U_{\mathcal{R}^\varphi}$ with the strong operator topology.

One can consider this fibration σ in the particular case $X = \mathcal{B} = \mathcal{R}$, for \mathcal{R} as above, to obtain the following:

Corollary 6.6. *Let φ be a faithful normal state of a factor \mathcal{R} as in 5.6. Then the map*

$$\pi_\varphi : U_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}_\varphi = \{\varphi_u : u \in U_{\mathcal{R}}\}, \quad \pi_\varphi(u) = \varphi_u$$

is a fibration when the unitary group $U_{\mathcal{R}}$ is considered with the strong operator topology and the unitary orbit \mathcal{U}_{φ} of φ is considered with the norm topology. The fibre is the unitary group $U_{\mathcal{R}\varphi}$ of the centralizer of φ also with the strong operator topology. Moreover, for $n \geq 0$ one has

$$\pi_{n+1}(\mathcal{U}_{\varphi}, \varphi) = \pi_n(U_{\mathcal{R}\varphi}, 1),$$

where $U_{\mathcal{R}\varphi}$ is regarded with the strong operator topology.

Proof. It was noted in section 2 that when $X = \mathcal{B}$ is a finite von Neumann algebra, then $\mathcal{S}_1(X)$ is $U_{\mathcal{B}}$ and \mathcal{O}_{φ} is the unitary orbit of φ . $\mathcal{S}_1(X) = U_{\mathcal{B}}$ is endowed with the ultraweak topology, which coincides in $U_{\mathcal{B}}$ with the strong operator topology. The rest of the corollary follows using that in this case $\pi_{\varphi} = \sigma$ is (the restriction) of a fibration, and again [24] that for such factors \mathcal{R} the unitary group is contractible in the strong operator topology. \square

When $n = 0$, since $U_{\mathcal{R}\varphi}$ is connected, one obtains that \mathcal{U}_{φ} is simply connected in the norm topology as well.

7. CONTINUITY OF THE SUPPORT

Finally, let us address again the question of continuity of the support. As remarked before, taking support of a positive functional does not define a continuous map, no matter how weak the topologies involved, even in the finite dimensional setting. However one can check that if the algebra is finite dimensional, taking support is continuous if one restricts to the set of functionals which have a priori equivalent supports.

We shall obtain, as a consequence of theorem 5.5, that if \mathcal{B} is finite, then the map

$$P\Sigma_p(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}_p(\mathcal{B}), \quad \psi \mapsto \text{supp}(\psi)$$

is continuous when $P\Sigma_p(\mathcal{B})$ is considered with the norm topology and \mathcal{E}_p with the strong operator topology.

Put $\mathcal{A} = p\mathcal{B}p$ and $X = \mathcal{B}p$, where we make the assumption that \mathcal{B} is finite. A state $\psi \in P\Sigma_p(\mathcal{B})$ is of the form $\tilde{\psi}_v$ for $v \in \mathcal{S}_1(X) = \mathcal{S}_p(\mathcal{B})$ and $\tilde{\psi} \in \Sigma_p(\mathcal{A})$. That is $\psi(x) = \tilde{\psi}(v^*xv)$ for an appropriate partial isometry v of \mathcal{B} with initial space p and final space $\text{supp}(\psi)$. Suppose that $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in norm, and let $v_n, v \in \mathcal{S}_1(X)$ and $\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi} \in \Sigma_p(\mathcal{A})$ such that $\varphi_n = \tilde{\varphi}_{nv_n}$ and $\varphi = \tilde{\varphi}_v$. Theorem 5.5 implies the existence of unitaries $u_n \in U_{\mathcal{A}}$ such that $\tilde{\varphi}_{nu_n} \rightarrow \tilde{\varphi}$ in norm and $v_nu_n \rightarrow v$ in the ultraweak topology of \mathcal{B} , and therefore also in the strong operator topology. Note that the support of $\varphi_n = \tilde{\varphi}_{nv_n}$ is the final projection $v_nv_n^*$, and analogously $\text{supp}(\varphi) = vv^*$. Since \mathcal{B} is finite, $v_nu_n \rightarrow v$ implies $u_n^*v_n^* \rightarrow v^*$. The product is strong operator continuous when the operators involved have their norms uniformly bounded. Therefore

$$\text{supp}(\varphi_n) = v_nv_n^* = v_nu_n(v_nu_n)^* \rightarrow vv^* = \text{supp}(\varphi)$$

in the strong operator topology. We have proved the following:

Corollary 7.1. *Let \mathcal{B} be a finite von Neumann algebra. Then the map*

$$\text{supp} : P\Sigma_p(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}_p$$

is continuous when $P\Sigma_p(\mathcal{B})$ is considered with the norm topology and \mathcal{E}_p with the strong operator topology.

Fix a faithful and normal tracial state τ on \mathcal{B} . For $q \in \mathcal{E}$, denote by τ_q the state given by $\tau_q(x) = \tau(qx)/\tau(q)$. Note that if $q \in \mathcal{E}_p$ then $\tau(q) = \tau(p)$. Let $\mathcal{T}_p = \{\tau_q : q \in \mathcal{E}_p\}$.

Theorem 7.2. *The map $\mathcal{E}_p \rightarrow P\Sigma_p(\mathcal{B}), q \mapsto \tau_q$ is a continuous cross section for the support map, when \mathcal{E}_p is considered with the strong operator topology, and $P\Sigma_p(\mathcal{B})$ with the norm topology. The set \mathcal{E}_p is homeomorphic to the image \mathcal{T}_p of this section (with the norm topology). Moreover, \mathcal{T}_p is a strong deformation retract of $P\Sigma_p(\mathcal{B})$.*

Proof. It is clear that the support of τ_q is q , therefore this map is a cross section. Let us see that it is continuous. Let p_n converge strongly to q in \mathcal{E}_p . Suppose \mathcal{B} represented in a Hilbert space H in such a way that τ is given by a (tracial) vector ν . For instance, take $H = L^2(\mathcal{B}, \tau)$. Then

$$|\tau(p_n a) - \tau(q a)| = | \langle (p_n - q) a \nu, \nu \rangle | = | \langle a \nu, (p_n - q) \nu \rangle | \leq \|a\| \| (p_n - q) \nu \|.$$

Dividing by the common trace of all these projections, one obtains that $\tau_{p_n} \rightarrow \tau_q$ in norm. It remains to prove the converse, that if $\tau_{p_n} \rightarrow \tau_q$ in norm for $p_n, q \in \mathcal{E}_p$, then $p_n \rightarrow q$ strongly. Since $H = L^2(\mathcal{B}, \tau)$ is a standard form for \mathcal{B} , convergence in norm of the positive functionals τ_{p_n} means convergence in H of their densities $p_n \nu$. It follows that $p_n \nu \rightarrow q \nu$. Let a' be an element in the commutant of \mathcal{B} . Then $a' p_n \nu = p_n a' \nu \rightarrow q a' \nu$. Therefore p_n converges to q in a dense subset of H , namely $\{a' \nu : a' \in \mathcal{B}'\}$. Since p_n, q have norm 1, it follows that $p_n \rightarrow q$ strongly.

Consider the continuous map $F_t(\Phi)$ given by

$$F_t(\Phi) = t \tau_{\text{supp}(\Phi)} + (1 - t)\Phi,$$

for $\Phi \in P\Sigma_p(\mathcal{A})$ and $t \in [0, 1]$. Then $F_0 = Id, F_1$ is a retraction onto the image of the cross section of supp (that is, essentially $F_1 = \text{supp}$), and for all $t \in [0, 1], F_t(\tau_q) = \tau_q$. □

An immediate corollary of this fact is the following:

Corollary 7.3. *Let \mathcal{R} be a factor satisfying the hypothesis of 5.6, then the set \mathcal{E}_p of projections of \mathcal{R} which are equivalent to p , has trivial homotopy groups of all orders $n \geq 0$, in the strong operator topology.*

REFERENCES

[1] E. Andruchow, Continuity of the support of a state, (preprint).
 [2] E. Andruchow, G. Corach and D. Stojanoff, Geometry of the sphere of a Hilbert module, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **127** (1999), 295–315.
 [3] E. Andruchow, G. Corach and D. Stojanoff, Projective space of a C^* -module, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, (to appear).
 [4] E. Andruchow and A. Varela, Weight centralizer expectations with finite index, *Math. Scand.* **84** (1999), 243–260.

- [5] E. Andruchow and A. Varela, Homotopy of state orbits, *J. Oper. Th.*, (to appear).
- [6] E. Andruchow and A. Varela, Homotopy of vector states, (preprint).
- [7] T. Apostol, L. A. Fialkow, D. A. Herrero and D. V. Voiculescu, *Approximation of Hilbert space operators*, Pitman, Boston, 1984.
- [8] H. Araki, M. Smith and L. Smith, On the homotopical significance of the type of von Neumann algebra factors, *Commun. Math. Phys.* **22** (1971), 71–88.
- [9] M. Baillet, Y. Denizeau and J. F. Favet, Indice d'une esperance conditionelle, *Compos. Math.* **66** (1988), 199–236.
- [10] M. Breuer, A generalization of Kuiper's theorem to factors of type II_∞ , *J. Math. Mech.* **16** (1967), 917–925.
- [11] J. Brüning and W. Wilgerodt, Eine Verallmeinerung eines Satzes von N. Kuiper, *Math. Ann.* **220** (1976), 47–58.
- [12] D. Bures, An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite w^* -algebras, *Trans. Am. Math. Soc.* **135** (1969), 199–212.
- [13] G. Corach, H. Porta and L. Recht, The geometry of spaces of projections in C^* -algebras, *Adv. Math.* **101** (1993), 59–77.
- [14] M. Frank and E. Kirchberg, On conditional expectations of finite index, *J. Oper. Th.* **40** (1998), 87–112.
- [15] D. E. Handelman, K_0 of von Neumann algebras and AF C^* -algebras, *Quart. J. Math. Oxford (2)* **29** (1978), 429–441.
- [16] V. F. R. Jones, Index for subfactors, *Inv. Math.* **72** (1983), 1–25.
- [17] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol. II*, Academic Press, New York, 1986.
- [18] N. Kuiper, The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, *Topology* **3** (1965), 19–30.
- [19] E. C. Lance, *Hilbert C^* -modules. A toolkit for operator algebraists*, London Mathematical Society Lecture Note Series **210**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [20] E. Michael, Convex structures and continuous selections, *Canadian J. Math.* **11** (1959), 556–575.
- [21] W. L. Paschke, Inner product modules over B^* -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **182** (1973), 443–468.
- [22] W. L. Paschke, Inner product modules arising from compact automorphism groups of von Neumann algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **224** (1976), 87–102.
- [23] M. Pimsner and S. Popa, Entropy and index for subfactors, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **19** (1986), 57–106.
- [24] S. Popa, M. Takesaki, The topological structure of the unitary and automorphism groups of a factor, *Commun. Math. Phys.* **155** (1993), 93–101.
- [25] M. A. Rieffel, Induced representations of C^* -algebras, *Adv. Math.* **13** (1974), 176–257.
- [26] H. Schröder, On the homotopy type of the regular group of a W^* -algebra, *Math. Ann.* **267** (1984), 271–277.
- [27] H. Schröder, On the topology of the group of invertible elements, (preprint) math.KT/9810069.
- [28] R. M. Switzer, *Algebraic topology—homotopy and homology*, Springer, Berlin, 1970.
- [29] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [30] S. Zhang, Matricial structure and homotopy type of simple C^* -algebras with real rank zero, *J. Operator Theory* **26** (1991), 283–312.

INSTITUTO DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO, J. M. GUTIÉRREZ
 ENTRE J. VERDI Y J. L. SUÁREZ, 1613 LOS POLVORINES, ARGENTINA
E-mail address: eandrucho@ungs.edu.ar, avarela@ungs.edu.ar

ESPACIOS DE BESOV ASOCIADOS A LA TRANSFORMACIÓN DE HANKEL

JORGE J. BETANCOR, JOSÉ MANUEL MÉNDEZ Y LOURDES RODRÍGUEZ-MESA

A la memoria de Chicho, por su amistad y generosidad

ABSTRACT. Different characterizations of the Besov spaces, previously considered in [5] and associated with the Hankel transformation, are given. Moreover, it is established that the Hankel transform maps the Besov spaces into a class of Herz spaces.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las formas que toma la transformación de Hankel en la literatura es la siguiente ([14]):

$$h_\mu(\phi)(x) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) f(y) y^{2\mu+1} dy, \quad x \in (0, \infty),$$

donde J_μ representa la función de Bessel de primera especie y de orden μ . A lo largo de este trabajo consideraremos $\mu > -1/2$.

Si denotamos por $L_{p,\mu}$, para cada $1 \leq p \leq \infty$, el p -espacio de Lebesgue asociado a la medida $x^{2\mu+1} dx$ y por $\|\cdot\|_{p,\mu}$ su norma usual, la transformación h_μ de Hankel define una aplicación continua de $L_{p,\mu}$ en $L_{p',\mu}$, siempre que $1 \leq p \leq 2$ y que p' denote el exponente conjugado de p ([14, Theorem 3]).

Haimo [13] y Hirschman [16] investigaron la operación de convolución para la transformación de Hankel sobre los espacios $L_{p,\mu}$. Si f y g están en $L_{1,\mu}$ la convolución $f \#_\mu g$ de f y g se define por

$$(f \#_\mu g)(x) = \int_0^\infty f(y) (\mu\tau_x g)(y) \frac{y^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dy, \quad \text{c.t. } x \in (0, \infty),$$

donde la traslación $\mu\tau_x g$ de g por $x \in (0, \infty)$ viene dada como sigue:

$$(\mu\tau_x g)(y) = \int_0^\infty \mathcal{D}_\mu(x, y, z) g(z) \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dz, \quad \text{c.t. } y \in (0, \infty); \quad \mu\tau_0 g = g,$$

y el núcleo de Delsarte \mathcal{D}_μ podemos representarlo de la forma

$$\mathcal{D}_\mu(x, y, z) = [2^\mu \Gamma(\mu+1)]^2 \int_0^\infty (xt)^{-\mu} J_\mu(xt) (yt)^{-\mu} J_\mu(yt) (zt)^{-\mu} J_\mu(zt) t^{2\mu+1} dt,$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 46E30, 44A20.

Key words and phrases. Hankel transformation, Besov spaces, Herz spaces.

Partially supported by DGICYT Grant PB 97-1489 (Spain).

para cada $x, y, z \in (0, \infty)$.

La convolución $\#_\mu$ y la traslación ${}_\mu\tau_x$, $x \in (0, \infty)$, se relacionan con la transformación h_μ de Hankel como las siguientes relaciones muestran ([16]):

$$h_\mu(f \#_\mu g) = h_\mu(f)h_\mu(g), \quad f, g \in L_{1,\mu};$$

$$h_\mu({}_\mu\tau_x f) = 2^\mu \Gamma(\mu + 1)(x \cdot)^{-\mu} J_\mu(x \cdot) h_\mu(f), \quad f \in L_{1,\mu} \text{ y } x \in [0, \infty).$$

En lo que sigue, ya que no creemos que produzca confusión, escribiremos $\#, \mathcal{D}$ y τ_x , $x \in (0, \infty)$, en lugar de $\#_\mu, \mathcal{D}_\mu$ y ${}_\mu\tau_x$, $x \in (0, \infty)$, respectivamente.

La transformación de Hankel fue definida en espacios de distribuciones de crecimiento lento por primera vez por Zemanian [25]. Los resultados de este autor fueron adaptados a la transformación h_μ por Altenburg [1]. Si denotamos por S_e el subespacio del espacio S de Schwartz constituido por las funciones pares en S , la transformación h_μ es un automorfismo sobre S_e ([1, Satz 5]). Las propiedades de la convolución $\#$ sobre el espacio S_e y su dual S'_e pueden deducirse de las establecidas en [18].

En [6] y [7], Betancor y Rodríguez-Mesa estudiaron espacios de tipo Lipschitz donde la traslación usual es reemplazada por la traslación de Hankel. Estos autores en [5] introdujeron los espacios que denominaron espacios de Besov-Hankel involucrando de nuevo al operador traslación de Hankel. Inspirados en la definición de los espacios de Besov usuales a partir de diferencias, definen, para cada $\alpha > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$, el espacio $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ como aquél formado por las funciones $f \in L_{p,\mu}$ tales que

$$A_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\|\tau_t f - f\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty.$$

La expresión anterior debe ser entendida de la forma adecuada cuando $q = \infty$. En [5] se presentan caracterizaciones de los espacios de Besov-Hankel $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ en términos de medias de Bochner-Riesz ([5, Theorem 2.1]) y de integrales parciales de Hankel ([5, Theorem 2.2]). En [9, Theorem IV.3.1] Cruz describió $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ por medio de la convolución con una función introducida en [22] y que desempeña en el marco de la transformación de Hankel el papel del núcleo de Poisson en la teoría clásica.

En este trabajo establecemos nuevas caracterizaciones de los espacios de Besov-Hankel que pueden ser vistas como versiones, en el marco de la transformación de Hankel, de otras conocidas para los espacios de Besov clásicos ([24]). Entre otras cosas, probamos que los espacios $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ coinciden con ciertos espacios tipo Besov que habían sido introducidos por Altenburg ([2]). También es estudiado el comportamiento de la transformación de Hankel h_μ sobre los espacios $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$. Probamos que la transformación h_μ aplica continuamente cada espacio de Besov-Hankel en un espacio de Herz.

A lo largo de este trabajo por C representaremos una constante positiva que no es necesariamente la misma cada vez que aparezca.

2. LOS ESPACIOS DE BESOV-HANKEL

Presentamos en esta sección diferentes caracterizaciones para los espacios de Besov-Hankel $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$.

Introducimos a continuación las definiciones que necesitamos.

Supongamos que $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ y $f \in L_{p,\mu}$.

Si $\varphi \in L_{1,\mu}$ definimos

$$B_{p,q}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\|\varphi_t \# f\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q},$$

donde $\varphi_t(x) = t^{-2\mu-2}\varphi(x/t)$, $t, x \in (0, \infty)$.

Para cada $x \in (0, \infty)$, denotamos por $w_p^\mu(f, x)$ el módulo de continuidad (generalizado) asociado a la traslación τ , esto es,

$$w_p^\mu(f, x) = \sup_{0 \leq t \leq x} \|\tau_t f - f\|_{p,\mu}.$$

Por $S_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$ entendemos la cantidad que sigue:

$$S_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{w_p^\mu(f, x)}{x^\alpha} \right)^q \frac{dx}{x} \right\}^{1/q}.$$

Representamos por $C_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$ a

$$C_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_1^\infty (x^\alpha E_p^\mu(f, x))^q \frac{dx}{x} \right\}^{1/q},$$

donde $E_p^\mu(f, t) = \inf\{\|f - g\|_{p,\mu} : \text{sop}(h_\mu(g)) \subset [-t, t]\}$, $t > 0$.

En [2], Altenburg introdujo los espacios de Sobolev asociados a operadores de Bessel. Recientemente, estos espacios de Sobolev han sido analizados por Betancor [4] y Cruz y Rodríguez [10]. En particular, aquí consideramos el espacio $\mathfrak{D}_{p,\mu}$ constituido por aquellas funciones $f \in L_{p,\mu}$ tales que $\Delta_\mu f \in L_{p,\mu}$, donde Δ_μ denota al operador de Bessel $x^{-2\mu-1}Dx^{2\mu+1}D$ y $\Delta_\mu f$ se entiende en sentido distribucional. El espacio $\mathfrak{D}_{p,\mu}$ es dotado de la norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{D}_{p,\mu}}$ definida por

$$\|f\|_{\mathfrak{D}_{p,\mu}} = \|f\|_{p,\mu} + \|\Delta f\|_{p,\mu}, \quad f \in \mathfrak{D}_{p,\mu}.$$

Si K representa el K -funcional de Peetre asociado al par $(L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu})$ ([17]), definimos la cantidad $D_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$ por

$$D_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_0^\infty (x^{-\alpha/2}K(x, f, L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu}))^q \frac{dx}{x} \right\}^{1/q}.$$

Sea ahora $\psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L_{1,\mu}$. Denotamos por $E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f)$ a

$$E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f) = \left\{ \sum_{k=0}^\infty (2^{k\alpha} \|h_\mu(\psi_k) \# f\|_{p,\mu})^q \right\}^{1/q}.$$

Las expresiones anteriores adoptan la forma adecuada cuando $q = \infty$.

Establecemos ahora el resultado principal de nuestro trabajo.

Teorema 2.1. Sean $\alpha > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$ y $f \in L_{p,\mu}$. Supongamos que $\varphi \in S_e$ es tal que $\int_0^\infty \varphi(x)x^{2\mu+1} dx = 0$ y $\int_0^\infty [h_\mu(\varphi)(t)]^2 \frac{dt}{t} = 1$, y que $\psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas y pares en \mathbb{R} verificando las propiedades que siguen:

- (a) $\psi_0(x) = 0$, $|x| \geq 2$, y $\psi_k(x) = 0$, $|x| \leq 2^{k-1}$ ó $|x| \geq 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$,

- (b) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|h_\mu(\psi_k)\|_{1,\mu} < \infty,$
- (c) $\sum_{k=0}^\infty \psi_k = 1,$ en $\mathbb{R}.$

Consideramos las siguientes propiedades:

- (i) $f \in \mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu},$ esto es, $A_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) < \infty,$
- (ii) $B_{p,q}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) < \infty,$
- (iii) $S_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) < \infty,$
- (iv) $D_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) < \infty,$
- (v) $C_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) < \infty,$
- (vi) $E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f) < \infty.$

Entonces, las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv) son equivalentes si $1 \leq p \leq \infty$ y $1 < q < \infty.$ Cuando $1 \leq p \leq \infty$ y $q = 1$ ó $q = \infty$ (i), (ii), (iii) y (iv) son equivalentes si $0 < \alpha < 2.$

Por otra parte, si $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty,$ se tiene la equivalencia de (v) y (vi).

Además, en el caso de que $0 < \alpha < 1,$ $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty,$ las propiedades (iii) y (v) son equivalentes.

Demostración.

(i) \implies (ii). El procedimiento seguido en la demostración de esta propiedad está inspirado en las ideas recogidas en [3, Section 2] y [11].

Probaremos primero que, para cada $r > 0,$

$$(1) \quad \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \leq C \int_0^\infty \min \left\{ \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2}, \left(\frac{t}{x}\right)^r \right\} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x}, \quad t \in (0, \infty).$$

Sea $t > 0.$ Ya que $\int_0^\infty \varphi_t(x)x^{2\mu+1} dx = \int_0^\infty \varphi(x)x^{2\mu+1} dx = 0,$ podemos escribir

$$\begin{aligned} (\varphi_t \# f)(y) &= \int_0^\infty \varphi_t(x)(\tau_y f)(x) \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dx \\ &= \int_0^\infty \varphi_t(x) [(\tau_y f)(x) - f(y)] \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dx, \quad y \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Aplicando ahora la desigualdad integral de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} &\leq \int_0^\infty |\varphi_t(x)| \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dx \\ &= t^{-2\mu-2} \int_0^\infty \left| \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right| \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dx \\ (2) \quad &= \frac{1}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2} \left| \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right| \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Además, ya que $\varphi \in S_e,$ para cada $r > 0$ existe $C > 0$ de manera que

$$(3) \quad \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \leq C \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^r \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x}.$$

De (2) y (3) se deduce ya (1).

Para probar que $B_{p,q}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) \leq CA_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$, cuando $1 < q < \infty$, podemos recurrir al lema de Schur ([3, Lemma B]) y proceder como en [3].

Probamos ahora que $B_{p,1}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) \leq CA_{p,1}^{\alpha,\mu}(f)$.

Tomamos $r > \alpha$. De (1) se sigue que

$$\begin{aligned} B_{p,1}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) &= \int_0^\infty \frac{\|\varphi_t \# f\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \frac{dt}{t} \\ &\leq C \int_0^\infty \int_0^\infty \min \left\{ \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2}, \left(\frac{t}{x}\right)^r \right\} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x} t^{-1-\alpha} dt \\ &= C \int_0^\infty \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \int_0^\infty \min \left\{ \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2}, \left(\frac{t}{x}\right)^r \right\} t^{-1-\alpha} dt \frac{dx}{x} \\ &\leq C \int_0^\infty \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \left\{ \frac{1}{x^r} \int_0^x t^{r-\alpha-1} dt + x^{2\mu+2} \int_x^\infty t^{-\alpha-2\mu-3} dt \right\} \frac{dx}{x} \\ &\leq C \int_0^\infty \frac{\|\tau_x f - f\|_{p,\mu}}{x^\alpha} \frac{dx}{x} = CA_{p,1}^{\alpha,\mu}(f). \end{aligned}$$

Por otra parte, teniendo de nuevo en cuenta (1) podemos escribir

$$\begin{aligned} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} &\leq C \int_0^\infty \min \left\{ \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2}, \left(\frac{t}{x}\right)^r \right\} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x} \\ &\leq C \left\{ \int_0^t \left(\frac{x}{t}\right)^{2\mu+2} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x} + \int_t^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^r \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \frac{dx}{x} \right\} \\ &\leq CA_{p,\infty}^{\alpha,\mu}(f) \left\{ t^{-2\mu-2} \int_0^t x^{2\mu+1+\alpha} dx + t^r \int_t^\infty x^{\alpha-r-1} dx \right\} \\ &\leq Ct^\alpha A_{p,\infty}^{\alpha,\mu}(f), \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Se concluye entonces que

$$B_{p,\infty}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) \leq CA_{p,\infty}^{\alpha,\mu}(f).$$

(ii) \implies (i) Sean $0 < \varepsilon < \delta < \infty$. Definimos $f_{\varepsilon,\delta}$ por

$$f_{\varepsilon,\delta}(y) = \int_\varepsilon^\delta (\varphi_t \# \varphi_t \# f)(y) \frac{dt}{t}, \quad y \in (0, \infty).$$

Intercambiando el orden de integración obtenemos

$$(\tau_x f_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta})(y) = \int_\varepsilon^\delta ((\tau_x \varphi_t - \varphi_t) \# \varphi_t \# f)(y) \frac{dt}{t}, \quad x, y \in (0, \infty).$$

Por tanto, de la desigualdad de Minkowski y [16, Theorem 2.b], se sigue que

$$\begin{aligned} \|\tau_x f_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta}\|_{p,\mu} &\leq \int_\varepsilon^\delta \|(\tau_x \varphi_t - \varphi_t) \# \varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_\varepsilon^\delta \|\tau_x \varphi_t - \varphi_t\|_{1,\mu} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t}, \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Además, [17, (2.9)] implica que, representando por Δ_μ al operador de Bessel $x^{-2\mu-1}Dx^{2\mu+1}D$,

$$\|\tau_x\varphi - \varphi\|_{1,\mu} \leq Cx^2\|\Delta_\mu\varphi\|_{1,\mu}, \quad x \in (0, \infty),$$

y la contractividad del operador de traslación de Hankel τ_x , $x \in (0, \infty)$, en $L_{1,\mu}$ ([23, p. 16]) permite escribir

$$\|\tau_x\varphi - \varphi\|_{1,\mu} \leq 2\|\varphi\|_{1,\mu}, \quad x \in (0, \infty).$$

De las estimaciones anteriores se infiere

$$\begin{aligned} & \|\tau_x\varphi_t - \varphi_t\|_{1,\mu} \\ &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \mathcal{D}(x, y, z)\varphi\left(\frac{z}{t}\right)t^{-2\mu-2}\frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} dz - t^{-2\mu-2}\varphi\left(\frac{y}{t}\right) \right| y^{2\mu+1} dy \\ &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \mathcal{D}\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, z\right)\varphi(z)\frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} dz - \varphi\left(\frac{y}{t}\right) \right| t^{-2\mu-2}y^{2\mu+1} dy \\ &= \int_0^\infty |(\tau_{x/t}\varphi)_t(y) - \varphi_t(y)|y^{2\mu+1} dy \\ &= \|\tau_{x/t}\varphi - \varphi\|_{1,\mu} \leq C \min\left\{1, \frac{x^2}{t^2}\right\}, \quad x, t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$(4) \quad \|\tau_x f_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta}\|_{p,\mu} \leq C \int_\varepsilon^\delta \min\left\{1, \frac{x^2}{t^2}\right\} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t}, \quad x \in (0, \infty).$$

Por otra parte, en virtud de las condiciones impuestas a la función φ , se tiene

$$(5) \quad \int_0^\infty \left| \int_0^y (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1} dt \right| \frac{dy}{y} < \infty.$$

En efecto, observamos inicialmente que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1} dt &= \int_0^\infty (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1} dt \\ &= 2^\mu\Gamma(\mu+1)h_\mu(\varphi \# \varphi)(0) \\ &= 2^\mu\Gamma(\mu+1)[h_\mu(\varphi)(0)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, ya que $\varphi \# \varphi \in S_e$ ([18, Proposition 2.2 (i)], para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^m \int_0^y (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{1}{m}y^{m+2\mu+2}(\varphi \# \varphi)(y) = 0.$$

Además,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \int_0^y (\varphi \# \varphi)(t)t^{2\mu+1} dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} (\varphi \# \varphi)(y)y^{2\mu+1} = 0.$$

Se deduce ya que (5) se verifica.

Teniendo en cuenta ahora [19, Theorem 2.2], de (5) se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow \infty} f_{\varepsilon,\delta} = f,$$

en el sentido de la convergencia en $L_{p,\mu}$.

De (4) se sigue entonces, ya que el operador de traslación de Hankel τ_x , $x \in (0, \infty)$, aplica continuamente $L_{p,\mu}$ en sí mismo,

$$(6) \quad \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} \leq C \int_0^\infty \min\left\{1, \frac{x^2}{t^2}\right\} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t}, \quad x \in (0, \infty).$$

Recurriendo al lema de Schur ([3, Lemma B]), deducimos de (6) que

$$A_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) \leq CB_{p,q}^{\alpha,\mu,\varphi}(f),$$

siempre que $1 < q < \infty$.

Suponemos ahora que $0 < \alpha < 2$ y tratamos los casos $q = 1$ y $q = \infty$. Se infiere de (6) que

$$\begin{aligned} A_{p,1}^{\alpha,\mu}(f) &= \int_0^\infty \frac{\|\tau_x f - f\|_{p,\mu}}{x^\alpha} \frac{dx}{x} \\ &\leq C \int_0^\infty \int_0^\infty \min\left\{1, \frac{x^2}{t^2}\right\} \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t} x^{-1-\alpha} dx \\ &\leq C \int_0^\infty \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \left(\frac{1}{t^2} \int_0^t x^{1-\alpha} dx + \int_t^\infty x^{-1-\alpha} dx\right) \frac{dt}{t} \\ &\leq CB_{p,1}^{\alpha,\mu,\varphi}(f). \end{aligned}$$

Finalmente, de nuevo (6) conduce a

$$\begin{aligned} \|\tau_x f - f\|_{p,\mu} &\leq C \left(\int_0^x \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t} + \int_x^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^2 \|\varphi_t \# f\|_{p,\mu} \frac{dt}{t} \right) \\ &\leq CB_{p,\infty}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) \left(\int_0^x t^{\alpha-1} dt + \int_x^\infty t^{\alpha-3} dt \right) \\ &\leq Cx^\alpha B_{p,\infty}^{\alpha,\mu,\varphi}(f), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A_{p,\infty}^{\alpha,\mu}(f) \leq CB_{p,\infty}^{\alpha,\mu,\varphi}(f).$$

(ii) \iff (iii). Esta equivalencia puede probarse siguiendo el procedimiento utilizado en la demostración de (i) \iff (ii).

(iii) \iff (iv). De [17, Theorem 3.1] se puede deducir que, para una cierta constante $C > 0$, se tiene

$$(7) \quad \frac{1}{C} w_p^\mu(f, x) \leq K(x^2, f, L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu}) \leq C w_p^\mu(f, x), \quad x \in (0, \infty).$$

De aquí inferimos ya la equivalencia deseada.

(iii) \implies (v). Suponemos que $1 \leq p < \infty$. Cuando $p = \infty$ puede procederse de un modo similar. De la desigualdad (7) se sigue que, para cada $\lambda, x \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} w_p^\mu(f, \lambda x) &\leq CK((\lambda x)^2, f, L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu}) \\ &= C \inf_{f=f_0+f_1, f_0 \in L_{p,\mu}, f_1 \in \mathfrak{D}_{p,\mu}} (\|f_0\|_{p,\mu} + (\lambda x)^2 \|f_1\|_{\mathfrak{D}_{p,\mu}}) \\ &\leq C \max\{1, \lambda^2\} \inf_{f=f_0+f_1, f_0 \in L_{p,\mu}, f_1 \in \mathfrak{D}_{p,\mu}} (\|f_0\|_{p,\mu} + x^2 \|f_1\|_{\mathfrak{D}_{p,\mu}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \max\{1, \lambda^2\} K(x^2, f, L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu}) \\
 (8) \quad &\leq C \max\{1, \lambda^2\} w_p^\mu(f, x), \quad f \in L_{p,\mu}.
 \end{aligned}$$

Elegimos una función $\varphi \in S_e$ tal que $\text{sop}(h_\mu(\varphi)) \subset [-1, 1]$ y que

$$\int_0^\infty \varphi(x)x^{2\mu+1} dx = 2^\mu \Gamma(\mu + 1).$$

De la fórmula de intercambio para la transformación de Hankel h_μ ([16, Theorem 2.d]), se infiere

$$h_\mu(f \# \varphi_{1/t}) = h_\mu(f)h_\mu(\varphi_{1/t}), \quad t \in (0, \infty).$$

Luego, $\text{sop}(h_\mu(f \# \varphi_{1/t})) \subset [-t, t]$, para cada $t \in (0, \infty)$, y podemos concluir que

$$E_p^\mu(f, t) \leq \|f - \varphi_{1/t} \# f\|_{p,\mu}, \quad t \in (0, \infty).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la desigualdad de Minkowski podemos escribir

$$\begin{aligned}
 &\|f - \varphi_{1/t} \# f\|_{p,\mu} \\
 &= \left\{ \int_0^\infty \left| f(y) - \int_0^\infty \varphi_{1/t}(z)(\tau_y f)(z) \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} dz \right|^p y^{2\mu+1} dy \right\}^{1/p} \\
 &= \left\{ \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \varphi_{1/t}(z)[f(y) - (\tau_z f)(y)] \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} dz \right|^p y^{2\mu+1} dy \right\}^{1/p} \\
 &\leq \int_0^\infty |\varphi_{1/t}(z)| \|f - \tau_z f\|_{p,\mu} \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} dz \\
 &\leq \int_0^\infty |\varphi_{1/t}(z)| w_p^\mu(f, z) \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} dz, \quad t \in (0, \infty).
 \end{aligned}$$

Además, de (8) sigue

$$\begin{aligned}
 \|f - \varphi_{1/t} \# f\|_{p,\mu} &\leq C w_p^\mu\left(f, \frac{1}{t}\right) \int_0^\infty |\varphi_{1/t}(z)| [1 + (tz)^2] z^{2\mu+1} dz \\
 &\leq C w_p^\mu\left(f, \frac{1}{t}\right) \int_0^\infty |\varphi(z)| (1 + z^2) z^{2\mu+1} dz, \quad t \in (0, \infty).
 \end{aligned}$$

Combinando las estimaciones anteriores conseguimos

$$\begin{aligned}
 C_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) &\leq C \left\{ \int_1^\infty \left[t^\alpha w_p^\mu\left(f, \frac{1}{t}\right) \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \\
 &\leq C \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{w_p^\mu(f, t)}{t^\alpha} \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} = C S_{p,q}^{\alpha,\mu}(f).
 \end{aligned}$$

(v) \implies (iii). Asumimos que $1 \leq p < \infty$. Procediendo como en la demostración de [12, Theorem 2.1] podemos establecer, recurriendo a la desigualdad de Jensen, que si $h \in L_{p,\mu}$ y $h' \in L_{p,\mu}$,

$$\begin{aligned}
 &\|\tau_{y_1} h - \tau_{y_2} h\|_{p,\mu}^p \\
 &= \int_0^\infty \left| \int_0^\pi [h((x, y_1)_\theta) - h((x, y_2)_\theta)] d\nu(\theta) \right|^p x^{2\mu+1} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^\infty \int_0^\pi |h((x, y_1)_\theta) - h((x, y_2)_\theta)|^p d\nu(\theta) x^{2\mu+1} dx \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\pi \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} [h((x, y_2 + s(y_1 - y_2))_\theta)] ds \right|^p d\nu(\theta) x^{2\mu+1} dx \\
 &\leq |y_1 - y_2|^p \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^1 |h'((x, y_2 + s(y_1 - y_2))_\theta)|^p d\nu(\theta) x^{2\mu+1} dx ds \\
 &= |y_1 - y_2|^p \int_0^\infty \int_0^\pi \tau_{y_2+s(y_1-y_2)}(|h'|^p)(x) x^{2\mu+1} dx ds \\
 &\leq C|y_1 - y_2|^p \int_0^1 \|h'\|_{p,\mu} ds = C|y_1 - y_2|^p \int_0^\infty |h'(x)|^p x^{2\mu+1} dx, \quad y_1, y_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Aquí, para cada $x, y \in (0, \infty)$ y $\theta \in [0, \pi]$,

$$(x, y)_\theta = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta \quad y \quad d\nu(\theta) = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu + 1/2)} (\sin \theta)^{2\mu} d\theta.$$

Por tanto, si $h \in L_{p,\mu}$ y $h' \in L_{p,\mu}$ entonces

$$\|\tau_{y_1} h - \tau_{y_2} h\|_{p,\mu} \leq C|y_1 - y_2| \|h'\|_{p,\mu}.$$

El argumento desarrollado en [12, Corollary 2.2] nos permite concluir que

$$(9) \quad \|\tau_{y_1} g - \tau_{y_2} g\|_{r,\mu} \leq C\lambda|y_1 - y_2| \|g\|_{r,\mu}, \quad \lambda, y_1, y_2 \in (0, \infty),$$

cuando $g \in L_{r,\mu}$, $1 \leq r \leq 2$ y $\text{sop}(h_\mu(g)) \subset [-\lambda, \lambda]$.

La desigualdad (9), siguiendo las ideas presentadas en [21, págs. 89–91], conduce a

$$S_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) \leq CC_{p,q}^{\alpha,\mu}(f).$$

Cuando $p = \infty$ la propiedad puede probarse de un modo análogo.

(v) \iff (iv). Esta equivalencia puede ser establecida de una forma similar a como se prueba la propiedad correspondiente en el caso clásico en [20, Theorem 11]. \square

Nota 1. Un análisis detallado de la demostración (i) \iff (ii) en el Teorema 2.1 nos permite observar que para $\alpha > 0$ esta equivalencia sigue siendo cierta cuando φ es una función par en $C^2(\mathbb{R})$ que verifica las propiedades que siguen:

- (a) $\varphi \in L_{1,\mu}$ y $\Delta_\mu \varphi \in L_{1,\mu}$,
- (b) $x^\alpha \varphi \in L_{1,\mu}$,
- (c) $\int_0^\infty \varphi(x) x^{2\mu+1} dx = 0$ y $\int_0^\infty [h_\mu(\varphi)(y)]^2 dy/y \neq 0$.

Además, si $0 < \alpha < 1$ la equivalencia es cierta cuando φ verifica las propiedades (a) y (c) anteriores y la siguiente:

- (b') Existe $C > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq C/x^2$, $x \in (0, \infty)$.

Consideramos, en particular, la función

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu + 3/2)}{\Gamma(\mu + 1)} (1 + x^2)^{-\mu-3/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta función hace el papel del núcleo de Poisson en el marco de la transformación de Hankel.

Un sencillo cálculo conduce a que

$$t \frac{d}{dt} \psi_t(x) = -(2\mu + 2)t^{-2\mu-2} \psi\left(\frac{x}{t}\right) - xt^{-2\mu-3} \psi'\left(\frac{x}{t}\right) = \varphi_t(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ y } t \in (0, \infty),$$

donde $\varphi(x) = -x\psi'(x) - (2\mu + 2)\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

No es difícil ver que φ satisface las propiedades (a) y (b') anteriores. Además, de acuerdo con [22, Lemma 2], tenemos que

$$\int_0^\infty \psi_t(x) x^{2\mu+1} dx = 1, \quad t \in (0, \infty).$$

Por tanto,

$$\int_0^\infty \varphi_t(x) x^{2\mu+1} dx = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

También, de [22, Lemma 2] se sigue que

$$h_\mu(\varphi_t)(y) = t \frac{d}{dt} h_\mu(\psi_t)(y) = -\frac{1}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} t y e^{-ty}, \quad t, y \in (0, \infty).$$

Entonces

$$\int_0^\infty [h_\mu(\varphi)(y)]^2 \frac{dy}{y} = \frac{1}{2^{\mu+2} [\Gamma(\mu + 1)]^2}.$$

Obtenemos por tanto el siguiente resultado, que da una caracterización de los espacios de Besov-Hankel en términos del núcleo de Poisson diferente a la presentada por Cruz [9].

Proposición 2.1. Sean $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$ y $f \in L_{p,\mu}$. Entonces, $f \in \mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ si, y sólo si,

$$P_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\|t \frac{d}{dt}(f \# \psi_t)\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty,$$

donde $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\Gamma(\mu+1)} (1+x^2)^{-\mu-3/2}$, $x \in \mathbb{R}$ (con los cambios convenientes cuando $q = \infty$). Además, las cantidades $A_{p,q}^{\alpha,\mu}$ y $P_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}$ son equivalentes.

Nota 2. Consideramos la función $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Inmediatamente se ve que

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2} x^{2\mu+1} dx = 2^\mu \Gamma(\mu + 1).$$

Por tanto, poniendo como antes $\varphi = -x\psi' - (2\mu + 2)\psi$, obtenemos

$$\int_0^\infty t \frac{d}{dt} \psi_t(x) x^{2\mu+1} dx = \int_0^\infty \varphi_t(x) x^{2\mu+1} dx = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

Además, de [22, Lemma 1] se sigue que

$$\int_0^\infty [h_\mu(\varphi)(x)]^2 \frac{dy}{y} = \int_0^\infty e^{-y^2} y^3 dy = \frac{1}{2}.$$

Ya que $\varphi \in S_e$, las propiedades (a) y (b) dadas en la Nota 1 se verifican.

Podemos entonces obtener la siguiente caracterización de los espacios de Besov-Hankel, que puede interpretarse como una descripción vía (Hankel)-temperaturas de dicho espacio.

Proposición 2.2. *Sean $\alpha > 0$, $1 < p, q < \infty$ y $f \in L_{p,\mu}$. Entonces, $f \in \mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ si, y sólo si,*

$$P_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\|t \frac{d}{dt}(f \# \psi_t)\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty,$$

donde $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$ (con los correspondientes cambios cuando $q = \infty$). Además, las cantidades $H_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f)$ y $A_{p,q}^{\alpha,\mu}(f)$ son equivalentes.

Nota 3. Se deduce inmediatamente que si $\psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $\varphi = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de funciones continuas y pares en \mathbb{R} , verificando las propiedades (a), (b) y (c) del Teorema 2.1, entonces $E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}$ y $E_{p,q}^{\alpha,\mu,\varphi}$ definen cuasinormas equivalentes en $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$, cuando $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$. Por otra parte, podemos construir una sucesión $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que cumpla las condiciones (a), (b) y (c) del Teorema 2.1, procediendo como en [20, p. 48].

Nota 4. Como fue comentado en la introducción, Altenburg [2] definió un espacio de Besov en el marco de la transformación integral de Hankel. Consideró una sucesión $\psi = (\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funciones pares regulares en \mathbb{R} que verifican las propiedades (a) y (c) enunciadas en el Teorema 2.1. Además supone que la siguiente propiedad se satisface:

(b'') Para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} \psi_j(x) \right| \leq C_k 2^{-jk}, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se define para cada $j \in \mathbb{N}$ la función φ_j por

$$\varphi_j(x) = \psi_j(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para cada $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\alpha > 0$, el espacio $\mathfrak{B}_{p,q,\mu}^\alpha$ ([2]) está constituido por aquellas $f \in L_{p,\mu}$ tales que $E_{p,q}^{\alpha,\mu,\varphi}(f) < \infty$, donde φ denota la sucesión $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$. El espacio $\mathfrak{B}_{p,q,\mu}^\alpha$, definido de este modo, no depende de la sucesión $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, siempre que ésta satisfaga las propiedades (a), (c) del Teorema 2.1 y (b'').

En [2, (17)] fue establecido que $\mathfrak{B}_{p,q,\mu}^{\alpha/2}$ coincide con el espacio de interpolación $(L_{p,\mu}, \mathfrak{D}_{p,\mu})_{\alpha,q}$, para cada $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\alpha > 0$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 2.1, $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu} = \mathfrak{B}_{p,q,\mu}^{\alpha/2}$, siempre que $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$.

3. LA TRANSFORMACIÓN DE HANKEL Y LOS ESPACIOS DE BESOV-HANKEL

En esta sección estudiamos el comportamiento de la transformación h_μ de Hankel sobre los espacios $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ de Besov-Hankel.

Comenzamos recordando la definición de los espacios de Herz ([15]). Sean $1 \leq p, q < \infty$ y $\alpha > 0$. Tomamos $0 < \gamma < \delta < \infty$. Una función f medible Lebesgue sobre

$(0, \infty)$ está en el espacio de Herz $\mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ si

$$\|f\|_{\mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}} = \left\{ \int_0^\delta |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p} + \left\{ \int_1^\infty \left[t^{\alpha p} \int_{\gamma t}^{\delta t} |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right]^{q/p} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}$$

es finito.

El espacio $\mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ es cuasiBanach, cuando se considera sobre él la topología asociada a la cuasinorma $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}}$ y no depende de la elección de γ y δ . Además, si $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos tal que $1 < \rho \leq \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \leq \sigma < \infty$, $j \in \mathbb{N}$, para ciertos $\rho, \sigma > 1$ y definimos, para cada $f \in \mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}$,

$$k_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_0^{\lambda_1} |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left[\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} (x^\alpha |f(x)|)^p x^{2\mu+1} dx \right]^{q/p} \right\}^{1/q},$$

$k_{p,q}^{\alpha,\mu}$ es una cuasinorma equivalente a $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}}$.

Nuestro próximo resultado es una versión de [8, Theorem 1] para la transformación de Hankel.

Proposición 3.1. Sean $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces, la transformación de Hankel aplica continuamente $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ en $\mathfrak{R}_{p',q}^{\alpha,\mu}$ y $\mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ en $\mathcal{BH}_{p',q}^{\alpha,\mu}$.

Demostración. Elegimos una sucesión $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funciones verificando las propiedades (a), (b) y (c) especificadas en el Teorema 2.1. Sea $f \in \mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$. Podemos escribir

$$(10) \quad f = \sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j) \# f,$$

donde la convergencia de la serie es entendida en $L_{p,\mu}$. En efecto, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, siendo $n < m$, se tiene que

$$\left\| \sum_{j=n}^m h_\mu(\psi_j) \# f \right\|_{p,\mu} \leq \left\{ \sum_{j=n}^m 2^{-j\alpha q'} \right\}^{1/q'} \left\{ \sum_{j=n}^m (2^{j\alpha} \|h_\mu(\psi_j) \# f\|_{p,\mu})^q \right\}^{1/q}.$$

Por tanto, la serie $\sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j) \# f$ converge en $L_{p,\mu}$. Además, la aplicación

$$f \mapsto \sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j) \# f$$

es continua de $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ en $L_{p,\mu}$.

Sea ahora $g \in S_e$. La serie $\sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j) \# g$ converge, en particular, en $L_{2,\mu}$. Ya que h_μ es una isometría en $L_{2,\mu}$ ([14, Theorem 3]), de la fórmula de intercambio para la transformación de Hankel ([16, Theorem 2.d]), se sigue que la serie $\sum_{j=0}^\infty \psi_j h_\mu(g)$ converge en $L_{2,\mu}$. Teniendo en cuenta que $\sum_{j=0}^\infty \psi_j(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, concluimos ya que $\sum_{j=0}^\infty \psi_j h_\mu(g) = h_\mu(g)$, y, por tanto, que $g = \sum_{j=0}^\infty h_\mu(\psi_j) \# g$.

De acuerdo con [2, Satz 1, §2.1], S_e es un subespacio denso de $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ y $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ está continuamente contenido en $L_{p,\mu}$, y la validez de (10) queda establecida.

La transformación h_μ de Hankel es continua de $L_{p,\mu}$ en $L_{p',\mu}$ ([14, Theorem 3]). Luego, de (10) sigue

$$h_\mu(f) = \sum_{j=k-1}^{k+1} \psi_j h_\mu(f), \quad \text{c.t. } (2^{k-1}, 2^{k+1}) \text{ y } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

y, entonces,

$$\left\{ \int_{2^{k-1}}^{2^{k+1}} |h_\mu(f)(y)|^{p'} y^{2\mu+1} dy \right\}^{1/p'} \leq C \sum_{j=k-1}^{k+1} \|h_\mu(\psi_j) \# f\|_{p,\mu}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sumando concluimos que

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} (y^\alpha |h_\mu(f)(y)|)^{p'} y^{2\mu+1} dy \right)^{q/p'} \right\}^{1/q} \\ & \leq C \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{\alpha j p'} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} |h_\mu(f)(y)|^{p'} y^{2\mu+1} dy \right)^{q/p'} \right\}^{1/q} \\ & \leq C \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{\alpha j} \|h_\mu(\psi_j) \# f\|_{p,\mu} \right)^q \right\}^{1/q} \\ & \leq C E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f). \end{aligned}$$

Aquí, cuando $p = 1$ las expresiones son entendidas en la forma adecuada.

Análogamente podemos probar que

$$\left\{ \int_0^1 |h_\mu(f)(y)|^{p'} y^{2\mu+1} dy \right\}^{1/p'} \leq C E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f).$$

De este modo hemos mostrado que h_μ aplica continuamente $\mathcal{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ en $\mathfrak{R}_{p',q}^{\alpha,\mu}$. Sea ahora $f \in \mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}$. Observamos que $f \in L_{p,\mu}$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p} \\ & \leq \left\{ \int_0^2 |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p} \\ & \quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_{2^j}^{2^{j+1}} (x^\alpha |f(x)|)^p x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p} \frac{1}{2^{\alpha j}} \\ & \leq \left\{ \int_0^2 |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p} \\ & \quad + \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha j q'}} \right\}^{1/q'} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{2^j}^{2^{j+1}} (x^\alpha |f(x)|)^p x^{2\mu+1} dx \right]^{q/p} \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Cuando $q = 1$ las expresiones en la última línea son entendidas de la forma adecuada.

Por tanto, $h_\mu(f) \in L_{p',\mu}$ ([14, Theorem 3]).

Tomamos una sucesión $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funciones que satisfaga las propiedades (a), (b) y (c) del Teorema 2.1. En virtud de [14, Theorem 3] y ya que $L_{r,\mu} \subset S'_e$, para cada $1 \leq r \leq \infty$, podemos escribir que

$$\begin{aligned} \|h_\mu(\psi_j) \# h_\mu(f)\|_{p',\mu} &= \|h_\mu(\psi_j f)\|_{p',\mu} \leq \|\psi_j f\|_{p,\mu} \\ &\leq C \left\{ \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p}, \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (2^{\alpha j} \|h_\mu(\psi_j) \# h_\mu(f)\|_{p',\mu})^q \right\}^{1/q} \leq C \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} (x^\alpha |f(x)|)^p x^{2\mu+1} dx \right)^{q/p} \right\}^{1/q}.$$

Un argumento similar nos permite probar que

$$\begin{aligned} \|h_\mu(\psi_0) \# h_\mu(f)\|_{p',\mu} &\leq C \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} (x^\alpha |f(x)|)^p x^{2\mu+1} dx \right)^{q/p} \right\}^{1/q} \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Concluimos que h_μ aplica continuamente $\mathfrak{R}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ en $\mathcal{BH}_{p',q}^{\alpha,\mu}$. \square

Ya que h_μ es una isometría sobre $L_{2,\mu}$ ([14, Theorem 3]) de la proposición anterior se deduce inmediatamente la propiedad que sigue.

Corolario 3.1. *Sean $1 \leq q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$. La transformación h_μ de Hankel es un isomorfismo de $\mathcal{BH}_{2,q}^{\alpha,\mu}$ en $\mathfrak{R}_{2,q}^{\alpha,\mu}$.*

REFERENCIAS

- [1] G. Altenburg, Bessel-Transformationen in Räumen von Grundfunktionen über dem Intervall $\Omega = (0, \infty)$ und deren Dualräumen, *Math. Nachr.* **108** (1982), 197–218.
- [2] G. Altenburg, Eine Realisierung der Theorie der abstrakten Besov-Räume $B_q^s(A)$ ($s > 0, 1 \leq q \leq \infty$) und der Lebesgue-Räume $H_{p,\mu}^s$ auf der Grundlage Besselscher Differentialoperatoren, *Z. Anal. Anwendungen* **3** (1984), 43–63.
- [3] J. L. Ansorena y O. Blasco, Characterization of weighted Besov spaces, *Math. Nachr.* **171** (1995), 5–17.
- [4] J. J. Betancor, Sobolev spaces associated to Bessel operators and Hankel translations commuting operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **66** (2000), 227–243.
- [5] J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa, On the Besov-Hankel spaces, *J. Math. Soc. Japan* **50** (1998), 781–788.
- [6] J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa, Lipschitz-Hankel spaces and partial Hankel integrals, *Int. Transf. Spec. Funct.* **7** (1998), 1–12.
- [7] J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa, Lipschitz-Hankel spaces, partial Hankel integrals and Bochner-Riesz means, *Arch. Math. (Basel)* **71** (1998), 115–122.
- [8] H.-Q. Bui, Bernstein's theorem and translation invariant operators, *Hiroshima Math. J.* **11** (1981), 81–96.
- [9] I. Cruz, *Transformaciones integrales de tipo Laplace y Hankel*, Tesis Doctoral, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 2000.
- [10] I. Cruz y J. Rodríguez, On new characterizations of Lipschitz and Besov type spaces, aparecerá en *Archiv. Math. (Basel)*.

- [11] M. Frazier y B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **34** (1985), 777–799.
- [12] J. Gosselin y K. Stempak, A weak type estimate for Fourier-Bessel multipliers, *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** (1989), 655–662.
- [13] D. T. Haimo, Integral equations associated with Hankel convolutions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **116** (1965), 330–375.
- [14] C. S. Herz, On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **40** (1954), 996–999.
- [15] C. S. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein’s theorem on absolutely convergent Fourier transform, *J. Math. Mech.* **18** (1968/69), 283–323.
- [16] I. I. Hirschman, Jr., Variation diminishing Hankel transforms, *J. Analyse Math.* **8** (1960/61), 307–336.
- [17] J. Löfström y J. Peetre, Approximation theorems connected with generalized translations, *Math. Ann.* **181** (1969), 255–268.
- [18] I. Marrero y J. J. Betancor, Hankel convolution of generalized functions, *Rend. Mat. Appl. (7)* **15** (1995), 351–380.
- [19] M. A. Mourou y K. Trimèche, Calderón’s reproducing formula associated with the Bessel operator, *J. Math. Anal. Appl.* **219** (1998), 97–109.
- [20] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Duke Univ. Math. Ser. n.º 1, Duke University, Durham, N.C., 1976.
- [21] A. Pelczyński y M. Wojciechowski, Molecular decompositions and embedding theorems for vector-valued Sobolev spaces with gradient norm, *Studia Math.* **107** (1993), 61–100.
- [22] K. Stempak, *The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform*, Preprint n.º 45, Math. Inst., Univ. Wrocław, Polonia, 1985.
- [23] K. Stempak, La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986), 15–18.
- [24] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [25] A. H. Zemanian, *Generalized integral transformations*, Interscience Publishers, Nueva York, 1968.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, 38271 LA LAGUNA (TENERIFE), ISLAS CANARIAS, SPAIN

Correo electrónico: jbetanco@ull.es, jmendez@ull.es, lrguez@ull.es

MARGARITA MATHEMATICA es una obra colectiva que rinde homenaje a la memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández (Santa Cruz de La Palma 1945 - Zaragoza 2000), Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de La Rioja, fallecido en accidente cuando regresaba a Logroño, después de una de sus habituales estancias semanales con su grupo de investigación en Zaragoza. Chicho, que mantenía relaciones personales abundantes y variadas, rodeaba su trabajo de una atmósfera de amistad; por eso han colaborado en la obra 110 autores que han escrito, con la cabeza y con el corazón, un total de 52 artículos. El variado contenido refleja el entorno matemático que rodeó al profesor canario, sin limitarlo a su especialidad ni a las universidades que más frecuentó. La presentación del volumen, a cargo de los editores, contiene un apunte biográfico de Chicho y la descripción de su investigación en Matemáticas.

Cubierta: Se basa en un motivo proporcionado por Rafael Guadalupe, hermano de Chicho, que utilizó a su vez una fotografía, realizada por Juan José Domingo Salas durante una reunión de amigos, y un cuadro de Mario Baudet, que representa el paraje de La Palma donde el mar, origen de la vida, recogió las cenizas de Chicho.

